BACHELORARBEIT

Der Satz von Tychonoff

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

A.o.Univ.Prof. Dr. Harald Woracek

durch

Johannes Steindl
Matrikelnummer: 11704938

Wien, am 7. Juni 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Definitionen und grundlegende Resultate **2**

3 Beweise des Satzes von Tychonoff **3**
3.1 Offene Überdeckungen . . . 3
3.2 Konvergente Teilnetze . . . 5
3.3 Filterkonvergenz . . . 8
3.4 Ultranetze . . . 12
3.5 Endliche Durchschnittseigenschaft . . . 13
3.6 Satz von Alexander . . . 15
3.7 Abgeschlossene Projektionen . . . 17

4 Die Rolle des Auswahlaxioms **20**
4.1 Das abzählbare Produkt metrischer Räume . . . 20
4.2 Der Satz von Tychonoff in Pointless Topology . . . 23

5 Eine Verallgemeinerung **24**

6 Anwendungen **25**
6.1 Der Satz von Hahn-Banach . . . 25
6.2 Der Satz von Banach-Alaoglu . . . 26
6.3 Existenz der Stone-Čech-Kompaktifizierung . . . 28
6.4 Der Satz von Ascoli . . . 29
6.5 Der Kompaktheitssatz der Aussagenlogik . . . 31

Literatur **32**

1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einem zentralen Satz der Topologie - dem Satz von Tychonoff. Dieser Satz geht zurück auf den 1930 veröffentlichten Artikel [24] des russischen Mathematikers Andrej Nikolaevič Tichonov (1906-1993) und lautet wie folgt:

Satz 1.0.1 (Tychonoff)**.** *Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume und sei $\mathcal{T}$ die Produkttopologie auf $X := \prod_{i \in I} X_i$. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ genau dann kompakt, wenn alle Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$ kompakt sind.*

Eine Beweisrichtung des Satzes ist trivial: Wenn der Produktraum X kompakt ist, dann ist auch jeder Raum X_i als stetiges Bild von X unter der kanonischen Projektion π_i kompakt. Ausgehend von unterschiedlichen Charakterisierungen der Kompaktheit werden wir in Kapitel 3 verschiedene Beweise der Rückrichtung vorstellen. Alle diese Beweise verwenden das Auswahlaxiom in einer seiner Formen.

In Kapitel 4 werden wir näher auf die Rolle des Auswahlaxioms eingehen und sehen, dass der Satz von Tychonoff sogar äquivalent zu diesem ist.

In Kapitel 5 betrachten wir anstatt von Produkträumen beliebige Räume versehen mit der initialen Topologie bezüglich einer Funktionenfamilie mit gewissen Eigenschaften und beweisen eine Verallgemeinerung des Satzes von Tychonoff.

In Kapitel 6 beschäftigen wir uns mit einigen Konsequenzen des Satzes von Tychonoff.

2 Definitionen und grundlegende Resultate

In diesem Abschnitt soll an einige grundlegende Definitionen und Resultate erinnert werden.

Definition 2.0.1. Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und $X := \prod_{i\in I} X_i$. Die *Produkttopologie* $\mathcal{T}$ ist die initiale Topologie auf X bezüglich der kanonischen Projektionen $\pi_i : X \to X_i$.

Definition 2.0.2. Eine Teilmenge K eines topologischen Raumes nennt man *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Definition 2.0.3. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(x)$ den *Umgebungsfilter von x*, also die Menge aller $U \subseteq X$, für die es eine offene Menge O gibt, mit $x \in O \subseteq U$.

Definition 2.0.4. Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann besitzt $\mathcal{A}$ die *endliche Durchschnittseigenschaft*, wenn je endlich viele Mengen aus $\mathcal{A}$ nichtleeren Schnitt haben.

Satz 2.0.5. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $K \subseteq X$. Dann sind äquivalent:*

(i) K ist kompakt.

(ii) Jede Familie von bzgl. der Spurtopologie auf K abgeschlossenen Teilmengen von K mit der endlichen Durchschnittseigenschaft hat nichtleeren Durchschnitt.

(iii) Jedes Netz in K hat ein gegen ein Element von K konvergentes Teilnetz.

Beweis. [7, Proposition 12.11.2]. □

Definition 2.0.6. $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X. Dann heißt ein $x \in X$ *Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$*, wenn für jede Umgebung U von x und jedes $i \in I$ ein $j \in I$ existiert mit $i \preceq j$ und $x_j \in U$.

Lemma 2.0.7. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X und $x \in X$. Dann ist x ein Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$ genau dann, wenn x Grenzwert eines Teilnetzes $(x_{i(k)})_{k\in K}$ von $(x_i)_{i\in I}$ ist.*

Beweis. [7, Lemma 12.2.15] □

Auswahlaxiom. Seien eine Indexmenge I und eine Familie nichtleerer Mengen A_i, $i \in I$, gegeben. Dann existiert eine Funktion (Auswahlfunktion) $f : I \to \cup_{i\in I} A_i$, mit $f(i) \in A_i$ für alle $i \in I$.

Lemma von Zorn. Sei $(M, \leq)$ eine nichtleere, halbgeordnete Menge, in der jede totalgeordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt. Dann hat M ein maximales Element.

Wohlordnungssatz. Auf jeder Menge existiert eine Wohlordnung.

3 Beweise des Satzes von Tychonoff

Wir wollen zuerst zeigen, dass endliche Produkte kompakter Räume kompakt sind. Der Beweis folgt [14, Theorem 26.7].

Lemma 3.0.1. *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, $x_0 \in X$ und $N \subseteq X \times Y$ eine offene Menge im Produktraum mit $\{x_0\} \times Y \subseteq N$. Wenn Y kompakt ist, dann gibt es $W \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $W \times Y \subseteq N$.*

Beweis. Die Mengen der Gestalt $U \times V$, mit $U \in \mathcal{T}_X$ und $V \in \mathcal{T}_Y$, bilden eine Basis der Produkttopologie auf $X \times Y$. Zu jedem $(x, y) \in X \times Y$ finden wir also $U_{x,y} \in \mathcal{T}_X$ und $V_{x,y} \in \mathcal{T}_Y$, sodass $(x, y) \in U_{x,y} \times V_{x,y} \subseteq N$.

Die Menge $\{x_0\} \times Y$ wird überdeckt von den offenen Mengen $\{U_{x_0,y} \times V_{x_0,y} \mid y \in Y\}$. Insbesondere ist $\{V_{x_0,y} \mid y \in Y\}$ eine offene Überdeckung des kompakten Raumes Y. Also gibt es endlich viele Punkte $y_1, \dots, y_n \in Y$, mit $\{x_0\} \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_0,y_i} \times V_{x_0,y_i}$.

Die Menge $W := \bigcap_{i=1}^n U_{x_0,y_1}$ ist eine offene Umgebung von x_0 und für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $W \times V_{x_0,y_i} \subseteq N$. Also gilt auch $W \times Y \subseteq N$. □

Korollar 3.0.2. *Das Produkt endlich vieler kompakter topologischer Räume ist kompakt.*

Beweis. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ kompakte topologische Räume. Wir zeigen, dass $X \times Y$ versehen mit der Produkttopologie kompakt ist. Die Aussage für beliebige endliche Produkte kompakter Räume folgt dann mit Induktion.

Sei $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von $X \times Y$. Für jedes $x \in X$ wird die zu Y homöomorphe und daher kompakte Menge $\{x\} \times Y$ bereits durch endlich viele $V_{i_1}, \dots, V_{i_n} \in \mathcal{V}$ überdeckt. Die Menge $N := \cup_{j=1}^n V_{i_j}$ ist offen und enthält $\{x\} \times Y$. Nach Lemma 3.0.1 gibt es $W_x \in \mathcal{U}(x)$ mit $W_x \times Y \subseteq N$. Dabei haben wir N so definiert, dass auch $W_x \times Y$ von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{V}$ überdeckt wird.

Da $(X, \mathcal{T}_X)$ kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, \dots, x_m \in X$, sodass bereits $W_{x_1}, \dots, W_{x_m}$ ganz X überdeckt. Jede Menge $W_{x_j} \times Y$ wird von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{V}$ überdeckt und die endliche Vereinigung der $W_{x_j} \times Y$ ist $X \times Y$. Also überdecken bereits endlich viele Mengen aus $\mathcal{V}$ ganz $X \times Y$. □

Sofern nicht anders spezifiziert bezeichnen wir im Folgenden mit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ stets eine Familie von topologischen Räumen, mit $(X, \mathcal{T})$ den Produktraum und mit $\pi_i : X \mapsto X_i$ die kanonischen Projektionen. In den nächsten Abschnitten werden verschiedene Beweise des Satzes von Tychonoff präsentiert.

3.1 Offene Überdeckungen

Wir wollen den Beweis für endliche Produkte verallgemeinern. Der folgende Beweis des Satzes von Tychonoff entstammt [10]. Er stützt sich auch auf [14, Chapter 5, Exercise 5], [1] sowie [27]. In all diesen Quellen ist er in leicht abgeänderter Form zu finden.

Wir zeigen zuerst ein Analogon zu Lemma 3.0.1:

Lemma 3.1.1. *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ und $(Z, \mathcal{T}_Z)$ topologische Räume, $x_0 \in X$ und $\mathcal{W}$ eine Teilmenge der Produkttopologie auf $X \times Y \times Z$. Der Raum Y sei kompakt und für jedes*

$U \in \mathcal{T}_X$ mit $x_0 \in U$ gelte, dass $\mathcal{W}$ keine endliche Teilüberdeckung von $U \times Y \times Z$ enthält. Dann gibt es $y_0 \in Y$, sodass keine offene Menge der Gestalt $U \times V \times Z$ mit $(x_0, y_0) \in U \times V$ durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{W}$ überdeckt wird.

Beweis. Angenommen, für jedes $y \in Y$ gibt es $U_y \in \mathcal{T}_X$ und $V_y \in \mathcal{T}_Y$, sodass $U_y \times V_y \times Z$ durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{W}$ überdeckt wird. Da Y kompakt ist, gibt es endlich viele $y_1, \ldots, y_n \in Y$, sodass $Y = \cup_{i=1}^n V_{y_i}$. Definiere $U := \cap_{i=1}^n U_{y_i}$. Dann gilt $x_0 \in U \in \mathcal{T}_X$ und

$$U \times Y \times Z \subseteq \bigcup_{i=1}^n (U_{y_i} \times V_{y_i} \times Z) .$$

Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ wird die Menge $U_{y_i} \times V_{y_i} \times Z$ durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{W}$ überdeckt, also auch $U \times Y \times Z$. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Im Beweis werden wir transfinite Induktion verwenden. Im Induktionsschritt werden wir folgendes Lemma benötigen:

Lemma 3.1.2. *Sei $\leq$ eine Wohlordnung auf I, sei $j \in I$ und für $i < j$ seien $x_i \in X_i$ fest. Für $l < j$ definiere*

$$Y_l := \bigcap_{k \leq l} \pi_k^{-1}(\{x_k\})$$

und $Z_j := \cap_{i<j} Y_i$. Des weiteren sei $\mathcal{B}$ jene Basis der Produkttopologie, die aus den endlichen Schnitten der Urbilder offener Mengen unter den kanonischen Projektionen besteht. Wenn $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ existieren, sodass $Z_j \subseteq \cup_{k=1}^n B_k$, dann gibt es $i_0 < j$ mit $Y_{i_0} \subseteq \cup_{k=1}^n B_k$.

Beweis. Wenn j der Nachfolger eines $i \in I$ ist, so gilt $Z_j = Y_i$ und wir können $i_0 := i$ wählen. Im Fall, dass j kein Nachfolger ist, definiere für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Menge

$$I_{B_k} := \{i < j \mid \pi_i(B_k) \neq X_i\} .$$

Die Mengen I_{B_k} sind endlich, also ist es auch die Vereinigung der I_{B_k}. Sei i_0 das größte Element in der Vereinigung der I_{B_k}. Sei $y \in Y_{i_0}$. Für $i \leq i_0$ gilt $\pi_i(y) = x_i$, also

$$\pi_i(y) \in \pi_i(Z_j) \subseteq \pi_i(\bigcup_{k=1}^n B_k).$$

Für $i > i_0$ ist $\pi_i(\cup_{k=1}^n B_k) = X_i$, also $\pi_i(y) \in \pi_i(\cup_{k=1}^n B_k)$. Es folgt $y \in \cup_{k=1}^n B_k$. Also wird auch Y_{i_0} von $B_1, \ldots, B_n$ überdeckt. $\square$

Mit diesen Vorbereitungsresultaten können wir nun unseren ersten Beweis des Satzes von Tychonoff ausführen.

Beweis (Tychonoff). Sei $\leq$ eine Wohlordnung auf I, welche ein maximales Element hat. So eine Wohlordnung existiert, denn wenn $i_0 \in I$ das kleinste Element bezüglich einer nach dem Wohlordnungssatz auf I existierenden Wohlordnung $\leq'$ ist, so ist auch

$$\leq := [\leq' \cap (I \setminus \{i_0\})^2] \cup [I \times \{i_0\}]$$

eine Wohlordnung auf I.

Sei $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von X. Angenommen, $\mathcal{V}$ hat keine endliche Teilüberdeckung. Mittels transfiniter Induktion wollen wir nun Elemente $x_i \in X_i$ definieren, sodass für jedes $i_0 \in I$ die Menge Y_{i_0}, definiert wie in Lemma 3.1.2, nicht durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{V}$ überdeckt wird.

Sei α das kleinste Element von I. Sei ∞ ein beliebiges Element. Wir können Lemma 3.1.1 auf $\{\infty\} \times X_\alpha \times \prod_{i>\alpha} X_i$ und $\mathcal{W} := \{\{\infty\} \times V \mid V \in \mathcal{V}\}$ anwenden, um ein $x_\alpha \in X_\alpha$ zu finden, sodass $\mathcal{V}$ keine endliche Teilüberdeckung von $\{x_\alpha\} \times \prod_{i>\alpha} X_i = Y_\alpha$ zulässt.

Sei $j \in I$ und angenommen, für alle $i < j$ haben wir x_i mit der gewünschten Eigenschaft bereits definiert. Mit Lemma 3.1.2 sehen wir, dass $Z_j = \prod_{i<j}\{x_i\} \times X_j \times \prod_{i>j} X_i$ nicht durch endlich viele Mengen aus V überdeckt werden kann. Wenden wir Lemma 3.1.1 auf Z_j an, so erhalten wir die Existenz eines $x_j \in X_j$, sodass $Y_j = \prod_{i\leq j}\{x_i\} \times \prod_{i>j} X_i$ nicht durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{V}$ überdeckt wird.

Durch transfinite Induktion ist $(x_i)_{i\in I}$ wohldefiniert. Sei nun $\beta \in I$ das größte Element von I. Dann ist Y_β die einpunktige Menge $\{(x_i)_{i\in I}\}$ und da Y_β von keiner endlichen Teilmenge von $\mathcal{V}$, und somit von keiner einzigen Menge aus $\mathcal{V}$ überdeckt wird, erhalten wir den Widerspruch $(x_i)_{i\in I} \notin \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V \supseteq X$. □

Man kann in obigem Beweis auch anstelle von transfiniter Induktion das Lemma von Zorn anwenden, um die Existenz eines solchen Punktes $(x_i)_{i\in I}$ zu zeigen. Der Beweis verläuft dann sehr ähnlich wie der in Abschnitt 3.2 präsentierte Beweis von Chernoff, der die Charakterisierung der Kompaktheit durch Konvergenz von Netzen verwendet, vergleiche [22] und [11].

3.2 Konvergente Teilnetze

In diesem Abschnitt werden zwei Beweise des Satzes von Tychonoff vorgestellt, die die Charakterisierung der Kompaktheit durch Netze verwenden: Ein topologischer Raum X ist kompakt, genau dann wenn jedes Netz in X ein in X konvergentes Teilnetz hat, siehe Satz 2.0.5.

Der erste Beweis stammt von Paul Chernoff, vergleiche [2]. Ausgehend von einem beliebigen Netz im Produktraum definieren wir eine geeignete halbgeordnete Menge, auf die wir das Lemma von Zorn anwenden und so die Existenz eines konvergenten Teilnetzes zeigen können. Siehe auch [7, Kapitel 12.12] und [25].

Beweis (Tychonoff). Sei $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein beliebiges Netz im Produktraum X. Wir wollen zeigen, dass dieses Netz einen Häufungspunkt in X hat. Dazu betrachten wir die Menge $\mathcal{M}$, welche folgendermaßen definiert ist:

$$\mathcal{M} := \left\{ (D, g) \;\middle|\; D \subseteq I,\ g \in \prod_{i\in D} X_i,\ \text{g ist Häufungspunkt von } (f_\alpha|_D)_{\alpha\in A} \text{ in} \prod_{i\in D} X_i \right\}.$$

Wir versehen $\mathcal{M}$ mit der Halbordnung

$$(D, g) \preceq \left(D', g'\right) \;:\Leftrightarrow\; D \subseteq D' \wedge g'|_D = g,$$

und wollen das Lemma von Zorn anwenden.

Die Menge $\mathcal{M}$ ist nichtleer, denn nicht nur $(\emptyset, \emptyset)$ ist in $\mathcal{M}$, sondern auch jedes Paar (D, g), wenn nur $D \subseteq I$ endlich ist und g ein Häufungspunkt von $(f_\alpha|_D)_{\alpha \in A}$ in $\prod_{i \in D} X_i$ ist. So ein Häufungspunkt existiert stets: Im Spezialfall wo D einelementig ist folgt das sofort aus der Kompaktheit der einzelnen X_i, ist D eine beliebige endliche Teilmenge von I dann erhalten wir die Existenz eines Häufungspunktes aus der Tatsache, dass der Produktraum endlich vieler kompakter topologischen Räume kompakt ist.

Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}$ totalgeordnet. Wir zeigen, dass $\mathcal{L}$ eine obere Schranke in $\mathcal{M}$ besitzt. Dazu definieren wir

$$\widehat{D} := \bigcup_{(D,g) \in \mathcal{L}} D.$$

Wenn wir für $i \in \widehat{D}$ ein beliebiges $(D, g) \in \mathcal{L}$ mit $i \in D$ wählen und $\widehat{g}(i) := g(i)$ setzen, dann ist auch $\widehat{g}$ als Element von $\prod_{i \in \widehat{D}} X_i$ wohldefiniert.

Wir wollen nun $(\widehat{D}, \widehat{g}) \in \mathcal{M}$ nachweisen. $\widehat{D} \subseteq I$ ist unmittelbar ersichtlich. Es bleibt zu zeigen, dass $\widehat{g}$ ein Häufungspunkt des Netzes $\left(f_\alpha|_{\widehat{D}}\right)_{\alpha \in A}$ ist. Sei E eine beliebige endliche Teilmenge von $\widehat{D}$, $\alpha_0 \in A$ und für $i \in I$ sei $U_i \in \mathcal{U}(\widehat{g}(i))$ mit $U_i = X_i$ für $i \in \widehat{D} \setminus E$. Wähle $(D_E, g_E) \in \mathcal{L}$ mit $E \subseteq D_E$. Weil g_E ein Häufungspunkt von $(f_\alpha|_{D_E})_{\alpha \in A}$ ist gibt es ein $\beta \succeq \alpha_0$ mit $f_\beta|_{D_E} \in \prod_{i \in D_E} U_i$. Weil $E \subseteq D_E$ ist erhalten wir $f_\beta|_{\widehat{D}} \in \prod_{i \in \widehat{D}} U_i$. Die Mengen der Bauart $\prod_{i \in \widehat{D}} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{U}(\widehat{g}(i))$ und $U_i = X_i$ für fast alle $i \in \widehat{D}$ bilden eine Umgebungsbasis von $\widehat{g}$ in $\prod_{i \in \widehat{D}} X_i$, also schließen wir, dass $\widehat{g}$ ein Häufungspunkt des Netzes $\left(f_\alpha|_{\widehat{D}}\right)_{\alpha \in A}$ ist.

Für beliebiges $(D, g) \in \mathcal{L}$ gilt $D \subseteq \widehat{D}$ und, weil $\mathcal{L}$ linear geordnet ist, auch $g(i) = \widehat{g}(i)$ für alle $i \in D$. Also ist $(\widehat{D}, \widehat{g})$ eine obere Schranke von $\mathcal{L}$. Wir können das Lemma von Zorn anwenden, und erhalten die Existenz eines maximalen Elementes (D_∞, g_∞) in $\mathcal{M}$.

Angenommen, D_∞ wäre eine echte Teilmenge von I. Wähle $i \in I \setminus D_\infty$. Sei $(f_{\alpha(\beta)})_{\beta \in B}$ ein Teilnetz von $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$, das gegen g_∞ konvergiert. Weil der Raum X_i kompakt ist, hat das Netz $(f_{\alpha(\beta)}(i))_{\beta \in B}$ einen Häufungspunkt $x_i \in X_i$. Setzen wir g_∞ durch $g_\infty(i) := x_i$ fort, dann ist aber diese Fortsetzung ein Häufungspunkt des Netzes $(f_\alpha|_{D_\infty \cup \{i\}})_{\alpha \in A}$ in $\prod_{j \in D \cup \{i\}} X_j$, was der Maximalität von (D_∞, g_∞) widerspricht. Also ist $D = I$, und daher g_∞ ein Häufungspunkt von $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ in X. □

Einen konstruktiveren Ansatz verfolgt folgender Beweis von Étienne Matheron, siehe [11]: Ausgehend von einem beliebigen Netz im Produktraum definieren wir mittels transfiniter Induktion ein konvergentes Teilnetz. Hier verwenden wir einige Tatsachen über Ordinalzahlen.

Beweis (Tychonoff). Sei $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein beliebiges Netz im Produktraum X. Mittels transfiniter Induktion wollen wir ein konvergentes Teilnetz definieren. Nach dem Wohlordnungssatz gibt es eine Wohlordnung $\leq$ auf I. Wir identifizieren die Elemente von I mit den Ordinalzahlen $I_i := \{j \in I \mid j < i\}$. Sei s die kleinste Ordinalzahl, für die $i < s$ für alle $i \in I$ gilt. Rekursiv definieren wir nun eine Familie von Teilnetzen

$$\left\{ \left(f_{\varphi_j(a)}\right)_{a \in A_j} \;\middle|\; j \leq s, (A_j, \leq_j) \text{ ist eine gerichtete Menge und } \varphi_j : A_j \to A \right\},$$

sodass stets gilt:

(i) Für alle $i < j$ gilt: $\forall i_0 \in A_i \exists j_0 \in A_j : \forall a_j \geq_j j_0 \exists a_i \geq_i i_0 : \varphi_j(a_j) = \varphi_i(a_i)$.

(ii) $\left(f_{\varphi_j(a)}(i)\right)_{a \in A_j}$ konvergiert in X_i für jedes $i < j$.

Bedingung (i) impliziert: Wenn $i < j$ ist und $\left(f_{\varphi_i(a)}(i)\right)_{a \in A_i}$ gegen ein $x_i \in X_i$ konvergiert, dann konvergiert auch $\left(f_{\varphi_j(a)}(i)\right)_{a \in A_j}$ gegen x_i.

Wir setzen $A_0 := A$ und $\varphi_0 : A_0 \to A$ sei die Identität auf A. Dann ist $\left(f_{\varphi_0(a)}\right)_{a \in A_0}$ trivialerweise ein Teilnetz von $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$, das die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt.

Sei $0 < j \leq s$. Wir nehmen an, dass wir für jedes $i < j$ ein Teilnetz wie oben gefunden haben und wollen nun A_j und $\varphi_j : A_j \to A$ konstruieren.

Zuerst betrachten wir den Fall, dass j eine Nachfolgerordinalzahl ist, also $j = i+1$ für ein $i \in I$. Der Raum X_i ist kompakt, also hat das Netz $\left(f_{\varphi_i(a)}(i)\right)_{a \in A_i}$ ein konvergentes Teilnetz $\left(f_{\varphi_i(\psi(a))}(i)\right)_{a \in A_j}$, mit $\psi : A_j \to A_i$. Mit der Wahl $\varphi_j := \varphi_i \circ \psi$ sind dann Bedingungen (i) und (ii) erfüllt.

Sei $j \leq s$ nun eine Limeszahl. Wir setzen $A_j := \bigcup_{i<j} \{i\} \times A_i$ und definieren die Relation $\preceq$ auf A_j durch

$$(i, a) \preceq (i', a') :\Leftrightarrow \forall b' \geq_{i'} a' \exists b \geq_i a : \ \varphi_{i'}(b') = \varphi_i(b). \tag{1}$$

Klarerweise ist $\preceq$ reflexiv und transitiv. Wir wollen die Richtungseigenschaft nachweisen: Seien $(i_0, a_0), (i_1, a_1) \in A_j$ und $i_0 \leq i_1$. Wegen $i_1 < j$ ist Bedingung (i) für i_1 erfüllt. Sei $a_1' \in A_{i_1}$ so, dass

$$\forall b' \geq_{i_1} a_1' \exists b \geq_{i_0} a_0 : \ \varphi_{i_1}(b') = \varphi_{i_0}(b). \tag{2}$$

Da A_{i_1} eine gerichtete Menge ist, finden wir ein $\widetilde{a_1} \in A_{i_1}$ mit $a_1 \leq_{i_1} \widetilde{a_1}$ und $a_1' \leq_{i_1} \widetilde{a_1}$. Aus letzterem und (2) folgt $(i_1, \widetilde{a_1}) \succeq (i_0, a_0)$, und da auch $(i_1, \widetilde{a_1}) \succeq (i_1, a_1)$ gilt, ist die Richtungseigenschaft bewiesen.

Die Abbildung $\varphi_j : A_j \to A$ definieren wir durch

$$\varphi_j\left((i, a)\right) := \varphi_i(a).$$

Sei $a_0 \in A$ und $(i', a') \succeq (0, a_0)$. Dann gibt es zu jedem $b' \geq_{i'} a'$ ein $b \geq_0 a_0$ mit

$$\varphi_j\left((i', b')\right) = \varphi_{i'}(b') = \varphi_0(b) = b.$$

Insbesondere ist $\varphi_j\left((i', a')\right) \geq_0 a_0$, und damit $\left(f_{\varphi_j(a)}\right)_{a \in A_j}$ ein Teilnetz von $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Wir zeigen nun, dass für unsere Wahl von A_j und φ_j die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt sind.

Sei $i < j$ fest und $a_0 \in A_i$. Wir definieren $j_0 := (i, a_0)$. Sei $(i', a') \succeq j_0$. Dann gibt es nach der Definition von $\preceq$ ein $b \geq_i a_0$ mit

$$\varphi_j\left((i', a')\right) = \varphi_{i'}(a') = \varphi_i(a_0).$$

Also ist Bedingung (i) erfüllt.

Um Bedingung (ii) nachzuweisen sei wieder $i < j$ fest. Wir haben angenommen, dass j eine Limeszahl ist, also gibt es ein $j' \in I$ mit $i < j' < j$. Nach Induktionsvoraussetzung konvergiert das Netz $\left(f_{\varphi_{j'}(a)}(i)\right)_{a\in A_{j'}}$. Mit Bedingung (i), die ja für $j' < j$ gilt, folgt, dass auch $\left(f_{\varphi_j(a)}(i)\right)_{a\in A_j}$ in X_i konvergiert.

Mittels transfiniter Induktion sind also auch A_s und $\varphi_s : A_s \to A$ wohldefiniert und erfüllen Bedingungen (i) und (ii). Das bedeutet: $\left(f_{\varphi_s(a)}\right)_{a\in A_s}$ ist ein in $X = \prod_{i<s} X_i$ konvergentes Teilnetz von $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$. □

3.3 Filterkonvergenz

In diesem Kapitel definieren wir Ultrafilter und zeigen, wie sich die Kompaktheit eines Raumes mittels dieser charakterisieren lässt. Der Satz von Tychonoff kann nach einigen Vorbereitungsresultaten in wenigen Worten bewiesen werden. Wir folgen [13, Chapter 7.4] und [26, Kapitel 1.3].

Definition 3.3.1. Sei X eine nichtleere Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *Filter*, wenn gilt:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

(ii) Aus $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ folgt $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

(iii) Ist $F_1 \in \mathcal{F}$ und $F_2 \supseteq F_1$, dann ist auch $F_2 \in \mathcal{F}$.

Die Menge aller Filter auf einer Menge X wird durch die Teilmengenrelation halbgeordnet. Diese Beobachtung motiviert folgende Definition:

Definition 3.3.2. Ein *Ultrafilter* auf einer Menge X ist ein Filter, der ein maximales Element bezüglich $\subseteq$ in der Menge aller Filter auf X ist.

Ultrafilter lassen sich durch folgende Eigenschaft charakterisieren:

Lemma 3.3.3. *Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge X ist ein Ultrafilter, genau dann wenn für jedes $Y \subseteq X$ entweder $Y \in \mathcal{F}$ oder $Y^c \in \mathcal{F}$ gilt.*

Beweis. Angenommen, $\mathcal{F}$ ist ein Ultrafilter auf X und sei $Y \subseteq X$ beliebig. Wenn es ein $F \in \mathcal{F}$ mit $F \cap Y = \emptyset$ gibt, dann ist $F \subseteq Y^c$ und daher $Y^c \in \mathcal{F}$. Gilt andererseits $F \cap Y \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$, so überprüft man leicht, dass

$$\widetilde{\mathcal{F}} := \left\{ \widetilde{F} \subseteq X \;\middle|\; \exists F \in \mathcal{F} : \widetilde{F} \supseteq F \cap Y \right\} \tag{3}$$

ein Filter ist, der sowohl $\mathcal{F}$, als auch Y enthält. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, muss $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ gelten, und daher $Y \in \mathcal{F}$. Also gilt $Y \in \mathcal{F}$, oder $Y^c \in \mathcal{F}$. Beides kann jedoch nicht gelten, denn dann wäre $\emptyset = Y \cap Y^c \in \mathcal{F}$.

Sei umgekehrt angenommen, dass für jedes $Y \subseteq X$ entweder $Y \in \mathcal{F}$ oder $Y^c \in \mathcal{F}$ gilt. Wäre $\mathcal{F}$ kein Ultrafilter, so gäbe es einen Filter $\widetilde{\mathcal{F}} \supsetneq \mathcal{F}$ und ein $Y \subseteq X$ mit $Y \in \widetilde{\mathcal{F}}$ aber $Y \notin \mathcal{F}$. Dann müsste aber $Y^c \in \mathcal{F}$ und damit $Y^c \in \widetilde{\mathcal{F}}$ sein und wir erhalten den Widerspruch $\emptyset = Y \cap Y^c \in \widetilde{\mathcal{F}}$. □

Um das nun folgende Resultat, das sogenannte *Ultrafilterlemma*, zu beweisen, werden wir das Lemma von Zorn bemühen. Es ist aber bekannt, dass das Ultrafilterlemma nicht innerhalb des ZF-Axiomensystems beweisbar, jedoch strikt schwächer als das Lemma von Zorn ist.

Lemma 3.3.4 (Ultrafilterlemma)**.** *Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer Menge X. Dann existiert ein Ultrafilter $\widehat{\mathcal{F}}$ mit $\widehat{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{F}$.*

Beweis. Wir wollen das Lemma von Zorn auf die durch $\subseteq$ halbgeordnete Menge

$$\mathcal{F}_{\geq} := \left\{ \widetilde{\mathcal{F}} \;\middle|\; \widetilde{\mathcal{F}} \text{ ist ein Filter auf } X \text{ mit } \widetilde{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{F} \right\} \tag{4}$$

anwenden. Offenbar ist $\mathcal{F}_{\geq} \neq \emptyset$, da $\mathcal{F} \in \mathcal{F}_{\geq}$. Sei $\mathcal{K}$ eine totalgeordnete Teilmenge von $\mathcal{F}_{\geq}$. Dann ist

$$\widetilde{\mathcal{F}} := \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K \tag{5}$$

eine obere Schranke von $\mathcal{K}$. Wir zeigen, dass $\widetilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}_{\geq}$ ist: Es gilt $\widetilde{\mathcal{F}} \neq \emptyset$, und weil $\emptyset \notin K$ für alle $K \in \mathcal{K}$ ist, ist auch $\emptyset \notin \widetilde{\mathcal{F}}$. Seien $F_1, F_2 \in \widetilde{\mathcal{F}}$. Da $\mathcal{K}$ totalgeordnet ist gibt es ein $K \in \mathcal{K}$ mit $F_1 \in K$ und $F_2 \in K$. Damit ist dann $F_1 \cap F_2 \in K$, also auch $F_1 \cap F_2 \in \widetilde{\mathcal{F}}$. Sei $F_1 \in \widetilde{\mathcal{F}}$ und gelte $F_2 \supseteq F_1$. Sei $K \in \mathcal{K}$, sodass $F_1 \in K$ ist. Dann ist auch $F_2 \in K$ und somit $F_2 \in \widetilde{\mathcal{F}}$.

Wir können das Lemma von Zorn anwenden und erhalten die Existenz eines maximalen Elementes in $(\mathcal{F}_{\geq}, \subseteq)$. Ein solches ist auch in der Menge aller Filter auf X maximal, also ein Ultrafilter. □

Wir möchten nun die Kompaktheit eines topologischen Raumes mithilfe von Filtern charakterisieren. Dazu führen wir den Begriff der Filterkonvergenz ein:

Definition 3.3.5. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $x \in X$ und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Wir nennen $\mathcal{F}$ *konvergent gegen* x, wenn $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{U}(x)$ ist.

Im Allgemeinen sind Grenzwerte von Filtern nicht eindeutig - es gilt sogar:

Lemma 3.3.6. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) $(X, \mathcal{T})$ ist ein Hausdorff-Raum.

(ii) Jeder Filter auf X konvergiert gegen höchstens einen Punkt.

Beweis.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, der gegen Punkte $x_1, x_2 \in X$ konvergiert - also $\mathcal{U}(x_1) \subseteq \mathcal{F}$ und $\mathcal{U}(x_2) \subseteq \mathcal{F}$. Dann haben zwei Umgebungen von x_1 und x_2 stets nichtleeren Schnitt. Da $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum ist, muss $x_1 = x_2$ gelten.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Angenommen, $(X, \mathcal{T})$ wäre nicht Hausdorffsch. Dann gibt es $x, y \in X, x \neq y$, sodass zwei Umgebungen von x und y stets nichtleeren Schnitt haben. Das Mengensystem

$$\mathcal{F} := \{F \subseteq X \mid \exists O_x \in \mathcal{U}(x), O_y \in \mathcal{U}(y) : (O_x \cap O_y) \subseteq F\}$$

ist dann ein Filter, der sowohl $\mathcal{U}(x)$, als auch $\mathcal{U}(y)$ enthält. Da $\mathcal{F}$ gegen höchstens einen Punkt konvergieren kann, folgt der Widerspruch $x = y$. □

Wir wollen nun folgende Charakterisierung der Kompaktheit beweisen:

Satz 3.3.7. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist kompakt genau dann wenn jeder Ultrafilter auf X konvergiert.*

Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus den zwei folgenden Lemmata. Hervorzuheben ist, dass im Beweis von Lemma 3.3.8 Ultrafilterlemma einfließt.

Lemma 3.3.8. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wenn jeder Ultrafilter auf X konvergiert, dann ist $(X, \mathcal{T})$ kompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung von X. Angenommen, X hat keine endliche Teilüberdeckung durch Mengen aus $\mathcal{V}$. Wir betrachten $\mathcal{V}^c := \{V^c \mid V \in \mathcal{V}\}$. Das Mengensystem $\mathcal{V}^c$ hat die endliche Durchschnittseigenschaft, da für $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ stets

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i^c \right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} V_i \subsetneq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = X \tag{6}$$

gilt. Damit sieht man unmittelbar, dass

$$\mathcal{F} := \left\{ F \subseteq X \;\middle|\; \exists V_1, \ldots V_n \in \mathcal{V} : \bigcap_{i=1}^{n} V_1^c \subseteq F \right\} \tag{7}$$

ein Filter ist. Nach dem Ultrafilterlemma (Lemma 3.3.4) existiert ein Ultrafilter $\widehat{\mathcal{F}}$ mit $\widehat{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{F}$. Nach Voraussetzung konvergiert $\widehat{\mathcal{F}}$ gegen ein $x \in X$. Ist $V \in \mathcal{V}$ und $U \in \mathcal{U}(x)$ beliebig, so folgt wegen $\mathcal{V}^c \subseteq \widehat{\mathcal{F}}$ und $\mathcal{U}(x) \subseteq \widehat{\mathcal{F}}$, dass $V^c \cap U \neq \emptyset$. Das bedeutet, dass x im Abschluss von V^c enthalten ist. Da die Mengen in $\mathcal{V}^c$ als Komplemente von offenen Mengen abgeschlossen sind erhalten wir den Widerspruch

$$x \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}} \overline{V^c} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} V^c = \left(\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \right)^c = X^c = \emptyset. \tag{8}$$

□

Lemma 3.3.9. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ eine Subbasis. Wenn jede offene Überdeckung $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}$ von X eine endliche Teilüberdeckung hat, dann ist jeder Ultrafilter auf X konvergent.*

Beweis. Angenommen, es gäbe einen Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf X, der gegen keinen Punkt konvergiert. Wir betrachten $\mathcal{V} := \mathcal{S} \setminus \mathcal{F}$ und zeigen, dass dieses Mengensystem X überdeckt. Wäre dies nicht so, dann gäbe es ein $x \in X$, welches in keinem $V \in \mathcal{V}$ enthalten ist. Da $\mathcal{F}$ nicht konvergiert gilt $\mathcal{U}(x) \nsubseteq \mathcal{F}$, das heißt es gibt eine Umgebung U von x, die kein Element von $\mathcal{F}$ ist. Seien $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ mit $x \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subseteq U$. Wenn jedes der S_i ein Element von $\mathcal{F}$ wäre, so würde auch der Schnitt und damit auch U in $\mathcal{F}$ enthalten sein. Da aber $U \notin \mathcal{F}$ ist, muss es ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $S_j \notin \mathcal{F}$ geben, und es folgt der Widerspruch $x \in S_j \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{F} = \mathcal{V}$. Also gilt $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = X$.

Sei $V_1, \dots, V_m \in \mathcal{V}$ eine endliche Teilüberdeckung von X. Weil $V \cap \mathcal{F} = \emptyset$ ist liegen nach Lemma 3.3.3 die Komplemente $V_1^c, \dots, V_m^c$ in $\mathcal{F}$. Wir erhalten den Widerspruch

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{m} V_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{m} V_i \right)^c = X^c = \emptyset. \tag{9}$$

□

Um den Satz von Tychonoff mittels dieser Charakterisierung der Kompaktheit beweisen zu können, benötigen wir noch folgendes Lemma:

Lemma 3.3.10. *Seien $X, Y \neq \emptyset$ und $f : X \to Y$. Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, so ist*

$$f(\mathcal{F}) := \left\{ B \subseteq Y \;\middle|\; f^{-1}(B) \in \mathcal{F} \right\}$$

ein Filter auf Y. Ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter, so ist auch $f(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter.

Beweis. Es ist $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \notin \mathcal{F}$ und $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{F}$, also $\emptyset \notin f(\mathcal{F})$ und $f(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Aus $F_1, F_2 \in f(\mathcal{F})$ folgt $f^{-1}(F_1 \cap F_1) = f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2) \in \mathcal{F}$, also $F_1 \cap F_2 \in f(\mathcal{F})$. Ist $F_1 \in f(\mathcal{F})$ und $F_2 \supseteq F_1$, dann folgt aus $f^{-1}(F_2) \supseteq f^{-1}(F_1)$, dass $f^{-1} \in \mathcal{F}$ und damit $F_2 \in f(\mathcal{F})$ ist. Also ist $f(\mathcal{F})$ ein Filter.

Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X und $\mathcal{G}$ ein Filter auf Y, der $f(\mathcal{F})$ enthält. Wir betrachten

$$\widehat{\mathcal{F}} := \left\{ \widehat{\mathcal{F}} \subseteq X \;\middle|\; \exists F \in \mathcal{F} \exists G \in \mathcal{G} : F \cap f^{-1}(G) \subseteq \widehat{\mathcal{F}} \right\}. \tag{10}$$

Für alle $F \in \mathcal{F}$ und $G \in \mathcal{G}$ ist $f(F) \cap G \neq \emptyset$ und daher $F \cap f^{-1}(G) \neq \emptyset$. Damit sieht man, dass $\widehat{\mathcal{F}}$ ein Filter ist. Da $\mathcal{F}$ maximal und $\mathcal{F} \subseteq \widehat{\mathcal{F}}$ ist, muss $\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ sein. Wegen $f^{-1}(G) \in \widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ für beliebiges $G \in \mathcal{G}$ folgt $\mathcal{G} \subseteq f(\mathcal{F})$. Also ist auch $f(\mathcal{F})$ maximal. □

Der Satz von Tychonoff folgt jetzt leicht aus dem bisher gezeigten:

Beweis (Tychonoff). Nach Satz 3.3.7 ist der Produktraum X kompakt, wenn jeder Ultrafilter auf X konvergiert. Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Nach Lemma 3.3.10 ist für jedes $i \in I$ das Mengensystem $\pi_i(\mathcal{F}) := \left\{ F \subseteq X_i \;\middle|\; \pi_i^{-1}(F) \in \mathcal{F} \right\}$ ein Ultrafilter auf X_i. Da X_i kompakt ist, konvergiert $\pi_i(\mathcal{F})$. Unter Verwendung des Auswahlaxioms wählen wir für jedes $i \in I$ einen Punkt $x_i \in X_i$, sodass $\pi_i(\mathcal{F})$ gegen x_i konvergiert. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{F}$ gegen $x := (x_i)_{i \in I}$ konvergiert.

Sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann gibt es $i_1, \dots, i_n \in I$ und offene Mengen $O_{i_1}, \dots, O_{i_n}$ mit $O_{i_j} \in \mathcal{U}(x_{i_j})$, sodass $x \in \bigcap_{j=1}^n \pi_{i_j}^{-1}(O_{i_j}) \subseteq U$. Da die Ultrafilter $\pi_{i_j}(\mathcal{F})$ gegen die Punkte x_{i_j} konvergieren, sind die $O_{i_j} \in \pi_{i_j}(\mathcal{F})$ und daher $\pi_{i_j}^{-1}(O_{i_j}) \in \mathcal{F}$. Damit sind auch der endliche Durschnitt $\bigcap_{j=1}^n \pi_{i_j}(O_{i_j})$ und die Obermenge U von diesem Schnitt Elemente von $\mathcal{F}$. Da $U \in \mathcal{U}(x)$ beliebig war, folgt $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$. Also konvergiert $\mathcal{F}$. □

Wenn die Räume X_i Hausdorff-Räume sind, dann kommen wir wegen Lemma 3.3.6 in obigem Beweis ohne dem Auswahlaxiom aus. Das Ultrafilterlemma allein impliziert also schon den Satz von Tychonoff für Hausdorff-Räume.

3.4 Ultranetze

Zwischen Filtern und Netzen besteht folgender Zusammenhang:

Lemma 3.4.1. *Sei* $(x_i)_{i\in I}$ *ein Netz in einem topologischen Raum* $(X,\mathcal{T})$*. Dann ist das Mengensystem*

$$\mathcal{F} := \{F \subseteq X \mid \exists i_0 \in I : \forall i \succeq i_0 : x_i \in F\}$$

ein Filter, der sogenannte zu $(x_i)_{i\in I}$ zugehörige Filter*. Es gilt:* $\mathcal{F}$ *konvergiert gegen ein* $x \in X$ *genau dann, wenn* $(x_i)_{i\in I}$ *gegen* x *konvergiert. [13, Exercise 5.1.49].*

Beweis. Offensichtlich gilt $\emptyset \notin \mathcal{F}$ und $X \in \mathcal{F}$. Sind $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, dann gibt es aufgrund der Richtungseigenschaft der gerichteten Menge I ein $i_0 \in I$, sodass für alle $i \succeq i_0$ die Punkte x_i sowohl in F_1, als auch in F_2 liegen. Also ist $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$. Klarerweise enthält $\mathcal{F}$ auch alle Obermengen eines jeden $F \in \mathcal{F}$ Also ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf X.

Angenommen, $\mathcal{F}$ konvergiert gegen ein $x \in X$. Das ist genau dann der Fall, wenn es zu jeder Umgebung U des Punktes x ein $i_0 \in I$ gibt, sodass $x_i \in U$ für alle $i \succeq i_0$ gilt. Das bedeutet aber genau, dass $(x_i)_{i\in I}$ gegen x konvergiert. □

Es ist also nicht überraschend, dass sich das Konzept des Ultrafilters auch in der Sprache der Netze formulieren lässt. Wir wollen in diesem Abschnitt Ultranetze definieren, und den Satz von Tychonoff mittels dieser beweisen. Wir folgen [13, Chapter 7.5.6].

Definition 3.4.2. Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in einem topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt *Ultranetz*, wenn es zu jedem $Y \subseteq X$ ein $i_0 \in I$ gibt, sodass entweder $\{x_i \mid i \succeq i_0\} \subseteq Y$ oder $\{x_i \mid i \succeq i_0\} \subseteq Y^c$ gilt.

Mit Lemma 3.3.3 erhält man unmittelbar folgenden Zusammenhang zwischen Ultranetzen und Ultrafiltern:

Lemma 3.4.3. *Ein Netz* $(x_i)_{i\in I}$ *ist ein Ultranetz genau dann wenn der zu* $(x_i)_{i\in I}$ *zugehörige Filter ein Ultrafilter ist.*

Ein Analogon zum Ultrafilterlemma ist das folgende Resultat:

Lemma 3.4.4 (Ultranetzlemma)**.** *Sei* $(x_i)_{i\in I}$ *ein Netz in einem topologischen Raum* $(X,\mathcal{T})$*. Dann hat* $(x_i)_{i\in I}$ *ein Ultranetz als Teilnetz.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ der zu $(x_i)_{i\in I}$ zugehörige Filter. Nach Lemma 3.3.4 gibt es einen Ultrafilter $\widehat{\mathcal{F}}$ auf X mit $\widehat{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{F}$. Wir konstruieren nun ein Teilnetz $(x_{i(j)})_{j\in J}$ von $(x_i)_{i\in I}$, sodass für jedes $F \in \widehat{\mathcal{F}}$ ein $j_0 \in J$ mit $\{x_{i(j)} \mid j \succeq j_0\} \subseteq F$ existiert.

Wir definieren

$$J := \{(i,F) \in I \times \widehat{\mathcal{F}} \mid x_i \in F\},$$

versehen mit

$$(i_1, F_1) \succeq (i_2, F_2) :\Leftrightarrow i_1 \succeq i_2 \text{ und } F_1 \subseteq F_2.$$

Diese Relation ist offensichtlich reflexiv und transitiv. Wir wollen die Richtungseigenschaft nachweisen. Seien (i_1, F_1) und $(i_2, F_2) \in J$. Da $\widehat{\mathcal{F}}$ ein Filter ist, ist $F_3 := F_1 \cap F_2 \in \widehat{\mathcal{F}}$. Wenn es ein $i_0 \in I$ mit $x_i \in F_3^c$ für alle $i \succeq i_0$ gäbe, dann wäre $F_3^c \in \mathcal{F} \subseteq \widehat{\mathcal{F}}$ und wir hätten den Widerspruch $\emptyset = F_3 \cap F_3^c \in \widehat{\mathcal{F}}$. Also gibt es zu jedem $i_0 \in I$ ein $i \succeq i_0$ mit $x_i \in F_3$ - insbesondere finden wir ein $i_3 \in I$ mit $i_3 \succeq i_1$ und $i_3 \succeq i_2$, sodass $x_{i_3} \in F_3$. Es ist also (i_3, F_3) ein Element von J, welches oberhalb von (i_1, F_1) und (i_2, F_2) liegt. Also ist $(J, \succeq)$ eine gerichtete Menge.

Definiere eine Abbildung $i : J \to I$ durch $i\left((i_0, F_0)\right) := i_0$. Dann ist $(x_{i(j)})_{j \in J}$ ein Teilnetz von $(x_i)_{i \in I}$, denn für $i_0 \in I$ ist $(i_0, X) \in J$ mit der Eigenschaft, dass $i(j) \succeq i\left((i_0, X)\right)$ für alle $j \succeq (i_0, X)$ gilt.

Sei $F_0 \in \widehat{\mathcal{F}}$. Wie zuvor für die Menge F_3 zeigt man, dass es ein $i_0 \in I$ mit $x_{i_0} \in F_0$ gibt. Damit folgt für jedes $j := (i, F) \succeq (i_0, F_0) =: j_0$ die Inklusion $F \subseteq F_0$ und daher $x_{i(j)} = x_i \in F \subseteq F_0$, also $\{x_{i(j)} \mid j \succeq j_0\} \subseteq F_0$.

Wir schließen, dass der zu $(x_{i(j)})_{j \in J}$ zugehörige Filter $\widetilde{\mathcal{F}}$ den Filter $\widehat{\mathcal{F}}$ enthält. Da $\widehat{\mathcal{F}}$ ein Ultrafilter ist, gilt $\widetilde{\mathcal{F}} = \widehat{\mathcal{F}}$ und mit Lemma 3.4.3 folgt, dass $(x_{i(j)})_{j \in J}$ ein Ultranetz ist. □

Mithilfe des Ultranetzlemmas erhalten wir folgende Charakterisierung der Kompaktheit:

Satz 3.4.5. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist kompakt genau dann wenn jedes Ultranetz in X konvergiert.*

Beweis. Angenommen, X ist kompakt. Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Ultranetz in X. Nach Satz 2.0.5 hat $(x_i)_{i \in I}$ ein gegen ein $x \in X$ konvergentes Teilnetz, Sei U eine Umgebung des Punktes x. Dann gibt es ein $i_0 \in I$, sodass entweder $\{x_i \mid i \succeq i_0\} \subseteq U$ oder $\{x_i \mid i \succeq i_0\} \subseteq U^c$ gilt. Letzteres würde aber der Tatsache widersprechen, dass ein gegen x konvergentes Teilnetz existiert. Also ist $x_i \in U$ für alle $i \succeq i_0$. Da $U \in \mathcal{U}(x)$ beliebig war folgt, dass auch $(x_i)_{i \in I}$ gegen x konvergiert.

Sei nun angenommen, dass jedes Ultranetz im Raum X konvergiert. Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein beliebiges Netz in X. Nach Lemma 3.4.4 gibt es ein Teilnetz dieses Netzes, welches ein Ultranetz ist. Nach Voraussetzung konvergiert dieses. Also hat jedes Netz in X ein konvergentes Teilnetz und mit Satz 2.0.5 folgt, dass X kompakt ist. □

Der Satz von Tychonoff lässt sich nun ganz einfach beweisen. Der Beweis verläuft analog zu dem im vorherigen Kapitel vorgestellten Beweis, welcher Ultrafilter verwendet.

Beweis (Tychonoff). Nach Satz 3.4.5 ist der Produktraum X kompakt, wenn jedes Ultranetz in X konvergiert. Sei $(x_j)_{j \in J}$ ein Ultranetz in X. Für jedes $i \in I$ ist das Netz $(\pi_i(x_j))_{j \in J}$ ein Ultranetz in X_i, denn wenn $Y \subseteq X_i$ ist, so ist x_j für hinreichend großes $j \in J$ entweder in $\pi_i^{-1}(Y)$ oder in $\pi_i^{-1}(Y)^c = \pi_i^{-1}(Y^c)$, und $\pi_i(x_j)$ daher entweder in Y oder in Y^c. Da X_i kompakt ist, konvergiert $(\pi_i(x_j))_{j \in J}$. Unter Verwendung des Auswahlaxioms wählen wir für jedes $i \in I$ einen Punkt $x_i \in X_i$, sodass $(\pi_i(x_j))_{j \in J}$ gegen x_i konvergiert. Dann konvergiert $(x_j)_{j \in J}$ gegen $x := (x_i)_{i \in I}$. □

3.5 Endliche Durchschnittseigenschaft

Manchmal wird der Beweis des Satzes von Tychonoff auch mittels der Charakterisierung der Kompaktheit durch Familien mit endlicher Durchschnittseigenschaft geführt, siehe Definition 2.0.4 und Satz 2.0.5. Essentiell versteckt sich dahinter aber der Ultrafilterbeweis, nur dass diese Begriffsbildung nicht verwendet wird. Der Vollständigkeit halber wollen wir skizzieren, wie der Beweis dann geführt wird. Wir folgen dabei [14, Chapter 5].

Mit dem Lemma von Zorn zeigt man ein Analogon zum Ultrafilterlemma:

Lemma 3.5.1. *Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wenn $\mathcal{A}$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat, dann gibt es $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{A}$, welches maximal in der Menge aller $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft ist.*

Im Beweis des Satzes von Tychonoff werden wir verwenden, dass maximale Familien mit der endlichen Durchschnittseigenschaft alle endlichen Durchschnitte ihrer Elemente enthalten, und dass jede Menge, welche nichtleeren Schnitt mit allen Elementen der Familie hat, selbst in der Familie enthalten ist. Es gilt sogar:

Lemma 3.5.2. *Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nichtleer und maximal in der Menge aller $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Dann ist $\mathcal{D}$ ein Ultrafilter auf X.*

Beweis. Je endlich viele Mengen aus $\mathcal{D}$ haben nichtleeren Schnitt, insbesondere gilt $\emptyset \notin \mathcal{D}$. Durch hinzufügen endlicher Schnitte und beliebiger Obermengen von Mengen aus $\mathcal{D}$ zu $\mathcal{D}$ bleibt die endliche Durchschnittseigenschaft erhalten. Da $\mathcal{D}$ maximal ist folgt, dass alle endlichen Schnitte und Obermengen bereits in $\mathcal{D}$ enthalten sind. Also ist $\mathcal{D}$ ein Filter auf X.

Angenommen, es gäbe einen Filter $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\mathcal{F} \supsetneq \mathcal{D}$. Als Filter besitzt $\mathcal{F}$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Das widerspricht aber der Tatsache, dass $\mathcal{D}$ maximal in der Menge aller $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft ist. Also ist $\mathcal{D}$ sogar ein Ultrafilter. □

Der Satz von Tychonoff kann mithilfe dieser Feststellungen folgendermaßen bewiesen werden:

Beweis (Tychonoff). Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem bestehend aus in der Produkttopologie abgeschlossenen Mengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Nach Lemma 3.5.1 existiert ein maximales Element $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{A}$ in der Menge aller $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Wir wollen zeigen, dass $\cap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D} \neq \emptyset$. Damit folgt dann, dass auch $\cap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$.

Für jedes $i \in I$ hat auch

$$\left\{ \overline{\pi_i(D)} \mid D \in \mathcal{D} \right\} \subseteq \mathcal{P}(X_i)$$

die endliche Durchschnittseigenschaft. Weil jeder Raum X_i kompakt ist, können wir wegen Satz 2.0.5 unter Verwendung des Auswahlaxioms einen Punkt $x = (x_i)_{i \in I} \in X$ wählen, sodass

$$x_i \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_i(D)}$$

für jedes $i \in I$ gilt.

Sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann gibt es Indizes $i_1, \ldots, i_n \in I$ und offene Mengen $U_{i_j} \subseteq X_{i_j}$, sodass

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} \pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) \subseteq U.$$

Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ und $D \in \mathcal{D}$ beliebig. Aufgrund der Wahl von x ist $x_{i_j} \in \overline{\pi_{i_j}(D)}$ und daher $U_{i_j} \cap \pi_{i_j}(D) \neq \emptyset$. Es folgt

$$\emptyset \neq \pi_{i_j}^{-1}\left(U_{i_j} \cap \pi_{i_j}(D)\right) \subseteq \pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) \cap D.$$

Da D beliebig war folgt mit Lemma 3.5.2, dass $\pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) \in \mathcal{D}$. Wieder mit Lemma 3.5.2 folgt, dass auch

$$\bigcap_{j=1}^{n} \pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) \in \mathcal{D}.$$

Sei $D \in \mathcal{D}$. Da $\mathcal{D}$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat, schneidet D aufgrund des soeben gezeigten jede Umgebung des Punktes x. Also gilt $x \in \overline{D}$. Da D beliebig war, gilt $x \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D}$. □

3.6 Satz von Alexander

Ein eleganter Beweis des Satzes von Tychonoff verwendet eine Charakterisierung der Kompaktheit mittels Subbasen, welche als 'Satz von Alexander' (*engl.: Alexander's Subbase Theorem*) bekannt ist. Wir wollen diesen auf zwei Arten beweisen: Einmal direkt mithilfe des Lemmas von Zorn, dann unter Verwendung des schwächeren Ultrafilterlemmas. Die Beweise dieses Abschnitts entstammen [13, Abschnitt 7.2, Satz 7.5.9, sowie Abschnitt 7.5.5].

Satz 3.6.1 (Alexander)**.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ eine Subbasis. Dann ist X kompakt genau dann wenn jede Überdeckung von X mit Mengen aus $\mathcal{S}$ eine endliche Teilüberdeckung hat.*

Beweis. Wenn X kompakt ist hat jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung, also insbesondere jede Überdeckung mit Mengen aus $\mathcal{S}$.

Angenommen, jede Überdeckung von X mit Mengen aus $\mathcal{S}$ hat eine endliche Teilüberdeckung, aber X ist nicht kompakt. Betrachte die durch $\subseteq$ halbgeordnete Menge

$$\mathfrak{F} := \{\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T} \mid \mathcal{V} \text{ überdeckt } X, \text{ aber keine endliche Teilmenge von } \mathcal{V} \text{ überdeckt } X\}.$$

Da X nicht kompakt ist, ist $\mathfrak{F}$ nichtleer. Sei $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{F}$ eine totalgeordnete Teilmenge. Dann ist die Vereinigung aller Mengensysteme aus $\mathfrak{K}$ eine obere Schranke von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{F}$. Also erfüllt $\mathfrak{F}$ die Voraussetzungen des Zorn'schen Lemmas und wir erhalten die Existenz eines maximalen Elementes $\mathcal{V} \in \mathfrak{F}$.

Betrachte $\mathcal{S}' := \mathcal{S} \cap \mathcal{V}$. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{S}'$ den Raum X überdeckt. Daraus folgt dann ein Widerspruch, denn wegen $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ müssten dann bereits endlich viele Mengen aus $\mathcal{S}'$ ganz X überdecken, aber wegen $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{V}$ kann das nicht der Fall sein.

Angenommen, X wird nicht durch $\mathcal{S}'$ überdeckt. Wähle $x \in X \setminus \cup_{S \in \mathcal{S}'} S$. Da X durch $\mathcal{V}$ überdeckt wird gibt es ein $V \in \mathcal{V}$ mit $x \in V$. Weil $\mathcal{S}$ eine Subbasis und V offen ist, gibt es $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ mit $x \in \cap_{i=1}^{n} S_i \subseteq V$. Der Punkt x ist in keiner Menge aus $\mathcal{S}'$ enthalten, also kann keine der Mengen S_i zu $\mathcal{V}$ gehören. Aufgrund der Maximalität von $\mathcal{V}$ erlaubt jede Überdeckung $\mathcal{V} \cup \{S_i\}$ des Raumes X eine endliche Teilüberdeckung. Für jedes

$i \in \{1, \dots, n\}$ existiert eine endliche Teilmenge $\mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{V}$, sodass $\cup_{U \in \mathcal{V}_i} U \cup S_i = X$. Für jedes $y \in X$ gilt $y \in \cup_{i=1}^n \cup_{U \in \mathcal{V}_i} U$, oder $y \in \cap_{i=1}^n S_i$. Wir erhalten

$$X = \bigcap_{i=1}^n S_i \cup \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{U \in \mathcal{V}_i} U \subseteq V \cup \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{U \in \mathcal{V}_i} U.$$

Damit hätten wir aber eine endliche Überdeckung von X durch Mengen aus $\mathcal{V}$ gefunden, obwohl eine solche nicht existiert. Also wird X durch $\mathcal{S}'$ überdeckt. Wie schon angemerkt führt das zu einem weiteren Widerspruch. Es folgt, dass X kompakt sein muss. □

Alternativer Beweis (Satz 3.6.1). Angenommen, jede Überdeckung von X mit Mengen aus $\mathcal{S}$ hat eine endliche Teilüberdeckung. Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Wir wollen aus der Annahme, dass $\mathcal{F}$ nicht konvergiert, einen Widerspruch herleiten.

Sei $x \in X$. Weil $\mathcal{F}$ nicht konvergiert, gibt es ein $U \in \mathcal{U}(x)$, welches kein Element von $\mathcal{F}$ ist. Seien $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ mit $x \in \cap_{i=1}^n S_i \subseteq U$. Würden alle Mengen $S_1, \dots, S_n$ zu $\mathcal{F}$ gehören, dann auch der endliche Durchschnitt $\cap_{i=1}^n S_i$ und damit auch die Obermenge U. Da aber $U \notin \mathcal{F}$ ist, gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ sodass $S_i \notin \mathcal{F}$. Es folgt $x \in S_i \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{F}$. Da $x \in X$ beliebig war, schließen wir, dass $\mathcal{S} \setminus \mathcal{F}$ den Raum X überdeckt.

Nach Voraussetzung existieren endlich viele Mengen $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$, die bereits ganz X überdecken. Gehen wir zu den Komplementen über, so folgt $\cap_{i=1}^n S_i^c = \emptyset$. Mit Lemma 3.3.3 erhalten wir den Widerspruch $\emptyset \in \mathcal{F}$. Also konvergiert $\mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ ein beliebiger Ultrafilter war, folgt mit Satz 3.3.7, dass X kompakt ist. □

Beweis (Tychonoff). Sei $\mathcal{V}$ eine Teilmenge der Subbasis

$$\mathcal{S} := \left\{ \pi_i^{-1}(O) \mid i \in I, O \in \mathcal{T}_i \right\}$$

der Produkttopologie auf X. Angenommen, keine endliche Teilmenge von $\mathcal{V}$ überdeckt ganz X. Wir wollen zeigen, dass dann auch $\mathcal{V}$ keine Überdeckung von X ist. Mit Satz 3.6.1 erhalten wir dann die Kompaktheit von X.

Sei $i \in I$ und definiere

$$\mathcal{V}_i := \left\{ V \in \mathcal{T}_i \mid \pi_i^{-1}(V) \in \mathcal{V} \right\}.$$

Angenommen, $\mathcal{V}_i$ überdeckt den Raum X_i. Da X_i kompakt ist, gibt es $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}_i$ mit $\cup_{j=1}^n V_j = X_i$. Wir erhalten den Widerspruch

$$X = \bigcup_{j=1}^n \pi_i^{-1}(V_j)$$

mit $\pi_i^{-1}(V_j) \in \mathcal{V}$, obwohl $\mathcal{V}$ keine endliche Teilüberdeckung von X zulässt. Also überdeckt V_i den Raum X_i nicht.

Unter Verwendung des Auswahlaxiomes wähle $x = (x_i)_{i \in I} \in X$, sodass für alle $i \in I$

$$x_i \in X_i \setminus \bigcup_{V \in \mathcal{V}_i} V$$

gilt. Sei $V \in \mathcal{V}$ beliebig. Dann gibt es ein $i \in I$ und ein $V_i \in \mathcal{V}_i$ mit $V = \pi_i^{-1}(V_i)$. Da $x_i \notin V_i$ ist, gilt auch $x \notin V$. Es folgt

$$x \notin \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \subsetneq X.$$

. □

3.7 Abgeschlossene Projektionen

In [3] beweisen die Autoren Clementino und Tholen eine kategorientheoretische Verallgemeinerung des Satzes von Tychonoff, basierend auf einer Charakterisierung der Kompaktheit, die auf [12] zurückgeht. Wir geben hier den Beweis des Spezialfalles im topologischen Kontext wieder, der auch in [11] und [15] zu finden ist.

Definition 3.7.1. Eine Funktion f zwischen topologischen Räumen heißt *abgeschlossen*, wenn das Bild jeder abgeschlossene Menge wiederum abgeschlossen ist.

Satz 3.7.2 (Mrówka)**.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) *X ist kompakt.*

(ii) *Für jeden topologischen Raum $(Y, \mathcal{V})$ ist die kanonische Projektion $\pi_Y : X \times Y \to Y$ eine abgeschlossene Abbildung.*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $(Y, \mathcal{V})$ ein beliebiger topologischer Raum und $A \subseteq X \times Y$ abgeschlossen. Für jedes $y \in \pi_Y(A)^c$ ist $X \times \{y\}$ eine Teilmenge der offenen Menge A^c und Lemma 3.0.1 liefert die Existenz eines offenen $W_y \in \mathcal{U}(y)$ mit $X \times W_y \subseteq A^c$. Es folgt

$$\pi_Y(A)^c = \bigcup_{y \in \pi_Y(A)^c} W_y,$$

da $\pi_Y(A)$ und W_y für jedes $y \in \pi_Y(A)^c$ disjunkt sind. Also ist $\pi_Y(A)$ abgeschlossen.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Angenommen, X wäre nicht kompakt. Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X, welches kein konvergentes Teilnetz hat. Definiere $Y := I \cup \{\infty\}$, wobei ∞ ein beliebiges Element ist, das nicht in I enthalten ist. Wir versehen Y mit der kleinsten Topologie, die alle Teilmengen von I, sowie alle Mengen der Form

$$[i_0, +\infty] := \{i \in I \mid i \succeq i_0\} \cup \{\infty\},\ i_0 \in I,$$

enthält. Betrachte

$$A := \{(x_i, i) \mid i \in I\} \subseteq X \times Y.$$

Offensichtlich gilt $\pi_Y(\overline{A}) \supseteq \pi_Y(A) = I$. Angenommen, es gäbe ein $x \in X$ mit $(x, \infty) \in \overline{A}$. Weil die Mengen $[i_0, +\infty]$ eine Umgebungsbasis von ∞ in Y bilden, sind die Mengen der Gestalt $U \times [i_0, +\infty]$ mit $U \in \mathcal{U}(x)$ und $i_0 \in I$ eine Umgebungsbasis des Punktes (x, ∞) im Produktraum $X \times Y$. Dass (x, ∞) im Abschluss von A liegt, bedeutet also:

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \forall i_0 \in I : (U \times [i_0, +\infty]) \cap A \neq \emptyset,$$

was wiederum nichts anderes bedeutet als dass es zu jeder Umgebung U des Punktes x und jedem $i_0 \in I$ ein $i \succeq i_0$ gibt, mit $x_i \in U$. Das Widerspricht aber der Tatsache, dass $(x_i)_{i\in I}$ kein konvergentes Teilnetz hat. Wir schließen $\infty \notin \pi_Y(\overline{A})$ und daher $\pi_Y(\overline{A}) = I$. Es ist aber ∞ ein Häufungspunkt von I, also ist I nicht abgeschlossen. Wir erhalten einen Widerspruch zur Annahme, dass π_Y abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet. □

Lemma 3.7.3. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{V})$ topologische Räume. Dann ist die kanonische Projektion $\pi_Y : X \times Y \to Y$ eine abgeschlossene Abbildung genau dann wenn für jedes $A \subseteq X \times Y$ und jeden Punkt $y \in \overline{\pi_Y(A)}$ ein $x \in X$ mit $(x, y) \in \overline{A}$ existiert.*

Beweis. Angenommen, π_Y ist abgeschlossen. Sei $A \subseteq X \times Y$ und $y \in \overline{\pi_Y(A)}$. Da π_Y stetig ist, gilt $\pi_Y(\overline{A}) \subseteq \overline{\pi_Y(A)}$. Da π_Y abgeschlossen ist gilt sogar Gleichheit. Also ist $y \in \pi_Y(\overline{A})$.

Für die Umkehrung sei angenommen, dass π_Y nicht abgeschlossen ist. Dann gibt es eine abgeschlossene Menge $A \subseteq X \times Y$, sodass $\pi_Y(A) = \pi_Y(\overline{A})$ nicht abgeschlossen ist. Folglich gibt es ein $y \in \overline{\pi_Y(A)} \setminus \pi_Y(\overline{A})$. Dann kann aber kein $x \in X$ mit $(x, y) \in \overline{A}$ existieren. □

Beweis (Tychonoff). Sei α ein beliebiges Element welches nicht in I enthalten ist und sei $\leq$ eine Wohlordnung auf $I \cup \{\alpha\}$, bezüglich der α das kleinste Element ist. Sei $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ ein beliebiger topologischer Raum. Wir wollen zeigen, dass die Projektion $\pi_{X_\alpha} : X \times X_\alpha \to X_\alpha$ eine abgeschlossene Abbildung ist. Mit Satz 3.7.2 folgt dann, dass der Produktraum X kompakt ist. Zur Vereinfachung der Notation definieren wir für $i \in I$

$$X^i := \prod_{j<i} X_j,$$

und $\pi^i : X^{i+1} \to X^i$ und $\pi_{X^i} : X \times X_\alpha \to X^i$ seien die kanonischen Projektionen auf den Raum X^i.

Sei $A \subseteq X \times X_\alpha$ eine abgeschlossene Menge. Sei $x_\alpha \in X_\alpha$ ein beliebiger Punkt aus $\overline{\pi_{X_\alpha}(A)}$. Mittels transfiniter Induktion definieren wir einen Punkt $x = (x_i)_{i\in I\cup\{\alpha\}} \in X \times X_\alpha$, sodass für jedes $i \in I$

$$(x_k)_{k\leq i} \in \overline{\pi_{X^{i+1}}(A)} \tag{11}$$

gilt.

Es gilt $x_\alpha \in \overline{\pi_{X^{\alpha+1}}(A)}$. Sei $i > \alpha$ und angenommen, wir haben einen Punkt $(x_k)_{k<i} \in X^i$ definiert, sodass

$$(x_k)_{k\leq j} \in \overline{\pi_{X^{j+1}}(A)} \text{ für alle } j < i \tag{12}$$

gilt. Wir zeigen zuerst, dass dann

$$(x_k)_{k<i} \in \overline{\pi_{X^i}(A)} \tag{13}$$

gilt. Wenn $i = j + 1$ für ein $j \in I$ ist, dann folgt mit der Induktionsvoraussetzung

$$(x_k)_{k<i} = (x_k)_{k\leq j} \in \overline{\pi_{X^{j+1}}(A)} = \overline{\pi_{X_i}(A)}.$$

Angenommen, i hat keinen unmittelbaren Vorgänger. Sei U eine Umgebung des Punktes $(x_k)_{k<i}$ in π_{X^i}. Dann enthält U eine Basisumgebung von $(x_k)_{k<i}$ der Form $B \times \prod_{j<k<i} X_k$,

mit einem $j < i$ und $B \in \mathcal{U}\left((x_k)_{k\leq j}\right)$. Nach der Induktionsvoraussetzung (12) ist $(x_k)_{k\leq j} \in \overline{\pi_{j+1}(A)}$, also $B \cap \pi_{j+1}(A) \neq \emptyset$. Es folgt $U \cap \pi_{X^i}(A) \neq \emptyset$. Da $U \in \mathcal{U}\left((x_k)_{k<i}\right)$ beliebig war, folgt $(x_k)_{k<i} \in \overline{\pi_{X^i}(A)}$. Also gilt (13).

Da jeder Raum X_i kompakt ist, folgt mit Satz 3.7.2, dass jede Projektion π^i eine abgeschlossene Abbildung ist. Da $\pi_{X^i}(A) = \pi^i\left(\pi_{X^{i+1}}(A)\right)$ ist, folgt mit (13) und Lemma 3.7.3 die Existenz eines $x_i \in X_i$ mit $(x_k)_{k\leq i} \in \overline{\pi_{X^{i+1}}(A)}$.

Wir haben also einen Punkt $x \in \overline{A}$ mit $\pi_{X_\alpha}(x) = x_\alpha$ definiert. Da A abgeschlossen ist, folgt $x_\alpha \in \pi_{X_\alpha}(A)$. Da $x_\alpha \in \overline{\pi_{X_\alpha}(A)}$ beliebig war, folgt $\overline{\pi_{X_\alpha}(A)} = \pi_{X_\alpha}(A)$. Da A beliebig war, ist π_{X_α} eine abgeschlossene Abbildung. $\square$

4 Die Rolle des Auswahlaxioms

In den bisher präsentierten Beweisen des Satzes von Tychonoff ist an entscheidender Stelle stets das Auswahlaxiom (oder eine dazu äquivalente Aussage, wie zum Beispiel das Lemma von Zorn) eingeflossen. In der Tat ist das Auswahlaxiom innerhalb des ZF-Axiomensystems äquivalent zum Satz von Tychonoff, wie John Leroy Kelley 1950 erstmals beweisen konnte, siehe [8]. Der folgende Beweis stützt sich auf eine leicht vereinfachte Version des ursprünglichen Beweises durch John Terilla, siehe [23].

Satz 4.0.1. *Das Auswahlaxiom folgt aus dem Satz von Tychonoff.*

Beweis. Seien eine Indexmenge I und eine Familie nichtleerer Mengen $A_i,\ i \in I$, gegeben. Wir definieren $X_i := A_i \cup \{\infty_i\}$, wobei ∞_i ein beliebiges, nicht in A_i enthaltenes Element ist - z.B.: $\infty_i := \{A_i\}$. Die Menge X_i versehen wir mit der Topologie $\mathcal{T}_i := \{\emptyset, \{\infty_i\}, A_i, X_i\}$. Die Topologien $\mathcal{T}_i$ sind endlich, also sind $(X_i, \mathcal{T}_i)$ kompakte topologische Räume. Laut dem Satz von Tychonoff ist also auch der Produktraum $X := \prod_{i\in I} X_i$ kompakt.

Betrachte die offenen Mengen $O_i := \pi_i^{-1}(\{\infty_i\})\,,\ i \in I$. Sei $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$. Aus den endlich vielen Mengen $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ wählen wir beliebige Elemente $a_{i_j} \in A_{i_j}$. Dann wird durch

$$a_i = \begin{cases} a_{i_j}, & \text{falls } i = i_j \text{ für ein } j \in \{1, \dots, n\} \\ \infty_i, & \text{sonst.} \end{cases}$$

ein Element a des Produktraumes X definiert, welches nicht in $\cup_{j=1}^n O_{i_j}$ enthalten ist. Da $i_1, \dots, i_n$ beliebig waren, überdeckt keine endliche Teilmenge von $\{O_i \mid i \in I\}$ ganz X.

Da X kompakt ist, kann $(O_i)_{i\in I}$ keine Überdeckung von X sein, da sonst eine endliche Teilüberdeckung existieren würde. Also gibt es $f \in X \setminus \cup_{i\in I}\ \pi_i^{-1}(\{\infty_i\})$. Aufgrund von $f_i \neq \infty_i$ muss $f_i \in A_i$ für alle $i \in I$ gelten, also ist f eine Auswahlfunktion. $\square$

4.1 Das abzählbare Produkt metrischer Räume

Für spezielle Produkte kompakter Räume kann man die Kompaktheit auch ohne Verwendung des Auswahlaxioms nachweisen. In diesem Abschnitt wollen wir das Produkt metrischer Räume genauer untersuchen. Die Resultate entstammen [4, Abschnitt 4.2 und 4.3] und [20].

Definition 4.1.1. Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes X heißt *totalbeschränkt*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele $x_1, \dots, x_n \in M$ gibt, sodass

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i),$$

wobei $B_\epsilon(x_i)$ die offene Kugel mit Radius ϵ um den Punkt x_i bezeichnet.

Die Kompaktheit lässt sich in metrischen Räumen mithilfe des Begriffes der Totalbeschränktheit charakterisieren. Wir fordern im Folgenden zusätzlich, dass der zu betrachtende metrische Raum auch separabel ist, um im Beweis der Charakterisierung auf das Auswahlaxiom[1] verzichten zu können.

[1] Das Auswahlaxiom sichert in den gängigen Beweisen die Existenz der rekursiv definierten Folge K_n, vgl. beispielsweise [7, Satz 12.13.3].

Satz 4.1.2 (vgl. [7, Satz 12.13.3])**.** *Sei (X, d) ein separabler*[2] *metrischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent in ZF:*

(i) X mit der von d induzierten Topologie ist kompakt.

(ii) X ist totalbeschränkt und (X, d) ist ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $\epsilon > 0$. Die offenen Kugeln mit Radius ϵ überdecken ganz X. Da X kompakt ist überdecken bereits endlich viele offene Kugeln mit Radius ϵ ganz X. Also ist X totalbeschränkt.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Wegen Satz 2.0.5 gibt es eine gegen ein $x \in X$ konvergente Teilfolge $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Für beliebige $n, k \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x).$$

Für hinreichend große $n, k \in \mathbb{N}$ wird die rechte Seite aufgrund der Cauchyfolgenbedingung und der Konvergenz der Teilfolge beliebig klein. Also konvergiert auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x. (X, d) ist also vollständig.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $B := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge von X. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es $x_1, \dots, x_m \in X$, sodass die Mengen $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_1), \dots, B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_m)$ den Raum X überdecken. Als dichte Teilmenge schneidet B jede offene Teilmenge von X. Daher gibt es $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, sodass $b_{n_i} \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)$. Damit folgt, dass X durch die Mengen $B_\epsilon(b_{n_1}), \dots, B_\epsilon(b_{n_m})$ überdeckt wird. Natürlich können wir auch zu jeder Teilmenge M von X und jedem $\epsilon > 0$ stets endlich viele Punkte aus B finden, sodass M durch Kugeln mit Radius ϵ um diese Punkte überdeckt wird.

Sei $\{O_i \mid i \in I\}$ eine offene Überdeckung von X. Wir wollen aus der Annahme, dass $\{O_i \mid i \in I\}$ keine endliche Teilüberdeckung hat, einen Widerspruch herleiten. Definiere $K_0 := X$ und rekursiv $K_n := \overline{B_{\frac{1}{n}}(b_{k(n)})}$, wobei

$$\begin{aligned} k(n) := \min\{n_0 \in \mathbb{N} \mid b_{n_0} \in K_{n-1}, \exists n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N} : \cup_{i=0}^m B_{\frac{1}{n}}(b_{n_i}) \supseteq K_{n-1} \text{ und} \\ B_{\frac{1}{n}}(b_{n_0}) \text{ wird nicht von endlich vielen } O_i \text{ überdeckt}\}. \end{aligned}$$

Die Folge $(b_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist dann eine Cauchyfolge in X. Weil X vollständig ist, konvergiert $(b_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $b \in X$. Sei $i \in I$ sodass $b \in O_i$. Die Menge O_i ist offen, also gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(b) \subseteq O_i$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ sodass $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ und $d(b_{k(n)}, b) < \frac{\epsilon}{2}$. Für $y \in K_n$ folgt dann

$$d(b, y) \leq d(b, b_{n(k)}) + d(b_{n(k)}, y) < \epsilon.$$

Daraus folgt $K_n \subseteq B_\epsilon(b) \subseteq O_i$, was aber ein Widerspruch dazu ist, dass K_n nach Konstruktion von keiner endlichen Teilmenge von $\{O_i \mid i \in I\}$ überdeckt wird. □

Wir wollen nun zeigen, dass das Produkt abzählbar vieler kompakter metrischer Räume kompakt ist. Dafür wollen wir zusätzlich voraussetzen, dass der Produktraum separabel ist, um im Beweis auf die Verwendung des Auswahlaxioms verzichten zu können. Die Abzählbarkeit ist notwendig, um auf dem Produktraum eine Metrik definieren zu können, die die Produkttopologie induziert. Wir zeigen, dass diese Metrik den Produktraum zu einem totalbeschränkten, vollständigen Raum macht. Damit folgt dann die Kompaktheit.

[2] Ein topologischer Raum heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare, dichte Teilmenge enthält.

Satz 4.1.3. *Seien $(X_n, d_n), n \in \mathbb{N}$, kompakte metrische Räume. Wenn der Produktraum $X := \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ separabel ist, dann ist er kompakt.*

Beweis. Wir können annehmen, dass die Metriken d_n durch 1 beschränkt sind, denn auf X_n wird durch

$$\tilde{d_n}(x,y) := \begin{cases} d_n(x,y) & \text{falls } d_n(x,y) < 1, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

eine Metrik definiert, die dieselbe Topologie induziert. Auf dem Produktraum definiert

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n)$$

eine endliche Metrik. Wir wollen zeigen, dass die Metrik d die Produkttopologie $\mathcal{T}$ induziert. Da die kanonischen Projektionen stetig bezüglich der von d induzierten Topologie $\mathcal{T}(d)$ sind, gilt $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(d)$. Sei $O \in \mathcal{T}(d)$ und $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in O$. Sei $\epsilon > 0$, sodass $B_\epsilon(x) \subseteq O$. Wähle $N \in \mathcal{N}$, sodass $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$. Für $n \in \{1, \dots, N\}$ sei $U_n := B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_n) \subseteq X_n$. Dann ist $U := \bigcap_{n=1}^{N} \pi_n^{-1}(U_n)$ offen in der Produkttopologie und enthält den Punkt x. Für $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$ gilt

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

also $x \in U \subseteq O$. Es folgt $\mathcal{T}(d) \subseteq \mathcal{T}$.

Wir wollen nun nachweisen, dass (X, d) totalbeschränkt ist. Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$. Wegen Korollar 3.0.2 ist $\prod_{n=1}^{N} X_n$ kompakt. Wir können auf $\prod_{n=1}^{N} X_n$ die Metrik $d^N(x,y) := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n)$ definieren und analog wie im ersten Beweisteil zeigen, dass diese Metrik die Produkttopologie induziert. Wegen Satz 4.1.2 ist $\prod_{n=1}^{N} X_n$ versehen mit der Metrik d^N totalbeschränkt[3]. Seien $\widetilde{y_1}, \dots, \widetilde{y_m} \in \prod_{n=1}^{N} X_n$, sodass $\cup_{i=1}^{m} B_{\frac{\epsilon}{2}}(\widetilde{y_i}) \supseteq \prod_{n=1}^{N} X_n$. Wähle $y_1, \dots, y_m \in X$ mit $y_i \in \cap_{n=1}^{N} \pi_n^{-1}(\widetilde{y_{i,n}})$. Zu jedem $x \in X$ gibt es ein $i \in \{1, \dots, m\}$, sodass $(x_j)_{j=1,\dots,N} \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(\widetilde{y_i})$. Es gilt

$$d(x,y_i) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, \widetilde{y_{i,n}}) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_{i,n}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

also $x \in B_\epsilon(y_i)$. Da $x \in X$ beliebig war, folgt $\cup_{i=1}^{m} B_\epsilon(y_i) \supseteq X$. Also ist X totalbeschränkt.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Diese ist genau dann konvergent, wenn für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Cauchyfolge $(\pi_i(x_n))_{n\in\mathbb{N}})$ konvergiert. Da jeder Raum X_i kompakt, separabel (als stetiges Bild der separablen Menge X) und daher nach Satz 4.1.2 vollständig ist, ist das der Fall. Also konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Als totalbeschränkter, vollständiger und separabler metrischer Raum ist X nach Satz 4.1.2 kompakt. □

[3] Im Beweis der Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ ist die Voraussetzung, dass der Raum separabel ist, nicht eingeflossen. Da die kanonischen Projektion stetig sind und der Produktraum X separabel ist, sind aber ohnedies auch die einzelnen Räume X_n, sowie die endlichen Produkträume separabel.

Korollar 4.1.4. *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Wenn X separabel ist, dann ist $X^{\mathbb{N}}$ versehen mit der Produkttopologie kompakt.*

Beweis. Sei $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge von X. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist

$$A_N := \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \mid a_1, \ldots, a_N \in B, a_m = b_1 \text{ für } m > N\}$$

abzählbar, also auch $A := \cup_{N=1}^{\infty} A_N$. Zu jeder offenen Menge $O \subseteq X^{\mathbb{N}}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ und offene Mengen $O_1, \ldots, O_N \subseteq X$, sodass $\cap_{i=1}^{N} \pi_i^{-1}(O_i) \subseteq O$. Da B dicht in X ist, gilt $O_i \cap B \neq \emptyset$ für $i = 1, \ldots, N$. Daraus folgt $O \cap A_N \neq \emptyset$. Also ist A dicht im Produktraum. Die Aussage folgt nun mit Satz 4.1.3. □

Korollar 4.1.5. *Die Kompaktheit von $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ ist innerhalb des ZF Axiomensystems beweisbar.*

4.2 Der Satz von Tychonoff in Pointless Topology

In der klassischen Topologie besteht ein topologischer Raum stets aus einer Grundmenge bestehend aus "Punkten" und einem Mengensystem, bestehend aus Teilmengen dieser Grundmenge. Einen alternativen Zugang verfolgt die sogenannte *Pointless Topology*: Hier werden keine Punktmengen betrachtet, sondern algebraische Strukturen, die Eigenschaften einer Topologie haben. Viele Resultate der klassischen Topologie haben ein Analogon in Pointless Topology - so auch der Satz von Tychonoff. Dieser kann in dieser ohne dem Auswahlaxiom bewiesen werden. Ein Grund dafür ist, dass Produkträume in Pointless Topology anders definiert werden als in der klassischen Topologie: In der klassischen Topologie ist die Grundmenge des Produktraumes ein kartesisches Produkt, in Pointless Topology wird die Produkttopologie als Koprodukt definiert. Siehe [18] für eine Abhandlung über Pointless Topology, sowie [5] und [6] für einen Beweis des Satzes von Tychonoff im Kontext dieser.

5 Eine Verallgemeinerung

Die Produkttopologie ist die initiale Topologie bezüglich der kanonischen Projektionen auf die einzelnen Räume. Man kann sich allgemeiner die Frage stellen, welche Voraussetzungen wir an eine Menge X, kompakte topologische Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$ und Abbildungen $f_i : X \to X_i$ stellen müssen, sodass X versehen mit der initialen Topologie bezüglich der f_i zu einem kompakten topologischen Raum wird. Wir folgen [17].

Satz 5.0.1. *Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ kompakte topologische Räume, X eine Menge und $f_i : X \to X_i$ Abbildungen. Wenn $f_i(X)$ für jedes $i \in I$ eine abgeschlossene Teilmenge von X_i ist und wenn für jede Wahl von $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} f_i(X_i)$ der Schnitt $\cap_{i\in I} f_i^{-1}(x_i)$ nichtleer ist, dann ist X versehen mit der initialen Topologie bezüglich der Funktionenfamilie $(f_i)_{i\in I}$ kompakt.*

Beweis. Für jedes $i \in I$ ist $f_i(X)$ als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes X_i kompakt. Nach dem Satz von Tychonoff ist $Y := \prod_{i\in I} f_i(X)$ kompakt, wenn die $f_i(X)$ mit der Spurtopologie versehen sind und Y die Produkttopologie trägt. Betrachte $f : X \to Y$ definiert durch $f(x) := (f_i(x))_{i\in I}$. Die Abbildung f ist stetig, genau dann wenn alle Abbildungen $\pi_i \circ f = f_i$ stetig sind. Also stimmt die initiale Topologie auf X bezüglich $(f_i)_{i\in I}$ überein mit der initialen Topologie bezüglich der Funktion f. Sei X nun mit dieser versehen. Wir zeigen, dass X kompakt ist.

Sei $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von X. Zu jedem $x \in X$ gibt es ein $V_x \in \mathcal{V}$ und endlich viele in Y offene Mengen $O_1, \ldots, O_n$ mit

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} f^{-1}(O_j) \subseteq V_x,$$

denn die Mengen der Form $f^{-1}(O)$ mit offenen $O \subseteq Y$ bilden eine Subbasis der initialen Topologie auf X bezüglich f. Sei $U_x := \cap_{j=1}^n O_j$. Dann ist U_x offen in Y und $f(x) \in U_x$. Da f surjektiv ist, ist $(U_x)_{x\in X}$ eine Überdeckung von Y. Da Y kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $\cup_{j=1}^n U_{x_j} = Y$. Es folgt

$$X = f^{-1}(Y) = \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(U_{x_j}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_{x_j}.$$

Also hat $\mathcal{V}$ eine endliche Teilüberdeckung. □

6 Anwendungen

In diesem Abschnitt werden einige Anwendungen und Konsequenzen des Satzes von Tychonoff vorgestellt.

6.1 Der Satz von Hahn-Banach

Ein zentraler Satz der Funktionalanalysis ist der Satz von Hahn-Banach über die Fortsetzbarkeit linearer Funktionale. Gängige Beweise verwenden das Auswahlaxiom in einer seiner Formen. Es genügt aber auch der Satz von Tychonoff in der abeschwächten Form für Hausdorffräume, wie Łoś und Ryll-Nardzewski erstmals 1951 bewiesen, siehe [16].

Satz 6.1.1 (Hahn-Banach)**.** *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, $M \subsetneq X$ ein linearer Unterraum und $p : X \to \mathbb{R}$ ein sublineares Funktional, d.h. es gelte*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \text{ sowie } p(\lambda x) = \lambda p(x) \text{ für alle } x, y \in X, \lambda \geq 0.$$

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung mit $f(x) \leq p(x)$ für alle $x \in M$. Dann existiert eine lineare Abbildung $F : X \to \mathbb{R}$, welche f auf ganz X fortsetzt und

$$-p(-x) \leq F(x) \leq p(x) \text{ für alle } x \in X \tag{14}$$

erfüllt.

Wir führen den Beweis in zwei Schritten. Der erste Beweisschritt ist aus [26, Satz 5.2.2] entnommen. Der Satz von Tychonoff fließt im zweiten Schritt entscheidend ein. Die Beweisidee entstammt [9].

Beweis.

1. Schritt: Sei $z \in X \setminus M$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass wir f auf $\operatorname{span}\{M \cup \{z\}\}$ linear fortsetzen können, sodass die Fortsetzung Bedingung (14) erfüllt. Wir setzen

$$\alpha := \sup\{f(x) - p(x-z) \mid x \in M\}$$

und definieren

$$F(x + \lambda z) := f(x) + \lambda\alpha,\ x \in M, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Offensichtlich setzt F die Funktion f linear auf $\operatorname{span}\{M \cup \{z\}\} = \{x + \lambda z \mid x \in M, \lambda \in \mathbb{R}\}$ fort. Wir weisen nun (14) nach. Aus der Abschätzung

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x-z) + p(y+z),\ \forall x, y \in M$$

erhalten wir die Ungleichung

$$f(x) - p(x-z) \leq p(y+z) - f(y),\ \forall x, y \in M.$$

Man beachte, dass nur jeweils eine Seite der Gleichung von x bzw. y abhängt. Daraus folgt

$$f(y) + \alpha \leq p(y+z) \text{ für alle } y \in M, \tag{15}$$

sowie
$$f(x) - \alpha \leq p(x - z) \text{ für alle } x \in M. \tag{16}$$
Sei $\lambda > 0$. Dann folgt $F(x+\lambda z) \leq p(x+\lambda z)$ aus (15) mit der Wahl $y := \frac{x}{\lambda}$ und Multiplikation der linken und rechten Seite mit λ. Für $\lambda < 0$ folgt die Ungleichung aus (16) mit der Wahl $x := -\frac{x}{\lambda}$ und Multiplikation mit $-\lambda$. Für $\lambda = 0$ gilt die Gleichung, da $F|_M = f$. Aufgrung der Linearität von F und da F durch p beschränkt ist gilt auch $-p(-x) \leq -F(-x) = F(x)$ für alle $x \in \operatorname{dom} F$. Also ist F eine lineare Fortsetzung von f, die (14) erfüllt.

2. Schritt: Betrachte $\mathbb{R}^X = \prod_{x\in X} \mathbb{R}$ versehen mit der Produkttopologie der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$ und
$$K := \prod_{x\in M} \{f(x)\} \times \prod_{x\in X\setminus M} [-p(-x), p(x)].$$
Nach dem Satz von Tychonoff ist K kompakt. Für $x, y \in X$ definiere
$$F_{x,y} := \left\{ q \in K \mid q|_{\operatorname{span}\{x,y\}} \text{ ist linear} \right\} \subseteq K.$$
Es gilt
$$\begin{aligned}\bigcap_{x,y\in X} F_{x,y} &= \left\{ q \in K \mid \forall x, y \in X : q|_{\operatorname{span}\{x,y\}} \text{ ist linear} \right\} \\ &= \{F : X \to \mathbb{R} \mid F \text{ ist linear, } F|_M = f, -p(x) \leq F(x) \leq p(x), \text{ für alle } x \in X\}.\end{aligned}$$
Um nachzuweisen, dass dieser Schnitt nichtleer ist, zeigen wir, dass die Mengen $F_{x,y}$ abgeschlossen in K sind und $\{F_{x,y} \mid x, y \in X\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat. Da K kompakt ist folgt die Aussage dann mit Charakterisierung (ii) der Kompaktheit einer Menge aus Satz 2.0.5.

Die Mengen $F_{x,y}$ sind abgeschlossen in K: Als kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raumes ist K selbst abgeschlossen. Wenn $(q_i)_{i\in I}$ ein gegen ein $q \in K$ konvergentes Netz von Funktionen $q_i \in F_{x,y}$ ist, dann impliziert die Konvergenz im Produktraum, dass $\lim_{i\in I} q_i(z) = q(z)$ für alle $z \in \mathbb{R}$. Damit sieht man unmittelbar, dass auch die Grenzfunktion q linear auf $\operatorname{span}\{x, y\}$ sein muss, also $q \in F_{x,y}$.

Seien $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in X$. Durch wiederholte Anwendung des ersten Beweisschrittes erhalten wir eine lineare Funktion $F : \operatorname{span}\{M \cup \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}\} \to \mathbb{R}$, welche f fortsetzt und stets die Ungleichung $-p(-x) \leq F(x) \leq p(x)$ erfüllt. Setzen wir F auf ganz X beliebig fort sodass immer noch $-p(-x) \leq F(x) \leq p(x)$ gilt, so erhalten wir ein $F \in \cap_{i=1}^n F_{x_i,y_i}$. Also hat $\{F_{x,y} \mid x, y \in X\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft. □

6.2 Der Satz von Banach-Alaoglu

Ein weiterer zentraler Satz der Funktionalanalysis ist der Satz von Banach-Alaoglu.

Satz 6.2.1 (Banach-Alaoglu)**.** *Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum. Dann ist die bezüglich der Abbildungsnorm abgeschlossene Einheitskugel um die Null im topologischen Dualraum X'*
$$K_1^{X'}(0) := \left\{ f \in X' \mid \|f\| \leq 1 \right\}$$
kompakt bezüglich der schwach- Topologie $\sigma(X', X)$.*

Indem man zeigt, dass $K_1^{X'}(0)$ eine abgeschlossene Teilmenge des Produktraumes

$$\prod_{x \in X} \{\omega \in \mathbb{C} \mid |\omega| \leq \|x\|\}$$

ist, kann man den Satz von Banach-Alaoglu unmittelbar aus dem Satz von Tychonoff für Hausdorffräume folgern, vergleiche [26, Satz 5.5.6]. Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass der Satz von Tychonoff für Hausdorff-Räume innerhalb des ZF-Axiomensystems bewiesen werden kann, wenn man die Gültigkeit des Satzes von Banach-Alaoglu annimmt. Das zeigt, dass im Beweis des Satzes von Banach-Alaoglu der Satz von Tychonoff für Hausdorffräume oder eine gleichstarke Aussage tatsächlich benötigt wird.

Der Beweis entstammt [19] und beruht auf folgender Tatsache:

Satz 6.2.2. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter Hausdorffraum. Dann gibt es eine Menge I und eine Abbildung $i : X \to [0,1]^I$, die X homöomorph auf $i(X)$ abbildet.*

Für den Beweis von Satz 6.2.2, der das Auswahlaxiom nicht verwendet, sei auf [19, Theorem 7] verwiesen. Gemeinsam mit dem nun folgenden Resultat folgt daraus die Äquivalenz des Satzes von Banach-Alaoglu und des Satzes von Tychonoff über ZF.

Satz 6.2.3. *Sei I eine Menge. Dann impliziert der Satz von Banach-Alaoglu die Kompaktheit des Raumes $[0,1]^I$.*

Beweis. Für $i \in I$ sei $\pi_i : [0,1]^I \to [0,1]$ die kanonische Projektion auf die i-te Komponente und definiere $X := \operatorname{span}\{\pi_i \mid i \in I\}$. Versehen mit der Supremumsnorm ist X ein normierter Raum. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist $K_1^{X'}(0)$ kompakt bezüglich der schwach-* Topologie auf X'. Betrache die Abbildung $\varphi : [0,1]^I \to X'$, definiert durch $\varphi(y)(x) := x(y)$. Die Funktion φ bildet nach $K_1^{X'}(0)$ hinein ab. $\iota(\pi_i) : X' \to \mathbb{C}$ bezeichne das stetige Auswertungsfunktional $f \mapsto f(\pi_i)$. Das Bild von φ ist als Schnitt der abgeschlossenen Mengen

$$\iota(\pi_i)^{-1}([0,1]) = \left\{f \in X' \middle| \, f(\pi_i) \in [0,1]\right\}$$

abgeschlossen, und als Teilmenge von $K_1^{X'}(0)$ somit kompakt. Wir zeigen, dass $\varphi : [0,1]^I \to \varphi\left([0,1]^I\right)$ ein Homöomorphismus ist. Damit folgt dann, dass auch $[0,1]^I$ kompakt ist.

Klarerweise ist φ injektiv. Ausserdem ist φ stetig: Für $x = \sum_{j=1}^n \lambda_{i_j}(x)\pi_{i_j}(.) \in X$ und $y \in [0,1]^I$ hängt der Ausdruck $x(y) = \sum_{j=1}^n \lambda_{i_j}(x) y(i_j) \in \mathbb{C}$ stetig von x, als auch von y ab. Es bleibt zu zeigen, dass φ offene Mengen auf offene Mengen abbildet. Sei $O \subseteq [0,1]^I$ offen und $f \in \varphi(O)$. Sei $y \in [0,1]^I$ mit $\varphi(y) = f$. Wähle offene Mengen $O_{i_1}, \ldots, O_{i_n} \subseteq [0,1]$, sodass $y \in \cap_{j=1}^n \pi_{i_j}^{-1}(O_{i_j}) \subseteq O$. Wir erhalten

$$f \in \bigcap_{j=1}^n \varphi\left(\pi_{i_j}^{-1}(O_{i_j})\right) \subseteq \varphi(O).$$

Für $j = 1, \ldots, n$ ist

$$\varphi\left(\pi_{i_j}^{-1}(O_{i_j})\right) = \varphi([0,1]^I) \cap \{f \in X' \mid f(\pi_{i_j}) \in O_{i_j}\},$$

also offen in $\varphi([0,1]^I)$. Es folgt, dass φ eine offene Abbildung ist. □

6.3 Existenz der Stone-Čech-Kompaktifizierung

Da Kompaktheit eine starke Eigenschaft ist, ist es oft wünschenswert, einen möglicherweise nicht kompakten topologischen Raum in einen kompakten Raum einbetten zu können. Eine nützliche Konstruktion ist die der Stone-Čech-Kompaktifizierung. Dieser Abschnitt folgt [14, Section 38].

Definition 6.3.1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir nennen einen topologischen Raum $(\beta(X), \mathcal{T}_\beta)$ gemeinsam mit einer Abbildiung $\iota : X \to \beta(X)$ *Stone-Čech-Kompaktifizierung von* X, wenn $(\beta(X), \mathcal{T}_\beta)$ ein kompakter Hausdorffraum ist, wenn $\iota : X \to \iota(X)$ ein Homöomorphismus mit $\overline{\iota(X)} = \beta(X)$ ist und wenn gilt: Für jede stetige und beschränkte Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gibt es eine eindeutige stetige Funktion $\hat{f} : \beta(X) \to \mathbb{R}$ mit $\hat{f} \circ \iota = f$.

Eine Folgerung des Satzes von Tychonoff ist, dass die Stone-Čech-Kompaktifizierung für jeden vollständig regulären Raum existiert.

Definition 6.3.2. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *vollständig regulär*, wenn einpunktige Mengen abgeschlossen sind und wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ und jedem $x \in X$ mit $x \notin A$ eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f(x) = 1$ und $f(A) \subseteq \{0\}$ gibt.

Satz 6.3.3. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer Raum. Dann hat X eine Stone-Čech-Kompaktifizierung.*

Beweis. Sei $C_b(X)$ die Menge aller stetigen und beschränkten Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Betrachte

$$K := \prod_{f \in C_b(X)} [\inf_{x \in X} f(x), \sup_{x \in X} f(x)]$$

und definiere $\iota : X \to K$ durch $\iota(x) := (f(x))_{f \in C_b(X)}$. Nach dem Satz von Tychonoff ist K kompakt. Da K außerdem Hausdorffsch ist, ist $\beta(X) := \overline{\iota(X)} \subseteq K$ versehen mit der Spurtopologie ein kompakter Hausdorffraum.

Wir zeigen, dass $\iota : X \to \iota(X)$ ein Homöomorphismus ist. Für jedes $f \in C_b(X)$ ist $\pi_f \circ \iota = f$ stetig, also ist ι stetig. Die Injektivität folgt aus der Tatsache, dass X vollständig regulär ist und deshalb für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ein $f \in C_b(X)$ mit $f(x) = 1 \neq 0 = f(y)$ existiert, was $\iota(x) \neq \iota(y)$ impliziert. Sei $O \subseteq X$ offen. Wir wollen zeigen, dass $\iota(O)$ in $\iota(X)$ offen ist. Sei $y \in \iota(O)$ beliebig und $x \in O$ mit $y = \iota(x)$. Wähle eine Funktion $f \in C_b(X)$ mit $f(x) = 1$ und $f(O^c) \subseteq \{0\}$ und definiere

$$V := \pi_f^{-1}((0, +\infty)) \cap \iota(X).$$

Die Menge V ist offen in $\iota(X)$ und enthält den Punkt y. Für beliebiges $v \in V$ gibt es wegen $V \subseteq \iota(X)$ ein $x_v \in X$ mit $v = \iota(x_v)$ und es ist $f(x_v) > 0$, was $x_v \in O$ impliziert. Es folgt $y \in V \subseteq \iota(O)$. Da $y \in \iota(O)$ beliebig war, ist $\iota(O)$ offen in $\iota(X)$ und $\iota : X \to \iota(X)$ ein Homöomorphismus.

Sei $f \in C_b(X)$. Wir wollen zeigen, dass es eine eindeutige stetige Funktion $\hat{f} : \beta(X) \to \mathbb{R}$ mit $\hat{f} \circ \iota = f$ gibt. Die Funktion $\hat{f} := \pi_f|_{\beta(X)}$ ist stetig und hat die gewünschte Eigenschaft. Sei $\tilde{f} : \beta(X) \to \mathbb{R}$ eine weitere stetige Funktion mit $\tilde{f} \circ \iota = f$. Angenommen, es ist $\hat{f} \neq \tilde{f}$.

Sei $y \in \beta(X)$ mit $\hat{f}(y) \neq \tilde{f}(y)$ und wähle disjunkte offene Mengen $\hat{V}$ und $\tilde{V}$ mit $\hat{f}(y) \in \hat{V}$ und $\tilde{f}(y) \in \tilde{V}$. Da $\hat{f}$ und $\tilde{f}$ stetig sind gibt es eine Umgebung V von y, sodass $\hat{f}(V) \subseteq \hat{V}$ und $\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{V}$ ist. Wegen $\beta(X) = \overline{\iota(X)}$ gilt $V \cap \iota(X) \neq \emptyset$. Sei $v \in V \cap \iota(X)$ und $x_v \in X$ mit $\iota(x_v) = v$. Dann ist

$$\tilde{V} \ni \tilde{f}(v) = \tilde{f} \circ \iota(x_v) = f(x_v) = \hat{f} \circ \iota(x_v) = \hat{f}(v) \in \hat{V}.$$

Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass $\hat{V} \cap \tilde{V} = \emptyset$ ist. Es folgt $\hat{f} = \tilde{f}$. □

6.4 Der Satz von Ascoli

Ein Satz der Analysis mit vielen Anwendungen ist der Satz von Arzelà-Ascoli. Mithilfe des Satzes von Tychonoff können wir eine Verallgemeinerung dieses Satzes beweisen. Wir folgen [14, Section 47].

Sei im Folgenden $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, (Y, d) ein metrischer Raum und $C(X, Y)$ bezeichne die Menge aller stetigen Funktionen $f : X \to Y$. Wir topologisieren $C(X, Y)$ folgendermaßen:

Definition 6.4.1. Die *Topologie der kompakten Konvergenz* auf $C(X, Y)$ ist die kleinste Topologie, die alle Mengen der Form

$$B_K(f, \epsilon) := \left\{ g : X \to Y \mid \sup_{x \in K} \{ d(f(x), g(x)) \} < \epsilon \right\}$$

enthält, wobei $K \subseteq X$ eine kompakte Menge, $f \in C(X, Y)$ und $\epsilon > 0$ ist.

Die Mengen $B_K(f, \epsilon)$ aus Definition 6.4.1 bilden eine Basis der Topologie der kompakten Konvergenz. Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in dieser Topologie genau dann gegen ein $f \in C(X, Y)$, wenn die f_n auf jeder kompakten Menge bezüglich der Supremumsnorm gegen f konvergieren.

Definition 6.4.2. Wir nennen $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ *gleichgradig stetig*, wenn gilt:

$$\forall x \in X \forall \epsilon > 0 \exists U \in \mathcal{U}(x) : d(f(x), f(y)) < \epsilon \text{ für alle } y \in U \text{ und } f \in \mathcal{F}.$$

Satz 6.4.3 (Arzelà-Ascoli)**.** *Wenn $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ gleichgradig stetig ist und wenn*

$$\mathcal{F}_x := \{ f(x) \mid f \in \mathcal{F} \}$$

für jedes $x \in X$ relativ kompakt ist, dann ist $\mathcal{F}$ relativ kompakt.

Wenn $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorffraum ist, dann gilt auch die Umkehrung: Ist $\mathcal{F}$ relativ kompakt, dann auch $\mathcal{F}_x$ für jedes $x \in X$ und $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig. Der Satz von Tychonoff wird für den Beweis der Umkehrung aber nicht benötigt, weshalb wir den Beweis der Umkehrung hier nicht ausführen.

Beweis von Satz 6.4.3. Sei $\mathcal{G}$ der Abschluss von $\mathcal{F}$ bezüglich der Produkttopologie auf Y^X. Wir zeigen, dass $\mathcal{G}$ kompakt in der Produkttopologie ist, dass $\mathcal{G} \subseteq C(X, Y)$ ist und dass die Produkttopologie und die Topologie der kompakten Konvergenz auf $\mathcal{G}$ übereinstimmen. Damit folgt dann die Aussage.

Wir beginnen mit dem Beweis der Tatsache, dass $\mathcal{G}$ kompakt in der Produkttopologie ist. Die Menge $\mathcal{F}$ ist enthalten in $\prod_{x\in X}\overline{\mathcal{F}_x}$. Nach Voraussetzung ist $\overline{\mathcal{F}_x}$ kompakt für jedes $x \in X$. Nach dem Satz von Tychonoff ist $\prod_{x\in X}\overline{\mathcal{F}_x}$ kompakt. Als kompakte Teilmenge des Hausdorffraumes Y^X ist dieses Produkt abgeschlossen in der Produkttopologie. Es folgt $\mathcal{G} \subseteq \prod_{x\in X}\overline{\mathcal{F}_x}$. Als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist $\mathcal{G}$ selbst kompakt.

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{G}$ gleichgradig stetig und damit insbesondere eine Teilmenge von $C(X,Y)$ ist. Seien $x \in X$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Wähle ein $U \in \mathcal{U}(x)$, sodass

$$d\left(f(x), f(y)\right) < \frac{\epsilon}{3} \text{ für alle } y \in U \text{ und } f \in \mathcal{F}$$

gilt. Sei $g \in \mathcal{G}$ und $y \in U$. Definiere

$$\begin{aligned} V :&= \pi_y^{-1}\left(U_{\frac{\epsilon}{3}}\left(g(y)\right)\right) \cap \pi_x^{-1}\left(U_{\frac{\epsilon}{3}}\left(g(x)\right)\right) \\ &= \left\{h : X \to Y \mid d\left(h(y), g(y)\right) < \frac{\epsilon}{3} \text{ und } d\left(h(x), g(x)\right) < \frac{\epsilon}{3}\right\}. \end{aligned}$$

Die Menge V ist offen in der Produkttopologie und enthält die Funktion g, welche im Abschluss von $\mathcal{F}$ liegt. Es folgt $V \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Wähle eine beliebige Funktion $h \in V \cap \mathcal{F}$. Wir erhalten

$$d\left(g(x), g(y)\right) \leq d\left(g(x), h(x)\right) + d\left(h(x), h(y)\right) + d\left(h(y), g(y)\right) < \epsilon.$$

Also ist $\mathcal{G}$ gleichgradig stetig.

Wir zeigen nun, dass die Produkttopologie auf $\mathcal{G}$ mit der Topologie der kompakten Konvergenz übereinstimmt. Die Basismengen der Produkttopologie auf Y^X sind von der Gestalt

$$B_{(x_i,\epsilon_i)_{i=1}^n}(f) := \left\{g : X \to Y \mid d\left(f(x_i), g(x_i)\right) < \epsilon_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\right\},$$

wobei $f \in C(X,Y)$ ist und die $x_i \in X$ und die $\epsilon_i > 0$ sind. Wir sehen, dass die Produkttopologie gröber als die Topologie der kompakten Konvergenz ist. Sei nun $g \in \mathcal{G}$, $K \subseteq X$ kompakt und $\epsilon > 0$. Wir zeigen, dass es eine Basismenge B der Produkttopologie auf Y^X gbit, sodass

$$g \in B \cap \mathcal{G} \subseteq B_K(g,\epsilon) \cap \mathcal{G} \tag{17}$$

gilt, vergleiche Definition 6.4.1. Da K kompakt und $\mathcal{G}$ gleichgradig stetig ist, gibt es endlich viele Punkte $x_1, \ldots x_n \in K$ und offene Mengen $U_1, \ldots, U_n$ mit $x_i \in U_i$ für $i = 1, \ldots, n$, sodass für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Abschätzung

$$d\left(g(x_i), g(y)\right) < \frac{\epsilon}{3} \text{ für alle } y \in U_i$$

gilt. Definiere

$$B := \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}\left(U_{\frac{\epsilon}{3}}(g(x_i)\right) = \left\{h : X \to Y \mid d\left(h(x_i), g(x_i)\right) < \frac{\epsilon}{3} \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}\right\}$$

Offensichtlich ist B ein Basiselement der Produkttopologie auf Y^X und enthält die Funktion g. Sei $h \in B \cap \mathcal{G}$ beliebig. Zu gegebenem $x \in K$ wähle $i \in \{1, \ldots, n\}$, sodass $x \in U_i$. Dann gilt

$$d\left(h(x), g(x)\right) \leq d\left(h(x), h(x_i)\right) + d\left(h(x_i), g(x_i)\right) + d\left(g(x_i), g(x)\right) < \epsilon,$$

also $h \in B_K(g, \epsilon) \cap \mathcal{G}$. Also gilt (17) und die beiden Topologien stimmen auf $\mathcal{G}$ überein. $\square$

6.5 Der Kompaktheitssatz der Aussagenlogik

Der Kompaktheitssatz der Aussagenlogik wird oft mithilfe des Gödelschen Vollständigkeitssatzes bewiesen. Er folgt aber auch unmittelbar aus dem Satz von Tychonoff, wie wir in diesem Abschnitt zeigen wollen. Der Beweis entstammt [21].

Definition 6.5.1. Sei Φ eine Menge aussagenlogischer Formeln über einer Variablenmenge X. Wir nennen Φ *erfüllbar*, wenn es eine Variablenbelegung $b : X \to \{0, 1\}$ gibt, sodass jede Formel $\phi \in \Phi$ unter der Belegung b erfüllt wird.

Satz 6.5.2 (Kompaktheitssatz)**.** *Sei Φ eine Menge aussagenlogischer Formeln über einer Variablenmenge X. Dann ist Φ erfüllbar, genau dann wenn jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist.*

Beweis. Wenn Φ erfüllbar ist, dann ist selbstverständlich auch jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar.

Für die Umkehrung betrachte den Raum $\{0, 1\}^X$ aller Variablenbelegungen, versehen mit der Produkttopologie der diskreten Topologie auf $\{0, 1\}$. Für eine Formel $\phi \in \Phi$ sei $B_\phi \subseteq \{0, 1\}^X$ die Menge aller Variablenbelegungen, unter denen ϕ erfüllt wird. Da ϕ nur endlich viele Variablen enthält ist $\pi_x(B_\phi) = \{0, 1\}$ für alle bis auf endlich viele $x \in X$, und auch $\pi_x(B_\phi^c) = \{0, 1\}$ für fast alle $x \in X$. Also ist B_ϕ^c offen in der Produkttopologie, und B_ϕ daher abgeschlossen. Da jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist, hat $\{B_\phi \mid \phi \in \Phi\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Nach dem Satz von Tychonoff ist $\{0, 1\}^X$ kompakt. Mit Satz 2.0.5 folgt $\cap_{\phi \in \Phi} B_\phi \neq \emptyset$. Also ist Φ erfüllbar. $\square$

Literatur

[1] K. Brown. Tychonoff's theorem. `http://math.columbia.edu/~mmiller/TProjects/RLi20s.pdf`, 2013. Accessed: 2023-02-24.

[2] P. R. Chernoff. A simple proof of Tychonoff's theorem via nets. *The American Mathematical Monthly*, 99(10):932–934, 1992.

[3] M. M. Clementino and W. Tholen. Tychonoff's theorem in a category. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(11):3311–3314, 1996.

[4] R. Engelking. *General Topology*, volume 6 of *Sigma series in pure mathematics*. Heldermann, Berlin, 1989.

[5] P. Johnstone. Tychonoff's theorem without the axiom of choice. *Fundamenta Mathematicae*, 113(1):21–35, 1981.

[6] I. Kříž. A constructive proof of the Tychonoff's theorem for locales. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 026(3):619–630, 1985.

[7] M. Kaltenbäck. *Fundament Analysis*. Berliner Studienreihe zur Mathematik. Heldermann, 2014.

[8] J. Kelley. The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice. *Fundamenta Mathematicae*, 37(1):75–76, 1950.

[9] M. Lassonde. Hahn-Banach theorems for convex functions. In *Minimax theory and applications*, volume 26, pages 135–145, Erice, Italy, Sept. 1996.

[10] P. A. Loeb. A new proof of the Tychonoff theorem. *The American Mathematical Monthly*, 72(7):711–717, 1965.

[11] E. Matheron. Three proofs of Tychonoff's theorem. *The American Mathematical Monthly*, 127:437–443, 05 2020.

[12] S. Mrówka. Compactness and product spaces. *Colloquium Mathematicae*, 7(1):19–22, 1959.

[13] M. Müger. Topology for the working mathematician. `https://www.math.ru.nl/~mueger/topology.pdf`, 2022. Accessed: 2022-09-19.

[14] J. Munkres. *Topology*. Prentice Hall Inc., second edition, 2000.

[15] N. Noble. Yet another proof of Tychonoff's theorem. `https://arxiv.org/abs/2102.10444`, 2021. Accessed: 2023-03-07.

[16] R.-N. Łoś, J. On the application of Tychonoff's theorem in mathematical proofs. *Fundamenta Mathematicae*, 38(1):233–237, 1951.

[17] S. Park. A generalization of the Tychonoff product theorem. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 12:1–3, 01 1975.

[18] J. Picado and A. Pultr. *Frames and Locales: Topology without points*, volume 2012. Frontiers in Mathematics.

[19] S. Rossi. The Banach-Alaoglu theorem is equivalent to the Tychonoff theorem for compact Hausdorff spaces. `https://arxiv.org/abs/0911.0332`, 2009. Accessed: 2023-03-07.

[20] G. Sagar and D. Ravi. Compactness of any countable product of compact metric spaces in product topology without using Tychonoff's theorem. `http://arxiv.org/pdf/2111.02904.pdf`, 2021. Accessed: 2023-02-05.

[21] D. Sidi. The compactness theorem in propositional logic. `https://piazza.com/class_profile/get_resource/iit4o21c5zswt/in7vptxdchqn0`. Accessed: 2023-03-07.

[22] O. Tatton-Brown. A direct proof of Tychonoff's theorem. `https://arxiv.org/abs/1709.03941`, 2017. Accessed: 2023-02-24.

[23] J. Terilla. Tychonoff's theorem. `http://math.hunter.cuny.edu/mbenders/notes4.pdf`, 2010. Accessed: 2022-07-05.

[24] A. Tychonoff. Über die topologische Erweiterung von Räumen. *Mathematische Annalen*, 102:544–561, 1930.

[25] H. Woracek. Lecture 7 - Der Satz von Tychonoff. `https://www.asc.tuwien.ac.at/~woracek/homepage/downloads/lva/2020W21_Analysis3/Notes/Lecture-07_SatzVonTychonoff.pdf`, 2020. Accessed: 2022-07-26.

[26] H. Woracek, M. Kaltenbäck, and M. Blümlinger. Funktionalanalysis. `www.asc.tuwien.ac.at/~funkana/skripten/fana2020.pdf`, 14. Auflage. 2020. Accessed: 2022-09-19.

[27] D. G. Wright. Tychonoff's theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 120(3):985–987, 1994.