BACHELORARBEIT

Zwei Beispiele aus linearer Chaostheorie

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dr. Harald Woracek

durch

Paul Ellinger
Matrikelnummer: 11828303
Einsiedlergasse 34/12-13
1050 Wien

Wien, am 9. August 2022

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am Datum

Name des Autors

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, lineares Chaos zu definieren, Kriterien für Chaos zu beweisen und zwei Beispiele anhand des Shift-Operators und des Differentialoperators aus der linearen Chaostheorie zu untersuchen. Die Chaostheorie untersucht dynamische Systeme, das sind topologische Räume mit einer stetigen Abbildung $T : X \to X$, siehe Definition 2.1. Ein anschauliches Beispiel dynamischer Systeme stellt das Wetter dar. So kann man an jedem Ort das Wetter durch physikalische Größen, wie Temperatur, Luftdruck, Luftfeuchtigkeit et cetera beschreiben. Abhängig von diesen Größen verändert sich das Wetter, wobei schon kleine Änderung am Ausgangszustand zu großen Änderungen in der Zukunft führen. Wir werden sehen, dass so ein Verhalten typisch für chaotische Systeme ist. Wir sehen, dass sich physikalische Systeme als dynamische Systeme beschreiben lassen und wie wir später sehen werden, chaotisches Verhalten aufweisen.

Die lineare Chaostheorie ist ein Teilgebiet der Chaostheorie und beschäftigt sich mit topologischen Vektorräumen zusammen mit einem Operator. Zunächst werden wir in Kapitel 2 grundlegende Begriffe wiederholen. In Kapitel 3 werden wir eine Definition von linearen Chaos geben, siehe Definition 3.12, und damit verwandte Begriffe wie mischende und schwach mischende Operatoren einführen.

In Kapitel 4 werden nützliche Kriterien bewiesen, um chaotische Systeme zu finden. Dies führt uns zu einem sehr allgemeinem Kriterium, Satz 4.5, welches in Kapitel 5 angewandt wird. Dort werden wir sehen, dass gewisse Folgenräume zusammen mit dem Shift-Operator chaotische Systeme sind. Im anschließenden Kapitel 6 werden Differentialoperatoren auf dem Raum der ganzen Funktionen $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ definiert und wir beweisen, dass auch dieses ein lineares chaotisches System ist.

Die in dieser Arbeit präsentierten Beweise orientieren sich zum größten Teil an den ersten vier Kapitel aus dem Buch „Linear Chaos“ von Karl-G. Grosse-Erdmann und Alfred Peris Manguillot, siehe [GEPM11]. Bereits bekannte Ergebnisse aus Funktionalanalysis werden aus [MBW20] und [Bay03] zitiert. Außerdem werden grundlegende Ergebnisse aus der komplexen Analysis aus [Jä93] und [Wor15] zitiert.

2 Grundlegende Begriffe

Im Folgenden werden wir grundlegende Begriffe einführen und bereits bekannte Sätze wiederholen.

Definition 2.1. Sei X ein metrischer Raum und $T : X \to X$ eine stetige Funktion. Dann nennen wir das Tupel (X, T) ein *dynamisches System*. Des weiteren bezeichnen wir mit $O(x, T) := \{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$ den *Orbit von x unter T*. Ist es aus dem Kontext unmissverständlich welcher Operator gemeint ist, bezeichnen wir den Orbit von x unter T auch mit $O(x)$.

Chaostheorie beschäftigt sich mit dynamischen Systemen. Die lineare Chaostheorie stellt ein Teilgebiet dar. Diese untersucht dynamische Systeme, bei denen der metrische Raum X zusätzlich eine lineare Struktur trägt. Wir werden sehen, dass in Räumen mit einer Familie von Seminormen, welche eine Metrik induzieren, spannende chaotische Phänomene zu finden sind.

Definition 2.2. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $p : V \to [0, \infty)$ eine Funktion. Wir nennen p eine *Seminorm*, falls

- $p(x + y) \le p(x) + p(y) \qquad$ für alle $x, y \in V$
- $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \qquad$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}, x \in V$.

Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Seminormen auf V. Dann heißt die Familie $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *separierend* wenn

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in V : p_n(x) = 0\} = \{0\}.$$

Lemma 2.3. *Sei X ein Vektorraum und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine separierende Familie von Seminormen. Dann ist auf X eine Metrik durch*

$$d(x, y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x - y)) \tag{2.1}$$

definiert.

Beweis. Seien $x, y, z \in X$. Da

$$d(x, y) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n},$$

ist d wohldefiniert. Wegen

$$2^{-n} \min(1, p(x - y) \ge 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

gilt $d(x,y) \geq 0$. Außerdem ist $d(x,y) = 0$ genau dann wenn $p_n(x-y) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ separierend ist, folgt aus $p_n(x-y) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $x = y$. Aus $p_n(x-y) = p_n(y-x)$ folgt die Symmetrie von d. Es gilt

$$\min(1, p_n(x-z)) \leq \min(1, p_n(x-y)) + \min(1, p_n(y-z)),$$

woraus die Dreiecksungleichung für d folgt. □

Klarerweise ist die Metrik aus Lemma 2.3 translationsinvariant.

Definition 2.4. Ein *Fréchet-Raum* ist ein hausdorffscher, lokalkonvexer und vollständiger topologischer Vektorraum X, auf dem es außerdem eine Familie von separierenden Seminormen gibt, welche vermöge der Metrik (2.1), die Topologie auf X induzieren.

Proposition 2.5. *Sei X ein Fréchet-Raum und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörige Familie von Seminormen. Dann gilt:*

- *$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow x$ in X, genau dann wenn $\lim_{k\to\infty} p_n(x_k - x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*
- *U ist eine Umgebung von x, genau dann wenn es $\epsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass*

$$\{x \in X : p_n(x-y) < \epsilon\} \subseteq U.$$

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X bezüglich der Metrik (2.1). Sei $x := \lim_{k\in\mathbb{N}} x_k$. Dann gilt

$$\lim_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x_k - x)) = 0.$$

Und da in der obigen Summe alle Summanden nicht-negativ sind, ist diese nur dann null, wenn alle Summanden null sind. Somit erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\in\mathbb{N}} p_n(x_k - x) = 0.$$

Gilt andererseits, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $\lim_{k\in\mathbb{N}} p_n(x_k - x) = 0$, dann gilt auch

$$\lim_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x_k - x)) = 0.$$

Womit der erste Punkt bewiesen ist.

Für den zweiten Punkt können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Familie $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton ist, das heißt für alle $x \in X$ gilt $p_n(x) \leq p_{n+1}(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht monoton, so können wir zu $\max_{1\leq k\leq n}(p_k)$ übergehen. Nun sei $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ und $U \subseteq X$ mit

$$\{y \in X \,:\, p_n(x-y) < \epsilon\} \subseteq U.$$

Da X ein metrischer Raum ist, gibt es eine Basis der Topologie bestehend aus d-Kugeln. Sei $y \in V := \{y \in X \,:\, d(x,y) < \epsilon(1-2(1-(1/2))^{n+1})\}$. Angenommen $p_n(x-y) \geq \epsilon$. Aus der Monotonie der p_m folgt

$$d(x,y) \geq \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{2^m} \min(1, p_m(x-y)) + \epsilon \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^m} \geq \epsilon(1-2(1-\frac{1}{2})^{n+1}).$$

Wir erhalten eine Widerspruch zu $y \in V$. Es gilt also $p_n(x-y) < \epsilon$ und somit auch $V \subseteq \{y \in X \; p_n(x-y) < \epsilon\}$. Insbesondere ist $V \subseteq U$ und damit U eine Umgebung von x.

Nun sei U eine Umgebung von x. Da die d-Kugeln einen Basis der Topologie sind, gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass $V := \{y \in X \,:\, d(x,y) < \epsilon\} \subseteq U$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \frac{\epsilon}{2}$$

Nun betrachte $y \in \{z \in X \,:\, p_n(x-z) < \epsilon/2\}$. Dann gilt

$$d(x,y) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^m} \min(1, p_m(y-x)) \leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Wir erhalten $\{z \in X \,:\, p_n(x-z) < \epsilon\} \subseteq V \subseteq U$. □

Der Versuch eine Norm auf einen Fréchet-Raum als $\|x\| := d(x,0)$ zu definieren, schlägt im Allgemeinen fehl. Allerdings stößt man dabei auf einen neuen Begriff, welcher sich als nützlich herausstellen wird. Wir fassen die Eigenschaften dieser Funktion zusammen.

Lemma 2.6. *Sei X ein Fréchet-Raum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und d die in (2.1) definierte Funktion. Dann hat die Funktion*

$$\|.\| : \begin{cases} X \to [0,\infty) \\ x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x)) = d(x,0) \end{cases} \tag{2.2}$$

folgende Eigenschaften. Seien $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- $\|\lambda x\| \leq \|x\|$ *für* $|\lambda| \leq 1$.
- $\lim_{\lambda \to 0} \|\lambda x\| = 0$.
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Beweis. Der erste Punkt folgt aus der Translationsinvarianz und der Dreiecksungleichung von d.

Für den zweiten Punkt sei $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \leq 1$ und $x \in X$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $p_n(\lambda x) \leq |\lambda| p_n(x) \leq p_n(x)$. Somit gilt auch $\min(1, p_n(\lambda x)) \leq \min(1, p_n(x))$. Dies beweist Punkt 2.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass $\min(1, p_n(\lambda x)) = p_n(\lambda x)$ für $|\lambda| \leq \epsilon$. Da $p_n(\lambda x) \leq |\lambda| p_n(x)$, gilt $\lim_{\lambda \to 0} \min(1, p_n(\lambda x)) = 0$. Womit der dritte Punkt bewiesen ist.

Der vierte Punkt folgt schließlich aus der Tatsache, dass die Familie $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ separierend ist. □

Definition 2.7. Sei X ein Fréchet-Raum. Eine Funktion $\|.\| : X \to [0, \infty)$ mit den Eigenschaften aus Lemma 2.6 heißt *$\mathcal{F}$-Norm.*

Lemma 2.8. *Sei X ein Fréchet-Raum und U eine nicht leere, offene Teilmenge. Dann gibt es eine nicht leere, offene Menge $U_1 \subseteq X$ und eine Nullumgebung W, sodass $U_1 + W \subseteq U$. Ist U bereits eine Nullumgebung, so existiert eine Nullumgebung W_1 mit $W_1 + W_1 \subseteq W$.*

Beweis. Sei $\|.\|$ eine $\mathcal{F}$-Norm aus Gleichung (2.2). Sei $x_0 \in U$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass $U_\epsilon(x_0) := \{x \in X : \|x - x_0\| < \epsilon\}$ eine Teilmenge von U ist. Nun seien $U_1 := U_{\epsilon/2}(x_0)$ und $W := U_{\epsilon/2}(0)$. Für $u + w \in U_1 + W$ gilt $\|u + w - x_0\| \leq \|w\| + \|u - x_0\| = \epsilon$. Insgesamt gilt $U_1 + W \subseteq U_\epsilon(x_0) \subseteq U$. Für den Fall das U eine Nullumgebung ist, wähle $W_1 = W$. $\square$

Definition 2.9. Seinen X und Y Fréchet-Räume. Ein *Operator* von X nach Y ist eine stetige und lineare Funktion $T : X \to Y$. Die Menge aller Operatoren von X nach Y bezeichnen wir mit $L(X, Y)$. Für den Fall das $X = Y$ auch mit $L(X)$.

Lemma 2.10. *Seien X und Y Fréchet-Räume und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörigen Seminormen in X und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Seminormen in Y. Eine lineare Funktion $T : X \to Y$ ist genau dann ein Operator, wenn es für alle $m \in \mathbb{N}$, ein $n \in \mathbb{N}$ und $C > 0$ gibt, sodass für $x \in X$*

$$q_m(Tx) \leq Cp_n(x).$$

Beweis. Wenn T eine lineare Funktion, sodass obiges Kriterium erfüllt ist, dann gilt nach Proposition 2.5, dass für eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\in\mathbb{N}} p_n(x_k - x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch gilt, dass $\lim_{k\in\mathbb{N}} q_m(Tx_k - Tx) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Somit ist T stetig, also ein Operator.

Umgekehrt sei $T \in L(X, Y)$ und $m \in \mathbb{N}$. Nach Proposition 2.5 ist $V := \{y \in Y : q_m(y) < 1\}$ eine Nullumgebung. Aus der Stetigkeit von T folgt die Existenz einer Nullumgebung $U \subseteq X$ mit $T(U) \subseteq V$. Nun gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$, sodass $\{x \in X : p_n(x) < \epsilon\} \subseteq U$. $\square$

Satz 2.11 (Banach-Steinhaus)**.** *Seien X und Y Fréchet-Räume und $T_n \in L(X, Y)$ für $n \in \mathbb{N}$. Wenn die Menge $\{T_n x : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist für alle $x \in X$, dann ist die Familie $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L(x, Y)$ gleichgradig stetig, das heißt für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für $x \in X$ die Implikation*

$$\|x\| \leq \delta \implies \|T_n x\| \leq \epsilon \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt.

Für den Beweis verweisen wir auf [Bay03, Satz 16].

Lemma 2.12. *Seien X, Y Fréchet-Räume und $T \in L(X, Y)$. Wenn T bijektiv ist, dann ist $T^{-1} \in L(Y, X)$.*

Für den Beweis verweisen wir auf [Bay03, Korollar 2].

Satz 2.13 (vom abgeschlossenen Graphen)**.** *Seien X, Y Fréchet-Räume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. T ist genau dann stetig wenn der Graph von $T := \{(x, Tx) \in X \times Y : x \in X\}$ in der Produktopologie abgeschlossen ist.*

Für den Beweis verweisen wir auf [MBW20, Satz 4.4.2] und Lemma 2.12.
Seien X mit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Y mit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Fréchet-Räume. Auf dem Raum

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$$

wird durch die Funktion $(x, y) \mapsto p_n(x) + q_n(y)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Seminorm definiert. Sind X und Y separabel, so ist es auch $X \times Y$. Die Familie all dieser Seminormen induziert die Produkttopologie auf $X \times Y$.

Definition 2.14. Seien X und Y Fréchet-Räume. Ferner sei T ein Operator auf X und S ein Operator auf Y. Dann ist der Operator $T \times S$ auf $X \times Y$ definiert durch

$$(T \times S)(x, y) := (Tx, Sy). \tag{2.3}$$

In der linearen Chaostheorie lassen sich viele chaotische Phänomene auf Fréchet-Räumen mit Operatoren finden. Solche Phänomene werden wir im Verlauf dieser Arbeit genauer untersuchen. Genauer werden wir folgende Situation als Ausgangslage unserer Überlegungen wählen.

Definition 2.15. Sei X ein separabler Fréchet-Raum und T ein Operator auf X. Dann nennen wir das Tupel (X, T) *lineares dynamisches System*.

3 Lineare dynamische Systeme und Chaos

Ziel des folgenden Kapitel ist es, Chaos zu definieren. Dafür benötigt wir zunächst einige weitere Begriffe.

Seien (X, T) und (Y, S) zwei lineare dynamische Systeme. Wir wollen nun definieren, wann diese zwei Systeme „isomorph“ sind. Eine solche Funktion muss einerseits mit der topologischen Struktur als auch mit den Operatoren verträglichen sein. Wir halten fest:

Definition 3.1. Seien (X, T) und (Y, S) zwei lineare dynamische Systeme. Ferner sei $\phi : X \to Y$ eine stetige Funktion mit dichtem Bild. Wir nennen (X, T) *qausikonjugiert* zu (Y, S) wenn $\phi \circ T = S \circ \phi$. Ist außerdem ϕ ein Homöomorphismus, so nennen wir (X, T) und (Y, S) *konjugiert*.

Definition 3.2. Sei (X, T) ein dynamisches System. Ein Punkt $x \in X$ heißt *periodischer Punkt von T*, wenn es ein $n \geq 1$ gibt mit $T^n(x) = x$. Im Fall $n = 1$ heißt x auch *Fixpunkt*. Die Menge aller periodischen Punkte von T bezeichnen wir mit $\mathcal{P}(T)$.

3.1 Topologische Transitivität

Sei (X, T) ein dynamisches System und $Y \subseteq X$. Wir nennen Y *T-invariant* wenn $T(Y) \subseteq Y$. In diesem Fall ist $(Y, T|_Y)$ wieder ein dynamisches System, wobei Y mit der Spurtopologie versehen wird. Weiteres nennen wir ein dynamisches System *irreduzibel*, wenn man X nicht als Vereinigung von zwei disjunkten, T-invarianten Mengen $A, B \subseteq X$ mit nicht leerem Inneren schreiben können.

Proposition 3.3. *Sei (X, T) ein dynamisches System. Dann gelten folgende Implikationen:*

$$(i) \Longleftarrow (ii) \Longleftrightarrow (iii) \Longleftrightarrow (iv) \Longleftrightarrow (v),$$

wobei

(i) X ist nicht die Vereinigung von zwei disjunkten Mengen $A, B \subseteq X$ mit A und B sind T-invariant und haben nicht leeres Inneres;

(ii) X ist nicht die Vereinigung von zwei disjunkten Mengen $A, B \subseteq X$ mit A ist T-invariant und A und B haben nicht leeres Inneres;

(iii) für beliebige nicht leere, offene $U, V \subseteq X$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $T^n(U) \cap V$ nicht leer ist;

(iv) für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$, ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^n(U)$ dicht in X;

(v) für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$, ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^{-n}(U)$ dicht in X.

Beweis. (ii) $\Longrightarrow$ (i) ist offensichtlich.

Als nächstes zeigen wir (ii) $\Longrightarrow$ (iv). Seien $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^n(U)$ und $B := X \setminus A$. Aus der Definition von A folgt direkt, dass $T(A) \subseteq A$ und da $U \subseteq A$, hat A nicht leeres Inneres. Aus der Annahme folgt also, dass B leeres Inneres hat. Dies ist wiederum äquivalent zur Dichtheit von A.

Um (iii) $\Longrightarrow$ (ii) zu beweisen, nehmen wir an $X = A \cup B$ mit A, B disjunkt und $T(A) \subseteq A$. Mit A° bezeichnen wir das Innere von A. Es gilt $T^n(A^\circ) \cap B^\circ \subseteq A \cap B = \varnothing$. Das kann nach (iii) nur dann sein, wenn entweder A leeres Inneres oder B leeres Inneres hat.

Um (iii) $\Longrightarrow$ (iv) einzusehen, bemerke, dass (iii) genau die Dichtheit von $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^n(U)$ bedeutet. Für die Umkehrung sei V eine nicht leere offene Menge. Da $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^n(U)$ dicht ist, gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^n(U) \cap V$ ist nicht leer. Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $T^n(U) \cap V$ nicht leer ist. Damit haben wir also (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) gezeigt.

Der letzte Schritt ist (iii) $\Longleftrightarrow$ (v) zu zeigen. Dafür bemerke, dass $T^n(U) \cap V \neq \varnothing$ äquivalent zu $U \cap T^{-n}(V) \neq \varnothing$ ist. Damit haben wir alle behaupteten Äquivalenzen gezeigt. $\square$

Definition 3.4. Sei (X, T) ein dynamisches System. Wir nennen (X, T) *topologisch transitiv*, wenn für beliebige nicht leere, offene $U, V \subseteq X$, ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $T^n(U) \cap V$ nicht leer ist. Des Weiteren definieren wir die Menge $N_T(U, V) := \{n \in \mathbb{N} : T^n(U) \cap V \neq \emptyset\}$ für U und V Teilmengen von X.

Bemerkung 3.5. Ein dynamisches System (X, T) ist genau dann topologisch transitiv, wenn für alle nicht leeren, offenen Teilmengen U, V von X, $N_T(U, V)$ nicht leer ist. Außerdem gelten in topologisch transitiven Systemen alle Eigenschaften aus Proposition 3.3.

Lemma 3.6. *Sei (X, T) quasikonjugierte zu (Y, S). Ist (X, T) topologisch transitiv, so ist es auch (Y, S).*

Beweis. Sei $\phi : X \to Y$ stetig mit dichtem Bild und es gelte $\phi \circ T = S \circ \phi$. Seien U und V nicht leere offene Teilmengen von Y. Da ϕ stetig ist und dichtes Bild hat, sind $\phi^{-1}(U)$ und $\phi^{-1}(V)$ offene und nicht leere Teilmengen von X. Da (X, T) topologisch transitiv ist, existieren $x \in \phi^{-1}(U)$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $T^n(x) \in \phi^{-1}(V)$. Nun gilt $\phi(x) \in U$ und $S^n(\phi(x)) = \phi(T^n(x)) \in V$. $\square$

Lemma 3.7. *Sei (X, T) ein topologisch transitives dynamisches System und seien U und V nicht leere, offene Teilmengen von X. Dann ist $N_T(U, V)$ unendlich.*

Beweis. Wir werden zeigen, dass es für jedes $n_0 \in N_T(U, V)$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 < n_1$ und $n_1 \in N_T(U, V)$ gibt. Sei also $n_0 \in N_T(U, V)$. Dann betrachte die nicht leere und offene Menge $W := U \cap T^{-n_0}(V)$. Da T topologisch transitiv ist, gibt es ein $m \in N_T(W, W)$. Dann gilt $T^{n_0+m}(W) \cap V$ ist nicht leer. Insbesondere ist $T^{n_0+m}(U) \cap V$ nicht leer. Es gilt $n_0 < n_0 + m =: n_1 \in N_T(U, V)$. $\square$

Definition 3.8. Sei (X, T) ein lineares dynamisches System. Wenn es einen Punkt $x \in X$ gibt, sodass $O(x)$ dicht ist, dann heißt T *hyperzyklischer Operator*.

Lemma 3.9. *Sei (X, T) ein lineares dynamisches System. Wenn ein $x \in X$ einen dichten Orbit hat, dann hat auch $T^n x$ für alle $n \geq 1$ einen dichten Orbit.*

Beweis. Es gilt $O(x, T) \setminus \{x, Tx, ..., T^{n-1}\} \subseteq O(T^n(x), T)$. Außerdem sind in metrischen Räumen ohne isolierten Punkten, dichte Mengen abgeschlossen unter dem Ausschneiden endlicher Mengen. □

Satz 3.10 (Birkhoff). *Sei (X, T) ein lineares dynamisches System. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(i) (X, T) ist topologisch transitiv;

(ii) T ist hyperzyklisch.

Gilt einer der beiden Bedinungen und damit beide, dann ist die Menge der Punkte in X mit dichten Orbit eine G_δ-Menge.

Beweis. Wir beginnen mit *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*. Seien U und V nicht leere offene Teilmengen von X. Sei $x \in X$, sodass $O(x, T)$ dicht ist. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $T^n(x) \in U$. Aus Lemma 3.9 wissen wir, dass der Orbit von $T^n(x)$ dicht ist. Es existiert also ein $m \in \mathbb{N}$ mit $T^{n+m}(x) \in V$. Insgesamt gilt also $T^m(U) \cap V$ ist nicht leer. Damit ist die erste Implikation gezeigt.

Für die Umkehrung sei (X, T) topologisch transitiv. Sei $\mathcal{D}(T)$ die Menge der Punkte $x \in X$ mit dichten Orbit. Da X separabel ist, gibt es eine dichte abzählbare Menge $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$. Die Menge $\mathcal{B} := \{B_{m^{-1}}(y_i) : i, m \in \mathbb{N}\}$ bildet eine abzählbare Basis der Topologie auf X. Ein Punkt $x \in X$ ist damit genau dann in $\mathcal{D}(T)$, wenn für alle $U \in \mathcal{B}$, $O(x, T) \cap U$ nicht leer ist. Wir erhalten

$$\mathcal{D}(T) = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}(U).$$

Wegen Proposition 3.3 ist $\cup_{n \in \mathbb{N}} T^n(U)$ dicht für alle $U \in \mathcal{B}$. Nach dem Satz von Baire, vergleiche [MBW20, Satz 4.1.1], ist $\mathcal{D}(T)$ eine dichte G_δ-Menge, insbesondere nicht leer. □

Korollar 3.11. *Sei (X, T) quasikonjugierte zu (Y, S). Ist T hyperzyklisch, so ist es auch S.*

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus dem Satz von Birkhoff und Lemma 3.6. □

3.2 Chaos

Das Ziel dieses Kapitels ist es, Chaos zu definieren und einige grundlegende Eigenschaften chaotischer Systeme zu beweisen. Es sei hier erwähnt, dass die Definition von Chaos nicht einheitlich ist. Für unsere Definition werden zwei Aspekte wesentlich sein. Zum einen sollen chaotische Systeme hyperzyklisch sein, das wird uns die Irreduzibilität garantieren. Außerdem sollen chaotische Systeme eine ›große‹ Menge an periodischen Punkten haben.

Definition 3.12. Sei (X, T) ein lineares dynamisches System. (X, T) heißt *chaotisch*, wenn

(i) T hyperzyklisch ist;

(ii) $\mathcal{P}(T)$ dicht in X ist.

Lemma 3.13. *Sei (X, T) quasikonjugierte zu (Y, S). Wenn $\mathcal{P}(T)$ dicht in X, dann ist auch $\mathcal{P}(S)$ dicht in Y.*

Beweis. Sei $\phi : X \to Y$ wie aus der Definition der Quasikonjugiertheit von (X, T) und (Y, S). Außerdem sei $U \subseteq Y$ nicht leer und offen. Da $\phi^{-1}(U)$ eine nicht leere und offene Teilmenge von X ist, gibt es ein $x \in \phi^{-1}(U)$ und ein $n \geq 1$ mit $T^n(x) = x$. Insgesamt gilt also $S(\phi(x)) = \phi(T(x)) = \phi(x)$. Damit enthält jede nicht leere und offene Teilmenge von Y einen periodischen Punkt. □

Definition 3.14. Sei (X, T) ein lineares dynamisches System. (X, T) hat eine *sensitive Abhängigkeit von Anfangsbedingungen*, wenn

$$\exists\, \delta > 0\, \forall x \in X\, \forall \epsilon > 0\, \exists\, n \geq 0\, \exists\, y \in X : \, d(x, y) < \epsilon \wedge d(T^n(x), T^n(y)) > \delta.$$

Die sensitive Abhängigkeit der Anfangsbedingungen wird auch gerne als Schmetterlingseffekt bezeichnet und wir werden sehen, dass er typisch für chaotische Systeme ist. Wir fassen in der folgenden Proposition einige Eigenschaften chaotischer Systeme zusammen.

Proposition 3.15. *Seien (X, T) ein chaotisches lineares dynamisches System. Dann hat (X, T) folgende Eigenschaften*

(i) (X, T) ist irreduzibel;

(ii) wenn (Y, S) ein weiteres lineares dynamisches System ist und (X, T) quasikonjugiert zu (Y, S) ist, so ist (Y, S) chaotisch;

(iii) (X, T) hängt sensitiv von den Anfangsbedingungen ab.

Beweis. Nach dem Satz von Birkhoff ist jedes chaotische System auch topologisch transitiv. Aus Proposition 3.3 folgt die Irreduzibilität von topologisch transitiven Systemen und damit (i).

Aus Lemma 3.13 und Korollar 3.11 folgt (ii).

Um den letzten Punkt zu beweisen seien $\delta, \epsilon > 0$ und $x \in X$ beliebig. Nun betrachte die offenen Mengen $U := \{x \in X : d(0, x) < \epsilon\}$ und $V := \{x \in X : d(0, x) > \delta\}$. Da (X, T) topologisch transitiv ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $z \in U$, sodass $T^n(z) \in V$. Nun betrachte $y := x + z$. Dann gilt $d(x, y) = d(0, z) < \epsilon$, da die Metrik auf X translations invariant ist. Des Weiteren gilt $d(T^n(x), T^n(y)) = d(0, T^n(z)) > \delta$. Also hängt T sensitiv von den Anfangsbedingungen ab. □

3.3 Mischende Operatoren

Mischende und schwach-mischende Operatoren sind hyperzyklisch und werden uns später ein nützliches Kriterium für die Hyperzyklizität von Operatoren liefern.

Definition 3.16. Sei (X, T) ein dynamisches System. Wenn es für alle nicht leeren und offenen Teilmengen U, V von X ein $N \geq 0$ gibt, sodass

$$T^n(U) \cap V = \emptyset \qquad \text{für alle } n \geq N$$

gilt, dann ist T ein *mischender Operator*. Wenn $T \times T$ topologisch transitiv ist, so nennen wir T *schwach mischend*.

Bemerkung 3.17. Seien (X, T) ein dynamisches System. Dann ist T genau dann mischend, wenn für alle U, V offene Teilmengen von X, $N_T(U, V)$ kofinit ist. Die Menge $\mathcal{B} := \{U \times V : U, V \text{ offen in } X\}$ stellen eine Basis der Produkttopologie dar. T ist genau dann schwach-mischend wenn für alle $A, B \in \mathcal{B}$ die Menge $N_{T \times T}(A, B)$ nicht leer ist. Das wiederum ist dazu äquivalent, dass für alle U_1, U_2, V_1, V_2 nicht leere, offene Teilmengen von X, $N_T(U_1, V_1) \cap N_T(U_2, V_2)$ nicht leer ist.

Lemma 3.18. *Sei (X, T) quasikonjugierte (Y, S). Ist T mischend, so ist es auch S.*

Beweis. Sei $\phi : X \to Y$ stetig mit dichtem Bild und es gelte $\phi \circ T = S \circ \phi$. Seien U und V nicht leere offene Teilmengen von Y. Da ϕ stetig ist und dichtes Bild hat, sind $\phi^{-1}(U)$ und $\phi^{-1}(V)$ offene und nicht leere Teilmengen von X. Da T mischend ist existieren $x \in \phi^{-1}(U)$ und $N \geq 0$ mit $T^n(x) \in \phi^{-1}(V)$ für alle $n \geq N$. Nun gilt $\phi(x) \in U$ und $S^n(\phi(x)) = \phi(T^n(x)) \in V$. □

Lemma 3.19. *Sei (X, T) quasikonjugierte zu (Y, S). Ist T schwach mischend, so ist es auch S.*

Beweis. Sei $\phi : X \to Y$ stetig mit dichtem Bild und es gelte $\phi \circ T = S \circ \phi$. Nun definiere

$$\phi \times \phi : \begin{cases} X \times X \to Y \times Y \\ (x, y) \mapsto (\phi(x), \phi(y)). \end{cases}$$

Dann ist $\phi \times \phi$ eine stetige Abbildung, da $X \times X$ mit der Produkttopologie versehen wird. Da ϕ dichtes Bild hat, ist auch $\phi \times \phi(X \times X) = \phi(X) \times \phi(X)$ dicht. Außerdem gilt

$$(\phi \times \phi)((T \times T)(x, y)) = (\phi(T(x)), \phi(T(y))) = (S(\phi(x)), S(\phi(y))) = (S \times S)((\phi \times \phi)(x, y)).$$

Wir sehen $(X \times X, T \times T)$ ist quasikonjugiert zu $(Y \times Y, S \times S)$ vermöge $\phi \times \phi$. Aus Lemma 3.6 folgt die Aussage. □

Proposition 3.20. *Seien (X, T) und (Y, S) dynamische Systeme. Dann gilt*

(i) wenn es einen Punkt $z \in X \times Y$ mit dichten Orbit unter $T \times S$, dann gibt es auch $x \in X$ und $y \in Y$, sodass x einen dichten Orbit unter T hat und y dichten Orbit unter S;

(ii) *wenn* $(X \times Y, T \times S)$ *topologisch transitiv, dann auch* (X, T) *und* (Y, S)*;*

(iii) *wenn* $(X \times Y, T \times S)$ *chaotisch ist, so auch* (X, T) *und* (Y, S)*;*

(iv) *wenn* $T \times S$ *schwach mischend ist, dann sind auch* T *und* S *schwach mischend;*

(v) *wenn* (X, T) *und* (Y, S) *topologisch transitiv und einer von beiden mischend ist, dann ist* $(X \times Y, T \times S)$ *topologisch transitiv;*

(vi) $T \times S$ *ist genau dann mischend wenn* T *und* S *mischend sind.*

Beweis. Vermöge der Abbildung $(x, y) \mapsto x$ (beziehungsweise $(x, y) \mapsto y$) ist $(X \times Y, T \times S)$ quasikonjugiert zu (X, T) (beziehungsweise (Y, S)). Nun folgt (i) aus Lemma 3.13, (ii) aus Lemma 3.6, (iii) aus Proposition 3.15 und (iv) aus Lemma 3.19.

Um (v) zu beweisen, genügt es, eine Basis der Produkttopologie zu betrachten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei T mischend. Seien also U_1 und V_1 nicht leere, offene Teilmengen von X und U_2 und V_2 nicht leere, offene Teilmengen von Y. Außerdem gilt

$$(T \times S)^n(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times U_2) = (T^n(U_1) \cap V_1) \times (S^n(U_2) \cap V_2). \tag{3.1}$$

Da T mischend und $N_S(U_2, V_2)$ nach Lemma 3.7 unendlich ist, ist $N_{T\times S}(U_1 \times V_1, U_2 \times V_2)$ nicht leer. Das ist wiederum äquivalent zur topologischen Transitivität von $T \times S$.

(vi) folgt direkt aus Gleichung (3.1). □

Korollar 3.21. *Sei* (X, T) *ein lineares dynamisches System. Dann gilt*

(i) *wenn* T *mischend ist, so ist* T *auch schwach mischend;*

(ii) *wenn* T *schwach mischend ist, so ist* (X, T) *topologisch transitiv.*

Proposition 3.22. *Sei* (X, T) *ein lineares dynamisches System. Dann ist* T *genau dann mischend, wenn für alle nicht leeren, offene* $U \subseteq X$ *und für alle Nullumgebung* W $N_T(U, W)$ *und* $N(W, U)$ *kofinit sind.*

Beweis. Wenn T mischend ist, so ist für alle nicht leeren, offene $U, V \subseteq X$ $N_T(U, V)$ kofinit. Insbesondere wenn eine der beiden Mengen eine Nullumgebung ist. Womit die eine Implikation gezeigt ist.

Für die andere Implikation sei T ein Operator sodass für alle nicht leeren, offenen Mengen $A \subseteq X$ und für alle Nullumgebung B $N_T(A, B)$ und $N(B, A)$ kofinit sind. Seien U, V zwei nicht leere, offene Teilmengen von X. Nach Lemma 2.8 existieren offene U_1, V_1 und eine Nullumgebung W, sodass $U_1 + W \subseteq U$ und $V_1 + W \subseteq V$. Nach Voraussetzung gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass es für alle $n \geq N$, ein $u \in U_1$ und ein $w \in W$ gibt mit $T^n(u) \in W$ und $T^n(w) \in V_1$. Dann liegt $u + w \in U$ und $T^n(u + w) = T^n(u) + T^n(w) \in V$. Somit ist $N_T(U, V)$ kofinit. Nach Bemerkung 3.17 ist T mischend. □

Lemma 3.23. *Sei* (X, T) *ein dynamisches System und seien* U_1, V_1, U_2, V_2 *nicht leere, offene Teilmengen von* X*.*

(i) *Wenn es eine stetige Abbildung $S : X \to X$ gibt, welche mit T kommutiert und $S(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ und $S(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$, dann gibt es nicht leere, offene Mengen $U_1' \subseteq U_1$, $V_1' \subseteq V_1$, sodass*

$$N_T(U_1', V_1') \subseteq N_T(U_2, V_2) \qquad \text{und} \qquad N_T(V_1', U_1') \subseteq N_T(V_2, U_2).$$

Ist außerdem (X, T) topologisch transitiv, dann ist $N_T(U_1, V_1) \cap N_T(U_2, V_2)$ nicht leer.

(ii) *Wenn (X, T) topologisch transitiv ist, dann gilt*

$$N_T(U_1, U_2) \cap N_T(V_1, V_2) \neq \emptyset \implies N_T(U_1, V_1) \cap N_T(U_2, V_2) \neq \emptyset.$$

Beweis. Aus den Voraussetzungen in (i) folgt, dass es eine nicht leere, offene Teilmengen $U_1' \subseteq U_1$ und $V_1' \subseteq V_1$ gibt mit $S(U_1') \subseteq U_2$ und $S(V_1') \subseteq V_2$. Wenn es ein $n \in N_T(U_1', V_1')$ gibt, so gibt es auch ein $x \in U_1'$ mit $T^n(x) \in V_1'$. Dann gilt $T^n(S(x)) = S(T^n(x)) \in V_2$. Außerdem liegt $S(x)$ in U_2. Es folgt $N_T(U_1', V_1') \subseteq N_T(U_2, V_2)$. Analog zeigt man $N_T(V_1', U_1') \subseteq N_T(V_2, U_2)$. Ist (X, T) topologisch transitiv, so gilt

$$\emptyset \neq N_T(U_1', V_1') \subseteq N_T(U_1, V_1) \cap N_T(U_2, V_2).$$

Für den Beweis von (ii) seien (X, T) topologisch transitiv und $n \in N_T(U_1, U_2) \cap N_T(U_2, V_2)$. Dann folgt $N_T(U_1, V_1) \cap N_T(U_2, V_2) \neq \emptyset$ aus (i) mit $S := T^n$. □

Satz 3.24 (Furstenberg)**.** *Sei (X, T) ein dynamisches System und T schwach-mischend. Für $n \geq 2$ ist das n-fache Produkt $T \times \cdots \times T$ schwach-mischend.*

Beweis. Das n-fache Produkt ist genau dann schwach mischend, wenn das $2n$-fache Produkt topologisch transitiv ist. Wir werden mittels vollständiger Induktion beweisen, dass für alle $n \geq 2$ das n-fache Produkt topologisch transitiv ist. Da T als schwach-mischend vorausgesetzt wird, ist $T \times T$ topologisch transitiv. Womit der Induktionsanfang bewiesen ist.

Nun sei vorausgesetzt, dass das n-fache Produkt topologisch transitiv ist. Seien U_k, V_k nicht leere, offene Teilmengen von X für $k = 1, \ldots, n+1$. Wie in Bemerkung 3.17 argumentiert, genügt es zu zeigen, dass

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} N_T(U_k, V_k) \neq \emptyset. \tag{3.2}$$

Da T schwach-mischend ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $T^m(U_n) \cap U_{n+1} \neq \emptyset$ und $T^m(V_n) \cap V_{n+1} \neq \emptyset$. Nach Lemma 3.23 gibt es nicht leere, offene Mengen $U_n' \subseteq U_n$ und $V_n' \subseteq V_n$ mit $N_T(U_n', V_n') \subseteq N_T(U_n, V_n) \cap N_T(U_{n+1}, V_{n+1})$. Die Induktionsvoraussetzung impliziert nun

$$\bigcap_{k=1}^{n-1} N_T(U_k, V_k) \cap N_T(U_n', V_n') \neq \emptyset,$$

woraus wiederum Gleichung (3.2) folgt.

□

Lemma 3.25. *Sei (X,T) ein dynamisches System. Dann ist T genau dann mischend, wenn für alle nicht leeren, offene $U, U_1, V_1 \subseteq X$ gilt, dass $N_T(U,U_1) \cap N_T(U,V_1) \neq \emptyset$.*

Beweis. Nach Bemerkung 3.17 müssen wir nur zeigen, dass die Bedingungen hinreichend sind. Dafür seien U_1, U_2, V_1, V_2 nicht leere, offene Teilmengen von X. Nach Voraussetzung gibt es ein $n \in N_T(U_1,U_2) \cap N_T(U_1,V_2)$. Es sind also $U := U_1 \cap T^{-n}(U_2)$ und $T^{-n}(V_2)$ nicht leere, offene Mengen, letztere weil T insbesondere topologisch transitiv ist und topologische transitive Operatoren dichtes Bild haben. Außerdem gibt es nach Voraussetzung auch ein $m \in N_T(U,V_1) \cap N_T(U,T^{-n}(V_2))$. Anders gesagt gibt es also ein $x \in U$ mit $T^m(x) \in T^{-n}(V_2)$. Zusammengefasst gilt $T^m(T^n(x)) = T^n(T^m(x)) \in V_2$ und $T^n(x) \in U_2$ und $m \in N_T(U_1,V_1)$. Damit liegt $m \in N_T(U_1,V_1) \cap N_T(U_2,V_2)$. □

Proposition 3.26. *Sei (X,T) ein dynamisches System. Dann ist T genau dann mischend, wenn für alle nicht leeren, offenen U, V Teilmengen von X gilt, dass $N_T(U,U) \cap N_T(U,V) \neq \emptyset$.*

Beweis. Wir werden zeigen, dass die gewählten Voraussetzungen, die Voraussetzung aus Lemma 3.25 implizieren. Dafür seien U, V_1, V_2 nicht leere, offene Teilmengen von X. Nach Voraussetzung gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $U_1 := U \cap T^{-n}(V_1)$ eine nicht leere, offene Menge ist. Wiederum ist $T^{-n}(V_2)$ nicht leer, da topologisch transitive Operatoren dichtes Bild haben. Nach Voraussetzung gibt es ein $m \in N_T(U_1,U_1) \cap N_T(U_1,T^{-n}(V_2))$. Wir finden $x, y \in U_1$ mit $T^m(x) \in U_1$ und $T^n(T^m(y)) \in V_2$. Da $T^m(x) \in U_1$ gilt auch, dass $T^n(T^m(x)) \in V_1$. Also liegt $n + m \in N_T(U,V_1) \cap N_T(U,V_2)$. □

Die oben bewiesenen Kriterien gelten in allgemeinen dynamischen Systemen. Es wird sich als nützlich erweisen, schwach-mischende Operatoren im Kontext von Fréchet-Räumen zu betrachten. Dafür beweisen wir zunächst folgendes Lemma.

Lemma 3.27. *Sei (X,T) ein lineares dynamisches System und T ein hyperzyklischer Operator. Dann gibt es für alle nicht leeren, offenen $U, V \subseteq X$ und Nullumgebungen W, nicht leere und offene $U_1 \subseteq U$ und $W_1 \subseteq W$ mit*

$$N_T(U_1,W_1) \subseteq N_T(V,W) \qquad \text{und} \qquad N_T(W_1,U_1) \subseteq N_T(W,V).$$

Beweis. Da T stetig und nach dem Satz von Birkhoff topologisch transitiv ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und eine nicht leere und offene Teilmenge U_1 von U, sodass $T^m(U_1) \subseteq V$. Nach Lemma 2.8 gibt es eine nicht leere, offene Menge U_1' und eine Nullumgebung W_1' mit $U_1' + W_1' \subseteq U_1$. Es folgt $T^m(U_1' + W_1') \subseteq V$. Da T stetig ist, ist $T^{-m}(W_1')$ eine Nullumgebung. Der Schnitt zweier 0- Umgebungen ist wieder eine Nullumgebung. Nun betrachte $W \cap T^{-m}(W_1') =: W_1 \subseteq W$. Dann gilt sicher $T^m(W_1) \subseteq W$. Wenn es ein $n \in N_T(U_1,W_1)$ gibt, so gibt es ein $x \in U_1$ mit $T^n(x) \in W_1$. Es folgt $T^n(T^m(x)) = T^m(T^n(x)) \in W$. Da $T^m(x) \in V$, liegt $n \in N_T(V,W)$. Somit haben wir gezeigt, dass $N_T(U_1,W_1) \subseteq N_T(U,V)$. Die andere Behauptung folgt analog.

□

Proposition 3.28. *Sei (X,T) ein lineares dynamisches System und T hyperzyklisch. Wenn es für alle nicht leeren, offenen Teilmengen U von X und für alle Nullumgebungen W, eine stetige Abbildung $S: X \to X$ gibt, welche mit T kommutiert, sodass außerdem*

$$S(U) \cap W \neq \emptyset \qquad \textit{und} \qquad S(W) \cap U \neq \emptyset$$

gilt, dann ist T schwach-msichend.

Beweis. Nach dem Satz von Birkhoff ist (X,T) topologisch transitiv. Wir können Lemma 3.23 anwenden und erhalten, dass $N_T(U,W) \cap N_T(W,U)$ nicht leer ist. Seien A, B nicht leere, offene Teilmengen von X. Nach Lemma 2.8 gibt es nicht leere, offene A_1, B_1 und eine Nullumgebung W_1, sodass $A_1 + W_1 \subseteq A$ und $B_1 + W_1 \subseteq B$ gilt. Nach Lemma 3.27 gibt es eine Nullumgebung W_2 und nicht leere, offene Menge $A_2 \subseteq A_1$ mit $N_T(W_2, A_2) \subseteq N_T(W_1, B_1)$. Nun sei $n \in N_T(A_2, W_2) \cap N_T(W_2, A_2)$. Insbesondere gibt es also ein $a \in A_2$ und ein $w_2 \in W_2$, sodass $T^n(a) \in W_2$ und $T^n(w) \in A_2$ und ein $w_1 \in W_1$ mit $T^n(w_1) \in B_1$. Nun betrachten wir $x_1 = a + w_1 \in A$ und $x_2 = a + w_2 \in A$. Es gilt $T^n(x_1) \in B_1 + W_2 \subseteq B$ und $T^n(x_2) \in A_2 + W_2 \subseteq A$. Wir sehen also $n \in N_T(A,A) \cap N_T(A,B)$, insbesondere ist $N_T(A,A) \cap N_T(A,B)$ nicht leer. Wir können nun Proposition 3.26 anwenden und haben bewiesen, dass T schwach-mischend ist. □

Proposition 3.29. *Sei (X,T) ein lineares dynamisches System. T ist genau dann schwach-mischend, wenn für alle nicht leeren, offenen Mengen $U, V \subseteq X$ und für alle Nullumgebungen W*

$$N_T(U,W) \cap N_T(W,V) \neq \emptyset$$

Beweis. Nach Bemerkung 3.17 genügt es zu zeigen, dass das Kriterium hinreichend ist. Nach Lemma 2.8 gibt es nicht leere, offene $U_1, V_1 \subseteq X$ und eine Nullumgebung W_1, sodass $U_1 + W_1 \subseteq U$ und $V_1 + W_1 \subseteq V$. Nach Voraussetzung gilt, dann insbesondere $N_T(U_1, W_1) \cap N_T(W_1, V_1)$ ist nicht leer. Sei $n \in N_T(U_1, W_1) \cap N_T(W_1, V_1)$ und wähle $u \in U_1$ und $w \in W_1$, sodass $T^n(u) \in W_1$ und $T^n(w) \in V_1$. Dann liegt $x = u + w \in U$ und $T^n(x) \in W_1 + V_1 \subseteq V$. Damit haben wir bewiesen, dass T topologisch transitiv ist, nach dem Satz von Birkhoff auch hyperzyklisch. Für $n \in N_T(U,W)$ definiere $S := T^n$. Nach Proposition 3.28 ist T schwach-mischend. □

Satz 3.30. *Sei (X,T) ein lineares dynamisches System und T hyperzyklisch. Wenn es eine dichte Teilmenge X_0 von X gibt, sodass für alle $x \in X_0$ der Orbit von x eine beschränkte Menge ist, dann ist T schwach-mischend.*

Beweis. Sei U eine nicht leere, offene Teilmenge von X und W eine Nullumgebung. Außerdem sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Seminormen, welche die Topologie auf X definieren. Dann gibt es nach Proposition 2.5 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\epsilon > 0$, sodass alle $x \in X$ mit $p_{n_0}(x) < \epsilon$ in W sind. Da X_0 dicht ist, gibt es ein $x_0 \in X_0 \cap U$. Da insbesondere $x_0 \in X_0$, ist $M := \sup_{n\in\mathbb{N}}(T^n(x_0)) < \infty$. Somit erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\epsilon}{2M}T^n(x_0) \in W$. Da T topologisch transitiv ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{\epsilon}{2M}T^m(W) \cap U = T^m(\frac{\epsilon}{2M}W) \cap U \neq \emptyset$. Wir können nun Proposition 3.28 anwenden, mit $S := \frac{\epsilon}{2M}T^n$, und erhalten T ist schwach-mischend. □

Korollar 3.31. *Sei* (X, T) *ein chaotisches lineares dynamisches System. Dann ist* T *schwach-mischend.*

Beweis. Da $\mathcal{P}(T)$ dicht in X ist und für alle $x \in \mathcal{P}(T)$ $\mathcal{O}(x, T)$ beschränkt ist, ist T schwach-mischend nach Satz 3.30. $\square$

4 Hyperzyklizitäts Kriterium

Bevor wir Beispiele linearer chaotische Systeme betrachten, benötigen wir Kriterien für die Hyperzyklizität eines Operators. Im vorhergehenden Kapitel haben wir schon einige Kriterien gesehen, um zu zeigen, dass ein Operator schwach-mischend ist und damit insbesondere hyperzyklisch. Allerdings sind diese, aufgrund ihrer starken Voraussetzungen, ungeeignet, um die Hyperzyklizität eines Operators zu beweisen. Die meisten der schon bewiesenen Kriterien setzten voraus, dass unser Operator bereits hyperzyklisch ist. Wir werden also in diesem Kapitel neue Kriterien mit schwächeren Voraussetzungen beweisen. Zunächst beweisen wir ein nützliches Lemma.

Lemma 4.1. *Sei T ein lineare Abbildung auf einem komplexen Vektorraum X. Die Menge der periodischen Punkte von T kann dargestellt werden als*

$$\mathcal{P}(T) = \operatorname{span}\{x \in X \,|\, \exists \alpha \in \mathbb{Q} : Tx = e^{i\alpha\pi}x\}.$$

Beweis. Sei $x \in X$, sodass es ein $\alpha \in \mathbb{Q}$ gibt mit $Tx = e^{i\alpha\pi}x$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha = \frac{k}{n}$. Nun gilt $T^{2n}x = e^{2\pi ki}x = x$. Wir sehen $\operatorname{span}\{x \in X \,|\, \exists \alpha \in \mathbb{Q} : Tx = e^{i\alpha\pi}\} \subseteq \mathcal{P}(T)$.

Sei $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $T^n x = x$. Wir zerlgen

$$z^n - 1 = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)\dots(z - \lambda_n),$$

wobei $\lambda_k = e^{2i\pi k/n}$ für $k = 1, \dots, n$. Nun definiere

$$p_k(z) := \prod_{j \neq k}(z - \lambda_j) \text{ für } k = 1, \dots, n.$$

Da die $(\lambda_k)_{k \in \{1,\dots,n\}}$ paarweise verschieden sind, bildet die Menge $\{p_1, \dots, p_k\}$ eine Basis der Polynome mit Grad kleiner n. Es gibt also $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ mit

$$1 = \sum_{k=1}^{n} z_k p_k(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \tag{4.1}$$

Wenn wir nun T in (4.1) einsetzten, erhalten wir

$$I = \sum_{k=1}^{n} z_k p_k(T).$$

Nun gilt $x = Ix = \sum_{k=1}^{n} z_k p_k(T)x$. Für $y_k := p_k(T)x$ erhalten wir $x = \sum_{k=1}^{n} z_k y_k$. Außerdem gilt $(T - \lambda_k)y_k = (T - \lambda_k)p_k(T)x = \prod_{j \in \{1,\dots,n\}}(z - \lambda_j)x = (T^n - I)x = 0$, womit x zu $\operatorname{span}\{x \in X \,|\, \exists \alpha \in \mathbb{Q} : Tx = e^{i\alpha\pi}\}$ gehört. $\square$

Nun kommen wir zu unserem ersten Kriterium.

Satz 4.2 (Godefroy-Shapiro)**.** *Sei (X, T) ein lineares dynamisches System. Wenn die Unterräume*

$$X_0 := \operatorname{span}\{x \in X | \, \exists \lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < 1 \ \wedge \ Tx = \lambda x\}, \tag{4.2}$$

$$Y_0 := \operatorname{span}\{x \in X | \, \exists \lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| > 1 \ \wedge \ Tx = \lambda x\} \tag{4.3}$$

dicht in X sind, dann ist T mischend, insbesondere hyperzyklisch.

Ist außerdem X ein komplexer Vektorraum und

$$Z_0 =:= \operatorname{span}\{x \in X | \, \exists \alpha \in \mathbb{Q} : Tx = e^{i\alpha\pi} x\} \tag{4.4}$$

dicht in X, dann ist T chaotisch.

Beweis. Seien U, V nicht leere, offene Mengen. Nach Voraussetzung gibt es ein $x \in X_0 \cap U$ und ein $y \in Y_0 \cap U$. Wir können diese darstellen als

$$x = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k \qquad \text{und} \qquad y = \sum_{k=1}^{m} b_k y_k, \tag{4.5}$$

wobei $Tx_k = \lambda_k x_k$ und $Ty_k = \mu_k y_k$ mit $a_k, b_k, \lambda_k, \mu_k \in \mathbb{K}$ und $|\lambda_k| < 1$ und $|\mu_k| > 1$ für $k = 1, \ldots, m$. Nun gilt

$$T^n x = \sum_{k=1}^{m} a_k \lambda_k^n x_k \to 0 \qquad \text{und} \qquad u_n := \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{1}{\mu_k^n} y_k \to 0.$$

Außerdem ist $T^n u_n = y$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n > N$

$$x + u_n \in U \qquad \text{und} \qquad T^n(x + u_n) = T^n(x) + y \in V.$$

Wir haben gezeigt, T ist mischend.

Ist nun X ein komplexer Vektorraum und Z_0 dicht, so wissen wir aus Lemma 4.1, dass die periodischen Punkte von T dicht liegen. Somit ist T ein chaotischer Operator. □

Satz 4.3 (Kitai)**.** *Sei (X, T) ein lineares dynamisches System. Wenn es zwei dichte Mengen $X_0, Y_0 \subseteq X$ gibt und eine Abbildung $S : Y_0 \to Y_0$, sodass für alle $x \in X_0$ und $y \in Y_0$ gilt*

(i) $T^n x \to 0$ *für $n \to \infty$,*

(ii) $S^n y \to 0$ *für $n \to \infty$,*

(iii) $TSy = 0$ *für alle $n \in \mathbb{N}$,*

dann ist T mischend.

Der springende Punkt im Beweis von Satz 4.2 ist, dass $T^n x \to 0$ für alle $x \in X_0$ und wir eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finden mit $u_n \to 0$ und $T^n u_n = y$ für alle $y \in Y_0$. Der Beweis von Satz 4.3 verläuft analog wie der Beweis von Satz 4.2, wobei $u_n := S^n y$.

Im nächsten Schritt werden wir die Voraussetzungen von Satz 4.2 abschwächen. Wir kommen unserem Ziel, ein Kriterium mit möglichst schwacher Prämisse für die Hyperzyklizität eines Operators zu finden, näher.

Satz 4.4 (Gethner-Shapiro)**.** *Sei (X, T) ein lineares dynamisches System. Wenn es zwei dichte Mengen $X_0, Y_0 \subseteq X$, eine monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ und eine Abbildung $S : Y_0 \to Y_0$ gibt, sodass*

(i) $T^{n_k} x \to 0$ *für alle* $x \in X_0$,

(ii) $S^{n_k} y \to 0$ *für alle* $y \in Y_0$,

(iii) $TSy = y$ *für alle* $y \in Y_0$,

dann ist T schwach-mischend.

Beweis. Seien U_1, U_2, V_1, V_2 nicht leere, offene Teilmengen von X. Dann finden wir $x_1 \in U_1 \cap X_0, x_2 \in U_2 \cap X_0$, $y_1 \in V_1 \cap Y_0$ und $y_2 \in V_2 \cap Y_0$. Dann gilt nach (iii)

$$T^{n_k}(x_j + S^{n_k} y_j) = T^{n_k} x_j + y_j, \text{ für } j = 1, 2.$$

Außerdem folgt für k hinreichend groß aus (i), dass $T^{n_k} x_j + y_j \in V_j$ und aus (ii), dass $x_j + S^{n_k} y_j \in U_j$. Wir erhalten $n_k \in N_T(U_1, V_1) \cap N_T(U_2, V_2)$. Nach Bemerkung 3.17 ist T schwach-mischend. □

Satz 4.5. *Sei (X, T) ein lineares dynamisches System. Wenn es zwei dichte Teilmengen X_0, Y_0 von X und eine monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ und Abbildungen $S_{n_k} : Y_0 \to X$ für $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass*

(i) $T^{n_k} x \to 0$ *für alle* $x \in X_0$,

(ii) $S_{n_k} y \to 0$ *für alle* $y \in Y_0$,

(iii) $T^{n_k} S_{n_k} y \to y$ *für alle* $y \in Y_0$,

dann ist T schwach-mischend.

Für den Beweis bemerke man, dass im Beweis von Satz 4.4 die Existenz einer Rechtsinversen von T auf Y_0 nicht nötig ist. Es reicht eine Abbildung mit Eigenschaft (ii) und (iii) aus Satz 4.5. Eben dieser Satz wird in den weiteren Kapitelen dabei helfen, die Hyperzyklizität von Operatoren zu beweisen. Bevor wir uns mit Beispielen chaotischer Systemen beschäftigen, werden wir noch beweisen, dass chaotische Operatoren die Voraussetzungen aus Satz 4.5 immer erfüllen.

Definition 4.6. Sei (X, T) ein lineares dynamisches System und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Folge. Wir nennen T *hereditär hyperzyklisch bezüglich* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, wenn es für jede Teilfolge $(n_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ ein $x \in X$ gibt, sodass $\{T^{n_{k_m}} x : m \in \mathbb{N}\}$ dicht in X ist.

Satz 4.7 (Bès-Peris). *Sei (X,T) ein lineares dynamisches System. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(i) T erfüllt die Voraussetzungen aus Satz 4.5;

(ii) T ist schwach-mischend;

(iii) T ist hereditär hyperzyklisch.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ *(ii)*. Das ist die Aussage von Satz 4.5.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*. Sei $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basis der Topologie von X. Nun wähle eine Aufzählung $(U_j,V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von (O_n,O_m) mit $n,m\in\mathbb{N}$. Da T schwach-mischend ist, gibt es nach Satz 3.24 für alle $k\in\mathbb{N}$ eine natürliche Zahl n_k, sodass

$$T^{n_k}(U_j)\cap V_j\neq\emptyset \qquad \text{für alle } j=1,\dots,k.$$

Wir können $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend wählen. Nun sei $(n_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Seien U,V zwei nicht leere, offene Mengen. Nun gibt es ein $l\in\mathbb{N}$ mit $U_l\subseteq U$ und $V_l\subseteq V$. Für k hinreichend groß gilt $T^{n_k}(U_l)\cap V_l\neq\emptyset$ insbesondere also für m hinreichend groß

$$T^{n_{k_m}}(U)\cap V\supseteq T^{n_{k_m}}(U_l)\cap V_l\neq\emptyset.$$

Aus dem Satz von Birkhoff folgt nun, dass es ein $x\in X$ mit dichtem Orbit unter $(T^{n_{k_m}})_{m\in\mathbb{N}}$ gibt.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Sei T hereditär hyperzyklisch bezüglich der monoton wachsenden Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Nun gibt es ein $x\in X$, sodass $\{T^{n_k}x : k\in\mathbb{N}\}$ dicht ist. Wähle eine Teilfolge $(n_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$, sodass $T^{n_{k_l}}x\to 0$. Dann gibt es ein $y\in X$, sodass $\{T^{n_{k_l}}y : l\in\mathbb{N}\}$ dicht in X ist. Bezeichne mit U_k die offene Kugel um x mit Radius $1/k$. Dann gibt es eine Teilfolge $(n_{k_{l_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$T^{n_{k_{l_j}}}y\in kU_k \qquad \text{für } k\geq 1.$$

Sei $x_k:=y/k$ für $k\geq 1$. Es gilt $x_k\to 0$ und $T^{n_{k_{l_j}}}x_k\to x$. Nun gilt $X_0:=\mathcal{O}(x,T)=:Y_0$ sind dicht in X. Aus der Stetigkeit von T folgt

$$T^{n_{k_{l_j}}}(T^n x)=T^n(T^{n_{k_{l_j}}}x)\to T^n 0=0 \qquad \text{für } n\geq 0.$$

T erfüllt (i) aus Satz 4.5. Nun sei $y\in Y_0$, das heißt es gibt ein $n\in\mathbb{N}$, sodass $y=T^n x$. Nun definiere $S_{n_{k_{l_j}}}y=T^n x_{k_{l_j}}$. Nun erhalten wir

$$S_{n_{k_{l_j}}}y=T^n x_{k_{l_j}}\to 0 \text{ und } T^{n_{k_{l_j}}}(S_{n_{k_{l_j}}}y)=T^n(T^{n_{k_{l_j}}}x_{k_{l_j}})\to T^n x=y. \tag{4.6}$$

Somit erfüllt T auch (ii) und (iii) aus Satz 4.5. □

Proposition 4.8. *Sei (X,T) ein lineares dynamisches System. Wenn die Menge der Punkte $x\in X$, für die $\mathcal{O}(x,T)$ eine beschränkte Menge ist, dicht in X ist, dann erfüllt T die Voraussetzungen aus Satz 4.5. Insbesondere, wenn T chaotisch ist.*

Beweis. Nach Satz 3.30 ist T schwach-mischend und nach Satz 4.7 erfüllt T die Voraussetzungen aus Satz 4.5. Nach Korollar 3.31 gilt das insbesondere für chaotische Systeme. □

5 Der Shift-Operator

In diesem Kapitel werden wir, die bisher bewiesene Theorie, an einem Beispiel der linearen Chaostheorie anwenden und einige Eigenschaften dieses Systems herauszuarbeiten. Für dieses Kapitel einigen wir uns darauf, dass entweder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die Menge aller Folgen in $\mathbb{K}$ bezeichnen wir mit ω. Auf ω können wir nun eine Familie von Seminormen $p_n(x) := \max_{1<k<n}(|x_k|)$ für $n \in \mathbb{N}$ definieren. Klarerweise ist diese Familie separierend, somit wird ω zu einem Fréchet-Raum. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in ω. Nach Proposition 2.5 konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $x \in \omega$, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ $p_k(x_n - x) \to 0$ für $n \to \infty$. Das wiederum ist äquivalent zur komponentenweise Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x. Des weiteren definieren wir $e_n := (\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$. Der Shift-Operator B wird definiert als

$$B : \begin{cases} \omega \to \omega \\ (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots). \end{cases}$$

Definition 5.1. Sei $X \subseteq \omega$ ein Teilraum. Wenn die kanonische Einbettung $X \to \omega$ stetig ist, dann nennen wir X einen *Folgenraum*.

Sei X ein Folgenraum. Da die kanonische Einbettung nach ω stetig ist, konvergiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X genau dann gegen ein $x \in X$, wenn sie komponentenweise gegen x konvergiert.

Sei nun X ein B-invarianter Folgenraum. Außerdem sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X. Bezeichne mit $x \in X$ den Grenzwert. Nun gilt, dass die k-ten Komponenten $((x_k)_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die k-te Komponente von x in $\mathbb{K}$ konvergiert. Nun gilt $(Bx_n)_k \to (x_{k+1})$, die k-ten Komponenten von $(Bx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen die $(k+1)$-ten Komponenten von x. Außerdem gilt $x_{k+1} = (Bx)_k$. Also hat B einen abgeschlossenen Graphen und ist nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen stetig.

Proposition 5.2. *Sei X ein B-invarianter Folgenraum. Dann ist B ein Operator auf X, insbesondere ist (X, B) ein lineares dynamisches System.*

Lemma 5.3. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ und $x \in X$. Wenn es eine monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ gibt, sodass*

$$x_{n_k - j} \to x \qquad \textit{für alle } j \in \mathbb{N}$$

Dann gibt es auch eine monoton wachsende Folge $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, sodass

$$x_{m_k + j} \to x \qquad \textit{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N_k \in \mathbb{N}$ mit $d(x_{N_k - j}, x) < 1/k$, für $j = 1, \dots, k$. Definiere nun $m_k := N_k - k - 1$ für $k \in \mathbb{N}$. Nun gilt $d(x_{m_k + k + 1 - j}, x) < 1/k$ für $j = 1, \dots, k$. Somit gilt $d(x_{m_k + j}, x) < 1/k$. Falls $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht streng monoton wachsend ist, können wir zu einer streng monoton wachsenden Teilfolge übergehen. □

Satz 5.4. *Sei X ein Folgenraum und $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine topologische Basis von X. Außerdem sei $B : X \to X$ der Shift-Operator. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) B ist hyperzyklisch;

(ii) B ist schwach-mischend;

(iii) es gibt eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, sodass $e_{n_k} \to 0$ in X für $k \to \infty$.

Beweis. Sei $\|.\|$ eine $\mathcal{F}$-Norm, welche die Topologie auf X induziert.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Angenommen B ist hyperzyklisch. Sei $N \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$. Da $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine topologische Basis ist, konvergiert für alle $x \in X$ $(x_n e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0. Nun definiere für $n \in \mathbb{N}$

$$T_n : \begin{cases} X \to X \\ x \mapsto x_n e_n. \end{cases}$$

Wir können nun den Satz von Banach-Steinhaus auf die Operatoren $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ anwenden und erhalten ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in X$

$$\|x\| < \delta \implies \|T_n x\| = \|x_n e_n\| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \tag{5.1}$$

gilt. Da die Inklusionsabblidung von X nach ω stetig ist, ist die Topologie auf X feiner als die Topologie auf ω. Wir können also Proposition 2.5 anwenden und erhalten, dass die Menge $\{x \in X : p_1(x) = |x_1| < 1/2\}$ eine Nullumgebung ist. Da $\|.\|$ die Topologie von X induziert, gibt es ein $\eta > 0$, sodass für alle $x \in X$

$$\|x\| < \eta \implies |x_1| < \frac{1}{2} \tag{5.2}$$

gilt. Da B hyperzyklisch, also insbesondere topologisch transitiv ist, gibt es ein $m \in N_B(\{x \in X : \|x\| < \delta\}, \{x \in X : \|x - e_1\| < \eta\})$. Es gibt also ein $x \in X$ und ein ein $n > N$, sodass

$$\|x\| < \delta \qquad \text{und} \qquad \|B^{n-1}x - e_1\| < \eta.$$

Somit erhalten wir zusammen mit (5.1) und (5.2)

$$\|x_n e_n\| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad |x_n - 1| \leq \frac{1}{2}. \tag{5.3}$$

Aus $|x_n - 1| \leq 1/2$ folgt, dass $x_n \in [1/2, 3/2]$. Wir erhalten folgende Abschätzung

$$|x_n^{-1} - 1| = \left|\frac{1 - x_n}{x_n}\right| \leq 1. \tag{5.4}$$

Nun können wir die Eigenschaften der $\mathcal{F}$-Norm zusammen mit (5.3) und (5.4) anwenden und sehen

$$\|e_n\| = \|(x_n^{-1} - 1)x_n e_n + x_n e_n\| \leq \|(x_n^{-1} - 1)x_n e_n\| + \|x_n e_n\| \leq \epsilon.$$

Wir haben also gezeigt, dass es für jedes $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ ein $n > N$ gibt, sodass $\|e_n\| < \epsilon$. Nun wähle für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k > k$, sodass $\|e_{n_k}\| < 1/k$. Dann ist $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die gesuchte Folge.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Sei $X_0 = Y_0 = \mathbb{K}^{\langle\mathbb{N}\rangle}$, die Menge aller Folgen, welche fast immer 0 sind. Außerdem sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge sodass $e_{n_k} \to 0$ für $k \to \infty$. X_0 und Y_0 sind dicht, da $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine topologische Basis von X ist.

Nun definiere $S((x_1, x_2, \dots)) := (0, x_1, x_2, \dots)$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt nun $S_n := S^n$ ist eine Abbildung von Y_0 nach X. Wir wollen nun beweisen, dass B die Voraussetzungen aus Satz 4.5 erfüllt. Für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt sicherlich $\lim_{k\to\infty} B^k e_n = 0$. Wegen der Linearität gilt somit für alle $x \in X_0$ $\lim_{k\to\infty} B^k x = 0$. Nun sei $y \in Y_0$. Aus der Definition von S folgt, dass $T^n S_n y = y$. Da B stetig ist, gilt für alle $j \in \mathbb{N}$ $e_{n_k - j} = B^j e_{n_k} \to 0$ für $k \to \infty$. Aus Lemma 5.3 folgt die Existenz einer monoton wachsenden Folge $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $e_{m_k+j} \to 0$ für $k \to \infty$ und alle $j \in \mathbb{N}$. Nun gilt $e_{m_k+j} = S^j e_{m_k}$. Wegen der Linearität von S folgt nun für alle $y \in Y_0$, dass $S^j y \to 0$. Somit können wir Satz 4.5 anwenden und erhalten, dass B schwach-mischend ist.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Diese Implikation gilt für alle Operatoren per Definitionem. $\square$

Definition 5.5. Sei X ein Folgenraum. Wir nennen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *unbedingte Basis*, wenn $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine topologische Basis von X ist und für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ und alle $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x_n e_n$$

in X konvergiert.

Satz 5.6. *Sei X ein Folgenraum, sodass $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbedingte Basis ist. Außerdem sie B ein Operator auf X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(i) B ist chaotisch;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ konvergiert in X;

(iii) die konstanten Folgen sind in X;

(iv) B hat einen nicht trivialen periodischen Punkt.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (iv). Da B chaotisch ist, liegt $\mathcal{P}(B)$ dicht in X. Insbesondere enthält $\mathcal{P}(B)$ einen nicht trivalen Punkt.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Sei $0 \neq (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(B)$. Das heißt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine periodische Folge ist. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_k = x_{k+N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da $0 \neq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, gibt es ein $j < N$ mit $x_j \neq 0$. Nun gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $x_{j+kN} = x_j \neq 0$. Sei $\epsilon_{j+kN} = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und für alle anderen Indizes 0. Da $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbedingte Basis ist, konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x_n e_n$$

in X und somit auch

$$\frac{1}{x_j}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n e_n = \sum_{k=1}^{\infty} e_{j+kN}$$

und liegt damit in X. Dann liegt auch

$$\sum_{n=0}^{N-1} B^n \sum_{k=1}^{\infty} e_{j+kN} = (1,1,1,\dots)$$

in X. Somit sind alle konstanten Folgen in X.

(iii) $\Rightarrow$ (ii).Da $\sum_{n\in\mathbb{N}} e_n = (1,1,1,\dots)$ und die konstanten Folgen in X liegen, konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{N}} e_n$ in X.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Da $\sum_{n\in\mathbb{N}} e_n$ in X konvergiert, ist $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in X. Nach Satz 5.4 ist B hyperzyklisch. Da $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbedingte Basis ist und $(1,1,1,\dots) \in X$ ist, sind alle periodischen 0-1-Folgen in X. Das wiederum impliziert, dass alle periodischen Folgen in X sind und die Menge aller periodischen Folgen sind genau die periodischen Punkte von B. Es bleibt zu zeigen, dass eben diese Menge in X dicht ist.

Um das zu zeigen, sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ und $\epsilon > 0$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sodass der Abstand von dem Punkt $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} := \sum_{n=1}^{N} x_n e_n$ zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kleiner als $\epsilon/2$ ist. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert auf kanonische Weise die periodische Folge

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} x_n e_{n+kN} \in X.$$

Aus der Konvergenz der obigen Reihe folgt die Existenz eines $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\left\|\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} x_n e_{n+kN}\right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Da $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbedingte Basis ist, gilt auch

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} x_n e_{n+kmN}\right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Schließlich erhalten wir

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} x_n e_{n+kmN} - \sum_{n=1}^{N} x_n e_n\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} x_n e_{n+kmN}\right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Somit ist der Abstand der periodischen Folge $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} x_n e_{n+kmN}$ zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kleiner als ϵ. Also liegt $\mathcal{P}(B)$ dicht in X. $\square$

6 Differentialoperatoren

Für unser nächstes Beispiel linearer dynamischer Systeme betrachten wir Differentialoperatoren auf dem Raum der ganzen Funktionen $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, wobei

$$\mathbb{H}(\mathbb{C}) := \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} |\, f \text{ ist überall komplex differenzierbar}\}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $p_n(f) := \max_{|z| \leq n}(|f(z)|)$ eine Seminorm auf $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Außerdem, wenn für ein $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ gilt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $p_n(f) = 0$ ist, gilt klarerweise $f = 0$. Des Weiteren sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $p_m(f_n - f) \to 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$, dann gilt nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß, vergleiche [Jä93, Kapitel 8], dass $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$. Das beweist mit Proposition 2.5, dass $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ zusammen mit der von $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ induzierten Metrik vollständig ist. Somit ist $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ ein Fréchet-Raum.

Wir definieren zwei lineare Abbildungen auf $\mathbb{H}(\mathbb{C})$

$$Df(z) := f'(z) \qquad \text{und} \qquad T_a f(z) := f(z + a),\ a \in \mathbb{C}.$$

Wir halten zunächst einige Eigenschaften ganzer Funktionen fest.

Proposition 6.1. *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f ist einmal komplex differenzierbar;

(ii) f ist beliebig oft komplex differenzierbar und die Taylorreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w)}{n!}(z - w)^n$$

konvergiert für jeden Punkt $w \in \mathbb{C}$ auf ganz $\mathbb{C}$;

(iii) für alle $w \in \mathbb{C}$ gibt es ein $R > 0$, sodass sich f als $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - w)^n$, für alle $z \in U_R(w)$, schreiben lässt.

Für den Beweis verweisen wir auf [Wor15, Satz 2.1.3].

Lemma 6.2. *Sei $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$. Dann gilt für alle $R > 0$, dass*

$$|f^{(n)}(w)| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{z \in \partial U_R(w)}(|f(z)|).$$

Für den Beweis verweisen wir auf [Wor15, Korollar 3.1.1].

Definition 6.3. Sei $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$. Gibt es Konstanten $M, A > 0$, sodass für alle $z \in \mathbb{C}$

$$|f(z)| < Me^{A|z|}$$

gilt, dann sagen wir, dass f vom *endlichen Exponentialtyp* ist.

Lemma 6.4. *Es gilt $n! \leq e^{-n+1} n^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Wir beginnen den Beweis, indem wir zeigen, dass

$$e \leq (1 - 1/k)^{-k} \text{ für alle } k \geq 2. \tag{6.1}$$

Dafür bemerke, dass $e = \lim_{k\to\infty}(1 - 1/k)^{-k}$. Da $\big(1 - 1/n\big)^n$ monoton wachsend gegen e^{-1} konvergiert, ist $\big(1 - 1/n\big)^{-n}$ eine monoton fallende Folge. Multipliziert man die ersten $n - 2$ Ungleichungen aus (6.1), erhält man

$$e^{n-1} \leq \prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k})^{-k}.$$

Wir berechnen die rechte Seite und erhalten

$$\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k})^{-k} = \frac{\prod_{k=2}^{n} k^k}{\prod_{k=2}^{n} (k-1)^k} = \frac{\prod_{k=2}^{n} k^k}{\prod_{k=1}^{n-1} k^{k+1}} = \frac{n^n}{(n-1)!}.$$

Setzten wir dies wieder in die ursprüngliche Gleichung ein, so liefert das die gewünschte Ungleichung für $n \geq 2$.

$$e^{n-1} \leq \frac{n^n}{(n-1)!} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n! \leq e^{-n+1} n^{n+1}.$$

Für $n = 1$ folgt die Ungleichung trivialer weise. □

Lemma 6.5. *Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$. Dann ist f genau dann vom endlichen Exponentialtyp wenn es Konstanten $M, R > 0$ gibt, sodass*

$$|a_n| \leq \frac{MR^n}{n!} \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{6.2}$$

Beweis. Wenn f vom endlichen Exponentialtyp ist, dann gilt nach Lemma 6.2 für alle $R > 0$

$$|a_n| = \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{1}{R^n} \max_{|z| \in \partial U_r(0)} (|f(z)|) \leq \frac{M}{R^n} e^{AR}.$$

Für $R = n/A$ und mit Lemma 6.4 erhalten wir schließlich

$$|a_n| \leq \frac{MA^n}{n^n} e^n \leq \frac{MnA^n}{n!} \leq M \frac{(2A)^n}{n!}.$$

Somit erfüllen alle ganzen Funktionen vom endlichen Exponentialtyp (6.2).

Für die Umkehrung sei f, sodass (6.2) erfüllt ist. Dann gilt

$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(R|z|)^n}{n!} = Me^{R|z|}.$$

Somit ist f vom endlichen Exponentialtyp. □

Proposition 6.6. *Sei $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine ganze Funktion vom endlichen Exponentialtyp. Dann konvergiert*

$$\phi(D)f := \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n f$$

auf ganz $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ und definiert einen Operator auf $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Beweis. Seien f und $\phi \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$, außerdem sei ϕ vom endlichen Exponentialtyp. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $|z| < m$. Dann gibt es nach Lemma 6.2 $M, R > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$|a_n D^n f(z)| \leq |a_n| \frac{n!}{m^n} \max_{|\xi| \leq 2m} (|f(\xi)|) \leq M \left(\frac{R}{m}\right)^n \max_{|\xi| \leq 2m} (|f(\xi)|).$$

Insbesondere gilt für $m > R$, dass

$$|\phi(D)f(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n f(z)\right| \leq M \frac{1}{1 - \frac{R}{m}} \max_{|\xi| \leq 2m} (|f(\xi)|).$$

Es konvergiert also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n f(z)$ gleichmäßig für alle $|z| < m$. Und somit konvergiert

$$\phi(D)f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n D^n f$$

in $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Außerdem haben wir gezeigt, dass

$$p_m(\phi(D)f) \leq M \frac{1}{1 - \frac{R}{m}} p_{2m}(f)$$

Nach Lemma 2.10 ist $\phi(D)$ ein Operator auf $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. $\square$

Definition 6.7. Wir nennen einen Operator T auf $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *Differentialoperator*, wenn es eine Funktion ϕ vom endlichen Exponentialtyp gibt, sodass $T = \phi(D)$.

Korollar 6.8. *Alle Abbildungen der Form $a_0 I + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_n D^n$ sind Differentialoperatoren.*

Lemma 6.9. *Sei $a \in \mathbb{C}$. Dann ist*

$$T_a f(z) := f(z + a)$$

ein Differentialoperator auf $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, wobei $T_a = e^{aD}$.

Beweis. Nach Lemma 6.5 ist

$$e^{az} := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(az)^n}{n!} \tag{6.3}$$

vom endlichen Exponentialtyp. Nun sei $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$. Es gilt

$$T_a f(z) = f(z + a) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} a^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a^n D^n f}{n!}(z) = e^{aD} f(z).$$

Wir erhalten

$$T_a = e^{aD}$$

und somit ist T_a ein Differentialoperator. $\square$

Proposition 6.10. *Sei T ein Operator auf $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) T ist ein Differentialoperator;

(ii) T kommutiert mit D;

(iii) T kommutiert mit T_a für alle $a \in \mathbb{C}$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $\phi \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ vom endlichen Exponentialtyp, sodass $T = \phi(D)$. Dann gilt für alle $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$

$$TDf = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n D^n(Df) = \sum_{n\in\mathbb{N}} Da_n D^n f = D \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n D^n f = DTf.$$

Wir haben gezeigt, dass $DT = TD$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sei $a \in \mathbb{C}$ und $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$. Wir erhalten nach Lemma 6.9

$$TT_a f = T \sum \frac{(aD)^n}{n!} f = \sum \frac{a^n}{n!} TD^n f = \sum \frac{a^n}{n!} D^n(Tf) = T_a Tf.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Für eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{H}(\mathbb{C})$ mit $\lim f_n = f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ gilt insbesondere, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert. Das beweist die Stetigkeit der Abbildung $f \mapsto Tf(0)$. Somit gibt es nach Lemma 2.10 ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $M > 0$, sodass

$$|(Tf)(0)| \leq M \max_{|z|\leq N} |f(z)|, \qquad \text{für alle } f \in \mathbb{H}(\mathbb{C}).$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir e_n als $z \mapsto z^n$ und schließlich

$$a_n := \frac{(Te_n)(0)}{n!}.$$

Es gilt

$$|a_n| \leq M \frac{N^n}{n!}.$$

Nach Lemma 6.5 ist $\phi(z) := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ vom endlichen Exponentialtyp und nach Proposition 6.6 ist $\phi(D)$ ein Differentialoperator. Eine leichte Rechnung ergibt

$$(\phi(D)e_n)(0) = a_n n! = (Te_n)(0).$$

Da für alle $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ die Taylor-Reihe auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert, bilden die $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine topologische Basis von $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ und damit gilt für alle $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C}$

$$(\phi(D)f)(0) = (Tf)(0).$$

Wir haben schon gezeigt, dass alle Differentialoperatoren mit T_a für alle $a \in \mathbb{C}$ kommutieren. Nun sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig und es gilt mit (iii), dass

$$(\phi(D)f)(z) = (T_z\phi(D)f)(0) = (\phi(D)T_z f)(0) = (TT_z f)(0) = (T_z Tf)(0) = (Tf)(z).$$

Wir sehen, dass $T = \phi(D)$, T ist also ein Differentialoperator. $\square$

Lemma 6.11. *Sei $A \subseteq \mathbb{C}$, sodass A einen Häufungspunkt hat. Dann ist die Menge* $\operatorname{span}\{e_\lambda : \lambda \in A\}$, *wobei $e_\lambda(z) := e^{\lambda z}$, dicht in $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.*

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ Häufungspunkt von A. Wähle $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass einerseits für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gilt, dass $\lambda_n \neq \lambda_m$ und $\lim \lambda_n = \lambda$. Es gilt nun

$$e^{\lambda_n z} = e^{\lambda z} e^{(\lambda_n - \lambda)z} = e^{\lambda z} + e^{\lambda z}(\lambda_n - \lambda)z + e^{\lambda z}\frac{(\lambda_n - \lambda)^2 z^2}{2} + \dots \tag{6.4}$$

Das beweist, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ $\lim_n p_m(e^{\lambda_n z} - e^{\lambda z}) = 0$. Nach Proposition 2.5 gilt $e_\lambda \in \overline{\operatorname{span}}\{e_{\lambda_n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Des weiteren kann man (6.4) umformen und wir erhalten

$$\frac{e^{\lambda_n z} - e^{\lambda z}}{\lambda_n - \lambda} = e^{\lambda z} z + e^{\lambda z} z \frac{(\lambda_n - \lambda)z}{2} + \dots$$

Mit dem selben Argument wie oben begründen wir, dass $(z \mapsto z e^{\lambda z}) \in \overline{\operatorname{span}}\{e_{\lambda_n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Setzt man dieses Argument fort erhält man induktiv, dass $(z \mapsto z^k e^{\lambda z}) \in \overline{\operatorname{span}}\{e_{\lambda_n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Sei nun $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ beliebig. Wir können f als

$$f(z) = e^{\lambda z}\left(e^{-\lambda z} f(z)\right) = e^{\lambda z}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k z^k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k z^k e^{\lambda z}$$

schreiben mit passenden Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$, wobei die Gleichheit im Sinne der $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu verstehen ist. Somit ist $f \in \overline{\operatorname{span}}\{e_{\lambda_n} : n \in \mathbb{N}\}$.

$\square$

Satz 6.12. *Sei T ein Operator auf $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, wobei $T \neq \lambda I$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Wenn T mit D kommutiert, dann ist T mischend und chaotisch.*

Beweis. Nach Proposition 6.10 lässt sich T als $\phi(D)$ schreiben, wobei ϕ eine ganze Funktion vom endlichen Exponentialtyp ist. Außerdem ist nach Voraussetzung ϕ nicht konstant. Wir werden zeigen, dass die Voraussetzungen von Satz 4.2 erfüllt sind. Dazu betrachte die Funktionen $e_\lambda(z) := e^{\lambda z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$Te_\lambda(z) = \phi(D)e_\lambda(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \lambda^n e_\lambda(z) = \phi(\lambda)e_\lambda(z).$$

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ist e_λ ein Eigenvektor von T mit Eigenwert $\phi(\lambda)$. Nach Lemma 6.11 ist $\{e_\lambda : \lambda \in \mathbb{C} \text{ und } |\phi(\lambda)| < 1\}$ dicht in $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, da ganze Funktionen dichtes Bild haben, ist $\phi^{-1}(\{z : |z| < 1\} \cap \phi(\mathbb{C}))$ eine nicht leere, offene Menge und hat somit einen Häufungspunkt. Es gilt $\{e_\lambda : \lambda \in \mathbb{C} \text{ und } |\phi(\lambda)| < 1\} \subset \operatorname{span}\{f \in \mathbb{H}(\mathbb{C}) : Tf = \mu f$ für ein $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu| < 1\}$, insbesondere ist also letztere Menge dicht in $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Analog sieht man, dass $\{f \in \mathbb{H}(\mathbb{C}) : Tf = \mu f$ für ein $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu| > 1\}$ dicht in $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ ist.

Um zu zeigen, dass $\{f \in \mathbb{H}(\mathbb{C}) : Tf = e^{i\pi\alpha} f$ mit $\alpha \in \mathbb{Q}\}$ dicht in $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ ist, erinnere man sich daran, dass ganze Funktionen gebietstreu sind, vergleiche [Jä93, Satz 13]. $\phi(\mathbb{C})$ ist also eine offene, zusammenhängende und dichte Teilmenge. Insbesondere ist $\phi(\mathbb{C}) \cap \{z \in$

$\mathbb{C} : |z| = 1\}$ nicht leer und der Schnitt ist in der Spurtopologie auf $\{z \in \mathbb{C}\ |z| = 1\}$ offen. Es liegen also unendlich viele Wurzeln der Eins in $\phi(\mathbb{C}) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Das Urbild eben dieser Menge ist beschränkt und beinhaltet unendlich viele Punkte, somit auch einen Häufungspunkt. Wie oben folgt mit Lemma 6.11, dass $\{f \in \mathbb{H}(\mathbb{C}) : Tf = e^{i\pi\alpha} f \text{ mit } \alpha \in \mathbb{Q}\}$ dicht in $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ ist.

Wir können nun Satz 4.2 anwenden und der Satz ist bewiesen. $\square$

Literaturverzeichnis

[Bay03] Aboubakr Bayoumi. Chapter 1 - fundamental theorems in f-spaces. In Aboubakr Bayoumi, editor, *Foundations of Complex Analysis in Non Locally Convex Spaces*, volume 193 of *North-Holland Mathematics Studies*, pages 1–27. North-Holland, 2003.

[GEPM11] Karl-G. Grosse-Erdmann and Alfredo Peris Manguillot. *Linear chaos*. Universitext. Springer, London, 2011.

[Jä93] Klaus Jänich. *Funktionentheorie*. Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1993. Eine Einführung. [An introduction].

[MBW20] Michael Kaltenbäck Martin Blümlinger and Harald Woracek. *Funktionalanalysis*. 14 edition, 2 2020.

[Wor15] Harald Woracek. *Komplexe Analysis*. 2015.