HANDOUT

Die Darstellbarkeit topologischer Gruppen als Isometriegruppen

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Harald Woracek

durch

Johanna Brunar
Matrikelnummer: 00471351
Kübeckgasse 16/24
1030 Wien

Wien, am 12. Jänner 2021

Übersicht

(i) Ist (X, d) ein polnischer Raum, so ist Iso(X) eine polnische Gruppe.

(ii) Ist (X, d) ein kompakter metrischer Raum, so ist Iso(X) kompakt.

(iii) Ist (X, d) ein eigentlicher Raum, so ist Iso(X) lokalkompakt.

(iv) Jede polnische Gruppe ist isomorph zur Isometriegruppe eines polnischen Raumes.

(v) Jede kompakte, metrisierbare Gruppe ist isomorph zur Isometriegruppe eines kompakten metrischen Raumes.

(vi) Jede lokalkompakte polnische Gruppe ist isomorph zur Isometriegruppe eines eigentlichen polnischen Raumes.

Definition 1. Eine Gruppe $(X, e, \cdot)$ heißt "topologische Gruppe", wenn sie mit einer Topologie versehen ist, sodass die Gruppenoperationen bezüglich dieser Topologie stetig sind.

Definition 2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine bijektive Abbildung $f : X \to X$ heißt "Isometrie", wenn $\forall x, y \in X : d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

Proposition 3. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann bildet die Menge Iso(X) aller Isometrien auf X mit der Komposition als Gruppenoperation eine Gruppe, die versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz zu einer topologischen Gruppe wird.

Definition 4. Ein Raum heißt "separabel", wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.

Definition 5. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt "polnischer Raum", wenn er separabel und vollständig metrisierbar ist (dh. es gibt eine vollständige Metrik auf X, die $\mathcal{T}$ induziert).

Definition 6. Eine topologische Gruppe X heißt "polnische Gruppe", wenn die Topologie auf X polnisch ist.

Definition 7. Ein topologischer Raum heißt "lokalkompakt", wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.

Definition 8. Ein metrischer Raum heißt "eigentlich", wenn alle abgeschlossenen Kugeln kompakt sind.

Ad (i)

Satz 9. Ist (X, d) ein polnischer Raum, so ist Iso(X) eine polnische Gruppe.

Ad (ii)

Satz 10. Ist (X, d) ein kompakter metrischer Raum, so ist Iso(X) kompakt.

Ad (iii)

Definition 11. Seien G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Eine Aktion von G auf X, dh. eine Abbildung $* : G \times X \to X : (g, x) \mapsto g * x$, heißt "eigentlich", wenn für alle x, y $\in$ X offene Umgebungen U_x, U_y von x respektive y existieren, sodaß die Menge $\{g \in G \mid g * U_x \cap U_y \neq \emptyset\}$ präkompakt in G ist (dh. kompakten Abschluß hat).

Lemma 12. Die Aktion der Evaluierung von Iso(X) auf X ist eigentlich.

Korollar 13. Ist (X, d) ein eigentlicher Raum, so ist Iso(X) lokalkompakt.

$\boxed{\textbf{Ad (iv)}}$

Satz 14 (Birkhoff-Kakutani)**.** Sei $(X, e, \cdot)$ eine topologische Gruppe und sei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge symmetrischer, offener Mengen in X, die e enthalten. Wenn für alle n $\in \mathbb{N}$ gilt: $U_{n+1} \cdot U_{n+1} \subset U_n$, so existiert eine links-invariante Pseudometrik σ auf $X \times X$,
dh. $\forall x, y, a \in X: \ \sigma(x, y) = \sigma(a \cdot x, a \cdot y)$.

Korollar 15. Sei $(X, e, \cdot)$ eine topologische Gruppe mit einer abzählbaren Umgebungsbasis bei $\{e\}$. Dann ist X metrisierbar und die Metrik kann links-invariant gewählt werden.

Proposition 16. Sei $(X, e, \cdot)$ eine polnische Gruppe. Definiere für jedes $x \in$ X die Abbildung $L_x : X \to X : y \mapsto x \cdot y$. Dann kann X vermöge $x \hookrightarrow L_x$ isomorph und homöomorph in Iso(X) eingebettet werden.

Sei im Folgenden X eine multiplikative polnische Gruppe mit $\operatorname{diam}(X) \leq 1$.

Lemma 17. Sei $\psi \in Iso(X) \setminus X$, dann gibt es $x_1, x_2 \in X$ und $n > 0$ sodaß die Menge $U_{\psi,n} := \{\phi \in Iso(X) \mid d(\phi(x_1), \psi(x_1)), d(\phi(x_2), \psi(x_2)) < \frac{1}{n}\}$ disjunkt zu X ist.

Korollar 18. $\forall \phi \in Iso(X) \setminus X \ \exists \epsilon > 0$ und $x_1, x_2, x_3 \in X$ sodaß

(i) $6\epsilon = \min\{d(x_k, x_l) \mid 1 \leq k \neq l \leq 3\}$ und

(ii) $V_\phi := \{\psi \in Iso(X) \mid \forall k = 1..3 : d(\psi(x_k), \phi(x_k)) < \epsilon\} \subset Iso(X) \setminus X$.

Definition 19. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt "Katetov-Funktion", wenn für alle $x, y \in$ X gilt: $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \leq f(x) + f(y)$. Die Menge aller Katetov-Funktionen auf X sei mit $E(X)$ bezeichnet.

Bemerkung 20. Definiere für jedes $x \in X$ die Funktion $\delta_x : X \to \mathbb{R} : y \mapsto d(x, y)$. Wegen $\forall y, z \in X : |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z) \leq d(x, y) + d(x, z)$ ist δ_x eine Katetov-Funktion und wir können somit X in $E(X)$ vermöge $x \mapsto \delta_x$ einbetten.

Für jede Katetov-Funktion f können wir die Metrik auf X auf eine Metrik auf $X \cup \{f\}$ ausweiten, indem wir $d(x, f) := f(x)$ definieren. Damit läßt sich zeigen, daß Katetov-Funktionen genau jene Funktionen sind, die $|f(x) - d(x, y)| \leq f(y) \ \forall x, y \in X$ erfüllen. Die Funktion $f - g$ ist beschränkt, da $|f(x) - d(x, y)| \leq f(y)$ und $|g(x) - d(x, y)| \leq g(y)$ und somit $|f(x) - g(x)| \leq f(y) + g(y) \ \forall x, y \in X$. Die Supremumsmetrik $d(f, g) = \sup\limits_{x\in X} |f(x) - g(x)|$ ist also wohldefiniert und macht $E(X)$ zu einem vollständig metrischen Raum.

Definition 21. Wenn für ein $f \in E(X)$ und für eine Teilmenge S $\subset E(X)$ gilt, daß $f(x) = \inf\limits_{s\in S}\{f(s) + d(x, s)\}, \forall x \in X$, so nennen wir S einen "Träger" von f.

Bemerkung 22. Falls S endlicher Träger von sowohl f als auch g ist, dann gilt $d(f, g) = \max\limits_{s\in S} |f(s) - g(s)|$.

Definition 23. Sei $\phi \in Iso(X)$, dann bezeichne mit ϕ^* die durch ϕ induzierte Isometrie auf $E(X)$ gegeben durch $\phi^*(f)(x) = f(\phi^{-1}(x))$.

Bemerkung 24. Aufgrund von $d(f,x) = f(x)\ \forall x \in X, f \in E(X)$ gilt für jede isometrische Einbettung $\phi : X \cup \{f\} \to E(X)$, die $\phi(X) = X$ erfüllt, daß $\phi(f)(x) = d(\phi(f),x) = d(f,\phi^{-1}(x)) = f(\phi^{-1}(x))\ \forall x \in X$, also $\phi = (\phi_{|X})^*_{|X\cup\{f\}}$.

Definition 25. Ein topologischer Raum heißt "Lindelöf", wenn jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt.

Proposition 26. Für einen metrisierbaren topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist separabel

(ii) X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom dh. es gibt eine abzählbare Basis

(iii) X ist Lindelöf

Lemma 27. Sei in den Bezeichnungen von Korollar 18 $Iso(X) \setminus X \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_{\phi_i}$ mit $V_{\phi_i} := \{\psi \in Iso(X) \mid \forall k = 1..3 : d(\phi_i(x_k^i), \psi(x_k^i)) < \epsilon_i\}$ und $\phi_i \in Iso(X)$.
Definiere für alle i $\in \mathbb{N}$ folgende Funktionen aus $E(X)$:

$$f_i(x) := \min_{1\le k\le 3}\{1 + d(x, x_k^i) + 2(k-1)\epsilon_i\}$$

$$g_i(x) := \min_{1\le k\le 3}\{1 + d(x, \phi_i(x_k^i)) + 2(k-1)\epsilon_i\}$$

Dann gilt für alle $i \ge 1$: $\phi \in V_{\phi_i} \Leftrightarrow d(\phi^*(f_i), g_i) < \epsilon_i$.

Lemma 28. Mit den Definitionen $F_0 := X, F_i := \overline{\{\phi^*(f_i) \mid \phi \in X\}} \subset E(X)$ für $i \ge 1$ und $Z := \overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i}$ gilt:

(i) Jedes $\phi \in X$ läßt sich (eindeutig) zu einer Isometrie ϕ^Z auf Z fortsetzen.

(ii) $\{\phi^Z \mid \phi \in X\} = \{\phi \in Iso(Z) \mid \forall i \ge 0 : \phi(F_i) = F_i\}$.

Satz 29. Sei oBdA. diam$(Z) \le 1$. Wähle für alle $i \ge 1$ paarweise verschiedene $y_i \in E(X)\setminus Z$ und setze $Y := Z \cup \bigcup_{i\ge 1}\{y_i\}$. Erweitere die Metrik d auf Y durch

$$d(y_i, z) := (i+2) + d(z, F_i)\ \forall z \in Z$$

$$d(y_i, y_j) := \inf_{z\in Z}\{d(y_i,z) + d(y_j,z)\}\ \forall i \ne j$$

Dann ist (Y, d) ein polnischer Raum und X ist isomorph zu Iso(Y) vermöge $\phi \mapsto \phi^Y$.

Ad (v)

Satz 30. Jede kompakte, metrisierbare Gruppe ist isomorph zur Isometriegruppe eines kompakten metrischen Raumes.

Ad (vi)

Definition 31. Bezeichne für alle $n \geq 1$ die Menge $E_n^{'}(X)$ als die Menge aller Funktionen f von X nach $\mathbb{R}$, für die es $x_1..x_n \in X$ gibt mit

(i) $f(x_i) + f(x_j) \geq d(x_i, x_j), \ \forall 1 \leq i, j \leq n$,

(ii) $|f(x_i) - f(x_j)| \leq \frac{1}{3} d(x_i, x_j), \ \forall 1 \leq i, j \leq n$ und

(iii) $f(x) = \min_{1 \leq i \leq n} \{f(x_i) + d(x, x_i)\}, \ \forall x \in X$.

Lemma 32. Wenn X eigentlich ist, so ist auch $E_n^{'}(X)$ eigentlich.

Lemma 33. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $f : X \mapsto \mathbb{R}$ und $x_1, x_2 \in X$ sodaß

(i) $f(x) = \min\{f(x_1) + d(x, x_1), f(x_2) + d(x, x_2)\}, \ \forall x \in X$,

(ii) $f(x_1) + f(x_2) > d(x_1, x_2)$ und

(iii) $0 < |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{3} d(x_1, x_2)$.

Sei $\delta > 0$ hinreichend klein. Wenn $\{x \in X \mid d(x, x_1) \leq \delta\}$ sowie $\{x \in X \mid d(x, x_2) \leq \delta\}$ Mengen der Mächtigkeit $k \geq 1$ an Punkten, die von einander einen Abstand $\geq \delta$ haben, enthalten, dann enthält die Menge $\{h \in E_{1+k}^{'}(X) \mid \min h = \min f \text{ und } d(h, f) \leq \delta\}$ eine solche Menge der Mächtigkeit 2^k.

Sei im Folgenden X eine lokalkompakte polnische Gruppe.

Lemma 34. Seien für alle $\psi \in Iso(X) \setminus X$ die Menge $U_{\psi,n}$ sowie x_1, x_2 definiert wie in Lemma 17. Für $M \geq \frac{1}{2} d(x_1, x_2)$ definiere folgende Funktionen:

$$f_M(x) := \min\{M + d(x, x_1), M + \frac{1}{4} d(x_1, x_2) + d(x, x_2)\}$$

$$h_M(x) := \min\{M + d(x, \psi(x_1)), M + \frac{1}{4} d(x_1, x_2) + d(x, \psi(x_2))\}$$

Für $\epsilon > 0$ hinreichend klein ist $V_\psi := \{\phi \in Iso(X) \mid d(\phi^*(f_M), h_M) < \epsilon\} \subset U_{\psi,n}$

Korollar 35. Für alle $i \geq 1$ gibt es $\epsilon_i > 0$ und Funktionen $f_i, h_i \in E(X)$ sodaß

(i) $Iso(X) \setminus X \subset \bigcup_{i \geq 1} \{\phi \in Iso(X) \mid d(\phi^*(f_i), h_i) < \frac{\epsilon_i}{2}\}$,

(ii) $\{\phi \in Iso(X) \mid d(\phi^*(f_i), h_i) < \epsilon_i\}$ ist disjunkt zu X für jedes $i \in \mathbb{N}$,

(iii) $0 < \min f_i < \min f_{i+1} \to \infty$ für $i \to \infty$ und

(iv) f_i erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 33.

Lemma 36. Wähle für alle $i \geq 1$ ein $\delta_i > 0$ mit:

(a) $K_{\delta_i}(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq \delta_i\}$ ist kompakt für alle $x \in X$,

(b) $\delta_i < \frac{\epsilon_i}{2}$,

(c) $\delta_i < \frac{1}{2} \min_{i \in \mathbb{N}} \{\min f_i\}$ und

(d) δ_i ist hinreichend klein für die Aussage von Lemma 33.

Dann existiert $\forall i \leq 1$ ein $k_i \in \mathbb{N}^+$, sodaß k_i die maximale Anzahl an Elementen in einer abgeschlossenen δ_i-Kugel in X ist, die von einander einen Abstand je $\geq \delta_i$ haben. Nach Lemma 33 gibt es also für $1 \leq s \leq 2^{k_i}$ Funktionen h_i^s mit:

(A) $h_i^s \in E'_{1+k_i}(X)$,

(B) $\min h_i^s = \min f_i$,

(C) $d(h_i^s, f_i) \leq \delta_i$ und

(D) $d(h_i^s, h_i^t) \geq \delta_i$ für $s \neq t$.

Lemma 37. Definiere: $Z_0 := X, Z_i := \{\phi^*(f_i) \mid \phi \in X\} \cup \{\phi^*(h_i^s) \mid 1 \leq s \leq 2^{k_i}, \phi \in X\}$ für $i \geq 1$ und $Z := \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} Z_i}$.
Alle $\psi \in Iso(Z)$ erfüllen: $\psi(Z_i) \cap X = \emptyset$ ∀i ≥ 1.

Korollar 38. Z ist ein eigentlicher polnischer Raum und X ist isomorph zu Iso(Z) vermöge $X \to Iso(Z) : \phi \mapsto \phi^*_{|Z}$.