TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

BACHELORARBEIT

Die Sätze von S. Dierolf und Eberlein-Grothendieck

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.
Harald Woracek

durch

Markus Stimpfle
Matrikelnummer: 11713076

Wien, am 20.12.2021

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

In metrischen Räumen gibt es für die Kompaktheit von Mengen mehrere äquivalente Kriterien. Neben der aus der Theorie der topologischen Räume bekannten Definition, die auf Überdeckungen mit offenen Mengen basiert, gibt es jene, die für beliebige Folgen die Existenz eines Häufungspunktes oder einer konvergenten Teilfolge verlangen. Letztere können auf beliebige topologische Räume übertragen werden und führen zu den Begriffen *abzählbar kompakt* und *folgenkompakt*, die im Allgemeinen weder untereinander noch zu erstgenannter Kompaktheit äquivalent sind. In dieser Arbeit werden die allgemein gültigen Zusammenhänge zwischen diesen Begriffen untersucht und es wird gezeigt, dass sie zum Beispiel in der schwachen Topologie eines Banachraumes äquivalent sind. Dies folgt als Spezialfall aus dem Satz von S. Dierolf, dessen Beweis das zentrale Ziel dieser Arbeit ist.

Dieser Beweis folgt weitgehend dem von Jürgen Voigt in seinem Buch [Voi20], dessen Kapitel 4, 9, 11 und 13 die Hauptgrundlage dieser Arbeit darstellen. Das Wissen aus den Grundlagenvorlesungen zur Analysis und Funktionalanalysis wird (meist ohne Kommentar) vorausgesetzt, wobei der relevante Teil größtenteils von [Kal14, Kapitel 12] und [BKW, Kapitel 2 und 5] abgedeckt wird. Die restlichen Quellen wurden ergänzend an den gekennzeichneten Stellen verwendet.

Zunächst werden im zweiten Kapitel die grundlegenden Begriffe eingeführt und auf Zusammenhänge untersucht. Dabei liegt der Fokus auf den verschiedenen Varianten von Kompaktheit in allgemeinen topologischen Räumen und auf Beschränktheit in topologischen Vektorräumen. Anschließend wird im nächsten Kapitel der Beweis des Satzes von Eberlein-Grothendieck vorbereitet und durchgeführt. Darauf aufbauend wird im vierten Kapitel der Satz von S. Dierolf bewiesen und anschließend für *angelic spaces* die Äquivalenz der Kompaktheitsbegriffe gezeigt. Im Appendix werden schließlich alle benötigten Zusammenhänge aus der Theorie der Filter kompakt präsentiert und zusätzlich die Grundlagen wiederholt.

2. Varianten von Kompaktheit und Beschränktheit

In diesem Kapitel werden wir die für diese Arbeit benötigten Grundbegriffe kennenlernen und uns einen Überblick über die wichtigsten Zusammenhänge zwischen diesen verschaffen. Hierfür bilden [Kal21, Kapitel 12.3 und 12.16] und [Voi20, Kapitel 11 und 13] die Basis.

2.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X und $x \in X$. Dann heißt x *Häufungspunkt* von $(x_i)_{i \in I}$, falls

$$\forall U \in \mathscr{U}(x) \forall i \in I \exists j \in I : j \succeq i \wedge x_j \in U,$$

wobei $\mathscr{U}(x)$ den Umgebungsfilter von x bezeichnet.

2.2 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X und $x \in X$. Dann ist x genau dann Häufungspunkt von $(x_i)_{i \in I}$, wenn $(x_i)_{i \in I}$ ein gegen x konvergentes Teilnetz besitzt.*

Beweis. Sei $(x_{i(k)})_{k \in K}$ ein Teilnetz von $(x_i)_{i \in I}$ mit Grenzwert x. Sind $U \in \mathscr{U}(x)$ und $i_0 \in I$, so folgt aus der Konvergenz, dass $k_1 \in I$ existiert mit $x_{i(k)} \in U$ für alle $k \succeq k_1$. Parallel folgt aus der Teilnetzbedingung, dass es $k_2 \in I$ gibt, das $i(k) \succeq i_0$ für alle $k \succeq k_2$ erfüllt. Ist $k_3 \succeq k_1, k_2$, so ergibt sich aus der jeweiligen Wahl von k_1 und k_2, dass $i(k_3) \succeq i_0$ und $x_{i(k_3)} \in U$ gilt. Damit ist x ein Häufungspunkt von $(x_i)_{i \in I}$.

Sei umgekehrt x ein Häufungspunkt von $(x_i)_{i \in I}$. Wir wollen ein gegen x konvergentes Teilnetz konstruieren. Wir definieren die Menge K durch

$$K := \{(j, U) \in I \times \mathscr{U}(x) \, : \, x_j \in U\},$$

und die Relation $\preceq_K$ auf K durch

$$(j_1, U_1) \preceq_K (j_2, U_2) \; :\Leftrightarrow \; j_1 \preceq j_2 \wedge U_1 \supseteq U_2.$$

Die Reflexivität und Transitivität der Relationen $\preceq$ und $\subseteq$ überträgt sich offenbar direkt auf $\preceq_K$. Für die Überprüfung der Richtungseigenschaft seien $(j_1, U_1), (j_2, U_2) \in K$. Dann wähle $j' \in I$ mit $j_1, j_2 \preceq j'$ und setze $U_3 := U_1 \cap U_2 \in \mathscr{U}(x)$. Nach der Voraussetzung gibt es nun $j_3 \in I$ mit $j_3 \succeq j'$ und $x_{j_3} \in U_3$, womit $(j_3, U_3) \in K$ und $(j_1, U_1), (j_2, U_2) \preceq_K (j_3, U_3)$ gilt. Also ist $(K, \preceq_K)$ eine gerichtete Menge. Mit $i(j, U) := j$ wird $(x_{i(j,U)})_{(j,U) \in K}$ dann zu einem gegen x konvergenten Teilnetz von $(x_i)_{i \in I}$. Ist nämlich $U_0 \in \mathscr{U}(x)$ und $i_0 \in I$, so gibt es nach Voraussetzung $j_0 \in I$ mit $j_0 \succeq i_0$ und $x_{j_0} \in U$, woraus einerseits

$$\forall (j, U) \succeq_K (j_0, U_0) : \, i(j, U) \succeq j_0 \succeq i_0 \, ,$$

und andererseits

$$\forall (j,U) \succeq_K (j_0,U_0) : x_{i(j,U)} \in U \subseteq U_0$$

folgt. $\square$

2.3 Definition. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge A von X heißt

- *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.
- *folgenkompakt*, wenn jede Folge in A eine gegen einen Punkt aus A konvergente Teilfolge hat.
- *abzählbar kompakt*, wenn jede Folge in A einen Häufungspunkt in A hat.
- *relativ kompakt*, wenn $\overline{A}$ kompakt ist.
- *relativ folgenkompakt*, wenn jede Folge in A eine gegen einen Punkt aus X konvergente Teilfolge hat.
- *relativ abzählbar kompakt*, wenn jede Folge in A einen Häufungspunkt in X hat.

2.4 Bemerkung. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$.

1. Aus Lemma 2.2 folgt eine äquivalente Charakterisierung für abzählbare Kompaktheit von A, nämlich, dass jede Folge in A ein gegen einen Punkt aus A konvergentes Teilnetz hat. Zusammen mit dem aus [Kal14, Satz 12.12.2] bekannten Kriterium für Kompaktheit, ergibt sich die folgende Gegenüberstellung der Kompaktheitsvarianten:

   $$A \text{ ist } \begin{Bmatrix} \text{kompakt} \\ \text{abzählbar kompakt} \\ \text{folgenkompakt} \end{Bmatrix} \text{ genau dann, wenn jede(s) } \begin{Bmatrix} \text{Netz} \\ \text{Folge} \\ \text{Folge} \end{Bmatrix} \text{ in } A$$

   $$\text{ein(e) gegen einen Punkt aus } A \text{ konvergente(s) } \begin{Bmatrix} \text{Teilnetz} \\ \text{Teilnetz} \\ \text{Teilfolge} \end{Bmatrix} \text{ hat.}$$

   Da jede (Teil-)Folge ein (Teil-)Netz ist, sehen wir damit sofort, dass sowohl Kompaktheit als auch Folgenkompaktheit abzählbare Kompaktheit implizieren.

2. Analog zu 1. folgt aus Lemma 2.2, dass A genau dann relativ abzählbar kompakt ist, wenn jede Folge in A ein gegen einen Punkt aus X konvergentes Teilnetz hat. Ein Vergleich mit der Definition von relativer Folgenkompaktheit zeigt, dass diese die relative abzählbare Kompaktheit impliziert.

3. Sei A relativ kompakt. Dann ergibt sich aus 1., dass $\overline{A}$ abzählbar kompakt ist und infolge A als Teilmenge von $\overline{A}$ relativ abzählbar kompakt ist.

4. Sei $\mathcal{T}$ Hausdorff. Dann sind alle kompakten Mengen abgeschlossen und daher impliziert Kompaktheit relative Kompaktheit.

Zusammen mit der trivialen Tatsache, dass aus abzählbarer Kompaktheit oder Folgenkompaktheit jeweils die relative Variante folgt, ergeben sich die in Abbildung 2.1 durch gerade Pfeile dargestellten Implikationen.

$$\begin{tikzcd}
\text{kompakt} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, dashed, "\left(\substack{\text{für } \mathcal{T} \\ \text{Hausdorff}}\right)"] & \text{abzählbar kompakt} \arrow[l, dotted, bend right, "?"'] \arrow[r, dotted, bend left, "?"] \arrow[d, Rightarrow] & \text{folgenkompakt} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{relativ kompakt} \arrow[r, Rightarrow] & \substack{\text{relativ} \\ \text{abzählbar kompakt}} \arrow[l, dotted, bend left, "?"] \arrow[r, dotted, bend right, "?"'] & \substack{\text{relativ} \\ \text{folgenkompakt}} \arrow[l, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2.1.: Veranschaulichung der Implikationen zwischen den Kompaktheitsvarianten

Wir interessieren uns natürlich dafür, ob unter gewissen Umständen in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ auch jene Implikationen gelten, die in Abbildung 2.1 mit einem „?“ versehen sind. Tatsächlich gibt es verschiedene Situationen, in denen dies zutrifft:

- $(X, \mathcal{T})$ ist *metrisierbar*, das heißt es gibt eine Metrik d auf X, sodass $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$ gilt (vgl. [Kal14, Satz 12.13.2]).
- X ist ein Banachraum und $\mathcal{T}$ ist die schwache Topologie $\sigma(X, X')$ auf X. Dies werden wir in Kapitel 4 beweisen.

Andererseits gibt es auch topologische Räume, in denen die Begriffe der Kompaktheit und der Folgenkompaktheit nicht zusammenfallen. Das folgende Beispiel, das aus [SS95, S. 125] entnommen wurde, veranschaulicht dies.

2.5 Beispiel. Sei $X := \prod_{t \in [0,1)} [0, 1]$ versehen mit der Produkttopologie und $\pi_t : X \to [0, 1]$ für $t \in [0, 1)$ die kanonische Projektion. Aus dem Satz von Tychonoff folgt, dass X kompakt ist.

Zu $t \in [0, 1)$ gibt es stets eine eindeutige Folge $(a_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\{0, 1\}$, für die

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\, 2^{-n} \quad \wedge \quad (\nexists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n = 1)$$

gilt. Sei die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X definiert durch $x_n := (a_n(t))_{t \in [0,1)}$ für $n \in \mathbb{N}$. Hätte $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, so müsste auch $(\pi_t(x_{n(k)}))_{k \in \mathbb{N}} = (a_{n(k)}(t))_{k \in \mathbb{N}}$ für alle

$t \in [0, 1)$ konvergieren. Dies kann aber für

$$t_0 := \sum_{m=1}^{\infty} b_m\, 2^{-m} \quad \text{mit} \quad b_m := \begin{cases} 1 & m \in \{n(k) \,:\, k \in 2\mathbb{N}\}\,, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

nicht zutreffen, da nach Konstruktion $|(a_{n(k+1)}(t_0)) - (a_{n(k)}(t_0))| = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Also kann es keine konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geben und X damit nicht folgenkompakt sein.

Als Vorbereitung auf die teils sehr aufwendigen Beweise in den späteren Kapiteln werden wir im Folgenden noch einige Zusammenhänge untersuchen und auch den Begriff der Beschränktheit in topologischen Vektorräumen einführen.

2.6 Lemma. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume und sei $f : X \to Y$ stetig. Ist $A \subseteq X$ kompakt, so ist es auch $f(A)$. Die analoge Aussage gilt auch, falls A (relativ) abzählbar kompakt oder (relativ) folgenkompakt ist.*

Beweis. Sei $(y_i)_{i\in I}$ ein Netz in $f(A)$. Dann gibt es ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in A mit $y_i = f(x_i)$ für alle $i \in I$. Da A kompakt ist, gibt es $x \in A$ und ein Teilnetz $(x_{i(j)})_{j\in J}$ von $(x_i)_{i\in I}$, das gegen x konvergiert. Da f stetig ist, folgt damit

$$y_{i(j)} = f\left(x_{i(j)}\right) \xrightarrow{j\in J} f(x).$$

Also hat $(y_i)_{i\in I}$ ein gegen einen Punkt aus $f(A)$ konvergentes Teilnetz.

Die Aussage für die anderen Kompaktheitsbegriffe wird genauso gezeigt, wobei nur entsprechend Bemerkung 2.4 die jeweiligen (Teil-)Netze durch (Teil-)Folgen und, falls nötig, „$x \in A$“ durch „$x \in X$“ ersetzt werden. □

2.7 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ relativ abzählbar kompakt und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A. Hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur einen Häufungspunkt in X, so konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen.*

Beweis. Da A relativ abzählbar kompakt ist, gibt es einen Häufungspunkt $x \in X$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei angenommen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen x konvergiert. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \in \mathscr{U}(x)$ und eine Teilfolge $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die in $X\backslash U$ liegt. Da diese Teilfolge ebenso in A liegt, hat sie einen Häufungspunkt $y \in X$, der klarerweise auch Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Da $X\backslash U$ abgeschlossen ist, muss $y \in X\backslash U$ gelten. Damit folgt $x \neq y$ und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat zwei verschiedene Häufungspunkte. □

2.8 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt

- *beschränkt*, wenn für alle $U \in \mathscr{U}(0)$ ein $\lambda > 0$ existiert, sodass $A \subseteq \lambda U$ gilt.
- *total beschränkt*, wenn für alle $U \in \mathscr{U}(0)$ eine endliche Teilmenge $F \subseteq X$ existiert, sodass $A \subseteq \bigcup_{x\in F}(x + U)$ gilt.

2.9 Bemerkung. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, dessen Topologie $\mathcal{T}$ durch eine Metrik d induziert wird. Ersetzt man in Definition 2.8 „$U \in \mathscr{U}(0)$“ durch „$U \in \left\{U_\epsilon^d(0) : \epsilon > 0\right\}$“, so erhält man die aus metrischen Räumen bekannten Beschränktheitsbegriffe. Da die offenen Kugeln mit festem Mittelpunkt eine Umgebungsbasis dieses Punktes darstellen, sehen wir also, dass die Beschränktheitsbegriffe aus metrischen Räumen und topologischen Vektorräumen kompatibel sind.

2.10 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $A \subseteq X$ total beschränkt. Dann ist A beschränkt.*

Beweis. Sei $U \in \mathscr{U}(0)$ und $V \in \mathscr{U}(0)$ kreisförmig und offen mit $V + V \subseteq U$. Da A total beschränkt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $F \subseteq X$ mit $A \subseteq \bigcup_{x\in F}(x+V)$. Da F endlich und V absorbierend ist, gibt es ein $\lambda > 0$ mit $F \subseteq \lambda V$, wobei wir zusätzlich $\lambda \geq 1$ fordern. (Man beachte, dass für eine kreisförmige Menge W und $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ stets die Implikation $|\mu_1| \leq |\mu_2| \Rightarrow \mu_1 W \subseteq \mu_2 W$ gilt.) Daraus erhalten wir

$$A \subseteq \bigcup_{x\in F}(x+V) \subseteq \bigcup_{x\in F}(\lambda V + V) \subseteq \lambda(V+V) \subseteq \lambda U.$$

□

2.11 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $A \subseteq X$. Ist A (total) beschränkt, so ist es auch $\overline{A}$.*

Beweis. Sei A total beschränkt und $U \in \mathscr{U}(0)$. Als topologischer Vektorraum erfüllt $(X, \mathcal{T})$ das Trennungsaxiom (T3), weshalb es es $V \in \mathscr{U}(0)$ mit $\overline{V} \subseteq U$ gibt. Aus der totalen Beschränktheit erhalten wir eine endliche Teilmenge $F \subseteq X$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{x\in F}(x+V).$$

Durch Abschlussbildung auf beiden Seiten ergibt sich

$$\overline{A} \subseteq \overline{\bigcup_{x\in F}(x+V)} = \bigcup_{x\in F}(x+\overline{V}) \subseteq \bigcup_{x\in F}(x+U).$$

Da $U \in \mathscr{U}(0)$ beliebig war, ist damit die totale Beschränktheit von $\overline{A}$ gezeigt.

Um zu zeigen, dass mit A auch $\overline{A}$ beschränkt ist, genügt es in der obigen Argumentation $F \subseteq X$ durch $\lambda > 0$ und $\bigcup_{x\in F}(x+V)$ durch λV zu ersetzen. □

Klarerweise ist jede kompakte Teilmenge A eines topologischen Vektorraumes total beschränkt, da für $U \in \mathscr{U}(0)$ die Mengen $x + U$ mit $x \in A$ eine offene Überdeckung von A bilden. Tatsächlich impliziert bereits relativ abzählbare Kompaktheit die totale Beschränktheit, wie wir im folgenden Lemma sehen werden.

2.12 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $A \subseteq X$ relativ abzählbar kompakt. Dann ist A total beschränkt.*

Beweis. Sei A nicht total beschränkt. Dann gibt es $U \in \mathscr{U}(0)$, sodass $A \nsubseteq \bigcup_{x \in F}(x + U)$ für alle endlichen Teilmengen $F \subseteq X$ gilt. Insbesondere existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A, sodass $x_n \notin \bigcup_{j=1}^{n-1}(x_j + U)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sei nun $V \in \mathscr{U}(0)$ mit $V - V \subseteq U$. Gäbe es $x \in X$ und $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ und $x_n, x_m \in x + V$, so würde daraus

$$x_m - x_n \in (x + V) - (x + V) = V - V \subseteq U$$

folgen, was wiederum direkt zum Widerspruch

$$x_m \in x_n + U \subseteq \bigcup_{j=1}^{m-1}(x_j + U)$$

führen würde. Also kann für keinen Punkt $x \in X$ mehr als ein Folgenglied in $x + V$ liegen, womit die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sicherlich keinen Häufungspunkt in X hat. □

Mit Hilfe dieser Lemmata können wir für einen konkreten topologischen Vektorraum zeigen, dass in diesem jede relativ abzählbar kompakte Teilmenge auch relativ kompakt ist. Später werden wir diese Eigenschaft des Raumes mit $(A1)$ bezeichnen.

2.13 Beispiel. Sei I eine Menge und $A \subseteq \prod_{i \in I} \mathbb{C}$ relativ abzählbar kompakt bezüglich der Produkttopologie. Nach Lemma 2.6 ist für alle $i \in I$ auch die Menge $\pi_i(A)$ relativ abzählbar kompakt und infolge beschränkt. Daher ist $\overline{\pi_i(A)}$ als beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$ kompakt und aus dem Satz von Tychonoff und

$$A \subseteq \prod_{i \in I} \pi_i(A) \subseteq \prod_{i \in I} \overline{\pi_i(A)}$$

folgt, dass A und damit auch $\overline{A}$ in einer kompakten Menge enthalten sind. Also ist $\overline{A}$ selbst kompakt und A daher relativ kompakt.

Wir schließen dieses Kapitel mit einem nützlichen Kriterium für Kompaktheit, welches analog zu dem uns aus der Theorie der metrischen Räume bekannten Kriterium ist. Für den Begriff der Vollständigkeit in topologischen Vektorräumen verweisen wir auf Definition A.6.

2.14 Satz. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. Eine Menge $A \subseteq X$ ist genau dann kompakt, wenn sie total beschränkt und vollständig ist.*

Beweis. Sei A kompakt. Wie oben bemerkt, ist A dann total beschränkt. Für die Überprüfung der Vollständigkeit sei $\mathfrak{F}$ ein Cauchy-Filter auf A. Nach Satz A.5 gibt es einen feineren Filter $\mathfrak{F}_1 \supseteq \mathfrak{F}$, der gegen einen Punkt $x \in A$ konvergiert, also $\mathscr{U}^{\mathcal{T} \cap A}(x) \subseteq \mathfrak{F}_1$. Da $\emptyset \notin \mathfrak{F}_1$ gilt und $\mathfrak{F}_1$ durchschnittsstabil ist, muss für alle $U \in \mathscr{U}^{\mathcal{T} \cap A}(x)$ und alle $B \in \mathfrak{F}_1$ der Schnitt $B \cap U$ nichtleer sein. Mit Hilfe dieser Tatsache zeigen wir, dass $\mathfrak{F}$ gegen x konvergiert. Sei $U \in \mathscr{U}(0)$ und wähle $V \in \mathscr{U}(0)$ mit $V + V \subseteq U$. Da $\mathfrak{F}$ ein Cauchy-Filter ist, gibt es nun dazu ein $B \in \mathfrak{F}$ mit $B - B \subseteq V$. Insbesondere gilt dann $B \subseteq B' + V$ für alle nichtleeren Teilmengen $B' \subseteq B$, woraus

$$B \subseteq B \cap \big(\underbrace{(x+V) \cap A}_{\in \mathscr{U}^{\mathcal{T} \cap A}(x)}\big) + V \subseteq x + V + V \subseteq x + U$$

und damit $(x+U) \cap A \in \mathfrak{F}$ folgt. Unter Berücksichtigung von $\mathscr{U}^{\mathcal{T} \cap A}(x) = x + \mathscr{U}^{\mathcal{T} \cap A}(0)$ sehen wir dadurch, dass $\mathfrak{F}$ gegen x konvergiert.

Umgekehrt sei A total beschränkt und vollständig. Sei $\mathfrak{F}$ ein Ultrafilter auf A. Wir zeigen, dass $\mathfrak{F}$ ein Cauchy-Filter ist. Sei $U \in \mathscr{U}(0)$ und wähle $V \in \mathscr{U}(0)$ mit $V - V \subseteq U$. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $F \subseteq X$, sodass $A \subseteq \bigcup_{x \in F}(x+V)$ gilt. Würden nun alle $A \backslash (x+V)$ für $x \in F$ in $\mathfrak{F}$ liegen, so ergäbe sich unter Berücksichtigung der de Morganschen Regeln mit

$$\emptyset = A \Big\backslash \left(\bigcup_{x \in F} (x+V) \right) = \bigcap_{x \in F} \underbrace{A \backslash (x+V)}_{\in \mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$$

ein Widerspruch. Daher gibt es nach Lemma A.4 ein $x \in F$ mit $A \cap (x+V) \in \mathfrak{F}$, woraus wegen

$$A \cap (x+V) - A \cap (x+V) \subseteq V - V \subseteq U$$

folgt, dass $\mathfrak{F}$ ein Cauchy-Filter ist. Da A vollständig ist, konvergiert dieser in A. Weil $\mathfrak{F}$ ein beliebiger Ultrafilter war, folgt aus Satz A.5 die Kompaktheit von A. □

3. Der Satz von Eberlein-Grothendieck

Auf dem von uns gewählten Weg zum Satz von S. Dierolf bildet der Satz von Eberlein-Grothendieck das wichtigste Etappenziel. Dieses Kapitel ist allein dem Beweis dieses Satzes und den dafür benötigten Vorbereitungen gewidmet. Dabei stützen wir uns fast zur Gänze auf [Voi20, Kapitel 13].

3.1 Definition. Sei X eine Menge und $d : X \times X \to [0, \infty)$ eine Funktion. Dann heißt d eine *Semimetrik* auf X, wenn gilt:

(i) $\forall x \in X : d(x, x) = 0$.

(ii) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Treffen diese Bedingungen zu, so heißt das Paar (X, d) *semimetrischer Raum* und für $x \in X$ und $\epsilon > 0$ ist durch

$$U_\epsilon(x) := \{y \in X \,:\, d(x, y) < \epsilon\}$$

die *offene ϵ-Kugel* um den Punkt x definiert.

3.2 Bemerkung. Offenbar ist jede Metrik auch eine Semimetrik. Die Vorgehensweise aus metrischen Räumen verallgemeinernd erzeugt die Menge aller offenen ϵ-Kugeln in einem semimetrischen Raum (X, d) eine Topologie $\mathcal{T}(d)$ auf X, von der die offenen ϵ-Kugeln eine Basis darstellen. Dabei lassen sich zwei Punkte $x, y \in X$ genau dann durch offene Mengen trennen, wenn $d(x, y) > 0$ gilt. Also ist $\mathcal{T}(d)$ genau dann Hausdorff, wenn $d(x, y) > 0$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gilt, was wiederum äquivalent dazu ist, dass d eine Metrik ist.

Wir sagen eine Topologie ist *semimetrisierbar*, wenn sie von einer Semimetrik erzeugt wird. Wir wollen uns nun davon überzeugen, dass Semimetrisierbarkeit in initialen Konstruktionen erhalten bleibt, sofern nur abzählbar viele Funktionen beteiligt sind. Folgendes Lemma basiert auf [Voi20, Lemma 2.18].

3.3 Lemma. *Sei X eine Menge, $N \subseteq \mathbb{N}$, $(X_n, d_n)_{n \in N}$ eine (endliche) Folge semimetrischer Räume und $(f_n)_{n \in N}$ eine (endliche) Folge von Funktionen mit $f_n : X \to X_n$ für $n \in N$. Dann ist die initiale Topologie auf X bezüglich der f_n semimetrisierbar.*

Beweis. Sei $\mathcal{T}_{\text{init}}$ die initiale Topologie auf X bezüglich der f_n. Wir konstruieren eine Semimetrik auf X und zeigen, dass $\mathcal{T}_{\text{init}}$ von dieser erzeugt wird. Die durch

$$d(x, y) := \sum_{n \in N} \min\Big(d_n\big(f_n(x), f_n(y) \big) \,, \, 2^{-n} \Big), \qquad x, y \in X,$$

definierte Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert, da sie stets durch $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$ majorisiert wird. Außerdem vererben sich alle Eigenschaften einer Semimetrik von den d_n direkt auf d, wobei für die Dreiecksungleichung noch die Abschätzung $\min(a+b,c) \leq \min(a,c) + \min(b,c)$ für $a,b,c > 0$ eingeht.

Sei $n \in N$, $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Für $\delta \in (0, \min(\epsilon, 2^{-n}))$ gilt dann

$$\forall y \in X : d(x,y) < \delta \Rightarrow d_n((f_n(x), f_n(y)) < \delta \leq \epsilon,$$

da $d_n((f_n(x), f_n(y))$ wegen $d(x,y) < 2^{-n}$ als Summand in $d(x,y)$ auftritt. Damit ist die Abbildung $f_n : (X,d) \to (X_n, d_n)$ stetig. Da $n \in N$ beliebig war, erhalten wir $\mathcal{T}_{\text{init}} \subseteq \mathcal{T}(d)$.

Abschließend zeigen wir, dass $id_X : (X, \mathcal{T}_{\text{init}}) \to (X,d)$ stetig ist, woraus die verbleibende Inklusion $\mathcal{T}_{\text{init}} \supseteq \mathcal{T}(d)$ folgt. Sei $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Dann wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $2^{-n} < \epsilon/2$ und definiere eine $\mathcal{T}_{\text{init}}$-Umgebung von x durch

$$V := \bigcap_{\substack{j \in N \\ j \leq n}} f_j^{-1}\left(U^{d_j}_{\epsilon/2n}(f_j(x))\right). \tag{3.1}$$

Dann gilt für alle $y \in V$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{\substack{j \in N \\ j \leq n}} \min\Big(\underbrace{d_j\big(f_j(x), f_j(y)\big)}_{\overset{(3.1)}{<} \epsilon/2n}, 2^{-j} \Big) + \sum_{\substack{j \in N \\ j > n}} \min\Big(d_j\big(f_j(x), f_j(y)\big), 2^{-j} \Big) \\ &< n \cdot \frac{\epsilon}{2n} + \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-j} = \frac{\epsilon}{2} + 2^{-n} < \epsilon. \end{aligned}$$

Da $x \in X$ und $\epsilon > 0$ beliebig waren, ist damit die Stetigkeit von $id_X : (X, \mathcal{T}_{\text{init}}) \to (X,d)$ gezeigt. □

Für das restliche Kapitel erinnern wir uns daran, dass ein Netz in einer initialen Topologie genau dann konvergiert, wenn für alle Funktionen, bezüglich derer die Topologie gebildet wurde, das Netz der Bildpunkte konvergiert. Insbesondere ist die Konvergenz in einer Produkttopologie äquivalent zur punktweisen Konvergenz.

3.4 Bemerkung. Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume.

1. Sei $I_0 \subseteq I$ und $\pi_{I_0} : \prod_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in I_0} X_i$ die kanonische Projektion, die jedem Tupel $(x_i)_{i \in I}$ das Tupel $(x_i)_{i \in I_0}$ zuordnet. Dann konvergiert für ein Netz $(y_j)_{j \in J}$ in $\prod_{i \in I} X_i$ das Netz $(\pi_{I_0}(y_j))_{j \in J}$ bezüglich $\prod_{i \in I_0} \mathcal{T}_i$ genau dann, wenn $(y_j)_{j \in J}$ punktweise auf I_0 konvergiert. Also entspricht die initiale Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$ bezüglich $\pi_{I_0} : \prod_{i \in I} X_i \to (\prod_{i \in I_0} X_i, \prod_{i \in I_0} \mathcal{T}_i)$ genau der punktweisen Konvergenz auf I_0. Da die punktweise Konvergenz auf I_0 schwächer ist als die auf I, sehen wir auch direkt, dass π_{I_0} als Abbildung von $(\prod_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ nach $(\prod_{i \in I_0} X_i, \prod_{i \in I_0} \mathcal{T}_i)$ stetig ist.

2. Sei $(I_j)_{j \in J}$ eine Familie von Teilmengen von I. Analog zum vorherigen Punkt entspricht die initiale Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$ bezüglich der Familie $(\pi_{I_j})_{j \in J}$ genau der punktweisen Konvergenz auf I_j für alle $j \in J$. Dies ist aber gleichbedeutend zur

punktweisen Konvergenz auf $\bigcup_{j\in J} I_j$, was wiederum der initialen Topologie bezüglich $\pi_{\bigcup_{j\in J} I_j}$ entspricht. Ist $\bigcup_{j\in J} I_j = I$, so stimmt die initiale Topologie bezüglich $(\pi_{I_j})_{j\in J}$ mit der Produkttopologie überein.

3.5 Lemma. *Seien Y und Z Mengen und $\langle .,. \rangle : Y \times Z \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Weiters sei $\mathcal{T}_Z$ die initiale Topologie auf Y bezüglich der Familie $(\langle ., z\rangle)_{z\in Z}$ und $\mathcal{O}_Y$ die initiale Topologie auf Z bezüglich $(\langle y, .\rangle)_{y\in Y}$.*

Ist $(Y, \mathcal{T}_Z)$ kompakt und liegt $Z_0 \subseteq Z$ dicht in $(Z, \mathcal{O}_Y)$, dann stimmt $\mathcal{T}_Z$ mit der initialen Topologie $\mathcal{T}_{Z_0}$ auf Y bezüglich $(\langle ., z\rangle)_{z\in Z_0}$ überein. Ist Z_0 abzählbar, so ist $\mathcal{T}_Z$ semimetrisierbar und Y ist separabel, besitzt also eine abzählbare dichte Teilmenge.

Beweis. Sei $\iota : Y \to \prod_{z\in Z} \mathbb{C}$ definiert durch $\iota(y) := (\langle y, z\rangle)_{z\in Z}$. Im Folgenden seien alle Produkte mit der jeweiligen Produkttopologie versehen. Da $\langle ., z\rangle = \pi_z \circ \iota$ für alle $z \in Z$ gilt, stimmt $\mathcal{T}_Z$ mit der initialen Topologie bezüglich ι überein. Insbesondere ist ι stetig bezüglich $\mathcal{T}_Z$ und damit ist $\iota(Y)$ als Teilmenge von $\prod_{z\in Z} \mathbb{C}$ kompakt. Sei $\pi_{Z_0} : \prod_{z\in Z} \mathbb{C} \to \prod_{z\in Z_0} \mathbb{C}$ die kanonische Projektion. Dann ist die Einschränkung von π_{Z_0} auf $\iota(Y)$ injektiv. Sind nämlich $x, y \in Y$ mit $\pi_{Z_0}(\iota(x)) = \pi_{Z_0}(\iota(y))$, so heißt dies genau, dass $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ für alle $z \in Z_0$ gilt. Also stimmen die stetigen Abbildungen $\langle x, .\rangle$ und $\langle y, .\rangle$ auf der in Z dicht liegenden Teilmenge Z_0 überein, wodurch sie auf ganz Z übereinstimmen müssen. Damit gilt $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ für alle $z \in Z$ oder gleichbedeutend $\iota(x) = \iota(y)$, womit die Injektivität gezeigt ist.

In Bemerkung 3.4 haben wir bereits festgestellt, dass π_{Z_0} stetig ist. Da außerdem $\iota(Y)$ kompakt und $\pi_{Z_0}(\iota(Y))$ Hausdorff ist, folgt bereits, dass $\pi_{Z_0} : \iota(Y) \to \pi_{Z_0}(\iota(Y))$ ein Homöomorphismus ist. Infolge stimmen die initialen Topologien auf Y bezüglich ι und $\pi_{Z_0} \circ \iota$ überein. Letztere stimmt mit $\mathcal{T}_{Z_0}$ überein, da $\langle ., z\rangle = \pi_z \circ (\pi_{Z_0} \circ \iota)$ für alle $z \in Z_0$ gilt. Insgesamt erhalten wir $\mathcal{T}_Z = \mathcal{T}_{Z_0}$.

Ist Z_0 abzählbar, so folgt direkt aus Lemma 3.3, dass $\mathcal{T}_{Z_0}$ semimetrisierbar ist. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Teilmenge $F_n \subseteq Y$, sodass $Y \subseteq \bigcup_{y\in F_n} U_{1/n}(y)$ gilt. Damit liegt die abzählbare Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ dicht in $(Y, \mathcal{T}_Z)$, da es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und $y \in Y$ ein $y_0 \in F_n$ mit $d(y, y_0) < 1/n$ gibt. Also ist $(Y, \mathcal{T}_Z)$ separabel. $\square$

3.6 Lemma. *Sei X eine Menge, $A \subseteq X$, $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von Funktionen mit $f_i : X \to X_i$ für $i \in I$. Sei $\mathcal{T}$ die initiale Topologie auf X bezüglich der f_i. Dann stimmt $\mathcal{T} \cap A$ mit der initialen Topologie auf A bezüglich der Familie $(f_i|_A)_{i\in I}$ überein, wobei wir die $f_i|_A$ als $f_i|_A : A \to (f_i(A), \mathcal{T}_i \cap f_i(A))$ betrachten.*

Beweis. Da die Bildung initialer Topologien assoziativ ist, stimmt $\mathcal{T} \cap A$ mit der initialen Topologie auf A bezüglich der Familie $(f_i \circ \mathrm{id}_X|_A)_{i\in I}$ überein. Aus dem gleichen Grund sind auf A die initialen Topologien bezüglich der Familien $(f_i|_A)_{i\in I}$ und $(\mathrm{id}_{X_i}|_{f_i(A)} \circ f_i|_A)_{i\in I}$ gleich. Für $i \in I$ gilt offenbar $\mathrm{id}_{X_i}|_{f_i(A)} \circ f_i|_A = f_i \circ \mathrm{id}_X|_A$, wodurch die initialen Topologien bezüglich der Familien $(f_i \circ \mathrm{id}_X|_A)_{i\in I}$ und $(\mathrm{id}_{X_i}|_{f_i(A)} \circ f_i|_A)_{i\in I}$ ebenfalls übereinstimmen. Insgesamt erhalten wir durch die Transitivität der Gleichheitsrelation die behauptete Gleichheit. $\square$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, bend left, "f_i"] \arrow[rrrr, bend left, "f_j"] & \cdots & (X_i, \mathcal{T}_i) & \cdots & (X_j, \mathcal{T}_j) & \cdots \\
A \arrow[u, "\mathrm{id}_X|_A"'] \arrow[rr, bend right, "f_i|_A"'] \arrow[rrrr, bend right, "f_j|_A"'] & \cdots & f_i(A) \arrow[u, "\mathrm{id}_{X_i}|_{f_i(A)}"'] & \cdots & f_j(A) \arrow[u, "\mathrm{id}_{X_j}|_{f_j(A)}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Abbildung 3.1.: Veranschaulichung der Situation in Lemma 3.6

Wir sagen eine Teilmenge eines topologischen Raumes ist *σ-kompakt*, wenn sie sich als Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Mengen schreiben lässt. Der Satz von Eberlein-Grothendieck zeigt uns unter anderem, dass die in Abbildung 2.1 mit „?“ versehenen Implikationen in einer speziellen Situation gelten, auf die wir später eine allgemeinere Situationen zurückführen werden.

3.7 Satz (von Eberlein-Grothendieck)**.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum mit einer dichten, σ-kompakten Teilmenge. Zudem sei $H \subseteq C(X) := C((X, \mathcal{T}), \mathbb{C})$ relativ abzählbar kompakt bezüglich $\mathcal{V} \cap C(X)$, wobei $\mathcal{V}$ die Produkttopologie auf $\prod_{x \in X} \mathbb{C}$ bezeichne.*

Dann ist $\overline{H} := \overline{H}^{\mathcal{V}}$ kompakt, folgenkompakt und in $C(X)$ enthalten. Weiters ist jedes Element $f \in \overline{H}$ Grenzwert einer Folge von Elementen aus H und für jede separable Teilmenge $F \subseteq \overline{H}$ ist die Spurtopologie $\mathcal{V} \cap F$ metrisierbar.

Beweis. (i) Da H insbesondere bezüglich $\mathcal{V}$ relativ abzählbar kompakt ist, folgt aus Beispiel 2.13, dass $\overline{H}$ kompakt ist.

Mit Ausnahme der Folgenkompaktheit von $\overline{H}$ werden wir nun die übrigen Behauptungen in drei Abschnitten zeigen, in denen wir schrittweise die Anforderungen an $(X, \mathcal{T})$ verringern. Für den ersten nehmen wir an, dass $(X, \mathcal{T})$ kompakt ist.

(ii) Sei $F_0 \subseteq C(X)$ abzählbar und setze $F_1 := \overline{F_0}^{\mathcal{V} \cap C(X)}$. Da alle $f \in F_1$ stetig bezüglich $\mathcal{T}$ sind, muss die initiale Topologie $\mathcal{T}_{F_1}$ auf X bezüglich F_1 gröber sein als $\mathcal{T}$. Daher ist $(X, \mathcal{T}_{F_1})$ ebenfalls kompakt und wir können Lemma 3.5 anwenden, mit $Y := X, Z := F_1$ und $\langle t, f \rangle := f(t)$ für $(t, f) \in X \times F_1$. Daraus erhalten wir, dass $(X, \mathcal{T}_{F_1})$ separabel ist und $\mathcal{T}_{F_1}$ mit der initialen Topologie $\mathcal{T}_{F_0}$ bezüglich F_0 übereinstimmt.

(iii) Als nächstes wollen wir zeigen, dass $\overline{H} \subseteq C(X)$ gilt. Sei indirekt angenommen, dass $g \in \overline{H} \backslash C(X)$ existiert. Dann gibt es $t_0 \in X$, $\epsilon > 0$ und eine Menge $M \subseteq X$ mit $t_0 \in \overline{M}$, sodass

$$\forall t \in M : |g(t) - g(t_0)| \geq \epsilon \tag{3.2}$$

gilt. Daraus können wir nun Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M konstruieren, die

$$|f_n(t_k) - g(t_k)| \leq \frac{1}{n} \qquad \text{für } 0 \leq k < n, \text{ und} \tag{3.3}$$

$$|f_k(t_n) - f_k(t_0)| \leq \frac{1}{n} \qquad \text{für } 0 < k \leq n \tag{3.4}$$

erfüllen. Sei $(g_i)_{i\in I}$ ein Netz in H, das bezüglich $\mathcal{V}$ – also punktweise – gegen g konvergiert. Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $t_1, \dots, t_{n-1}$ und $f_1, \dots, f_{n-1}$ bereits gewählt, so gibt es wegen der Konvergenz der g_i für $k = 0, \dots, n-1$ jeweils ein $i_k \in I$ mit $|g_i(t_k) - g(t_k)| \leq 1/n$ für alle $i \succeq i_k$. Dann wählen wir $i' \succeq i_0, \dots, i_{n-1}$ und finden mit $f_n := g_{i'}$ eine Funktion, die (3.3) erfüllt. Wegen der Stetigkeit der f_k gibt es nun $V_1, \dots, V_n \in \mathscr{U}(t_0)$, sodass

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \forall t \in V_k : \ |f_k(t) - f_k(t_0)| \leq \frac{1}{n}$$

gilt. Wegen $V := \bigcap_{k=1}^n V_k \in \mathscr{U}(t_0)$ folgt nun $M \cap V \neq \emptyset$, womit wir $t_n \in M \cap V$ beliebig wählen können, da alle $t'_n \in V$ (3.4) erfüllen. Damit ist die Konstruktion abgeschlossen. Nach Voraussetzung hat die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $f \in C(X)$ und infolge ein gegen f konvergentes Teilnetz $(f_{n(j)})_{j\in J}$. Andererseits folgt aus (3.3), dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit auch $(f_{n(j)})_{j\in J}$ auf $\{t_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ punktweise gegen g konvergieren, womit f und g auf $\{t_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ übereinstimmen müssen. Weiters folgt aus (3.4), dass $f_k(t_n) \xrightarrow{n\to\infty} f_k(t_0)$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt, woraus wir die Konvergenz $t_n \xrightarrow{n\to\infty} t_0$ in der initialen Topologie $\mathcal{T}_{F_0}$ bezüglich der Menge $F_0 := \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ erhalten. Wenden wir (ii) auf unser F_0 an, so ergibt sich wegen $f \in F_1$, dass f bezüglich $\mathcal{T}_{F_0}$ stetig ist und daraus folgt $g(t_n) = f(t_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(t_0) = g(t_0)$. Dies stellt aber einen Widerspruch zu (3.2) dar.

(iv) Sei $F \subseteq \overline{H}$ separabel. Es gibt also eine abzählbare Teilmenge $F_0 \subseteq F$ mit $F \subseteq \overline{F_0}$. Aus (iii) folgt $\overline{F} \subseteq \overline{H} \subseteq C(X)$ und damit $F_1 := \overline{F_0}^{\mathcal{V}\cap C(X)} = \overline{F_0} \cap C(X) = \overline{F_0}$. Als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist F_1 selbst kompakt. In (ii) haben wir gesehen, dass $(X, \mathcal{T}_{F_1})$ separabel ist. Dies erlaubt uns Lemma 3.5 erneut anzuwenden, diesmal mit $Y := F_1, Z := X$ und $\langle f, t\rangle := f(t)$ für $(f,t) \in F_1 \times X$. Daraus erhalten wir, dass $\mathcal{V} \cap F_1$ von einer Semimetrik d_{F_1} erzeugt wird. Da Produkt- und Spurtopologien die Eigenschaft Hausdorff erhalten, ist $\mathcal{V} \cap F_1$ Hausdorff und d_{F_1} ist sogar eine Metrik. Wegen $F \subseteq F_1$ ist $\mathcal{V} \cap F$ ebenfalls metrisierbar.

(v) Sei $f \in \overline{H}$ beliebig. Für $k \in \mathbb{N}$ und $g \in H$ definieren wir

$$W_{k,g} := \left\{ t \in X : |g(t) - f(t)| < \frac{1}{k} \right\} = (f-g)^{-1}\left(U^{\mathbb{C}}_{\frac{1}{k}}(0)\right),$$

und

$$V_{k,g} := \prod_{j=1}^{k} W_{k,g}\,.$$

Da wegen (iii) f und damit auch $f - g$ stetig sind, sind die $W_{k,g}$ in X offen und infolge auch die $V_{k,g}$ in X^k. Für festes $k \in \mathbb{N}$ bildet $(V_{k,g})_{g\in H}$ eine offene Überdeckung von X^k. Ist nämlich $(t_1, \dots, t_k) \in X^k$ beliebig, so finden wir analog zur Konstruktion der f_n in (iii) ein

$g \in H$ mit $(t_1, \ldots, t_k) \in V_{k,g}$. Da X^k kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $H_k \subseteq H$, sodass X^k bereits von $(V_{k,g})_{g \in H_k}$ überdeckt wird. Indem wir die Elemente aller H_k wie in

$$\overbrace{f_1, \ldots, f_{m_1},}^{H_1} \quad \overbrace{f_{m_1+1}, \ldots f_{m_2},}^{H_2} \quad \ldots \quad \overbrace{f_{m_{n-1}+1}, \ldots, f_{m_n},}^{H_n} \quad \ldots$$

nebeneinander anordnen, erhalten wir eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit f als Häufungspunkt. Sind nämlich $U \in \mathscr{U}(f)$ und $N \in \mathbb{N}$ beliebig, so gibt es zunächst $\epsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in X$, sodass die offene Menge

$$\widetilde{U} = \prod_{t\in X} O_t \quad \text{mit} \quad O_t = \begin{cases} U_\epsilon\big(f(t)\big) & t \in \{t_1, \ldots, t_k\}, \\ \mathbb{C} & \text{sonst,} \end{cases} \tag{3.5}$$

in U enthalten ist, da Mengen dieser Form eine Umgebungsbasis bilden. Nun können wir ein $\ell \in \mathbb{N}$ finden, das $\ell > N, k, 1/\epsilon$ erfüllt. Wir setzen $t_{k+1}, \ldots, t_\ell := t_1$. Da X^ℓ von $(V_{\ell,g})_{g\in H_\ell}$ überdeckt wird, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n \in H_\ell$ und $(t_1, \ldots, t_\ell) \in V_{\ell,f_n}$, wobei sicherlich $n \geq \ell$ gilt. Dies bedeutet insbesondere, dass $|f(t_j) - f_n(t_j)| < 1/\ell < \epsilon$ für $j = 1, \ldots, k$ gilt, woraus direkt $f_n \in \widetilde{U} \subseteq U$ folgt. Damit stellt sich f als Häufungspunkt der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heraus. Setzen wir $F_0 := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, so wissen wir bereits aus (iv), dass $F := \overline{F_0}$ metrisierbar ist. Daher gibt es eine gegen f konvergente Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Für den zweiten Abschnitt nehmen wir an, dass $(X, \mathcal{T})$ σ-kompakt ist. Sei also $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Teilmengen von X, sodass $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ gilt. Da wir die X_n durch $\widetilde{X_n} := \bigcup_{k=1}^n X_k$ ersetzen können, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist.

(vi) Sei $F \subseteq \overline{H}$ separabel und $n \in \mathbb{N}$. Für $X_0 \subseteq X$ und $A \subseteq \prod_{t\in X} \mathbb{C}$ setzen wir $A|_{X_0} := \pi_{X_0}(A) = \{f|_{X_0} : f \in A\}$. Da infolge der Stetigkeit von π_{X_n} aus $F_0 \subseteq F \subseteq \overline{F_0}$ stets

$$F_0|_{X_n} \subseteq F|_{X_n} \subseteq \overline{F_0}|_{X_n} = \pi_{X_n}(\overline{F_0}) \subseteq \overline{\pi_{X_n}(F_0)} = \overline{F_0|_{X_n}} \tag{3.6}$$

folgt, ist mit F auch $F|_{X_n}$ separabel. Da Einschränkungen stetiger Funktionen immer noch stetig sind, gilt $H|_{X_n} \subseteq C(X_n)$. Wegen Lemma 2.6 ist $H|_{X_n} = \pi_{X_n}(H)$ relativ abzählbar kompakt als Teilmenge von $C(X_n)$ und wir können den ersten Abschnitt auf $H|_{X_n}$ anwenden. Daher ist die Spurtopologie auf $F|_{X_n}$ unter Berücksichtigung von $\overline{H}|_{X_n} \subseteq \overline{H|_{X_n}}$ metrisierbar.

Wie in Bemerkung 3.4 und Lemma 3.6 festgestellt, stimmt die Spurtopologie auf F mit der initialen Topologie bezüglich der Abbildungen $\pi_{X_n}|_F : F \to F|_{X_n}$ überein. Da wie eben gezeigt die Topologien der Zielräume metrisierbar sind, folgt aus Lemma 3.3, dass die Spurtopologie auf F semimetrisierbar ist. Da diese aber auch Hausdorff ist, ist sie sogar metrisierbar.

(vii) Für diesen Abschnitt verbleibt zu zeigen, dass $\overline{H} \subseteq C(X)$ gilt und dass jedes $f \in \overline{H}$ Grenzwert einer Folge aus H ist. Sei $f \in \overline{H}$ und $n \in \mathbb{N}$. Aus $\overline{H}|_{X_n} \subseteq \overline{H|_{X_n}}$ folgt $f|_{X_n} \in \overline{H|_{X_n}}$. Wegen des ersten Abschnitts gibt es daher eine Folge $(f_j^n)_{j\in\mathbb{N}}$ in H, sodass $(f_j^n|_{X_n})_{j\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $f|_{X_n}$ konvergiert.

Die Folgen, die wir dabei für alle $n \in \mathbb{N}$ erhalten, können wir nun mittels des ersten Cantorschen Diagonalverfahrens zu einer einzigen Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zusammenfügen. Dies wird in Abbildung 3.2 dargestellt. Alle ursprünglichen Folgen sind dabei als Teilfolgen in $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ enthalten. Infolge ist f ein Häufungspunkt von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Sind nämlich $U \in \mathscr{U}(f)$ und $N \in \mathbb{N}$ beliebig, so gibt es wieder ein $\widetilde{U}$ der Form (3.5) mit $t_1, \ldots, t_k \in X$ und $\widetilde{U} \subseteq U$. Dann gibt es wegen der Monotonie von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $t_1, \ldots, t_k \in X_m$ gilt. Da eine Teilfolge von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf X_m punktweise gegen f konvergiert, gibt es insbesondere ein $\ell \geq N$, sodass $f_\ell \in \widetilde{U} \subseteq U$ gilt.

$$\begin{tikzcd}
f_1^1 \arrow[r] & f_2^1 \arrow[dl] & f_3^1 & \cdots \\
f_1^2 \arrow[d] & f_2^2 \arrow[ur] & \ddots & \\
f_1^3 \arrow[ur] & \ddots & & \\
\vdots & & &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 3.2.: Erstes Cantorsches Diagonalverfahren

Setzen wir nun $F_0 := \{f_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{f\}$ und $F := \overline{F_0}$, so erhalten wir aus (vi), dass $\mathcal{V} \cap F$ und damit ebenso $\mathcal{V} \cap F_0$ metrisierbar ist. Da f ein Häufungspunkt von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist, gibt es daher eine gegen f konvergente Teilfolge $(f_{k(j)})_{j\in\mathbb{N}}$. Diese hat mit f klarerweise nur einen Häufungspunkt. Nach Voraussetzung hat $(f_{k(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ aber einen Häufungspunkt in $C(X)$, woraus folgt, dass f stetig ist. Damit haben wir $\overline{H} \subseteq C(X)$ gezeigt.

Für den letzten Abschnitt sei $\check{X}$ eine dichte, σ-kompakte Teilmenge von X.

(viii) Wir zeigen zuerst $\overline{H} \subseteq C(X)$. Sei $f \in \overline{H}$. Wieder gilt $\overline{H}|_{\check{X}} \subseteq \overline{H|_{\check{X}}}$ analog zu (3.6), woraus direkt $f|_{\check{X}} \in \overline{H|_{\check{X}}}$ folgt. Aus dem zweiten Abschnitt erhalten wir daher eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in H, die auf $\check{X}$ punktweise gegen f konvergiert. Nach unserer Voraussetzung hat diese Folge auch einen Häufungspunkt $g \in C(X)$ und damit ein gegen g konvergentes Teilnetz. Da mit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auch jedes Teilnetz punktweise auf $\check{X}$ gegen f konvergiert, müssen f und g auf $\check{X}$ übereinstimmen. Für beliebiges $t \in X$ ist $\check{X} \cup \{t\}$ σ-kompakt, womit wie oben $f|_{\check{X}\cup\{t\}} \in \overline{H|_{\check{X}\cup\{t\}}} \subseteq C(\check{X} \cup \{t\})$ folgt. Weil $\check{X}$ insbesondere in $\check{X} \cup \{t\}$ dicht liegt, müssen die stetigen Funktionen $f|_{\check{X}\cup\{t\}}$ und $g|_{\check{X}\cup\{t\}}$ auf ganz $\check{X} \cup \{t\}$ übereinstimmen, und daher gilt $f(t) = g(t)$. Da $t \in X$ beliebig war, folgt $f = g \in C(X)$. Also gilt $\overline{H} \subseteq C(X)$.

Wie eben gezeigt, stimmt jeder stetige Häufungspunkt von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit f überein, und daher ist f der einzige Häufungspunkt von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C(X)$. Dies erlaubt uns Lemma 2.7 auf die bezüglich $\mathcal{V} \cap C(X)$ relativ abzählbar kompakte Menge H und die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ anzuwenden. Wir erhalten, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert.

(ix) Sei $F \subseteq \overline{H}$ separabel. Wegen $F \subseteq C(X)$ und $\overline{\check{X}} = X$ sind alle $f \in F$ bereits eindeutig durch $f|_{\check{X}}$ bestimmt, weshalb $\pi_{\check{X}} : F \to F|_{\check{X}}$ injektiv ist. Da F außerdem kompakt und $F|_{\check{X}}$ Haussdorff ist, ist $\pi_{\check{X}} : F \to F|_{\check{X}}$ sogar ein Homöomorphismus. Insbesondere stimmt $\mathcal{V} \cap F$ mit der initialen Topologie bezüglich $\pi_{\check{X}}$ überein. Analog zu (vi) ist mit F auch

$F|_{\check{X}}$ separabel. Wegen $F|_{\check{X}} \subseteq \overline{H}|_{\check{X}} \subseteq \overline{H|_{\check{X}}}$ folgt daher aus dem zweiten Abschnitt, dass die Spurtopologie auf $F|_{\check{X}}$ metrisierbar ist. Damit ist auch $\mathcal{V} \cap F$ metrisierbar.

Damit ist der in Abschnitte aufgeteilte Beweisteil abgeschlossen und es verbleibt die Folgenkompaktheit von H zu zeigen.

(x) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{H}$, dann können wir $F_0 := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ setzen und erhalten aus dem bisher Gezeigten, dass $F := \overline{F_0}$ kompakt ist und $\mathcal{V} \cap F$ metrisierbar ist. Da in metrischen Räumen Kompaktheit und Folgenkompaktheit äquivalent sind, gibt es eine gegen einen Punkt aus F konvergente Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Also ist $\overline{H}$ folgenkompakt. $\square$

4. Der Satz von S. Dierolf

In diesem Kapitel werden wir mit dem Satz von S. Dierolf das zentrale Resulat dieser Arbeit beweisen. Anschließend untersuchen wir die nichttrivialen Implikationen zwischen den verschiedenen Kompaktheitsbegriffen in einem allgemeineren Rahmen. Die Grundlage dafür bildet [Voi20, Kapitel 9 und 13]. Immer wenn wir in diesem Kapitel einen topologischen Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ betrachten, werden wir mit ι jene Abbildung bezeichnen, die jedem $x \in X$ das Punktauswertungsfunktional $\iota(x) : X' \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(x)$ in X'^* zuordnet.

4.1 Lemma. *Sei X ein Vektorraum. Dann ist X^* als Teilmenge von $\prod_{x \in X} \mathbb{C}$ bezüglich der Produkttopologie abgeschlossen.*

Beweis. Für $f \in \prod_{x \in X} \mathbb{C}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $x, y \in X$ ist $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ gleichbedeutend mit $(\pi_{\lambda x + \mu y} - \lambda \pi_x - \mu \pi_y)(f) = 0$, wobei wir f in der ersten Gleichung als Funktion von X nach $\mathbb{C}$ auffassen. Unter Berücksichtigung, dass $\pi_{\lambda x + \mu y} - \lambda \pi_x - \mu \pi_y$ als Linearkombination stetiger Funktionen selbst stetig ist, ist

$$X^* = \bigcap_{\substack{\lambda, \mu \in \mathbb{C} \\ x, y \in X}} \ker(\pi_{\lambda x + \mu y} - \lambda \pi_x - \mu \pi_y)$$

damit als Schnitt abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen. □

Für den Satz von S. Dierolf benötigen wir eine allgemeinere Variante des Satzes von Banach-Alaoglu, den Satz von Alaoglu-Bourbaki. Diesen übernehmen wir mit wenigen Änderungen aus [BKW, Kapitel 5.5].

4.2 Satz (von Alaoglu-Bourbaki)**.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $U \in \mathscr{U}(0)$. Dann ist U° kompakt bezüglich $\sigma(X', \iota(X))$.*

Beweis. Wir fassen X' als Teilmenge von $\prod_{x \in X} \mathbb{C}$ auf und bezeichnen die Produkttopologie auf $\prod_{x \in X} \mathbb{C}$ mit $\mathcal{V}$. Dann gilt $\pi_x|_{X'} = \iota(x)$ für alle $x \in X$. Da $\sigma(X', \iota(X))$ die initiale Topologie bezüglich der Familie $(\iota(x))_{x \in X}$ ist, gilt $\sigma(X', \iota(X)) = \mathcal{V} \cap X'$. Es genügt daher zu zeigen, dass U° bezüglich $\mathcal{V}$ kompakt ist.

Die Menge $\left\{f \in \prod_{y \in X} \mathbb{C} : \operatorname{Re} f(x) \leq 1, x \in U\right\} = \bigcap_{x \in U} \pi_x^{-1}(\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \leq 1\})$ ist als Schnitt abgeschlossener Mengen selbst bezüglich $\mathcal{V}$ abgeschlossen. Wegen Lemma 4.1 ist $\{f \in X^* : \operatorname{Re} f(x) \leq 1, x \in U\} = \left\{f \in \prod_{y \in X} \mathbb{C} : \operatorname{Re} f(x) \leq 1, x \in U\right\} \cap X^*$ auch abgeschlossen.

Sei nun $V \in \mathscr{U}(0)$ kreisförmig und konvex mit $V \subseteq U$. Dann folgt aus Lemma 5.4.4 und Proposition 2.1.14 in [BKW], dass

$$\begin{aligned} \{f \in X^* : \operatorname{Re} f(x) \leq 1, x \in U\} &\subseteq \{f \in X^* : \operatorname{Re} f(x) \leq 1, x \in V\} \\ &= \{f \in X^* : |f(x)| \leq 1, x \in V\} \subseteq X'. \end{aligned}$$

Daher gilt $U^\circ = \{f \in X^* : \operatorname{Re} f(x) \leq 1, x \in U\} \cap X' = \{f \in X^* : \operatorname{Re} f(x) \leq 1, x \in U\}$.

Sei μ_V das Minkowski-Funktional zur Menge V. Ist $x \in X$ mit $\mu_V(x) = 0$, so gibt es eine gegen 0 konvergente Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0,\infty)$ mit $1/t_n \cdot x \in V$ für $n \in \mathbb{N}$. Ist $f(x) \neq 0$ für ein $f \in X^*$, so ist $f(V)$ sicherlich nicht beschränkt. Andererseits folgt $1/2\mu_V(x) \cdot x \in V$ für $x \in X$ mit $\mu_V(x) > 0$ aus Lemma 5.1.9,(v) in [BKW], woraus wir

$$U^\circ \subseteq \{f \in X^* : |f(x)| \leq 1, x \in V\} \subseteq \prod_{x\in X} K^{\mathbb{C}}_{2\mu_V(x)}(0)$$

erhalten. Wegen des Satzes von Tychonoff ist dabei $\prod_{x\in X} K^{\mathbb{C}}_{2\mu_V(x)}(0)$ kompakt bezüglich $\mathcal{V}$, womit sich U° als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst als kompakt bezüglich $\mathcal{V}$ herausstellt. □

4.3 Lemma. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $A \subseteq X$ schwach vollständig. Dann ist A vollständig.*

Beweis. Wir setzen $\mathcal{S} := \sigma(X,X')$. Sei $\mathfrak{F}$ ein $\mathcal{T}$-Cauchy-Filter auf A. Wegen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ ist $\mathfrak{F}$ dann ebenfalls ein $\mathcal{S}$-Cauchy-Filter und konvergiert daher nach Voraussetzung schwach gegen $x \in A$. Sei $U \in \mathscr{U}(0)$. Da $\mathcal{T}$ das Trennungsaxiom (T3) erfüllt, gibt es $V \in \mathscr{U}(0)$ mit $\overline{V} \subseteq U$. Dann gibt es eine konvexe Umgebung $W \in \mathscr{U}(0)$ mit $W \subseteq V$. Da $\mathfrak{F}$ ein $\mathcal{T}$-Cauchy-Filter ist, gibt es $B \in \mathfrak{F}$ mit $B - B \subseteq W$. Wegen $\mathscr{U}^{\mathcal{S}\cap A}(x) \subseteq \mathfrak{F}$ und $B \subseteq A$ gilt insbesondere $\widetilde{U} \cap B = (\widetilde{U} \cap A) \cap B \neq \emptyset$ für alle $\widetilde{U} \in \mathscr{U}^{\mathcal{S}}(x)$ und damit $x \in \overline{B}^{\mathcal{S}}$. Daher gibt es ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in B, das schwach gegen x konvergiert. Für $y \in B$ und $i \in I$ gilt nun $y - x_i \in W$, woraus wir $y - x \in \overline{W}^{\mathcal{S}}$ erhalten. Da $y \in B$ beliebig war, folgt

$$B \subseteq x + \overline{W}^{\mathcal{S}} \overset{(i)}{=} x + \overline{W} \subseteq x + \overline{V} \subseteq x + U,$$

wobei wir für (i) berücksichtigt haben, dass für konvexe Mengen der schwache Abschluss mit dem Abschluss übereinstimmt. Wir erhalten $(x+U)\cap A \in \mathfrak{F}$ und damit $\mathscr{U}^{\mathcal{T}\cap A}(x) \subseteq \mathfrak{F}$, da $U \in \mathscr{U}(0)$ beliebig war. □

4.4 Bemerkung. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Da X' punktetrennend auf X operiert, ist ι injektiv. Wir betrachten alle Funktionen von X' nach $\mathbb{C}$ als Elemente von $\prod_{f\in X'} \mathbb{C}$, wobei wir die Produkttopologie auf $\prod_{f\in X'} \mathbb{C}$ mit $\mathcal{V}$ bezeichnen. Wegen $f = \pi_f \circ \iota$ für alle $f \in X'$ stimmt $\sigma(X,X')$ mit der initialen Topologie auf X bezüglich $\iota : X \to (\iota(X), \mathcal{V} \cap \iota(X))$ überein, womit $\iota : (X, \sigma(X,X')) \to (\iota(X), \mathcal{V} \cap \iota(X))$ einen Homöomorphismus darstellt. Es genügt daher für beliebige Aussagen über $\sigma(X,X')$ die analogen Aussagen für $\mathcal{V} \cap \iota(X)$ zu zeigen.

Die getätigten Vorbereitungen erlauben uns nun den Satz von S. Dierolf zu beweisen. Er gibt er uns eine Situation an, in der die relativen Kompaktheitsbegriffe zusammenfallen.

4.5 Satz (von S. Dierolf)**.** *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $X' := (X,\mathcal{T})'$. Sei $\mathcal{O}$ eine metrisierbare Topologie auf X, die X zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum macht und $(X,\mathcal{O})' \subseteq X'$ erfüllt. Dann sind für $A \subseteq X$ folgende Aussagen äquivalent:*

(i) A ist relativ kompakt.

(ii) A ist relativ abzählbar kompakt.

(iii) A ist relativ folgenkompakt.

Ist eine der Aussagen erfüllt, so gilt $\overline{A} = \overline{A}^{\mathcal{S}}$ *und* $\mathcal{T} \cap \overline{A} = \mathcal{S} \cap \overline{A}$*, wobei wir* $\mathcal{S} := \sigma(X, X')$ *setzen. Außerdem ist jede separable Teilmenge von* $\overline{A}$ *metrisierbar und jeder Punkt aus* $\overline{A}$ *ist Grenzwert einer Folge in* A*.*

Beweis. Die Gültigkeit der Implikationen $(i) \Rightarrow (ii)$ und $(iii) \Rightarrow (ii)$ haben wir bereits in Bemerkung 2.4 festgestellt. Für die übrigen Behauptungen betrachten wir zunächst den Fall $\mathcal{T} = \mathcal{S}$.

$(ii) \Rightarrow (i), (iii)$: Da $\mathcal{O}$ metrisierbar ist, besitzt $\mathscr{U}^{\mathcal{O}}(0)$ eine abzählbare Umgebungsbasis $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir setzen $Y := (X, \mathcal{O})'$. Für beliebiges $f \in Y$ gilt $0 \in f^{-1}\left(U_1^{\mathbb{C}}(0)\right) \in \mathcal{O}$ und infolge gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $U_n \subseteq f^{-1}\left(U_1^{\mathbb{C}}(0)\right)$. Daraus folgt $f(U_n) \subseteq U_1^{\mathbb{C}}(0)$ und insbesondere $\mathrm{Re} f(x) \leq 1$ für alle $x \in U_n$. Also gilt $f \in U_n^\circ$, wobei wir die Polare bezüglich des dualen Paares (X, Y) bilden. Da $f \in Y$ beliebig war, erhalten wir $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^\circ$.

Ist $x \in X$ mit $Y \subseteq \ker \iota(x)$, so heißt dies genau, dass $f(x) = 0$ für alle $f \in Y$ gilt. Da Y aber punktetrennend auf X operiert, folgt daraus $x = 0$ und gemäß Korollar 5.2.6 in [BKW] erhalten wir

$$\overline{Y}^{\sigma(X',\iota(X))} = \bigcap_{\substack{x\in X \\ Y\subseteq \ker \iota(x)}} \ker \iota(x) = \ker \iota(0) = X'.$$

Wegen $Y \subseteq X'$ und $\iota(x)|_Y = \iota(x) \circ \mathrm{id}_{X'}|_Y$ für $x \in X$ gilt $\sigma(Y, \iota(X)|_Y) = \sigma(X', \iota(X)) \cap Y$, wobei wir $\iota(X)|_Y := \{\iota(x)|_Y \,:\, x \in X\}$ setzen. Aus Satz 4.2 folgt, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Menge U_n° bezüglich $\sigma(Y, \iota(X)|_Y)$ kompakt ist, und infolge auch bezüglich $\sigma(X', \iota(X))$. Insgesamt sehen wir, dass $(X', \sigma(X', \iota(X)))$ mit Y eine dichte, σ-kompakte Teilmenge besitzt.

Wir setzen $C(X') := C((X', \sigma(X', \iota(X))), \mathbb{C})$ und bezeichnen die Produkttopologie auf $\prod_{f\in X'} \mathbb{C}$ mit $\mathcal{V}$. Gemäß Bemerkung 4.4 genügt es, die behaupteten Implikationen für $\iota(A)$ als Teilmenge von $(\iota(X), \mathcal{V} \cap \iota(X))$ zu zeigen. Da $\iota(A)$ insbesondere bezüglich $\mathcal{V} \cap C(X')$ relativ abzählbar kompakt ist, können wir nun Satz 3.7 mit $H := \iota(A)$ anwenden. Daraus folgt, dass $\overline{\iota(A)}$ kompakt, folgenkompakt und in $C(X')$ enthalten ist. Außerdem ist X'^* gemäß Lemma 4.1 bezüglich $\mathcal{V}$ abgeschlossen, woraus $\overline{\iota(A)} \subseteq X'^*$ folgt. Damit ergibt sich

$$\overline{\iota(A)} \subseteq C(X') \cap X'^* = (X', \sigma(X', \iota(X))' = \iota(X),$$

womit sich $\overline{\iota(A)}$ auch bezüglich $\mathcal{V} \cap \iota(X)$ als kompakt und folgenkompakt herausstellt. Insbesondere ist $\iota(A)$ bezüglich $\mathcal{V} \cap \iota(X)$ relativ kompakt und relativ folgenkompakt.

Die beiden letzten Behauptungen erhalten wir direkt aus Satz 3.7.

Nun behandeln wir den allgemeinen Fall.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A. Wegen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ ist A auch schwach relativ abzählbar kompakt. Daher erhalten wir aus dem ersten Fall $x \in X$ und eine Teilfolge $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die schwach gegen x konvergiert. Jeder $\mathcal{T}$-Häufungspunkt von $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist wegen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ auch ein $\mathcal{S}$-Häufungspunkt. Da $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ als schwach konvergente Folge mit x genau einen $\mathcal{S}$-Häufungspunkt besitzt und sie nach Voraussetzung mindestens einen $\mathcal{T}$-Häufungspunkt hat, ist x der einzige $\mathcal{T}$-Häufungspunkt von $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Damit folgt aus Lemma 2.7, dass $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebig war, ist A relativ folgenkompakt.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Wegen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ ist A auch schwach relativ abzählbar kompakt. Daher folgt aus dem ersten Fall, dass $\overline{A}^{\mathcal{S}}$ schwach kompakt ist. Dann ist $\overline{A}^{\mathcal{S}}$ gemäß Satz 2.14 auch $\mathcal{S}$-vollständig. Aus Lemma 4.3 erhalten wir die $\mathcal{T}$-Vollständigkeit von $\overline{A}^{\mathcal{S}}$, die nach Lemma A.9 die $\mathcal{T}$-Vollständigkeit von $\overline{A}$ impliziert. Nach Lemma 2.12 ist A total beschränkt, und damit auch $\overline{A}$. Insgesamt folgt aus Satz 2.14, dass $\overline{A}$ kompakt ist.

Da $\overline{A}$ kompakt ist, ist es auch schwach kompakt und infolge schwach abgeschlossen. Daraus folgt $\overline{A} = \overline{A}^{\mathcal{S}}$. Wegen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ ist $\mathrm{id}_{\overline{A}} : (\overline{A}, \mathcal{T} \cap \overline{A}) \to (\overline{A}, \mathcal{S} \cap \overline{A})$ stetig. Da $\overline{A}$ bezüglich $\mathcal{T} \cap \overline{A}$ kompakt ist und $\mathcal{S} \cap \overline{A}$ Hausdorff ist, ist $\mathrm{id}_{\overline{A}}$ sogar ein Homöomorphismus, womit $\mathcal{T} \cap \overline{A} = \mathcal{S} \cap \overline{A}$ gilt. Da sich die beiden letzten Behauptungen nur auf $\mathcal{T} \cap \overline{A}$ beziehen, ergeben sie sich direkt aus dem ersten Fall. $\square$

4.6 Bemerkung. Die Bedingung $(X, \mathcal{O})' \subseteq X'$ in Satz 4.5 ist dann erfüllt, wenn $\mathcal{O} \subseteq \tau(X, X')$ gilt, wobei $\tau(X, X')$ die *Mackey-Topologie* bezeichnet. Diese ist die feinste Topologie auf X, die X zu einem topologischen Vektorraum macht und deren Dualraum mit X' übereinstimmt. Für eine genaue Behandlung dieser Topologie verweisen wir auf Kapitel 5.6 in [BKW].

Für einen Banachraum können wir in Satz 4.5 für $\mathcal{T}$ die schwache und für $\mathcal{O}$ die Normtopologie wählen. Da mit dieser Wahl $\mathcal{O}$ klarerweise metrisierbar ist und $(X, \mathcal{T})' = (X, \mathcal{O})'$ gilt, sind damit die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Dieser Spezialfall ist in der Literatur als der Satz von Eberlein-Šmulian bekannt.

4.7 Satz (Eberlein-Šmulian)**.** *Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum. Dann sind für $A \subseteq X$ folgende Aussagen äquivalent:*

(i) A ist schwach relativ kompakt.

(ii) A ist schwach relativ abzählbar kompakt.

(iii) A ist schwach relativ folgenkompakt.

Ist eine der Aussagen erfüllt, so ist jeder Punkt aus $\overline{A}$ Grenzwert einer Folge in A.

In der Situation von Satz 4.5 könnten wir nun direkt mithilfe des Satzes die Äquivalenz der nicht-relativen Kompaktheitsbegriffe herleiten. Tatsächlich liefert uns der Satz stärkere Eigenschaften als wir dafür benötigen würden, weshalb wir einen neuen Begriff einführen, der für diesen Zweck gerade genügt. Im Folgenden orientieren wir uns an der Terminologie aus [Gov80].

4.8 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und die Eigenschaften $(A1)$-$(A3)$ wie folgt definiert:

$(A1)$ Jede relativ abzählbar kompakte Teilmenge von X ist relativ kompakt.

$(A2)$ Für jede relativ abzählbar kompakte Teilmenge A von X ist jeder Punkt aus $\overline{A}$ Grenzwert einer Folge in A.

$(A3)$ Für jede separable kompakte Teilmenge A von X erfüllt $(A, \mathcal{T} \cap A)$ das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Dann heißt $(X, \mathcal{T})$ *angelic*, wenn $\mathcal{T}$ Hausdorff ist und $(A1)$ und $(A2)$ gelten. Ist zusätzlich $(A3)$ erfüllt, so heißt $(X, \mathcal{T})$ *strictly angelic*.

Da metrische Räume stets das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, ist $(X, \mathcal{T})$ in der Situation von Satz 4.5 sogar *strictly angelic*. Wir werden in Korollar 4.11 zeigen, dass in jedem topologischen Raum, der *angelic* ist, die relativen und nicht-relativen Kompaktheitsbegriffe jeweils zusammenfallen.

4.9 Bemerkung. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Ist A zusätzlich relativ abzählbar kompakt (relativ folgenkompakt) und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, so existiert ein in X konvergentes Teilnetz (Teilfolge) von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da A abgeschlossen ist, befindet sich der Grenzwert dieses Teilnetzes (Teilfolge) in A. Also ist A sogar abzählbar kompakt (folgenkompakt).

4.10 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, der $(A2)$ erfüllt. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Jede relativ abzählbar kompakte Teilmenge von X ist auch relativ folgenkompakt.

(ii) Ist $\mathcal{T}$ Hausdorff, so ist jede abzählbar kompakte Teilmenge von X abgeschlossen und folgenkompakt.

Beweis. (i) Sei $A \subseteq X$ relativ abzählbar kompakt, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A und $x \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Gilt $x_n = x$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, dann hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine (konstante) gegen x konvergente Teilfolge. Andernfalls können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ annehmen, da endlich viele Folgenglieder keinen Einfluss auf die Häufungspunkte und Konvergenz einer Folge haben. Mit A ist auch $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ relativ abzählbar kompakt und daher gibt es nach Voraussetzung eine Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, die gegen x konvergiert. Zu $k \in \mathbb{N}$ sei $n_k \in \mathbb{N}$ minimal mit $y_k = x_{n_k}$. Wegen der Konvergenz gegen x kann $\{y_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{x_n : n \in \mathbb{N}, n \leq N\}$ für kein $N \in \mathbb{N}$ gelten. Dies bedeutet, dass $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ als Folge in $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist und daher eine streng monoton wachsende Teilfolge $(n_{k(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ hat. Dann gilt

$$x_{n_{k(j)}} = y_{k(j)} \xrightarrow{j\to\infty} x,$$

womit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

(ii) Sei $A \subseteq X$ abzählbar kompakt und $x \in \overline{A}$. Dann gibt es nach Voraussetzung eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, die gegen x konvergiert und infolge – da $\mathcal{T}$ Hausdorff ist – x als einzigen Häufungspunkt hat. Da A abzählbar kompakt ist, hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber mindestens einen Häufungspunkt in A und damit muss $x \in A$ gelten. Da x beliebig war, ist A abgeschlossen.

Da A insbesondere relativ abzählbar kompakt ist, folgt aus (i), dass A relativ folgenkompakt ist. Aus Bemerkung 4.9 ergibt sich damit sofort die Folgenkompaktheit von A. $\square$

4.11 Korollar. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ist $(X, \mathcal{T})$* angelic*, so sind für $A \subseteq X$ folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *A ist kompakt.*

(ii) *A ist abzählbar kompakt.*

(iii) *A ist folgenkompakt.*

Für die relativen Kompaktheitsbegriffe gilt die analoge Äquivalenz.

Beweis. Wir bezeichnen die analogen Aussagen für die relativen Kompaktheitsbegriffe mit (i'), (ii') und (iii'). Die Gültigkeit der Implikationen $(i) \Rightarrow (ii)$, $(iii) \Rightarrow (ii)$, $(i') \Rightarrow (ii')$ und $(iii') \Rightarrow (ii')$ haben wir bereits in Bemerkung 2.4 festgestellt. Die Implikationen $(ii') \Rightarrow (iii')$ und $(ii') \Rightarrow (i')$ folgen direkt aus Lemma 4.10, (i) beziehungsweise aus $(A1)$.

$(ii) \Rightarrow (i), (iii)$: Sei A abzählbar kompakt. Dann folgt aus Lemma 4.10, (ii), dass A folgenkompakt und abgeschlossen ist. Wegen $(A1)$ ist A außerdem relativ kompakt und damit kompakt. $\square$

Mithilfe des folgenden Satzes werden wir später zeigen, dass die schwache Topologie eines vollständigen lokalkonvexen topologischen Vektorraumes die Eigenschaft $(A1)$ hat.

4.12 Satz. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $\mathcal{W}$ das Mengensystem aller Nullumgebungen, die konvex, kreisförmig und abgeschlossen sind. Dann gibt es eine Topologie $\mathcal{T}_Z$ auf*

$$Z := \bigcap_{W \in \mathcal{W}} \left\{ z \in X'^* \; : \; z|_{W^\circ} \text{ ist stetig bezüglich } \sigma(X', \iota(X)) \cap W^\circ \right\},$$

sodass die folgenden Aussagen gelten:

(i) *$(Z, \mathcal{T}_Z)$ ist ein vollständiger lokalkonvexer topologischer Vektorraum.*

(ii) *Die Abbildung $\iota : (X, \mathcal{T}) \to (\iota(X), \mathcal{T}_Z \cap \iota(X))$ ist ein Homöomorphismus.*

(iii) *$\overline{\iota(X)}^{\mathcal{T}_Z} = Z$.*

Insbesondere ist X genau dann vollständig, wenn $\iota(X) = Z$ gilt.

Beweis. Wir notieren die polaren Mengen bezüglich des dualen Paares (X, X') mit $^\circ$ und die bezüglich (X', Z) mit $^\bullet$. Für $W \in \mathcal{W}$ setzen wir $C(W^\circ) := C\big((W^\circ, \sigma(X', X) \cap W^\circ), \mathbb{C}\big)$. Da nach Satz 4.2 die Menge W° bezüglich $\sigma(X', X)$ kompakt ist, sind alle Funktionen in $C(W^\circ)$ beschränkt und $(C(W^\circ), \|.\|_\infty)$ ist ein Banachraum, wobei $\|.\|_\infty$ die Supremumsnorm bezeichnet. Die Abbildung $.|_{W^\circ}$, die jedem $z \in Z$ die Einschränkung $z|_{W^\circ}$ zuordnet ist klarerweise linear und bildet gemäß der Definition von Z nach $C(W^\circ)$ ab.

Da $\mathcal{T}$ das Trennungsaxiom (T3) erfüllt und lokalkonvex ist, gibt es zu $U \in \mathscr{U}(0)$ stets eine konvexe und kreisförmige Nullumgebung W mit $\overline{W} \subseteq U$, weshalb $\mathcal{W}$ eine Nullumgebungsbasis bildet. Außerdem gibt es zu $f \in X' \backslash \{0\}$ stets $W \in \mathcal{W}$, sodass $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in W$ gilt, also $f \in W^\circ$. Daher gilt $X' = \bigcup_{W \in W} W^\circ$. Ist $z \in Z\backslash\{0\}$, so gibt es $W \in \mathcal{W}$ und $f \in W^\circ$ mit $z(f) \neq 0$. Daraus folgt $\|z|_{W^\circ}\|_\infty \geq |z(f)| > 0$. Also gilt $\bigcap_{W \in \mathcal{W}} \ker .|_{W^\circ} = \{0\}$ und Z wird mit der initialen Topologie $\mathcal{T}_Z$ bezüglich der Familie $(.|_{W^\circ})_{W \in \mathcal{W}}$ zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum.

Sei $x \in X$, $W \in \mathcal{W}$ und μ_W das Minkowski-Funktional von W. Dann gilt $\mu_W(x) < 1$ genau dann, wenn es $\lambda \in (0,1)$ gibt mit $x \in \lambda W$. Aus dem Bipolarsatz folgt $\lambda W = \lambda \cdot {}^\circ(W^\circ) = {}^\circ(1/\lambda \cdot W^\circ)$, weshalb $x \in \lambda W$ äquivalent ist zu $|f(x)/\lambda| \leq 1$ für alle $f \in W^\circ$ beziehungsweise zu $\|\iota(x)|_{W^\circ}\|_\infty \leq \lambda$. Also ist $\mu_W(x) < 1$ äquivalent zu $\|\iota(x)|_{W^\circ}\|_\infty < 1$ und damit gilt $\{x \in X : \mu_W(x) < \epsilon\} = \{x \in X : \|\iota(x)|_{W^\circ}\|_\infty < \epsilon\}$ für alle $\epsilon > 0$. Da jeweils die Menge aller endlichen Schnitte über solche Mengen eine Nullumgebungsbasis von $\iota^{-1}(\mathcal{T}_Z \cap \iota(X))$ beziehungsweise von der von $(\mu_W)_{W \in \mathcal{W}}$ auf X erzeugten Topologie darstellt, stimmen diese Topologien überein. Nach Satz 5.1.10 in [BKW] stimmt letztere mit $\mathcal{T}$ überein, weshalb $\iota : (X, \mathcal{T}) \to (\iota(X), \mathcal{T}_Z \cap \iota(X))$ einen Homöomorphismus darstellt.

Sei $z_0 \in Z$ und $U \in \mathscr{U}^{\mathcal{T}_Z}(0)$. Dann gibt es $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $W_1, \ldots, W_n \in \mathcal{W}$ mit

$$\bigcap_{i=1}^n \left\{ z \in Z : \left\|z|_{W_i^\circ}\right\|_\infty \leq \epsilon \right\} \subseteq U.$$

Nun gilt $W := \bigcap_{i=1}^n W_i \in \mathcal{W}$ und

$$\bigcup_{i=1}^n W_i^\circ \subseteq \overline{\operatorname{co}\left(\bigcup_{i=1}^n W_i^\circ\right)}^{\sigma(X',X)} = \left({}^\circ\left(\bigcup_{i=1}^n W_i^\circ\right)\right)^\circ = \left(\bigcap_{i=1}^n \underbrace{{}^\circ(W_i^\circ)}_{=W_i}\right)^\circ = W^\circ,$$

woraus

$$\epsilon\, (W^\circ)^\bullet = \{z \in Z : \|z|_{W^\circ}\|_\infty \leq \epsilon\} \subseteq \bigcap_{i=1}^n \left\{ z \in Z : \left\|z|_{W_i^\circ}\right\|_\infty \leq \epsilon \right\} \subseteq U$$

folgt. Wir setzen $A := W^\circ$. Da $z_0|_A$ stetig ist, gibt es eine konvexe, kreisförmige und abgeschlossene Nullumgebung $V \in \mathscr{U}^{\sigma(X',X)}(0)$ mit $|z_0(f)| \leq \epsilon$ für alle $f \in V \cap A$. Dies bedeutet gerade $z_0 \in \epsilon\, (V \cap A)^\bullet$. Wegen $\sigma(X', X) \subseteq \sigma(X', Z)$ ist V auch bezüglich $\sigma(X', Z)$ abgeschlossen und es gilt $V \in \mathscr{U}^{\sigma(X',Z)}(0)$. Daher ist $V^\bullet$ nach Satz 4.2 bezüglich $\sigma(Z, X')$ kompakt. Mit $A^\bullet$ ist auch $A^\bullet + V^\bullet$ bezüglich $\sigma(Z, X')$ abgeschlossen. Konvergiert nämlich ein Netz $(x_i + y_i)_{i \in I}$ gegen $z \in Z$ mit $x_i \in A^\bullet$ und $y_i \in V^\bullet$ für $i \in I$, so gibt es wegen der Kompaktheit von $V^\bullet$ ein Teilnetz $(y_{i(j)})_{j \in J}$ von $(y_i)_{i \in I}$, das gegen $y \in V^\bullet$ konvergiert. Wegen der Konvergenz von $(x_{i(j)})_{j \in J} = (x_{i(j)} + y_{i(j)} - y_{i(j)})_{j \in J}$ gegen $z - y$ und der Abgeschlossenheit von $A^\bullet$ gilt $z - y \in A^\bullet$ und damit $z \in A^\bullet + y \subseteq A^\bullet + V^\bullet$.

Ebenso übertragen sich die Eigenschaften konvex und kreisförmig direkt von $A^\bullet$ und $V^\bullet$ auf $A^\bullet + V^\bullet$, weshalb wir aus dem Bipolarsatz $A^\bullet + V^\bullet = ({}^\bullet(A^\bullet + V^\bullet))^\bullet$ erhalten. Es folgt

$$\frac{1}{\epsilon}\, z_0 \in (A \cap V)^\bullet = \left({}^\bullet(A^\bullet) \cap {}^\bullet(V^\bullet)\right)^\bullet = \left({}^\bullet\left(A^\bullet \cup V^\bullet\right)\right)^\bullet \subseteq \left({}^\bullet\left(A^\bullet + V^\bullet\right)\right)^\bullet = A^\bullet + V^\bullet,$$

und damit gibt es $y \in V^\bullet$ mit $\epsilon y \in z_0 + \epsilon A^\bullet$. Andererseits ist y definitionsgemäß auf der $\sigma(X', X)$-Nullumgebung V beschränkt und daher nach Proposition 2.1.14 in [BKW] stetig, also $y \in (X', \sigma(X', X))' = \iota(X)$. Daraus folgt $\epsilon y \in (z_0 + \epsilon A^\bullet) \cap \iota(X) \subseteq (z_0 + U) \cap \iota(X)$ und insbesondere $(z_0 + U) \cap \iota(X) \neq \emptyset$. Da $z_0 \in Z$ und $U \in \mathscr{U}^{\mathcal{T}_Z}(0)$ beliebig waren, haben wir damit gezeigt, dass $\iota(X)$ bezüglich $\mathcal{T}_Z$ dicht in Z liegt.

Sei $\widetilde{Z} := \bigcap_{W \in \mathcal{W}} \{z : X' \to \mathbb{C} : z|_{W^\circ} \in C(W^\circ)\}$ versehen mit der initialen Topologie $\mathcal{O}$ bezüglich der Familie $(.|_{W^\circ})_{W \in \mathcal{W}}$. Dann gilt $Z = \widetilde{Z} \cap X'^*$ und $\mathcal{T}_Z = \mathcal{O} \cap Z$. Sei $\mathfrak{F}$ ein Cauchy-Filter auf $\widetilde{Z}$. Gemäß Lemma A.7 ist $\mathrm{fil}(\mathfrak{F}|_{W^\circ})$ für $W \in \mathcal{W}$ ein Cauchy-Filter. Da $C(W^\circ)$ vollständig ist, gibt es $z_{W^\circ} \in C(W^\circ)$ mit $\mathscr{U}^{C(W^\circ)}(z_{W^\circ}) \subseteq \mathrm{fil}(\mathfrak{F}|_{W^\circ})$. Zu $\epsilon > 0$ gibt es daher $B \in \mathfrak{F}$ mit $B|_{W^\circ} \subseteq U_\epsilon^{C(W^\circ)}(z_{W^\circ})$, also $\|z_{W^\circ} - b|_{W^\circ}\|_\infty < \epsilon$ für alle $b \in B$.

Sind $\epsilon > 0$ und $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$, so können wir $B_1, B_2 \in \mathfrak{F}$ analog zu B im vorherigen Absatz wählen. Dann gibt es $b \in B_1 \cap B_2$ und wir erhalten

$$\left\|(z_{W_1^\circ} - z_{W_2^\circ})|_{W_1^\circ \cap W_2^\circ}\right\|_\infty \leq \left\|z_{W_1^\circ} - b|_{W_1^\circ}\right\|_\infty + \left\|b|_{W_2^\circ} - z_{W_2^\circ}\right\|_\infty < 2\epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $z_{W_1^\circ}|_{W_1^\circ \cap W_2^\circ} = z_{W_2^\circ}|_{W_1^\circ \cap W_2^\circ}$ und daher ist $z : X' \to \mathbb{C}$ durch $z := \bigcup_{W \in \mathcal{W}} z_{W^\circ}$ wohldefiniert und liegt wegen $z|_{W^\circ} = z_{W^\circ}$ in $\widetilde{Z}$. Aus Lemma A.2 folgt, dass $\mathfrak{F}$ gegen z konvergiert. Da $\mathfrak{F}$ ein beliebiger Cauchy-Filter auf $\widetilde{Z}$ war, ist damit die Vollständigkeit von $\widetilde{Z}$ gezeigt.

Wegen $\bigcup_{W \in \mathcal{W}} W^\circ = X'$ folgt aus der Konvergenz bezüglich $\mathcal{O}$ stets die punktweise Konvergenz, da für $W \in \mathcal{W}$ auf W° die punktweise Konvergenz von der gleichmäßigen impliziert wird. Daher ist $\varphi : (\widetilde{Z}, \mathcal{O}) \to (\prod_{f \in X'} \mathbb{C}, \prod_{f \in X'} \mathcal{T}_{\mathbb{C}}),\ z \mapsto z$ stetig und $Z = \widetilde{Z} \cap X'^* = \varphi^{-1}(X'^*)$ als Urbild einer abgeschlossenen Menge selbst abgeschlossen. Damit ist Z nach Lemma A.9 vollständig.

Da $\iota(X)$ dicht in Z liegt, gilt $\iota(X) = Z$ genau dann, wenn $\iota(X)$ abgeschlossen ist, was infolge der Lemmata A.8 und A.9 zur Vollständigkeit von $\iota(X)$ und weiter zu der Vollständigkeit von X äquivalent ist. □

4.13 Korollar. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständiger lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Dann ist jede schwach relativ abzählbar kompakte Teilmenge von X auch schwach relativ kompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{W}$ das Mengensystem aller Nullumgebungen in $(X, \mathcal{T})$, die konvex, kreisförmig und abgeschlossen sind, und $A \subseteq X$ schwach relativ abzählbar kompakt. Wir bezeichnen die Produkttopologie auf $\prod_{f \in X'} \mathbb{C}$ mit $\mathcal{V}$. Gemäß Bemerkung 4.4 genügt es, die Behauptung für $\iota(A)$ als relativ abzählbar kompakte Teilmenge von $(\iota(X), \mathcal{V} \cap \iota(X))$ zu zeigen.

Sei $W \in \mathcal{W}$. Wir setzen $C(W^\circ) := C\big((W^\circ, \sigma(X', \iota(X)) \cap W^\circ), \mathbb{C}\big)$ und bezeichnen mit $\mathcal{V}|_{W^\circ}$ die Produkttopologie auf $\prod_{f \in W^\circ} \mathbb{C}$. Da Einschränkungen stetiger Funktionen wieder stetig sind, gilt $\iota(A)|_{W^\circ} \subseteq C(W^\circ)$ und nach Lemma 2.6 ist $\iota(A)|_{W^\circ} = \pi_{W^\circ}(\iota(A))$ bezüglich $\mathcal{V}|_{W^\circ} \cap C(W^\circ)$ relativ abzählbar kompakt. Aus Satz 4.2 folgt, dass W° bezüglich $\sigma(X', \iota(X))$ kompakt ist, wodurch wir Satz 3.7 mit $H := \iota(A)|_{W^\circ}$ anwenden können und

$$\overline{\iota(A)}^{\mathcal{V}}|_{W^\circ} \subseteq \overline{\iota(A)|_{W^\circ}}^{\mathcal{V}|_{W^\circ}} \subseteq C(W^\circ)$$

erhalten.

Also gilt $x|_{W^\circ} \in C(W^\circ)$ für alle $x \in \overline{\iota(A)}^{\mathcal{V}}$ und alle $W \in \mathcal{W}$. Da X'^* bezüglich $\mathcal{V}$ abgeschlossen ist, gilt zudem $\overline{\iota(A)}^{\mathcal{V}} \subseteq X'^*$. Aus Satz 4.12 folgt daher $\overline{\iota(A)}^{\mathcal{V}} \subseteq \iota(X)$. Zusätzlich wissen wir bereits aus Beispiel 2.13, dass $\overline{\iota(A)}^{\mathcal{V}}$ kompakt ist. Wegen

$$\overline{\iota(A)}^{\mathcal{V}\cap\iota(X)} = \overline{\iota(A)}^{\mathcal{V}} \cap \iota(X) = \overline{\iota(A)}^{\mathcal{V}}$$

ist $\iota(A)$ als Teilmenge von $(\iota(X), \mathcal{V} \cap \iota(X))$ relativ kompakt. □

Ausgehend von Abbildung 2.1 sind uns in dieser Arbeit viele Zusammenhänge zwischen Eigenschaften von Teilmengen eines topologischen Raumes begegnet. Zum Abschluss stellen wir die essentiellen Implikationen in einem Diagramm dar. Dies ist vor allem in Verbindung mit jenen Resultaten interessant, die uns für bestimmte Situationen die Voraussetzungen der entsprechenden Implikationen in der Abbildung liefern, wie zum Beispiel Satz 4.5 und Korollar 4.13. Zusammengesetzt ergeben sich daraus weitere Zusammenhänge, wie etwa die jeweilige Äquivalenz der relativen und nicht-relativen Kompaktheitsbegriffe unter der Voraussetzung, dass der betrachtete Raum *angelic* ist.

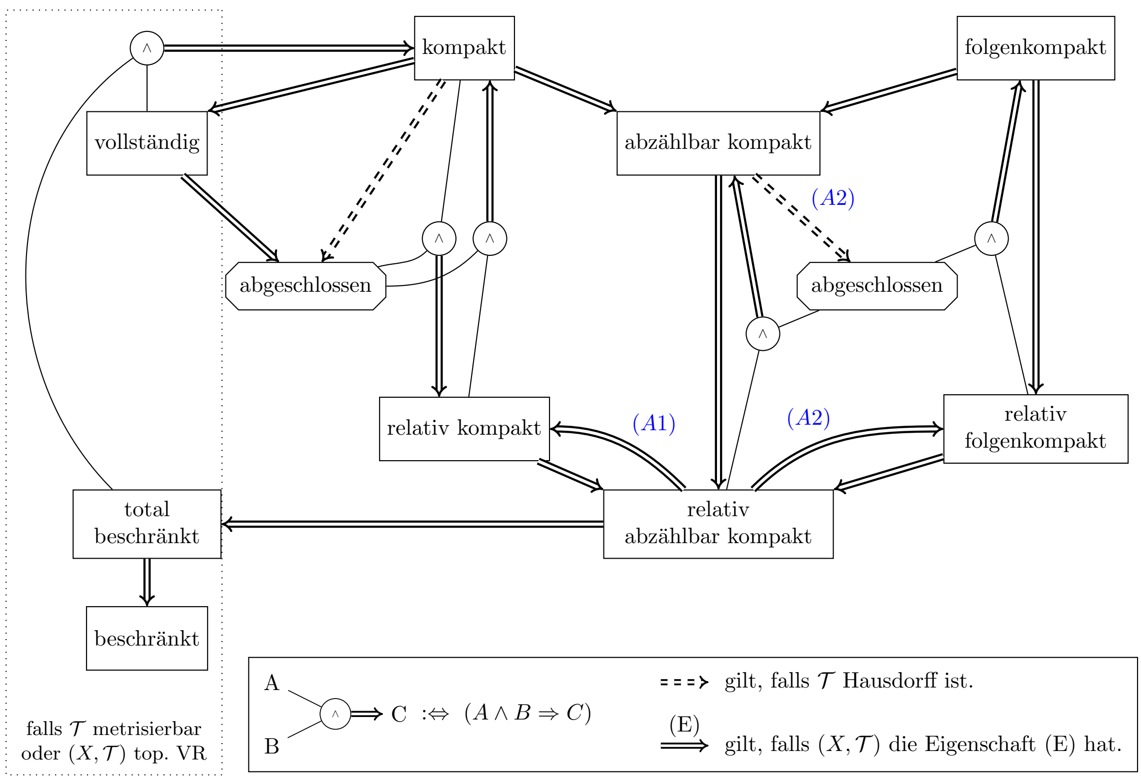

Abbildung 4.1.: Zusammenfassung der gesammelten Implikationen zwischen Eigenschaften von Teilmengen eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$

A. Filterkonvergenz und Vollständigkeit in topologischen Vektorräumen

Diesen Abschnitt verwenden wir dazu, Begriffe und Zusammenhänge aus dem Gebiet der Filter zu wiederholen und teilweise zu vertiefen. Außerdem definieren wir Vollständigkeit in topologischen Vektorräumen und präsentieren einzelne elementare Zusammenhänge. Dieser Abschnitt beruht auf [BKW, Kapitel 1.3] und [Voi20, Kapitel 4 und 9].

Sei X eine Menge. Dann heißt $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *Filter*, wenn gilt:

(i) $\emptyset \notin \mathfrak{F} \neq \emptyset$.

(ii) $A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{F}$.

(iii) $B \supseteq A$, $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow B \in \mathfrak{F}$.

Ist $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ und gibt es zu jedem $F \in \mathfrak{F}$ ein $B \in \mathfrak{B}$ mit $B \subseteq F$, dann heißt $\mathfrak{B}$ *Filterbasis* von $\mathfrak{F}$. Umgekehrt ist $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathcal{P}(X)$ genau dann Filterbasis eines Filters, wenn gilt:

(i) $\emptyset \notin \mathfrak{F}_0 \neq \emptyset$.

(ii) $A, B \in \mathfrak{F}_0 \Rightarrow \exists C \in \mathfrak{F}_0 : C \subseteq A \cap B$.

Trifft dies zu, so erhalten wir durch

$$\operatorname{fil}(\mathfrak{F}_0) := \{B \subseteq X \;:\; \exists C \in \mathfrak{F}_0 : C \subseteq B\}$$

den von $\mathfrak{F}_0$ erzeugten Filter.

Sei Y eine weitere Menge und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann ist $f(\mathfrak{F}) = \{f(B) \;:\; B \in \mathfrak{F}\}$ wegen $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ für $A, B \subseteq X$ eine Filterbasis auf Y.

Sind $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ Filter auf X, so sagen wir $\mathfrak{F}_2$ ist *feiner* als $\mathfrak{F}_1$, wenn $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ gilt.

A.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $\mathfrak{F}$ ein Filter auf X und $x \in X$. Gilt $\mathscr{U}(x) \subseteq \mathfrak{F}$, so heißt $\mathfrak{F}$ *konvergent gegen* x und wir schreiben $\mathfrak{F} \to x$.

A.2 Lemma. *Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{O})$ und $(X_i, \mathcal{T}_i)$ für $i \in I$ topologische Räume, $\mathfrak{F}$ ein Filter auf X und $x \in X$. Außerdem seien $f : X \to Y$ und $f_i : X \to X_i$ für $i \in I$ Funktionen. Dann gilt:*

(i) *Ist f stetig und gilt $\mathfrak{F} \to x$, so folgt $\operatorname{fil}(f(\mathfrak{F})) \to f(x)$.*

(ii) *Ist $\mathcal{T}$ die initiale Topologie bezüglich der Familie $(f_i)_{i \in I}$, so gilt $\mathfrak{F} \to x$ genau dann, wenn $\operatorname{fil}(f_i(\mathfrak{F})) \to f_i(x)$ für alle $i \in I$ gilt.*

Beweis. (i) Sei $V \in \mathscr{U}^{\mathcal{O}}(f(x))$. Dann gilt $f^{-1}(V) \in \mathscr{U}^{\mathcal{T}}(x)$ und daher $f^{-1}(V) \in \mathfrak{F}$. Aus $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ folgt $V \in \operatorname{fil}(f(\mathfrak{F}))$.

(ii) Gelte $\operatorname{fil}(f_i(\mathfrak{F})) \to f_i(x)$ für alle $i \in I$ und sei $U \in \mathscr{U}^{\mathcal{T}}(0)$. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $I_0 \subseteq I$ und $V_i \in \mathscr{U}^{\mathcal{T}_i}(f_i(x))$ für $i \in I_0$ mit $\bigcap_{i \in I_0} f_i^{-1}(V_i) \subseteq U$, da die Mengen dieser Gestalt eine Umgebungsbasis bilden. Aus der Konvergenz von $\operatorname{fil}(f_i(\mathfrak{F}))$ folgt $V_i \in \operatorname{fil}(f_i(\mathfrak{F}))$, weshalb es $A_i \in \mathfrak{F}$ mit $f_i(A_i) \subseteq V_i$ für $i \in I_0$ gibt. Dann ist $\bigcap_{i \in I_0} A_i \in \mathfrak{F}$ und aus

$$\bigcap_{i \in I_0} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I_0} f_i^{-1}(f_i(A_i)) \subseteq \bigcap_{i \in I_0} f_i^{-1}(V_i) \subseteq U$$

ergibt sich $U \in \mathfrak{F}$.

Die umgekehrte Richtung ist eine direkte Konsequenz aus (*i*). □

A.3 Definition. Sei X eine Menge und $\mathfrak{F}$ ein Filter auf X. Dann heißt $\mathfrak{F}$ *Ultrafilter*, wenn jeder feinere Filter auf X mit $\mathfrak{F}$ übereinstimmt.

A.4 Lemma. *Sei X eine Menge. Ein Filter $\mathfrak{F}$ auf X ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für alle $A \subseteq X$ entweder $A \in \mathfrak{F}$ oder $X \backslash A \in \mathfrak{F}$ gilt.*

Beweis. Sei $\mathfrak{F}$ ein Ultrafilter und $A \subseteq X$ beliebig. Gilt $A \cap B = \emptyset$ für ein $B \in \mathfrak{F}$, so folgt $X \backslash A \supseteq B$ und damit $X \backslash A \in \mathfrak{F}$. Andernfalls gilt $A \cap B \neq \emptyset$ für alle $B \in \mathfrak{F}$. Infolge wird durch

$$\mathfrak{F}_1 := \{H \subseteq X \ : \exists B \in \mathfrak{F} : A \cap B \subseteq H\}$$

ein Filter definiert, der feiner als $\mathfrak{F}$ ist. Da $\mathfrak{F}$ aber ein Ultrafilter ist, ergibt sich $A \in \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$.

Gelte umgekehrt $A \in \mathfrak{F}$ oder $X \backslash A \in \mathfrak{F}$ für alle $A \subseteq X$ und sei $\mathfrak{F}_1 \supseteq \mathfrak{F}$ ein Filter. Gäbe es $A \in \mathfrak{F}_1 \backslash \mathfrak{F}$, so müsste nach Voraussetzung $X \backslash A \in \mathfrak{F}$ gelten, woraus $\emptyset = A \cap (X \backslash A) \in \mathfrak{F}_1$ folgen würde. Daher gilt $\mathfrak{F}_1 \backslash \mathfrak{F} = \emptyset$ und $\mathfrak{F}$ ist maximal, also ein Ultrafilter. □

Den folgenden Satz zitieren wir ohne Beweis aus [BKW, Kapitel 1.3].

A.5 Satz. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(*i*) *$(X, \mathcal{T})$ ist kompakt.*

(*ii*) *Zu jedem Filter auf X gibt es einen in X konvergenten feineren Filter.*

(*iii*) *Jeder Ultrafilter auf X konvergiert.*

A.6 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $A \subseteq X$. Ein Filter $\mathfrak{F}$ auf A heißt *Cauchy-Filter*, wenn es zu jedem $U \in \mathscr{U}(0)$ ein $B \in \mathfrak{F}$ gibt, sodass $B - B \subseteq U$ gilt. Die Menge A heißt *vollständig*, wenn jeder Cauchy-Filter auf A gegen einen Punkt aus A konvergiert.

A.7 Lemma. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ topologische Vektorräume, $\mathfrak{F}$ ein Cauchy-Filter auf X und $f : X \to Y$ stetig und linear. Dann ist* $\mathrm{fil}(f(\mathfrak{F}))$ *ein Cauchy-Filters auf* Y.

Beweis. Sei $V \in \mathscr{U}^{\mathcal{O}}(0)$. Dann ist $f^{-1}(V) \in \mathscr{U}^{\mathcal{T}}(0)$ und es gibt $B \in \mathfrak{F}$ mit $B - B \subseteq f^{-1}(V)$. Daraus folgt

$$f(B) - f(B) = f(B - B) \subseteq f(f^{-1}(V)) \subseteq V,$$

wobei $f(B) \in f(\mathfrak{F}) \subseteq \mathrm{fil}(f(\mathfrak{F}))$ gilt. $\square$

A.8 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $A \subseteq X$ vollständig. Dann ist A abgeschlossen.*

Beweis. Sei $x \in \overline{A}$. Dann wird durch $\mathfrak{F} := \{A \cap U \,:\, U \in \mathscr{U}(x)\}$ ein Filter auf A definiert. Sei $V \in \mathscr{U}(0)$ und $W \in \mathscr{U}(0)$ mit $W - W \subseteq V$. Dann gilt $A \cap (x + W) \in \mathfrak{F}$ und

$$A \cap (x + W) - A \cap (x + W) \subseteq W - W \subseteq V.$$

Also ist $\mathfrak{F}$ ein Cauchy-Filter und aus der Vollständigkeit folgt $\mathfrak{F} \to y$ für ein $y \in A$.

Für $y' \in A \backslash \{x\}$ gibt es $U_x \in \mathscr{U}(x)$ und $U_{y'} \in \mathscr{U}(y')$ mit $U_x \cap U_{y'} = \emptyset$. Wegen $A \cap U_x \in \mathfrak{F}$ kann daher keinesfalls $A \cap U_{y'} \in \mathfrak{F}$ sein und infolge nicht $\mathfrak{F} \to y'$ gelten. Daraus ergibt sich $x = y \in A$. Also ist A abgeschlossen. $\square$

A.9 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $A \subseteq X$ vollständig. Dann ist jede bezüglich $\mathcal{T} \cap A$ abgeschlossene Teilmenge von A selbst vollständig.*

Beweis. Sei $B \subseteq A$ bezüglich $\mathcal{T} \cap A$ abgeschlossen und $\mathfrak{F}$ ein Cauchy-Filter auf B. Dann ist $\mathfrak{F}_A := \{F \subseteq A \,:\, \exists F_0 \in \mathfrak{F} : F_0 \subseteq F\}$ ein Cauchy-Filter auf A, für den $\mathfrak{F}_A \cap B = \mathfrak{F}$ gilt. Nach Voraussetzung konvergiert $\mathfrak{F}_A$ gegen einen Punkt $x \in A$, also $\mathscr{U}^{\mathcal{T} \cap A}(x) \subseteq \mathfrak{F}_A$. Wegen $B \in \mathfrak{F}_A$ folgt daraus $\emptyset \notin \mathscr{U}^{\mathcal{T} \cap A}(x) \cap B$, was $x \in \overline{B}^{\mathcal{T} \cap A} = B$ impliziert. Aus

$$\mathscr{U}^{\mathcal{T} \cap B}(x) = \mathscr{U}^{\mathcal{T} \cap A}(x) \cap B \subseteq \mathfrak{F}_A \cap B = \mathfrak{F}$$

ergibt sich schließlich, dass $\mathfrak{F}$ gegen x konvergiert. Also ist B vollständig. $\square$

Literaturverzeichnis

[BKW] Blümlinger, Martin, Michael Kaltenbäck und Harald Woracek: *Funktionalanalysis*. Vorlesungsskript. https://www.asc.tuwien.ac.at/~woracek/homepage/downloads/lva/2021S_Fana1/fana2020.pdf.

[Gov80] Govaerts, Willy: *A productive class of angelic spaces*. J. London Math. Soc. (2), 22(2):355–364, 1980.

[Kal14] Kaltenbäck, Michael: *Fundament Analysis*, Band 26 der Reihe *Berliner Studienreihe zur Mathematik*. Heldermann Verlag, Lemgo, 2014.

[Kal21] Kaltenbäck, Michael: *Aufbau Analysis*, Band 27 der Reihe *Berliner Studienreihe zur Mathematik*. Heldermann Verlag, Lemgo, 2021.

[SS95] Seebach, Jr., J. Arthur und Lynn Arthur Steen: *Counterexamples in topology*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1995. Reprint of the second (1978) edition.

[Voi20] Voigt, Jürgen: *A course on topological vector spaces*. Compact Textbooks in Mathematics. Birkhäuser/Springer, Cham, 2020.