Bachelorarbeit

Polartopologien und der Satz von Mackey-Arens

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dr. Harald Woracek

durch

Patrick Freund
Matrikelnummer: 11805793

Wien, Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit Topologien, die wir mit Hilfe von polaren Mengen bestimmen. Eine dieser sogenannten Polartopologien ist die Mackey Topologie. Diese Topologie bildet laut dem Satz von Mackey-Arens, den wir im fünften Abschnitt beweisen werden, eine obere Schranke für lokalkovexe Topologien $\mathcal{T}$ mit der Dualitätseigenschaft $(X, \mathcal{T})' = Y$ für zwei Vektorräume X und Y. Die untere Schranke wird dabei von der schwachen Topologie gebildet, welche wir im dritten Abschnitt wieder in Erinnerung rufen.
Neben einem Beispiel, indem wir eine Mackey Topologie auf dem Folgenraum ℓ_∞ bestimmen werden, untersuchen wir auch Anwendungen des Satzes von Mackey-Arens. Besonders die Gleichheit der Menge aller beschränkten Teilmengen eines lokalkonvexen Raumes X bezüglich der schwachen Topologie und der auf X bestimmten Topologie sei hier zu erwähnen.
Im abschließenden Abschnitt stellen wir uns die Frage, ob es auch eine nicht-lokalkonvexe Topologie zwischen der schwachen Topologie und der Mackey Topologie gibt und welche Eigenschaften diese dadurch hat. Vollendet wird dieser Abschnitt mit einem kurzen Beispiel auf dem Lebesgue-Raum $L_p(0, 1)$.

Unsere Hauptquellen, speziell für die Definition der Polartopologien und den Satz von Mackey-Arens, sind die Textbücher von Lawrence Narici und Edward Beckenstein [1] und [2] von Jürgen Voigt. Darüberhinaus folgt der Beweis im letzten Abschnitt jenem in [3] von D.A.Gregory und J.H.Shapiro.
Grundlage für diese Arbeit bilden die Prüfungsmodule des Bachelorstudiums „Technische Mathematik“ der technischen Universität Wien. Insbesondere dienen als Fundament die Lehrveranstaltungen aus dem Modul Analysis, Höhere Analysis und Topologie (vergleiche [4, 5, M. Kaltenbäck], [6, M. Blümlinger], [7, M. Blümlinger, M. Kaltenbäck und H. Woracek] und [8, H. Woracek]), aber auch [9, W. Rudin] und [10, H. Schaefer].

2 Grundlegende Definitionen und Sätze

Definition 2.1. (Topologischer Vektorraum)
Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. Man nennt $(X, \mathcal{T})$ *topologischen Vektorraum*, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

- Die Vektoraddition $(x, y) \mapsto x + y$ ist $(\mathcal{T} \times \mathcal{T}) - \mathcal{T}$ stetig.
- Die Skalarmultiplikation $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ ist $(\epsilon \times \mathcal{T}) - \mathcal{T}$ stetig.

Wobei ϵ die von der euklidischen Metrik induzierte Topologie auf $\mathbb{K}$ ist.
$\mathcal{T}$ nennt man in diesem Fall auch *Vektortopologie*.

Definition 2.2. (Topologische Gruppe)
Eine Gruppe $(G, \cdot, e)$ versehen mit einer Topologie $\mathcal{T}$ heißt *topologische Gruppe*, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

- Die Gruppenverknüpfung $(g, h) \mapsto gh$ ist $(\mathcal{T} \times \mathcal{T}) - \mathcal{T}$ stetig.
- Die Inversenbildung $g \mapsto -g$ ist $\mathcal{T} - \mathcal{T}$ stetig.

Definition 2.3. (Umgebung)
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann heißt $N \subseteq X$ *Umgebung* des Punktes $x \in X$, wenn es eine offene Menge $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U \subseteq N$ gibt.
Die Menge $\mathcal{V}(x)$ aller Umgebungen von x wird *Umgebungsfilter* genannt.

Definition 2.4. (Umgebungsbasis)
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Teilmenge $\mathcal{W}(x)$ des Umgebungsfilters $\mathcal{V}(x)$ heißt *Umgebungsbasis* von x, wenn es zu jeder Umgebung $U \in \mathcal{V}(x)$ ein $V \in \mathcal{W}(x)$ gibt mit $V \subseteq U$.
Sei $\mathcal{S}$ eine Menge von Teilmengen von X und sei $x \in S$ für alle $S \in \mathcal{S}$. Wir nennen $\mathcal{S}$ *Umgebungssubbasis* von $x \in X$, wenn die Menge aller endlichen Durchschnitte von Elementen aus S eine Umgebungsbasis von x ist.

Definition 2.5. (beschränkt, absorbierend & kreisförmig)
Eine Teilmenge A eines Vektorraumes X über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ heißt

- *beschränkt*, wenn zu jeder Nullumgebung U ein $t > 0$ existiert, sodass $A \subseteq \lambda U$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \geq t$.
- *absorbierend*, wenn es für jedes $x \in X$ ein $t > 0$ gibt, sodass $x \in \lambda A$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \geq t$.
- *balanziert* oder auch *kreisförmig*, wenn für alle $x \in A$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq 1$, auch $\lambda x \in A$ gilt.
- *absolutkonvex*, wenn sie kreisförmig und konvex ist.

Bemerkung 2.6. Offenbar ist eine Menge genau dann absolutkonvex, wenn für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ und alle $x, y \in A$ auch $\lambda x + \mu y \in A$ gilt.

Definition 2.7. (lokalkonvex)
Ein topologischer Vektorraum heißt *lokalkonvex*, wenn es eine Nullumgebungsbasis gibt, die aus konvexen Mengen besteht.
Eine Topologie, die einen Vektorraum zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum macht, nennt man *lokalkonvexe Topologie.*

Die folgenden Ergebnisse dienen dazu eine Topologie für einen Vektorraum zu erzeugen, mit der dieser zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum wird.

Satz 2.8. Sei X ein linearer Raum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $\mathcal{B}$ eine Filterbasis aus Teilmengen von X mit

- jede Menge $B \in \mathcal{B}$ ist kreisförmig und absorbierend,
- für jede Menge $B \in \mathcal{B}$ gibt es ein $U \in \mathcal{B}$, sodass $U + U \subseteq B$.

Dann ist B eine Nullumgebungsbasis für eine Vektortopologie auf X.
Sind folgende zwei Bedingungen erfüllt:

- jede Menge $B \in \mathcal{B}$ ist absorbierend und absolutkonvex,
- für jede Menge $B \in \mathcal{B}$ gibt es ein $a \in (0, 1/2]$, sodass $aB \in \mathcal{B}$,

dann ist diese Vektortopologie lokalkonvex.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [1, Satz 4.5.1 und Satz 4.5.2]. □

Wichtig für die Definition von Polartopologien ist folgender Satz, der mit Hilfe des vorangegangen Satzes bewiesen wird.

Satz 2.9. Sei $\mathcal{S}$ eine nichtleere Menge von Teilmengen eines linearen Raumes X. Sei $\mathcal{B}$ die Menge von positiven Vielfachen von endlichen Durchschnitten der Mengen aus $\mathcal{S}$.

a.) Wenn $\mathcal{S}$ die ersten beiden Punkte von Satz 2.8 erfüllt, dann ist $\mathcal{B}$ eine Nullumgebungssubbasis für eine Vektortopologie.

b.) Besteht $\mathcal{S}$ aus absorbierenden absolutkonvexen Teilmengen, dann ist $\mathcal{B}$ eine Nullumgebungsbasis für eine lokalkonvexe Topologie.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [1, Satz 4.5.3]. □

Äquivalent zur Definition mittels einer Nullumgebungsbasis, die aus konvexen Mengen besteht, kann man lokalkonvexe topologische Vektorräume durch Familien von Seminormen beschreiben.

Definition 2.10. (Seminorm)
Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $p : X \to \mathbb{R}_0^+$. Die Abbildung p heißt *Seminorm* auf X, wenn gilt:

- Subadditivität: $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ für $x, y \in X$.
- absolute Homogenität: $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ für $x \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Definition 2.11. (separierend)
Sei X ein Vektorraum und P eine Familie von Seminormen. Die Familie P heißt *separierend*, wenn für jedes $x \in X \setminus \{0\}$ ein $p \in P$ existiert, sodass $p(x) \neq 0$.

Satz 2.12. Sei X ein Vektorraum und P eine Familie von Seminormen auf X. Für $p \in P$ sei $N(p) := \{x \in X : p(x) = 0\}$ und $X_p := X/N(p)$ definiert. Dann ist durch die Vorschrift $x + N(p) \mapsto p(x)$ eine Funktion $\|\cdot\|_p : X_p \to \mathbb{R}_0^+$ wohldefiniert. Diese ist eine Norm.
Darüberhinaus bezeichne $\pi_p : X \to X_p$ die kanonische Projektion von X nach X_p. Weiters sei $\mathcal{T}_P$ die initiale Topologie auf X bezüglich der Abbildungen π_p, wobei die Räume X_p für $p \in P$ mit der Normtopologie versehen sind. Dann ist $(X, \mathcal{T}_P)$ lokalkonvex und wenn P darüberhinaus separierend ist, auch Hausdorff.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [7, Lemma 5.1.2 und Satz 5.1.4] und [1, Satz 5.5.1]. □

Definition 2.13. (Seminorm-Topologie)
Die Topologie $\mathcal{T}_P$ aus dem vorangegangenen Satz bezeichnet man als *die von der Familie P von Seminormen erzeugte Topologie.*

Korollar 2.14. Sei $V_{p_1} := \{x \in X : p(x) \leq 1\}$. Dann ist V_{p_1} für alle $p \in P$ absolutkonvex und absorbierend. Sei $\mathcal{S} := \{V_{p_1} : p \in P\}$. Dann ist nach Satz 2.9 die Menge aller positiven Vielfachen von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{S}$ eine Nullumgebungsbasis für $\mathcal{T}_P$ auf X.

Bemerkung 2.15. Nach Satz 2.12 erzeugt jede Familie von Seminormen eine lokalkonvexe Topologie. Es gilt auch, dass jede lokalkonvexe Topologie von einer Familie von Seminormen erzeugt wird, siehe [7, Satz 5.1.10].

Satz 2.16. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer Raum (d.h. $\mathcal{T}$ ist durch eine Familie P von Seminormen erzeugt). Dann ist eine Teilmenge B genau dann beschränkt, wenn $p(B)$ beschränkt ist für jede Seminorm $p \in P$.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [1, Satz 6.1.5]. □

Die folgende Definition wird im weiteren Verlauf der Arbeit für den Beweis des Satzes von Mackey-Arens benötigt.

Definition 2.17. (gleichgradig stetig)
Sei T ein topologischer Raum und X eine topologische Gruppe. Des Weiteren sei $F(T, X)$ die Menge aller Abbildungen von T nach X. Eine Teilmenge H von $F(T, X)$ heißt gleichgradig stetig in $t \in T$, wenn für jede Nullumgebung V in X eine Umgebung U von t existiert, sodass $f(U) \subseteq f(t) + V$ für jede Funktion $f \in H$ gilt.
Man nennt H *gleichgradig stetig*, wenn H gleichgradig stetig in jedem $t \in T$ ist.

Satz 2.18. Sei X ein topologischer Vektorraum und Y ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Sei $L(X, Y)$ der lineare Raum aller stetigen linearen Abbildungen von X nach Y. Sei H eine gleichgradig stetige Teilmenge von $L(X, Y)$. Dann ist die absolutkonvexe Hülle H_{bc} von H auch gleichgradig stetig. Darüberhinaus ist auch die kreisförmige Hülle H_b und die konvexe Hülle H_c gleichgradig stetig.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [1, Satz 8.6.2]. □

3 Polare & S-Topologien

Für weitere Ergebnisse sind die Definitionen, wie die eines Paares, der schwachen Topologie oder der S-Topologien, fundamental. Als Voraussetzung für viele Ergebnisse ist besonders folgende Begriffsbildung essenziell:

Definition 3.1. (Paar)
Seien X und Y zwei Vektorräume über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ eine Bilinearform, also eine Funktion, die linear in beiden Argumenten ist. Dann nennen wir (X, Y) *Paar* und erwähnen die Bilinearform nicht weiter.

Bemerkung 3.2. Sei (X, Y) mit $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \to \mathbb{K}$ ein Paar. Dann ist auch $\langle y, x \rangle' := \langle x, y \rangle$ bilinear und macht (Y, X) zu einem Paar.

Definition 3.3. (Duales Paar)
Sei (X, Y) ein Paar. Man nennt Y *punktetrennend* (bezüglich X) wenn für jedes $x \in X \setminus \{0\}$ ein $y \in Y$ existiert, sodass $\langle x, y \rangle \neq 0$ gilt. Analog wird dieser Begriff für X definiert.
Sind beide Vektorräume punktetrennend bezüglich des anderen, so wird das Paar (X, Y) *duales Paar* genannt.

Bemerkung 3.4. In der Literatur kommt es durchaus vor, dass man ein Paar bereits als duales Paar bezeichnet. Die Eigenschaft, dass einer der beiden Räume punktetrennend ist, wird dabei separat erwähnt.

Betrachtet man nun ein Paar (X, Y), so erhält man durch die Bilinearform lineare Funktionale auf X bzw. auf Y:

$$y^* : X \to \mathbb{K},\ x \mapsto \langle x, y \rangle \qquad\qquad x^* : Y \to \mathbb{K},\ y \mapsto \langle x, y \rangle.$$

Sei nun X^* der algebraische Dualraum, also die Menge aller linearen Funktionale auf X. Dann erhält man für jedes $y \in Y$ ein Funktional $y^* \in X^*$. Analog bekommt man

Funktionale $x^* \in Y^*$.

Um nun y mit y^* (bzw. x mit x^*) identifizieren zu können, benötigt man die Injektivität der Abbildung

$$b_1 : Y \to X^*,\ y \mapsto y^* \qquad\qquad (b_2 : X \to Y^*,\ x \mapsto x^*)$$

(es wäre nämlich durchaus möglich, dass $y^* = w^*$ gilt für $y \neq w$). Diese erhält man, wenn X (bzw. Y) punktetrennend ist.
Geht man nun von einem dualen Paar aus, so kann man Y als linearen Teilraum von X^* und X als linearen Teilraum von Y^* interpretieren.
Für den algebraischen Dualraum ist die Abbildung $X \times X^* : (x, x^*) \mapsto \langle x, x^* \rangle = x^*(x)$ eine Bilinearform. Damit wird (X, X^*) zu einem dualen Paar, welches man *natürliches Paar* nennt. Analog gelten diese Ergebnisse auch für Y und Y^*.

Im Folgenden werden wir stets Y wie oben beschrieben als linearen Teilraum von X^* identifizieren.

Definition 3.5. (Schwache Topologien)
Sei (X, Y) ein duales Paar. Die initiale Topologie bezüglich der Abbildungen

$$y^* : X \to \mathbb{K} \qquad\qquad y^* \in Y \subseteq X^*$$

heißt die von Y auf X erzeugte schwache Topologie, welche wir mit $\sigma(X, Y)$ bezeichnen. Analog definiert man $\sigma(Y, X)$.

Bemerkung 3.6. Interpretiert man bei einem dualen Paar (X, Y) den Raum Y als Teilraum von X^*, so kann man für alle $y \in Y$ die Seminorm $p_y(x) := |\langle x, y \rangle| = |y^*(x)|$ auf X betrachten. Da Y punktetrennend ist, ist die Familie $P := \{p_y : y \in Y\}$ separierend. Die, wie in Satz 2.12 definierte, von P erzeugte Seminorm Topologie $\mathcal{T}_P$ stimmt mit $\sigma(X, Y)$ überein. Jeder mit der schwachen Topologie versehene Raum ist also lokalkonvex.

Im weiteren Verlauf wird mit X' der topologische Dualraum eines topologischen Vektorraumes X bezeichnet. Das ist der Raum aller Funktionale aus X^*, die darüberhinaus stetig sind. Ist ein Vektorraum X mit der von Y erzeugten schwachen Topologie versehen, so ist dessen topologischer Dualraum einfach zu charakterisieren, wie der folgende Satz zeigt. Dabei folgt bereits aus Definition 3.5, dass $Y \subseteq (X, \sigma(X, Y))'$ gilt.

Satz 3.7. Sei (X, Y) ein duales Paar. Dann gilt $(X, \sigma(X, Y))' = Y$.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [7, Satz 5.3.3]. □

Kommen wir nun zur Definition einer $\mathcal{S}$-Topolgie, welcher folgendes Lemma zugrunde liegt.

Lemma 3.8. Sei $F(T, \mathbb{K})$ die additive Gruppe aller Abbildungen von einer Menge T in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $\mathcal{S}$ eine Menge von Teilmengen von T. Dann ist die durch

$$W(B, r) = \{f \in F(T, \mathbb{K}) :\ \sup|f(B)| \leq r\}, \qquad\qquad B \in \mathcal{S}, r > 0$$

als Nullumgebungssubbasis auf $F(T, \mathbb{K})$ erzeugte Topologie eine Gruppentopologie.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [7, Beispiel 2.6.2]. ☐

Definition 3.9. ($\mathcal{S}$-Topologie)
Jede in obiger Gestalt entstehende Topologie auf $F(T, \mathbb{K})$ heißt *$\mathcal{S}$-Topologie.*

Wenn (X, Y) ein duales Paar ist, so kann man X als Teilraum von $F(Y, \mathbb{K})$ interpretieren. Wir werden später sehen, dass die durch die Menge $\mathcal{S}$ aller einelementiger Teilmengen von Y gegebene $\mathcal{S}$-Topologie eingeschränkt auf X, die schwache Topologie $\sigma(X, Y)$ ist.

Satz 3.10. Sei $F(T, \mathbb{K})$ die additive Gruppe aller Abbildungen von einer Menge T in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sei $\mathcal{S}$ eine Menge von Teilmengen von T. Überdeckt $\mathcal{S}$ die Menge T, dann ist die $\mathcal{S}$-Topologie auf $F(T, \mathbb{K})$ Hausdorff.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [1, Satz 2.6.4]. ☐

Definition 3.11. (Polar)
Sei (X, Y) ein duales Paar und $E \subseteq X$ sowie $F \subseteq Y$. Das *Polar* oder die *polare Menge* von E ist definiert durch

$$E^\circ := \{y \in Y : \sup|\langle E, y\rangle| \leq 1\}.$$

Analog wird die polare Menge für F definiert.

Die folgenden Eigenschaften für polare Mengen liefern nützliche Ergebnisse für Polartopologien. Für die Beweise der Sätze verweisen wir auf [1, Satz 8.4.1, Satz 8.3.5, Satz 8.3.6, Satz 8.3.7, Satz 8.3.8 und Satz 8.3.9].

Satz 3.12. Sei X ein topologischer Vektorraum und U eine Nullumgebung. Dann ist $U^\circ \subseteq X'$ kompakt bezüglich $\sigma(X', X)$.

Satz 3.13. Sei (X, Y) ein duales Paar. Eine Teilmenge $B \subseteq X$ ist $\sigma(X, Y)$-beschränkt genau dann, wenn B° eine absorbierende Teilmenge von Y ist.

Satz 3.14. Sei (X, Y) ein duales Paar. Seien A und B Teilmengen von X. Dann gilt:

a.) A° ist $\sigma(Y, X)$-abgeschlossen und absolutkonvex,

b.) aus $A \subseteq$ B, folgt $A^\circ \supseteq B^\circ$,

c.) für $a \neq 0$ gilt $(aA)^\circ = |a|^{-1} A^\circ$,

d.) $A \subseteq A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ$ und $A^\circ = A^{\circ\circ\circ}$, wobei $A^{\circ\circ}$ *Bipolar* von A heißt.

Satz 3.15. Sei (X, Y) ein duales Paar und A eine Teilmenge von X. Dann gilt:

a.) $A^\circ = (A_b)^\circ$, wobei A_b die kreisförmige Hülle von A ist,

b.) $A^\circ = (A_c)^\circ$, wobei A_c die konvexe Hülle von A ist, c.) $A^\circ = (\overline{A}^{\sigma(X,Y)})^\circ$,

d.) $A^\circ = (\overline{A_{bc}}^{\sigma(X,Y)})^\circ$.

Satz 3.16. (Bipolarsatz)
Sei (X,Y) ein duales Paar und $A \subseteq X$. Dann gilt $A^{\circ\circ} = \overline{A_{bc}}^{\sigma(X,Y)}$

Satz 3.17. Sei (X,Y) ein duales Paar und $\{A_i : i \in I\}$ eine Menge von Teilmengen von X. Dann gilt:

$$(\bigcup_{i\in I} A_i)^\circ = \bigcap_{i\in I} A_i{}^\circ$$

4 Polartopologien

In diesem Abschnitt definieren wir spezielle $\mathcal{S}$-Topologien. Für ein gegebenes duales Paar (X,Y) interpretiert man, wie bereits im zweiten Abschnitt gezeigt, X als die Menge der linearen Funktionale

$$x^* = \langle x, \cdot \rangle \qquad x \in X$$

auf Y. Also als eine Teilmenge von Y^*, oder allgemeiner von $F(Y,\mathbb{K})$. Mit einer Menge $\mathcal{S}$ von Teilmengen B von Y kann man X mit Hilfe der polaren Mengen $W(B,1) = B^\circ = \{x \in X : \sup |\langle x, B\rangle| \leq 1\}$ topologisieren.

Lemma 4.1. Sei $\mathcal{S}$ eine Menge von $\sigma(Y,X)$-beschränkten Teilmengen von Y, dann wird durch die Menge der positiven Vielfachen von endlichen Schnitten von Mengen aus $\mathcal{S}^\circ := \{B^\circ : B \in \mathcal{S}\}$ eine Nullumgebungsbasis einer Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ auf X bestimmt.

Beweis. Da die Teilmengen in $\mathcal{S}$ als $\sigma(Y,X)$-beschränkt vorausgesetzt sind, folgt mit Satz 3.13, dass die Mengen $B^\circ \subseteq X$ absorbierend sind. Da die Mengen B° laut Satz 3.14 absolutkonvex sind, erhalten wir mit dem Subbasissatz Satz 2.9, dass die Menge der positiven Vielfachen von endlichen Schnitten von Mengen aus $\mathcal{S}^\circ$ eine Nullumgebungsbasis für eine lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ auf X ist. ☐

Das bringt uns nun zur Definition der Polartopologien:

Definition 4.2. (Polartopologie)
Sei $\mathcal{S}$ eine Menge von $\sigma(Y,X)$-beschränkten Teilmengen von Y. Dann wird eine Topologie obiger Gestalt *die durch $\mathcal{S}$ bestimmte Polartopologie* genannt.

Bemerkung 4.3. Wie man anhand der im Laufe des Kapitels illustrierten Beispiele gut erkennen kann, ist die Berücksichtigung von endlichen Schnitten in der Praxis meist überflüssig. In vielen Fällen ist $\mathcal{S}$ bezüglich Inklusion gerichtet, das heißt, dass für alle $C, D \in \mathcal{S}$ eine Menge $E \in \mathcal{S}$ existiert, sodass $C \cup D \subseteq E$ gilt. Damit erhält man $(C \cup D)^\circ = C^\circ \cap D^\circ \supseteq E^\circ$. Demnach bilden positive Vielfache der Mengen B° selbst eine Nullumgebungsbasis bezüglich der Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{S}$.

Nachdem Polartopologien lokalkonvex sind, sind diese nach Bemerkung 2.15 durch Seminormen induziert. Wir bringen einen direkten Beweis.

Lemma 4.4. Sei $\mathcal{S}$ eine Menge von $\sigma(Y, X)$-beschränkten Teilmengen von Y und setze $q_B(x) := \sup |\langle x, B \rangle|$ für $B \in \mathcal{S}$. Dann ist $\{q_B : B \in \mathcal{S}\}$ eine Familie von Seminormen. Die von ihr erzeugte Topologie ist gleich der durch $\mathcal{S}$ bestimmten Polartopologie auf X.

Beweis. Sei $\mathcal{S}$ eine Menge von $\sigma(Y, X)$-beschränkten Teilmengen von Y. Nach Bemerkung 3.6 ist $(Y, \sigma(Y, X))$ lokalkonvex und die Topologie ist durch die Seminormen $p_x(\cdot) = |\langle x, \cdot \rangle|$ erzeugt. Nun ist nach Satz 2.16 die Menge $p_x(B) = |\langle x, B \rangle|$ für jedes $x \in X$ und jede Menge $B \in \mathcal{S}$ eine beschränkte Menge von Skalaren. Für jede Menge $B \in \mathcal{S}$ gilt also

$$q_B(x) = \sup |\langle x, B \rangle| < \infty.$$

Sei nun $r := q_B(x)$. Dann gilt aufgrund der Definition der polaren Menge $\frac{x}{r} \in B^\circ$ bzw. $x \in rB^\circ$. Da $\frac{x}{t} \notin B^\circ$ für $t < r$, gilt $r = q_B(x) = \inf \{a > 0 : x \in aB^\circ\}$. Die Funktion q_B ist also das Minkowski Funktional von B°. Die durch $\mathcal{S}$ bestimmte Polartopologie hat nun als Nullumgebungssubbasis positive Vielfache der Mengen

$$B^\circ = \{x \in X : q_B(x) = \sup |\langle x, B \rangle| \leq 1\} = V_{q_B}$$

Demnach ist die durch $\mathcal{S}$ bestimmte Polartopologie gleich der durch die Seminormen $\{q_B : B \in \mathcal{S}\}$ auf X erzeugte lokalkonvexe Topologie. □

Durch die Tatsache, dass die Polartopologie eine $\mathcal{S}$-Topologie ist, folgt aufgrund von Satz 3.10, dass $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ Hausdorff ist, wenn $\mathcal{S}$ den Raum Y überdeckt. Für ein duales Paar (X, Y) gilt darüberhinaus:

Satz 4.5. Sei (X, Y) ein duales Paar und $\mathcal{S}$ eine Menge von $\sigma(Y, X)$-beschränkten Teilmengen von Y. Sei $M := \operatorname{span}\{\bigcup \mathcal{S}\}$. Dann ist $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ Hausdorff genau dann, wenn $\overline{M}^{\sigma(Y,X)} = Y$ gilt.

Beweis.
„⇐“ Unser Ziel ist es Satz 2.12 anzuwenden. Deshalb sei $x \in X$ mit $q_B(x) = \sup |\langle x, B \rangle| = 0$ für alle Mengen $B \in \mathcal{S}$. Da nun x für alle $B \in \mathcal{S}$ verschwindet, ist x aufgrund der Linearität der Bilinearform in beiden Komponenten auch eine Nullstelle für die lineare Hülle M. Aufgrund der $\sigma(Y, X)$-Stetigkeit von x (bzw. eigentlich der des x durch die Abbildung b_2 zugewiesenen Funktionals x^*), verschwindet es sogar auf $\overline{M}^{\sigma(Y,X)} = Y$. Aufgrund der Dualität des Paares (X, Y) muss $x = 0$ gelten. Die Familie $\{q_B : B \in \mathcal{S}\}$ ist also separierend. Daraus folgt aus Satz 2.12, dass die Polartopologie $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ Hausdorff ist.

„⇒“ Angenommen es gilt $\overline{M}^{\sigma(Y,X)} \neq Y$. Aufgrund eines Satzes von Hahn-Banach existiert ein $\sigma(Y, X)$-stetiges Funktional $x \in X \setminus \{0\}$ auf Y, sodass $x(\overline{M}^{\sigma(Y,X)}) = \{0\}$ gilt. Da $q_B(x) = 0$ mit $x \neq 0$ für alle $B \in \mathcal{S}$ gilt, ist die Familie $\{q_B : B \in \mathcal{S}\}$ nicht separierend. Also ist $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ nach Satz 2.12 nicht Hausdorff. □

Wir erinnern an die folgende Tatsache (vergleiche [1, Satz 2.6.3]): Sei $\mathcal{S}$ eine Menge von Teilmengen von Y und $\mathcal{S}'$ die Menge aller Teilmengen von endlichen Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{S}$. Dann sind die von $\mathcal{S}$ bzw. $\mathcal{S}'$ induzierten $\mathcal{S}$-Topologien gleich.
Für Polartopologien gilt das folgende stärkere Ergebnis.

Satz 4.6. Für eine Menge $\mathcal{S}$ von $\sigma(Y,X)$-beschränkten Teilmengen von Y wird die durch $\mathcal{S}$ bestimmte Polartopologie auf X nicht verändert, wenn man $\mathcal{S}$ durch eine der folgenden Mengen von $\sigma(Y,X)$-beschränkten Teilmengen von Y ersetzt:

a.) alle Teilmengen von endlichen Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{S}$;

b.) alle Mengen aB, wobei a ein Skalar ist und $B \in \mathcal{S}$;

c.) alle kreisförmigen (bzw. konvexe) Hüllen B_b (B_c) von Mengen $B \in \mathcal{S}$;

d.) alle $\sigma(Y,X)$-Abschlüsse von Mengen aus $\mathcal{S}$;

e.) alle $\sigma(Y,X)$-Abschlüsse der kreisförmigen konvexen Hüllen von Mengen aus $\mathcal{S}$.

Beweis. Sei $B \in \mathcal{S}$ und sei $V_{\mathcal{S}}(0)$ der Nullumgebungsfilter bezüglich der durch $\mathcal{S}$ bestimmten Polartopologie $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ auf X.

a.) Sei $\mathcal{S}'$ die Menge aller Teilmengen von endlichen Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{S}$. Da $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ gilt, ist die Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{S}'}$ feiner als $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$.
Umgekehrt sei $S_j \in \mathcal{S}$ für alle j. Dann nehmen wir an, dass $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} S_j$. Aus Satz 3.17 folgt

$$(\bigcup_{j=1}^{n} S_j)^\circ = \bigcap_{j=1}^{n} {S_j}^\circ \subseteq B^\circ.$$

Wir wissen nun, dass die endlichen Schnitte der polaren Mengen S_j° eine $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-Nullumgebung sind. Als Obermenge ist B° also auch eine $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-Nullumgebung. Dementsprechend gilt $\mathcal{T}_{\mathcal{S}'} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$.

b.) Für $a \neq 0$ gilt $(aB)^\circ = |a|^{-1}B^\circ$ und $|a|^{-1}B^\circ \in V_{\mathcal{S}}(0)$. Für $a = 0$ gilt $(aB)^\circ = X$. In beiden Fällen gilt also $|a|^{-1}B^\circ \in V_{\mathcal{S}}(0)$.

c.) $B^\circ = (B_b)^\circ = (B_c)^\circ \in V_{\mathcal{S}}(0)$

d.) $B^\circ = (\overline{B}^{\sigma(Y,X)})^\circ \in V_{\mathcal{S}}(0)$

e.) $B^\circ = (\overline{B_{bc}}^{\sigma(Y,X)})^\circ \in V_{\mathcal{S}}(0)$

Die Punkte b.) - e.) folgen dabei aus Satz 3.14 und Satz 3.15. □

Beispiel 4.7. (Schwache Topologie $\sigma(X,Y)$)
Ist $\mathcal{S}$ die Menge aller Singeltons in Y, also die Menge aller einelementigen Teilmengen von Y, dann gilt für die Polartopologie $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \sigma(X,Y)$.
Nach Satz 4.6 kann $\mathcal{S}$ zur Menge aller $\sigma(Y,X)$-abgeschlossenen absolutkonvexen Hüllen endlicher Teilmengen von Y (alle Mengen der Form $\{\sum_i a_i y_i : \sum_i |a_i| \leq 1\}$ für endlich viele Skalare a_i und Vektoren $\{y_i\} \subseteq Y$) erweitert werden, ohne dabei $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ zu beeinflussen.

Eine $\sigma(X,Y)$-Nullumgebungsbasis ist

$$V(0, y_1, ..., y_n, r) = \{x \in X : |\langle x, y_i\rangle| \leq r \text{ für } i = 1, ..., n\}$$

mit $r > 0$ und $y_1, ..., y_n \in Y$. Die schwache Topologie ist die gröbste Polartopologie.

Beispiel 4.8. (Mackey Topologie $\tau(X,Y)$)
Die *Mackey Topologie* ist die durch die Menge aller $\sigma(Y,X)$-kompakten absolutkonvexen Teilmengen von Y induzierte $\mathcal{S}$-Topologie.

Nach Satz 3.7 gilt $(X, \sigma(X,Y))' = Y$. Obwohl die Mackey Topologie definitionsgemäß feiner als die schwache Topologie ist, gilt auch $(X, \tau(X,Y))' = Y$ wie wir später sehen werden. Der im anschließenden Kapitel gezeigte Satz von Mackey-Arens beweist, dass $\tau(X,Y)$ überhaupt die feinste lokalkonvexe Topologie ist mit der Eigenschaft, dass Y der topologische Dualraum von X ist.

Beispiel 4.9. (Starke Topologie $\beta(X,Y)$)
Die *starke Topologie* ist die durch die Menge aller $\sigma(Y,X)$-beschränkten Teilmengen von Y induzierte $\mathcal{S}$-Topologie.
$\beta(X,Y)$ wird auch als stärkste Polartopologie bezeichnet. Diese Begriffsbildung kommt daher, dass durch diese Topologie die feinste mögliche Polartopologie auf X definiert ist.
Eine $\beta(X,Y)$-Nullumgebungsbasis ist

$$\{B^\circ : B \text{ ist } \sigma(Y,X) - \text{beschränkt}\},$$

da sowohl endliche Vereinigungen beschränkter Mengen als auch positive Vielfache beschränkter Mengen beschränkt sind.
Außerdem gilt, da aus der schwachen Kompaktheit die schwache Beschränktheit folgt:

$$\tau(X,Y) \subseteq \beta(X,Y)$$

Wir fassen zusammen:

$\mathcal{S}$	Symbol der Topologie	Name
endliche Teilmengen	$\sigma(X,Y)$	schwach
$\sigma(Y,X)$-kompakte absolutkonvexe Mengen	$\tau(X,Y)$	Mackey
$\sigma(Y,X)$-beschränkte Mengen	$\beta(X,Y)$	stark

Eine bisher nicht erwähnte Polartopologie ist jene, die man durch gleichgradig stetige Teilmengen erhält. Man betrachtet hierfür die Menge aller gleichgradig stetigen Teilmengen des topologischen Duarauumes. Mit dieser Topologie lässt sich im weiteren Verlauf der Arbeit zeigen, dass jede lokalkonvexe Topologie eine Polartopologie ist. Diese Tatsache spielt auch im Beweis des Satzes von Mackey-Arens eine entscheidende Rolle. Bevor diese Aussage gezeigt wird, betrachten wir noch drei Sätze bezüglich der gleichgradigen Stetigkeit.

Satz 4.10. Sei X ein topologischer Vektorraum und H eine gleichgradig stetige Teilmenge von X'. Dann ist der $\sigma(X', X)$-Abschluss von H ebenfalls eine gleichgradig stetige Teilmenge von X'.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [1, Satz 8.6.1]. □

Satz 4.11. Sei X ein topologischer Vektorraum. Dann ist $H \subseteq X'$ gleichgradig stetig genau dann, wenn eine der beiden Aussagen erfüllt ist:

(i) H liegt im Polar einer Nullumgebung von X.

(ii) H° ist eine Nullumgebung von X.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [1, Satz 8.6.4]. □

Satz 4.12. Sei X ein topologischer Vektorraum und $H \subseteq X'$ sei gleichgradig stetig. Dann ist H relativ $\sigma(X', X)$-kompakt.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [1, Satz 8.6.5]. □

Der im Zusammenhang mit dem Satz von Mackey und den polaren Topologien interessante Satz, ist nun folgender:

Satz 4.13. Sei $\mathcal{T}$ eine lokalkonvexe Topologie auf einem linearen Raum X. Zusätzlich sei $\epsilon(X, X')$ die durch die Menge aller gleichgradig stetigen Teilmengen von X' bestimmte Polartopologie auf X. Dann gilt $\mathcal{T} = \epsilon(X, X')$.

Beweis. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Nullumgebungsbasis, bestehend aus abgeschlossenen absolutkonvexen Mengen. Aus Satz 3.7 folgt, dass das Dual von $(X, \sigma(X, X'))$ gleich X' ist. Die abgeschlossenen Halbräume von $(X, \sigma(X, X'))$ entsprechen also jenen von $(X, \mathcal{T})$. Da jede Menge $B \in \mathcal{B}$ der Durchschnitt aller abgeschlossenen Halbräume, die B enthalten, ist, ist B auch $\sigma(X, X')$-abgeschlossen. Nach dem Bipolarsatz Satz 3.16 gilt nun $B = B^{\circ\circ}$ für jedes $B \in \mathcal{B}$.
Da $B \in \mathcal{B}$, ist B° nach Satz 4.11(i) gleichgradig stetig. Definitionsgemäß ist $B^{\circ\circ} = B$ eine $\epsilon(X, X')$-Nullumgebung und daher $\mathcal{T} \subseteq \epsilon(X, X')$.
Sei $H \subseteq X'$ gleichgradig stetig. Also ist H° nach der Definition der Topologie $\epsilon(X, X')$ eine $\epsilon(X, X')$-Nullumgebung. Da H gleichgradig stetig ist, folgt aus Satz 4.11(ii), dass H° eine $\mathcal{T}$-Nullumgebung ist. Also gilt $\epsilon(X, X') \subseteq \mathcal{T}$. □

5 Der Satz von Mackey-Arens

Betrachtet man einen lokalkonvexen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und verfeinert man dessen Topologie, so wird X' größer. Analog gibt es weniger stetige lineare Funktionale auf X, wenn die Topologie gröber wird. Aus Satz 3.7 folgt bereits, dass man $\mathcal{T}$ auf die schwache Topologie $\sigma(X, X')$ abschwächen kann, ohne dabei den topologischen Dualraum zu verändern. Die Frage, die sich nun stellt ist: Wie sehr kann man die Topologie

verfeinern, ohne dabei X' zu verändern? Der Satz von Mackey-Arens liefert für diese Frage eine Antwort in Form der Mackey Topologie.
Man erinnere sich: Für ein duales Paar (X, Y) identifizieren wir Y stets als Teilraum von X^*. Dementsprechend macht folgende Definition Sinn.

Definition 5.1. (zulässig)
Sei (X, Y) ein duales Paar. Eine Topologie $\mathcal{T}$ wird als *zulässig* mit (X, Y) bezeichnet, wenn $(X, \mathcal{T})' = Y$ gilt. Man sagt in dem Fall auch, dass $\mathcal{T}$ eine *Topologie des Paares* (X, Y) ist.

Wir bezeichnen im Folgenden für einen topologischen Vektorraum X mit $(X', \beta(X', X))$ den *starken Dualraum* von X. Außerdem bezeichne $X'' := (X', \beta(X', X))'$ den *Bidualraum* von X.

Definition 5.2. (reflexiv)
Sei X ein topologischer Vektorraum. Der Raum X heißt *semireflexiv*, wenn X ein Hausdorffraum mit der Eigenschaft $X'' = X$ ist. Man nennt X *reflexiv*, wenn darüberhinaus die kanonische Einbettung $\kappa : X \hookrightarrow (X'', \beta(X'', X'))$ mit $\kappa(x)(x') := x'(x)$ stetig ist.

Beispiel 5.3. Aufgrund von Satz 3.7 ist die schwache Topologie $\sigma(X, Y)$ auf X ein Beispiel für eine bezüglich dem Paar (X, Y) zulässige Topologie.
Andererseits gilt für einen normierten Raum X, der nicht reflexiv ist, dass die Normtopologie keine Topologie des Paares (X', X) ist.

Der folgende Satz gibt eine Darstellung des topologischen Duals als Vereinigung von polaren Mengen:

Satz 5.4. Sei X ein topologischer Vektorraum und (X, X^*) das natürliche Paar. Ist $\mathcal{B}$ eine Nullumgebungsbasis in X, so gilt

$$X' = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B^\circ$$

wobei die die polaren Mengen in X^* berechnet werden.

Beweis.

$$\begin{aligned} X' &= \{x' \in X^* : \exists B \in \mathcal{B} : \ \sup_{x \in B} |\langle x, x' \rangle| \leq 1\} \\ &= \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \{x' \in X^* : \ \sup_{x \in B} |\langle x, x' \rangle| \leq 1\} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B^\circ \end{aligned}$$

□

Der Satz von Mackey-Arens wird hier in zwei Teile gegliedert, wobei der zweite Teil eine direkte Konsequenz der ersten Aussage ist und die in den Anfangszeilen des Abschnitts aufgestellten Behauptungen bestätigt. Die folgenden Aussagen wurden von Mackey und Arens bewiesen, wobei Mackey zeigte, dass es unter den lokalkonvexen Topologien eines Paares eine gröbste und eine feinste gibt [11, G.Mackey]. Arens beschrieb anschließend diese feinste Topologie [12, R.Arens].

Satz 5.5. (Mackey-Arens I)
Sei (X, Y) ein duales Paar und $\mathcal{T}$ eine lokalkonvexe Topologie auf X. Dann ist $\mathcal{T}$ zulässig genau dann, wenn es eine Menge $\mathcal{S}$ von $\sigma(Y, X)$-kompakten absolutkonvexen Teilmengen von Y gibt, die Y überdeckt und die $\mathcal{T}$ als Polartopologie erzeugt.

Beweis.
„$\Rightarrow$“ Sei $\mathcal{T}$ eine bezüglich dem Paar zulässige lokalkonvexe Topologie. Definitionsgemäß gilt also $Y = (X, \mathcal{T})'$. Sei $\epsilon(X, Y)$ die durch die Menge ϵ aller gleichgradig stetigen Teilmengen von Y erzeugte Polartopologie auf X. Aus Satz 4.13 folgt, dass $\mathcal{T} = \epsilon(X, Y)$. Nachdem einelementige Teilmengen gleichgradig stetig sind, wird Y durch ϵ überdeckt. Nun kann man ϵ nach Satz 4.6 durch die Menge $\mathcal{S}$ aller $\sigma(Y, X)$-Abschlüsse von absolutkonvexen Hüllen der Mengen aus ϵ ersetzen, ohne dabei $\epsilon(X, Y)$ zu verändern. Also sind die Mengen in $\mathcal{S}$ absolutkonvex. Nun ist die absolutkonvexe Hülle sowie der Abschluss einer gleichgradig stetigen Menge laut Satz 2.18 und Satz 4.10 ebenfalls gleichgradig stetig. Daraus folgt aufgrund von Satz 4.12 die $\sigma(Y, X)$-Kompaktheit der Mengen aus $\mathcal{S}$.

„$\Leftarrow$“ Angenommen $\mathcal{S}'$, bestehend aus $\sigma(Y, X)$-kompakten absolutkonvexen Mengen, überdeckt Y. Ohne die dadurch bestimmte Topologie zu beeinflussen, kann man $\mathcal{S}'$ durch die Menge $\mathcal{S}$ aller positiven Vielfachen der absolutkonvexen Hüllen endlicher Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{S}$ ersetzen. Nun sind absolutkonvexe Hüllen endlicher Vereinigungen von konvexen kompakten Mengen laut [1, Satz 4.4.4] wieder kompakt. Also sind die Mengen aus $\mathcal{S}$ absolutkonvex und $\sigma(Y, X)$-kompakt und $\mathcal{S}$ überdeckt Y. Da die Mengen in $\mathcal{S}$ schwach kompakt sind, sind sie auch schwach beschränkt. Wie bei der starken Topologie genügen die polaren Mengen der Mengen aus $\mathcal{S}$ um eine Nullumgebungsbasis zu erhalten. Also bildet $\mathcal{S}^\circ = \{S^\circ : S \in \mathcal{S}\}$ eine Nullumgebungsbasis für $\mathcal{T}$. Sei $S^{\circ *}$ die polare Menge von S° in X^*. Nach Satz 5.4 folgt $(X, \mathcal{T})' = \bigcup \mathcal{S}^{\circ *}$. Da man jede Menge $S \in \mathcal{S}$ als Teilmenge von X^* interpretieren kann, folgt durch den Bipolarsatz Satz 3.16, die Gültigkeit von $S^{\circ *} = \overline{S}^{\sigma(X^*, X)}$. Aufgrund der $\sigma(Y, X)$-Kompaktheit von jeder Menge $S \in \mathcal{S}$ und da $\sigma(Y, X)$ die Spurtopologie bezüglich $\sigma(X^*, X)$ auf Y ist, folgt die $\sigma(X^*, X)$-Kompaktheit von S. Daraus folgt wiederum die $\sigma(X^*, X)$-Abgeschlossenheit der Mengen aus $\mathcal{S}$. Es gilt also $S^{\circ *} = \overline{S}^{\sigma(X^*, X)} = S$ und demnach $(X, \mathcal{T})' = \bigcup \mathcal{S}^{\circ *} = \bigcup \mathcal{S}$. Nachdem $\mathcal{S}$ eine Überdeckung von Y ist, gilt also $(X, \mathcal{T})' = \bigcup \mathcal{S} = Y$. Die Inklusion $(X, \mathcal{T})' \subseteq Y$ gilt, da die Abschlüsse der absolutkonvexen Hüllen der Mengen $\mathcal{S}$ kompakt sind (vergleiche [13, Korollar 13.4]). $\square$

Satz 5.6. (Mackey-Arens II)
Sei (X, Y) ein duales Paar. Eine lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}$ ist zulässig genau dann, wenn

$$\sigma(X, Y) \subseteq \mathcal{T} \subseteq \tau(X, Y)$$

gilt.

Beweis.
„$\Rightarrow$“ Sei die Topologie $\mathcal{T}$ zulässig. Dann ist $\mathcal{T}$ nach Satz 5.5 eine durch eine Menge von

$\sigma(Y,X)$-kompakten absolutkonvexen Teilmengen von Y bestimmte Polartopologie. Also ist $\mathcal{T}$ gröber als $\tau(X,Y)$ (diese wird nämlich durch alle $\sigma(Y,X)$-kompakten absolutkonvexen Teilmengen von Y bestimmt).
Mit Satz 3.7 wissen wir, dass $\sigma(X,Y)$ eine zulässige Topologie ist. Darüberhinaus ist $\sigma(X,Y)$ die gröbste Topologie auf X, bezüglich derer alle Elemente aus Y stetig sind. Also gilt $\sigma(X,Y) \subseteq \mathcal{T}$.

„$\Leftarrow$" Angenommen es gilt $\sigma(X,Y) \subseteq \mathcal{T} \subseteq \tau(X,Y)$. Dann folgt aus Satz 3.7 und Satz 5.5: $Y = (X, \sigma(X,Y))' \subseteq (X,\mathcal{T})' \subseteq (X, \tau(X,Y))' = Y$. $\square$

Als Illustration der vorangegangenen Ergebnisse wollen wir die Mackey Topologie $\tau(\ell_\infty, \ell_1)$ auf ℓ_∞ erzeugen und wenden anschließend den Satz von Mackey-Arens an. Um nicht zu sehr ausholen zu müssen, nehmen wir grundlegendes Wissen über die Räume ℓ_∞ und ℓ_1 als Voraussetzung an und definieren diese lediglich um sie wieder in Erinnerung zu rufen:

$$\ell_1 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$$

ist der Raum aller absolut summierbaren Zahlenfolgen. Und

$$\ell_\infty := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$$

der Raum aller beschränkten Folgen.

Um nun mit dem Beispiel starten zu können, benötigen wir noch zwei Ergebnisse, für dessen Beweise wir auf [2, Bemerkung 5.7 und Korollar 5.10] verweisen.

Lemma 5.7. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,\infty)$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty$. Dann gibt es eine steigende, gegen ∞ divergierende Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0,\infty)$, sodass $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n a_n < \infty$.

Lemma 5.8. $A \subseteq \ell_1$ ist $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$-kompakt genau dann, wenn A kompakt ist.

Beispiel 5.9. Wir unterteilen dieses Beispiel in vier Unterpunkte und starten damit, die Menge aller $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$-kompakten Teilmengen von ℓ_1 zu finden.

1.) Wir nehmen zunächst als bekannt an, dass für eine Teilmenge $A \subseteq \ell_1$ die folgenden drei Aussagen äquivalent sind.

- $A \subseteq \ell_1$ ist relativ kompakt.
- A ist beschränkt und $\sup_{x\in A} \sum_{j=n}^{\infty} |x_j| \to 0$ für $n \to \infty$.
- Es gibt eine fallende Nullfolge $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0,\infty)$, sodass

$$A \subseteq A'_\alpha := \{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l_1 : \sum_{j=n}^{\infty} |x_j| \leq \alpha_n \text{ für } n \in \mathbb{N}\}.$$

Nun wissen wir wegen Lemma 5.8, dass eine kompakte Teilmenge $A \subseteq \ell_1$ auch $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$-kompakt ist. Diese Tatsache nutzen wir im Folgenden, da wir für die Mackey Topologie $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$-kompakte Teilmengen von ℓ_1 (die zusätzlich absolutkonvex sind) benötigen.

2.) Sei $\mathcal{A} := \{\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} : \alpha$ ist eine fallende Nullfolge in $(0, \infty)\}$. Dann bilden die bereits oben definierten Mengen A'_α die Menge $\mathcal{S}'$

$$\mathcal{S}' := \{A'_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$$

und wir erhalten, da die Mengen A'_α absolutkonvex sind

$$\tau(\ell_\infty, \ell_1) = \mathcal{T}_{\mathcal{S}'}.$$

Wobei $\mathcal{T}_{\mathcal{S}'}$ die von der Menge $\mathcal{S}'$ erzeugte Polartopologie auf ℓ_∞ ist.
Bezeichne B_{ℓ_1} die abgeschlossene Einheitskugel in ℓ_1. Für

$$\alpha B_{\ell_1} := \{\alpha x := (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x \in \ell_1, \|x\| \leq 1\}$$

wollen wir zeigen, dass wir die Menge $\mathcal{S}'$ durch die Menge

$$\mathcal{S} := \{\alpha B_{\ell_1} : \alpha \in \mathcal{A}\}$$

ersetzen können:
Sei $\alpha \in \mathcal{A}$ und $x \in B_{\ell_1}$. Dann gilt

$$\sum_{j=n}^{\infty} \alpha_j |x_j| \leq \alpha_n \sum_{j=n}^{\infty} |x_j| \leq \alpha_n \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Dabei folgt die erste Ungleichung aus der Tatsache, dass α eine fallende Folge ist und die zweite Ungleichung aufgrund von $x \in B_{\ell_1}$. Es gilt also $\alpha B_{\ell_1} \subseteq A'_\alpha$.
Sei wieder $\alpha \in \mathcal{A}$. Betrachtet man $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n - \alpha_{n+1} = \alpha_1 < \infty$, so gibt es mit Lemma 5.7 ein $\beta \in \mathcal{A}$, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n}(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \leq 1$ (die gegen ∞ divergierende Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Lemma 5.7 ist hier also $(\frac{1}{\beta_n})_{n\in\mathbb{N}}$).
Für $x \in A'_\alpha$ wollen wir nun $x \in \beta B_{\ell_1}$ zeigen (d.h. wir müssen $\|\frac{x}{\beta}\| \leq 1$ zeigen):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{\beta_n} = \frac{1}{\beta_1} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + (\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1}) \sum_{n=2}^{\infty} |x_n| + \cdots$$

$$\leq \frac{1}{\beta_1}(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{1}{\beta_2}(\alpha_2 - \alpha_3) + \cdots \leq 1$$

Die erste Ungleichung folgt dabei aus $x \in A'_\alpha$. Mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n}(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \leq 1$ erhält man die zweite Ungleichung.
Es gilt also $A'_\alpha \subseteq \beta B_{\ell_1}$.

3.) Im vierten Abschnitt haben wir gesehen, dass eine Polartopologie aufgrund ihrer Lokalkonvexität von einer Familie von Seminormen erzeugt wird. Für $\alpha \in \mathcal{A}$ sei $A_\alpha := \alpha B_{\ell_1}$. Des Weiteren sei q_{A_α} eine Seminorm auf ℓ_∞ definiert wie in Lemma 4.4, also

$$q_{A_\alpha}(x) = \sup |\langle x, A_\alpha \rangle| \qquad\qquad x \in \ell_\infty.$$

Die Familie $\{q_{A_\alpha}\}$ erzeugt also die Mackey Topologie $\tau(\ell_\infty, \ell_1)$.

4.) Der vierte Unterpunkt befasst sich nun lediglich mit der Anwendung des Satzes von Mackey-Arens. Dieser besagt nämlich, dass die Mackey Topologie $\tau(\ell_\infty, \ell_1)$ zulässig bezüglich des dualen Paares (ℓ_∞, ℓ_1) ist.
Es gilt also

$$(\ell_\infty, \tau(\ell_\infty, \ell_1))' = \ell_1.$$

Die Tatsache, dass ℓ_1 der Dualraum von ℓ_∞ bezüglich der Mackey Topologie ist, kann man auch direkt zeigen - hierbei verweise ich auf [2, Beispiel 5.6].

6 Konsequenzen des Satzes von Mackey-Arens

Die Eigenschaft einer Topologie zulässig zu sein liefert eine Art Permanenz. Denn für jegliche Topologien, die zulässig sind, ist die Menge aller stetigen Funktionale gleich. Der Satz von Mackey-Arens liefert uns zulässige Topologien und dementsprechend einige Anwendungen. Darunter auch, dass für jede zulässige Topologie des Paares (X, X') die Menge aller beschränkten Mengen gleich ist. Diese Aussage werden wir in Satz 6.10 beweisen.
Erinnern wir uns an eine Konsequenz des Hahn-Banach Trennungssatzes, wonach jede abgeschlossene konvexe Teilmenge C eines lokalkonvexen topologischen Vektorraumes als Durchschnitt aller abgeschlossenen Halbräume, die C enthalten, dargestellt werden kann. So ein abgeschlossener Halbraum ist definiert durch $L := \{x : f(x) \leq c\}$, wobei f ein stetiges lineares Funktional und c eine reelle Zahl ist. Für Topologien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$, die bezüglich dem Paar (X, X') zulässig sind, gilt definitionsgemäß $(X, \mathcal{T}_1)' = (X, \mathcal{T}_2)'$. Dementsprechend ist die Menge aller abgeschlossen konvexen Mengen für beide Topologien gleich. Notieren wir das nun als erstes aus der Kompatibilität der Topologien folgende Ergebnis.

Korollar 6.1. Sei (X, Y) ein duales Paar. Dann gilt

a.) die Menge aller abgeschlossenen konvexen Teilmengen von X stimmt für alle zulässigen Topologien des Paares überein, und

b.) der Abschluss einer konvexen Teilmenge von X ist für jede zulässige Topologie gleich.

c.) Für jede zulässige Topologie $\mathcal{T}$ und jede $\mathcal{T}$-abgeschlossene absolutkonvexe Teilmenge $B \subseteq X$ gilt $B = B^{\circ\circ}$ aufgrund des Bipolarsatzes Satz 3.16.

Um zu der Hauptaussage des Abschnitts zu kommen, ist die Definition einer sogenannten Tonne notwendig.

Definition 6.2. (Tonne)
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. Eine Teilmenge $T \subseteq X$ heißt *Tonne*, wenn T abgeschlossen, absorbierend und absolutkonvex ist.
Ist $(X, \mathcal{T})$ lokalkonvex, so nennen wir X *tonneliert*, wenn jede Tonne eine Nullumgebung ist.

Beispiel 6.3. Jeder Banachraum ist tonneliert.

Bemerkung 6.4. Da jede Nullumgebung absorbierend ist, ist die abgeschlossene absolutkonvexe Hülle einer Nullumgebung eine Tonne. In einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum gibt es insbesondere eine Nullumgebungsbasis bestehend aus Tonnen.
Zusätzlich sei bemerkt, dass man in einem lokalkonvexen topologischen Raum aufgrund von Korollar 6.1 nicht zwischen einer Tonne und einer „schwachen Tonne" (einer Tonne bezüglich der schwachen Topologie) unterscheiden muss. Da man bei polaren Mengen mit dem schwachen Abschluss zu tun hat, vereinfacht diese Tatsache einige Ergebnisse.

Erinnern wir uns an Satz 4.11 zurück. Dieser lieferte uns eine Äquivalenz für die gleichgradige Stetigkeit einer Teilmenge des topologischen Dualraums, sofern diese Teilmenge im Polar einer Nullumgebung liegt. Folgender Satz, bei dem wir statt gleichgradig stetigen Teilmengen schwach beschränkte Teilmengen untersuchen und die gerade definierten Tonnen eine Rolle spielen, ist von analogem Typ.

Satz 6.5. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Eine Teilmenge $H \subseteq X'$ ist $\sigma(X', X)$-beschränkt genau dann, wenn es eine Tonne B in X gibt, sodass $H \subseteq B^\circ$ gilt.

Beweis.
„$\Leftarrow$" Sei $B \subseteq X$ eine Tonne und $H \subseteq B^\circ \subseteq X'$. Um die $\sigma(X', X)$-Beschränktheit von H zu zeigen, reicht es, die von B° zu zeigen. Diese ist laut Satz 3.13 äquivalent zur Eigenschaft, dass $B^{\circ\circ}$ absorbierend ist. Da B eine Tonne ist, ist B absorbierend und mit dem Bipolarsatz Satz 3.16 gilt $B = B^{\circ\circ}$. Also ist $B^{\circ\circ}$ absorbierend und B° ist $\sigma(X', X)$-beschränkt.

„$\Rightarrow$" Sei $H \subseteq X'$ schwach beschränkt. Dann ist H° nach Satz 3.14a.) absolutkonvex und $\sigma(X, X')$-abgeschlossen. Und aufgrund von Satz 3.13 absorbierend. Die Menge H° ist also eine (schwache) Tonne. Da H° abgeschlossen und konvex ist, ist H° nach Korollar 6.1 auch bezüglich der ursprünglichen Topologie $\mathcal{T}$ auf X eine Tonne. Mit Satz 3.14d.) gilt nun $H \subseteq H^{\circ\circ}$. Die Menge H° ist also die gesuchte Tonne dessen polare Menge eine Obermenge von H ist. ☐

Satz 6.5 liefert uns eine Verbindung zwischen schwach beschränkt und polaren Mengen von Tonnen. Durch den nächsten Satz erhalten wir nun eine Verbindung zwischen Tonnen und polaren Mengen von schwach beschränkten Mengen. Dieser Satz wird anschließend für den Beweis der Aussage, dass die Menge aller beschränkten Teilmengen gleich ist für Topologien, die bezüglich dem vorgegebenen Paar zulässig sind, verwendet.

Satz 6.6. Sei (X, Y) ein duales Paar und $\mathcal{T}$ eine zulässige lokalkonvexe Topologie. Dann ist B eine Tonne in $(X, \mathcal{T})$ genau dann, wenn B das Polar einer $\sigma(Y, X)$-beschränkten Teilmenge von Y ist.

Beweis. Sei $\mathcal{T}$ eine bezüglich dem Paar (X, Y) zulässige Topologie.
„$\Rightarrow$" Sei B eine Tonne in $(X, \mathcal{T})$. Dann ist B definitionsgemäß absorbierend. Nach Satz 3.13 folgt die $\sigma(Y, X)$-Beschränktheit von $B^\circ \subseteq Y$. Nun gilt aufgrund des Bipolarsatzes Satz 3.16, $B = B^{\circ\circ}$. Also ist B die polare Menge der $\sigma(Y, X)$-beschränkten Menge B° von Y.

„$\Leftarrow$" Sei H eine $\sigma(Y, X)$-beschränkte Teilmenge von Y. Nach Satz 3.13 ist H° absorbierend und nach Satz 3.14a.) eine $\sigma(X, Y)$-abgeschlossene absolutkonvexe Teilmenge von X. Aufgrund der Kompatibilität von $\mathcal{T}$ ist die Menge H° eine Tonne in $(X, \mathcal{T})$. □

Im Abschnitt der grundlegenden Definitionen und Sätze haben wir den Begriff absorbierend eingeführt. Für den nächsten Satz betrachten wir nun Mengen, die andere Mengen absorbieren. Verallgemeinern wir dafür zunächst Definition 2.5.

Definition 6.7. (absorbiert)
Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $A, B \subseteq X$. Wir sagen A *absorbiert* B, wenn es ein $t > 0$ gibt, sodass $B \subseteq \lambda A$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \geq t$.

Satz 6.8. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und B eine Tonne in $(X, \mathcal{T})$. Dann absorbiert B jede konvexe kompakte Teilmenge $K \subseteq X$.

Bevor wir mit dem Beweis starten, benötigen wir noch eine Eigenschaft für konvexe Mengen.

Lemma 6.9. Seien a und b positive Skalare und K sei konvex. Dann gilt

$$(a + b)K = aK + bK.$$

Beweis. Für $a, b > 0$ gilt $(a + b)K \subseteq aK + bK$ für jede Menge K.
Sei für die entgegengerichtete Inklusion $y \in aK + bK$. Dann ist y darstellbar als $y = av + bw$ für Elemente $v, w \in K$. Da K konvex ist gilt nun

$$v \cdot a/(a + b) + w \cdot b/(a + b) = y/(a + b) \in K.$$

Dementsprechend gilt $y \in (a + b)K$. □

Beweis. (Satz)
Sei B eine Tonne in $(X, \mathcal{T})$. Zeigen wir zunächst, dass unter der folgenden Annahme die Menge B eine beliebige konvexe kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ absorbiert. Angenommen es gibt ein $x \in K$, sodass

$$K \cap (x + V) \subseteq nB \text{ für eine Nullumgebung } V \text{ und } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

In anderen Worten: angenommen K enthält eine Umgebung von x, welche von B absorbiert wird. Verschoben zum Ursprung ist (1) also

$$(K - x) \cap V \subseteq nB - x. \tag{2}$$

Da K kompakt ist, ist $K - x$ beschränkt. Es muss also ein $a \geq 1$ geben, sodass

$$(K - x) \subseteq aV \tag{3}$$

gilt. Nachdem x ein Element aus K ist, gilt $0 \in K - x$. Da K konvex ist, gilt für jedes $y \in K - x$,

$$(1/a) \cdot y = y \cdot (1/a) + 0 \cdot (1 - 1/a) \in K - x.$$

Woraus

$$(K - x) \subseteq a(K - x) \tag{4}$$

folgt.
Nun gilt $(K-x) \subseteq a(K-x) \cap aV \subseteq a(nB-x)$. Dabei folgt die erste Teilmengeninklusion aus (3) bzw. (4) und die zweite aus (2). Diese Inklusionskette impliziert nun

$$K \subseteq a(nB - x) + x = anB + (1 - a)x. \tag{5}$$

Da B eine Tonne ist, ist B absorbierend. Es gibt also ein $t > 0$, sodass $(1 - a)x \in \lambda B$ für alle $|\lambda| \geq t$. Nun kommt Lemma 6.9 zum Einsatz, denn da B konvex ist, gilt

$$K \subseteq anB + \lambda B = (an + \lambda)B. \tag{6}$$

B absorbiert also K.
Wir gehen nun indirekt vor, indem wir zeigen, dass wenn (1) nicht erfüllt ist, B nicht absorbierend ist. Das wäre nämlich ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass B eine Tonne ist.
Angenommen es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und jede Nullumgebung V

$$K \cap (x + V) \nsubseteq nB.$$

Dann gibt es für $n = 1$, jede offene Nullumgebung V_0 und jedes $x_0 \in K$ ein Element x_1, sodass $x_1 \in K \cap (x_0 + V_0) \cap B^{\mathrm{C}}$. Da B eine Tonne ist, ist B abgeschlossen, also ist $(x_0 + V_0) \cap B^{\mathrm{C}}$ als Durschnitt zweier offener Mengen ebenfalls offen. Es gibt also eine offene Nullumgebung V_1, sodass

$$x_1 + \overline{V_1} \subseteq (x_0 + V_0) \cap B^{\mathrm{C}}$$

gilt. In analoger Weise gibt es ein Element $x_2 \in K \cap (x_1 + V_1) \cap (2B)^{\mathrm{C}}$ und eine offene Nullumgebung V_2, sodass

$$x_2 + \overline{V_2} \subseteq (x_1 + V_1) \cap (2B)^{\mathrm{C}}$$

gilt. Setzt man das fort für $n \in \mathbb{N}$, so erhält man

$$x_0 + V_0 \supseteq x_1 + \overline{V_1} \supseteq x_1 + V_1 \supseteq x_2 + \overline{V_2} \supseteq x_2 + V_2 \supseteq \cdots$$

Schlussendlich erhalten wir eine fallende Mengenfolge $(K \cap (x_n + \overline{V_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ von nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen von K. Nun ist eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Teilmenge ebenfalls kompakt und der Schnitt von nichtleeren kompakten Mengen ist ebenfalls nichtleer. Es gibt also ein Element $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (K \cap (x_n + \overline{V_n}))$. Für dieses y gilt $y \notin nB$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Also ist B nicht absorbierend. Wir haben also den erwünschten Widerspruch erzielt. □

Nachdem wir jetzt alle notwendigen Ergebnisse gesammelt haben, kommen wir nun zum Satz von Mackey über beschränkte Teilmengen in einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum. Dieser Satz ist eine Konsequenz des Satzes von Mackey-Arens und benötigt für den Beweis Satz 6.5 und Satz 6.8.

Satz 6.10. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer toplogischer Vektorraum. Dann ist die Menge aller beschränkten Teilmengen von X bezüglich jeder (X, X')-zulässigen Topologie gleich.

Beweis. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Nach dem Satz von Mackey-Arens Satz 5.6 gilt $\sigma(X, X') \subseteq \mathcal{T} \subseteq \tau(X, X')$. Ist eine Menge $\mathcal{T}$-beschränkt, so ist diese auch bezüglich jeder Topologie beschränkt, die gröber als $\mathcal{T}$ ist. Um die Aussage zu beweisen, genügt es also zu zeigen, dass eine $\sigma(X, X')$-beschränkte Teilmenge von X auch $\tau(X, X')$-beschränkt ist.
Sei B eine $\sigma(X, X')$-beschränkte Teilmenge von X und V eine abgeschlossene absolutkonvexe $\tau(X, X')$-Nullumgebung. Aufgrund von Satz 3.12 folgt die $\sigma(X', X)$-Kompaktheit von V°. Nach Satz 6.6 ist B° eine $\sigma(X', X)$-Tonne in X'. Nachdem Tonnen laut Satz 6.8 konvexe kompakte Teilmengen absorbieren, muss B° die absolutkonvexe und $\sigma(X', X)$-kompakte Menge V° absorbieren. Mit dem Bipolarsatz Satz 3.16 und Satz 3.14d.) gilt $V = V^{\circ\circ}$ sowie $B^{\circ\circ} \supseteq B$. Mit Satz 3.14b.) & c.) sowie Definition 6.7 absorbiert V die Menge B. Da eine Menge B in einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum beschränkt ist, wenn sie von jeder Nullumgebung absorbiert wird und V beliebig gewählt war, ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung 6.11. Für einen lokalkonvexen topologischen Vektorraum muss man also nicht zwischen beschränkten und schwach-beschränkten Teilmengen unterscheiden.

Wird die Topologie eines lokalkonvexen topologischen Vektorraumes durch eine Metrik induziert, so bezeichnen wir diesen als metrisierbar. Diese Begriffsbildung führt uns nun zu einer weiteren Konsequenz des Satzes von Mackey-Arens und auch dem vorangegangenen Satz. Ist nämlich ein Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar, so ist dessen Topologie gleich der Mackey Topologie $\tau(X, X')$, wie wir im kommenden Satz zeigen werden.

Satz 6.12. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein metrisierbarer lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Dann gilt $\mathcal{T} = \tau(X, X')$.

Beweis. Sei $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar. Durch den Satz von Mackey-Arens wissen wir zunächst, dass $\mathcal{T} \subseteq \tau(X, X')$ gilt. Bleibt also nur noch $\tau(X, X') \subseteq \mathcal{T}$ zu zeigen.

Sei U eine $\tau(X,X')$-Nullumgebung. Um zu zeigen, dass U auch eine $\mathcal{T}$-Nullumgebung ist, gehen wir indirekt vor.
Sei also U keine $\mathcal{T}$-Nullumgebung und $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Nullumgebungbasis bezüglich $\mathcal{T}$. Nachdem die Mengen $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullumgebungen sind, sind sie absorbierend. Da U keine $\mathcal{T}$-Nullumgebung ist, gibt es für jede positive ganze Zahl n ein Element $x_n \in (1/n)V_n \setminus U$. Da die Punkte nx_n gegen null konvergieren, bilden sie eine $\mathcal{T}$-beschränkte Menge. Nach Satz 6.10 ist $\{nx_n\}$ auch $\tau(X,X')$-beschränkt. Also wird $\{nx_n\}$ von U absorbiert. Es gibt also ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $\{nx_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq kU$. Folglich gilt $kx_k \in kU$ bzw. $x_k \in U$. Wodurch ein Widerspruch zu $x_n \in (1/n)V_n \setminus U$ erzeugt wird. □

7 Nicht-lokalkonvexe Topologien

Der Satz von Mackey-Arens liefert uns $\sigma(X,Y) \subseteq \mathcal{T} \subseteq \tau(X,Y)$ für lokalkonvexe Topologien $\mathcal{T}$ die zulässig bezüglich des Paares (X,Y) sind. In diesem Abschnitt werfen wir einen Blick auf Topologien, die nicht-lokalkonvex sind. Als Ergebnis erhalten wir die Existenz einer nicht-lokalkonvexen Topologie zwischen der schwachen Topologie und der Mackey Topologie, sofern diese nicht übereinstimmen. Diese Existenz wird anschließend in einem Beispiel illustriert.

Satz 7.1. Sei (X,X') ein duales Paar. Sind die schwache Topologie $\sigma(X,X')$ und die Mackey Topologie $\tau(X,X')$ nicht gleich, dann gibt es eine nicht-lokalkonvexe Vektortopologie $\mathcal{T}$, sodass
$$\sigma(X,X') \subseteq \mathcal{T} \subseteq \tau(X,X')$$
gilt.

Für den Beweis bedarf es vier Lemmata, wobei das erste aus einem Induktionsargument und dem Satz von Hahn-Banach folgt.

Lemma 7.2. Sei (X,X') ein duales Paar und seien X sowie X' unendlich dimensionale Vektorräume. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X und eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X', sodass
$$\langle x_i, y_j\rangle = \delta_{ij} \qquad \text{für alle } i,j$$
gilt.

Lemma 7.3. Sei (X,X') ein duales Paar und seien X sowie X' unendlich dimensionale Vektorräume. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X', sodass $\langle x_i, y_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle i,j gilt.
Sei darüberhinaus $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach beschränkt in X' und p sei auf X definiert durch
$$p(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\langle x, y_n\rangle|^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

Dann bestimmt die Semimetrik $d(x,y) = p(x-y)$ eine nicht-lokalkonvexe Vektortopologie $\mathcal{T}_p$ auf X.

Beweis. Da $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach beschränkt ist, ist die Konvergenz der rechten Seite in (7) sichergestellt. Darüberhinaus ist die von der Semimetrik d bestimmte Topologie $\mathcal{T}_p$ eine Vektortopologie. Sei $V_{p_\epsilon} := \{x \in X : p(x) \leq \epsilon\}$. Ist $\mathcal{T}_p$ lokalkonvex, so enthält V_{p_1} eine konvexe $\mathcal{T}_p$-Nullumgebung. Insbesondere enthält V_{p_1} die konvexe Hülle von V_{p_ϵ} für einige $\epsilon > 0$. Sei für $k \in \mathbb{N}$

$$w_k := \epsilon^2 4^k x_k.$$

Dann gilt wegen

$$p(w_k) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\langle \epsilon^2 4^k x_k, y_n \rangle|^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon 4^{\frac{k}{2}} 2^{-n} |\langle x_k, y_n \rangle|^{\frac{1}{2}} = \epsilon 4^{\frac{k}{2}} 2^{-k} = \epsilon,$$

dass $w_k \in V_{p_\epsilon}$ gilt. Wobei die zweite Gleichheit aus der Linearität der Bilinearform in der ersten Komponente folgt.
Nun ist $r_l := l^{-1}(w_1 + w_2 + \cdots + w_l)$ ein Element der konvexen Hülle von V_{p_ϵ}. Allerdings gilt

$$p(r_l) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\langle l^{-1}(w_1 + w_2 + \cdots + w_l), y_n \rangle|^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} l^{-\frac{1}{2}} |\langle \epsilon^2 4 x_1, yn \rangle + \langle \epsilon^2 4^2 x_2, yn \rangle + \cdots \langle \epsilon^2 4^l x_l, yn \rangle|^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{l} 2^{-n} l^{-1/2} \epsilon 2^n = l(l)^{-\frac{1}{2}} \epsilon = l^{\frac{1}{2}} \epsilon.$$

Dieser Ausdruck ist für hinreichend großes $l \in \mathbb{N}$ größer als 1. Demnach enthält V_{p_1} nicht die konvexe Hülle von V_{p_ϵ}. Was im Widerspruch zu unserer Annahme steht. Also ist $\mathcal{T}_p$ nicht-lokalkonvex. □

Das nächste Lemma wird lediglich für den Beweis des vierten Lemmas benötigt. Aus diesem Grund werden wir dieses auch nicht in dieser Arbeit beweisen. In diesem Lemma kommt dabei der Begriff der *Kodimension* vor. Diese ist für einen Teilraum M eines Vektorraumes X als die Dimension des Faktorraumes X/M definiert. Ist $X = M + N$ eine algebraische direkte Summe, dann nennen wir N komplementärer Teilraum bezüglich M. Hierbei sei erwähnt, dass so ein komplementärer Teilraum stets existiert. Im nächsten Lemma bezeichnen wir mit $X = M \oplus N$ die topologische direkte Summe. Da diese nur kurz im Beweis für das letzte Lemma vorkommt, gehen wir auf diesen Begriff nicht näher ein und verweisen dabei auf [10].

Lemma 7.4. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und M ein abgeschlossener Teilraum von X mit endlicher Kodimension. Dann gilt $X = M \oplus N$ für jeden algebraischen komplementären Teilraum N von X.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [10, Kapitel 1, Satz 3.5] □

Bemerkung 7.5. N aus dem vorherigen Lemma ist sogar Hausdorff.

Lemma 7.6. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und M ein Teilraum, dessen Abschluss endliche Kodimension hat. Ist die Spurtopologie auf M lokalkonvex, so ist auch $\mathcal{T}$ lokalkonvex.

Beweis. Sei $\overline{M}$ der $\mathcal{T}$-Abschluss von M. Nachdem die $\mathcal{T}$-Abschlüsse der Mengen einer Nullumgebungsbasis in M eine Nullumgebungsbasis in $\overline{M}$ bilden, ist die Spurtopologie auf $\overline{M}$ lokalkonvex.
Da $\overline{M}$ endliche Kodimension hat, ist nach Lemma 7.4 der Raum X die topologische direkte Summe aus $\overline{M}$ und einem endlich dimensionalen topologischen Vektorraum, der Hausdorff ist.
Nachdem die Spurtopologie sowohl auf $\overline{M}$ als auch auf dem endlich dimensionalen Raum lokalkonvex ist, ist auch auch $\mathcal{T}$ lokalkonvex. □

Kommen wir also nun zum Beweis des Satzes.

Beweis. (Satz)
Sei die schwache Topologie $\sigma(X, X')$ ungleich der Mackey Topologie $\tau(X, X')$. Dann gibt es eine $\sigma(X, X')$-kompakte absolutkonvexe Teilmenge B von X', die nicht in der abgeschlossenen konvexen Hülle einer endlichen Teilmenge von X' liegt. Also ist der von B aufgespannte lineare Teilraum M' von X' unendlich dimensional. Nun folgt aus Lemma 7.2, dass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X und eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B gibt, sodass $\langle x_i, y_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle i, j gilt. Nachdem B schwach kompakt ist, ist B schwach beschränkt. Da B schwach beschränkt ist, ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B schwach beschränkt. Es folgt aus Lemma 7.3, dass die Topologie $\mathcal{T}_p$ definiert auf X durch (7) nicht-lokalkonvex ist. Darüberhinaus ist p auf X dominiert durch die Seminormen

$$q_B(x) = \sup |\langle x, B\rangle|,$$

die die Mackey Topologie erzeugen. Also ist $\mathcal{T}_p$ gröber als $\tau(X, X')$.
Sei nun $\mathcal{T}$ das Supremum von $\sigma(X, X')$ und $\mathcal{T}_p$. Also ist $\mathcal{T}$ die durch die Vereinigung der beiden Topologien erzeugte Topologie. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Vektortopologie mit $\sigma(X, X') \subseteq \mathcal{T} \subseteq \tau(X, X')$.
Um zu zeigen, dass $\mathcal{T}$ nicht-lokalkonvex ist, gehen wir vom Gegenteil aus und behaupten die Topologie wäre lokalkonvex. Dann enthält V_{p_1} eine konvexe $\mathcal{T}$-Nullumgebung V. Diese Nullumgebung enthält nun Mengen der Form

$$V_{p_\epsilon} \cap \{x : |\langle x, z_i\rangle| \leq 1, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

für einige $\epsilon > 0$ und $z_1, z_2, \ldots, z_n \in X'$. Sei H ein Teilraum von X auf dem alle z_i verschwinden. Da $V \cap H \subseteq V_{p_1} \cap H$ gilt auch $V_{p_\epsilon} \cap H \subseteq V_{p_1} \cap H$. Also bestimmt die Einschränkung von p auf H eine lokalkonvexe Topologie auf H. Da H von endlicher Kodimension ist, folgt aus Lemma 7.6, dass p eine lokalkonvexe Topologie auf X erzeugt. Das steht aber im Widerspruch zu Lemma 7.3. Also ist $\mathcal{T}$ nicht-lokalkonvex und wir haben die Existenz gezeigt. □

Um die vorangegangenen Ergebnisse zu illustrieren, betrachten wir nun folgendes Beispiel. Dabei betrachten wir eine Topologie auf dem Lebesgue Raum $L_p(0,1)$. Dafür sei erinnert, dass $L_p(0,1)$ die Menge aller (Äquivalenzklassen von μ-fast überall gleichen) messbaren Funktionen $f : (0,1) \to \mathbb{C}$ mit $(\int_0^1 |f|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$ ist. Wobei μ das Lebesgue Maß auf $(0,1)$ ist.

Beispiel 7.7. Sei $0 < q < 1 \leq p < \infty$. Und sei $X := L_p(0,1)$. Definieren wir mit

$$d_q(f,g) := \int_0^1 |f-g|^q$$

eine Metrik auf X. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_q$ die durch die Metrik erzeugte Topologie. Sei $\mathcal{T}$ die initiale Topologie bezüglich der Abbildungen

$$id : X \to (X, \sigma(X,X')) \qquad\qquad id : X \to (X, \mathcal{T}_q),$$

also die gröbste Topologie, sodass diese beiden Abbildungen stetig sind. Aufgrund der Stetigkeit der linken Abbildung gilt nun $\sigma(X,X') \subseteq \mathcal{T}$. Da die Abbildungen

$$id : (X, \|\cdot\|_p) \to (X, \sigma(X,X')) \qquad\qquad id : (X, \|\cdot\|_p) \to (X, \mathcal{T}_q)$$

stetig sind, gilt $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|_p}$. Außerdem gilt laut Satz 6.12 die Gleichheit der Normtopologie und der Mackey Topologie. Insgesamt erhalten wir also die gewünschte Inklusionskette:

$$\sigma(X,X') \subseteq \mathcal{T} \subseteq \tau(X,X')$$

Bleibt also zu zeigen, dass $\mathcal{T}$ nicht-lokalkonvex ist:
Zunächst ist eine $\mathcal{T}$-Nullumgebungsbasis gegeben durch $\{V_{Y,\epsilon} : Y \subseteq (X, \|\cdot\|_p)' \text{ endlich}, \epsilon > 0\}$ mit

$$V_{Y,\epsilon} := \{f \in X : \sup_{y\in Y} |y(f)| \leq \epsilon, d_q(f,0) \leq \epsilon\}.$$

Wir zeigen nun, dass die $\mathcal{T}$-Nullumgebung $U := \{f \in X : d_q(f,0) < 1\}$ nicht die konvexe Hülle einer der Nullumgebungen $V_{Y,\epsilon}$ enthält. Beziehungsweise, wir zeigen, dass die konvexe Hülle von $V_{Y,\epsilon}$ die Elemente $f \in \bigcap\limits_{y\in Y} y^{-1}(0)$ mit $d_q(f,0)$ beliebig groß enthält.
Wir gehen nun ähnlich vor wie im Beweis von Lemma 7.3.
Sei also $Y \subseteq (X, \|\cdot\|_p)'$ endlich und $\epsilon > 0$. Zusätzlich sei $n \in \mathbb{N}$ und für $1 \leq j \leq n$ der Raum $L_p(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n})$ die Menge aller Elemente aus $L_p(0,1)$ die auf $(0,1) \setminus (\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n})$ verschwinden. Nun finden wir Elemente

$$f_j \in \bigcap_{y\in Y} y^{-1}(0) \cap L_p(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}) \text{ mit } d_q(f_j,0) = \epsilon.$$

Wegen $f_j \in \bigcap\limits_{y\in Y} y^{-1}(0)$ und $d_q(f_j,0) = \epsilon$ gilt $f_j \in V_{Y,\epsilon}$. Nun liegt das Element $f := n^{-1}(f_1 + \cdots + f_n)$ in der konvexen Hülle von $V_{Y,\epsilon}$ und

$$d_q(f,0) = \int_0^1 |f|^q = n^{-q}(\int_0^1 |f_1|^q + \cdots \int_0^1 |f_n|^q) = n^{1-q}\epsilon.$$

Dabei folgt die zweite Gleichung aus $f_j \in L_p(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n})$. Die letzte Gleichung folgt aus $d_q(f_j, 0) = \epsilon$. Für hinreichend großes n ist $d_q(f, 0)$ größer als 1. Die Nullumgebung U enthält also keine konvexe Nullumgebung, woraus folgt, dass $\mathcal{T}$ nicht-lokalkonvex ist.

Satz 7.1 liefert uns ein interessantes Ergebnis im Zusammenhang mit der sogenannten Hahn-Banach Fortsetzungseigenschaft (HBEP). Man sagt, dass eine Vektortopologie $\mathcal{T}$ auf einem Vektorraum X über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ die Hahn-Banach Fortsetzungseigenschaft hat, wenn jedes stetige lineare Funktional auf einem abgeschlossenen Teilraum von $(X, \mathcal{T})$ eine stetige lineare Fortsetzung auf X hat.

Bemerkung 7.8. Jede lokalkonvexe Topologie hat die HBEP aufgrund einer Folgerung des Satzes von Hahn-Banach in der geometrischen Version. Sogar manche nicht-lokalkonvexe Topologien besitzen diese Eigenschaft. Der Mathematiker Paul Shields zeigte, dass jede Vektortopologie zwischen der schwachen und der Mackey Topologie, die zulässig bezüglich eines vorgegebenen dualen Paares ist, die HBEP hat. Mit dem Satz von Mackey-Arens Satz 5.6 und Satz 7.1 finden wir sowohl konvexe als auch nicht-lokalkonvexe Topologien, die diese Eigenschaft besitzen.

Literatur

[1] Lawrence Narici und Edward Beckenstein. *Topological Vector Spaces*. 2. Aufl. CRC Press - Taylor und Francis Group, 2010.

[2] Jürgen Voigt. *A Course on Topological Vector Spaces*. Birkhäuser, 2020.

[3] D. A. Gregory und J. H. Shapiro. *Nonconvex Linear Topologies with the Hahn Banach Extension Property*. 1970.

[4] Michael Kaltenbäck. *Aufbau Analysis*. 27. Aufl. Berliner Studienreihe zur Mathematik. Heldermann Verlag, 2021.

[5] Michael Kaltenbäck. *Fundament Analysis*. Bd. 26. Berliner Studienreihe zur Mathematik. Heldermann Verlag, 2014.

[6] Martin Blümlinger. *Analysis 3*. Sep. 2019. URL: `https://www.asc.tuwien.ac.at/~woracek/homepage/downloads/lva/2020W21_Analysis3/Skripten/Analysis3-WS2019__Bluemlinger.pdf`.

[7] Martin Blümlinger, Michael Kaltenbäck und Harald Woracek. *Funktionalanalysis*. 14. Aufl. Feb. 2020. URL: `https://www.asc.tuwien.ac.at/~woracek/homepage/downloads/lva/2017S_Fana1/fana.pdf`.

[8] Harald Woracek. *Topologie*. Aug. 2021. URL: `https://www.asc.tuwien.ac.at/~woracek/homepage/downloads/lva/2021S_Topologie/Topology.pdf`.

[9] Walter Rudin. *Functional Analysis*. 2. Aufl. McGraw-Hill, 1991.

[10] Helmut H. Schaefer. *Topological Vector Spaces*. 3. Aufl. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1971.

[11] George Mackey. *On convex topological linear spaces*. 1946.

[12] Richard Arens. *Duality in linear spaces*. 1947.

[13] Eduard A. Nigsch. *Locally convex spaces*. 2017.