Seminararbeit

Die Darstellbarkeit topologischer Gruppen als Isometriegruppen

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dr. Harald Woracek

durch

Johanna Brunar
Matrikelnummer: 00471351
Kübeckgasse 16/24
1030 Wien

Wien, im März 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die vorliegende Seminararbeit beschäftigt sich mit der Darstellbarkeit topologischer Gruppen als Isometriegruppen. Dafür wird zunächst die Isometriegruppe eines polnischen Raumes betrachtet und gezeigt, dass diese eine polnische Gruppe bildet. Tatsächlich lässt sich sogar jede polnische Gruppe in einer solchen Form darstellen. Der Beweis dieses zentralen Satzes ist Gegenstand des 6. Kapitels. Ähnliche Aussagen lassen sich für kompakte beziehungsweise eigentliche polnische Gruppen beweisen.

Konkret werden die folgenden sechs Aussagen behandelt:

(i) Ist X ein polnischer Raum, so ist $\mathrm{Iso}(X)$ eine polnische Gruppe (siehe Satz 3.1).

(ii) Ist X ein kompakter metrischer Raum, so ist $\mathrm{Iso}(X)$ kompakt (siehe Korollar 4.1).

(iii) Ist X ein eigentlicher Raum, so ist $\mathrm{Iso}(X)$ lokalkompakt (siehe Korollar 5.3).

(iv) Jede polnische Gruppe ist isomorph zur Isometriegruppe eines polnischen Raumes (siehe Satz 6.16).

(v) Jede kompakte metrisierbare Gruppe ist isomorph zur Isometriegruppe eines kompakten metrischen Raumes (siehe Satz 7.3).

(vi) Jede eigentliche polnische Gruppe ist isomorph zur Isometriegruppe eines eigentlichen polnischen Raumes (siehe Satz 8.10).

Sofern nicht anders angegeben, bezieht sich diese Arbeit auf die Werke “Compact metrizable groups are isometry groups of compact metric spaces” von Julien Melleray [3] und “Isometry groups of separable metric spaces” von Maciej Malicki und Slawomir Solecki [5].

2 Grundlegende Definitionen und Sätze

Bevor wir uns dem Beweis der Aussagen widmen, wollen wir einige Definitionen wiederholen und Beobachtungen festhalten.

Definition 2.1. Eine Gruppe $(X, e, \cdot)$ heißt *topologische Gruppe*, wenn sie mit einer Topologie versehen ist, sodass die Gruppenoperationen bezüglich dieser Topologie stetig sind.

Definition 2.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to X$ heißt *Isometrie*, wenn $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gilt.

Proposition 2.3. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann bildet die Menge* $\mathrm{Iso}(X)$ *aller bijektiven Isometrien auf X mit der Komposition als Gruppenoperation eine Gruppe, die, versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz, zu einer topologischen Gruppe wird.*

Beweis. Offensichtlich ist $(\mathrm{Iso}(X), \circ)$ eine Gruppe. Es bleibt zu zeigen, dass die Gruppenoperationen bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz stetig sind.

Die Stetigkeit der Abbildung $\mathrm{Iso}(X) \times \mathrm{Iso}(X) \to \mathrm{Iso}(X) : (f, g) \mapsto f \circ g$ ist äquivalent zur Stetigkeit von $(f, g) \mapsto (f \circ g)(x)$ für jedes feste x. Seien $x \in X$ beliebig und $((f, g)_i)_{i\in I}$ ein Netz in $\mathrm{Iso}(X) \times \mathrm{Iso}(X)$, das gegen $(f, g) \in \mathrm{Iso}(X) \times \mathrm{Iso}(X)$ konvergiert. Dann gilt auch $\pi_1(f, g)_i =: f_i \to f$ und $\pi_2(f, g)_i =: g_i \to g$. Für $\epsilon > 0$ existieren $i_1, i_2 \in I$, sodass für alle $i \succ i_1, i_2$ gilt: $d(f_i(g(x)), f(g(x))), d(g_i(x), g(x)) < \frac{\epsilon}{2}$. Mit der Dreiecksungleichung folgt, da f_i eine Isometrie ist:

$$d(f \circ g(x), f_i \circ g_i(x)) \leq d(f \circ g(x), f_i \circ g(x)) + d(f_i \circ g(x), f_i \circ g_i(x)) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Um die Stetigkeit von $\mathrm{Iso}(X) \to \mathrm{Iso}(X) : f \mapsto f^{-1}$ zu zeigen, betrachte wiederum ein gegen $f \in \mathrm{Iso}(X)$ konvergentes Netz $(f_i)_{i\in I}$ in $\mathrm{Iso}(X)$ und wähle $i_0 \in I$, sodass $d(f(f^{-1}(x)), f_i(f^{-1}(x))) < \epsilon$ für alle $i \succ i_0$. Wir erhalten die geforderte Stetigkeit aus

$$d(f_i^{-1}(x), f^{-1}(x)) = d(x, f_i \circ f^{-1}(x)) = d(f \circ f^{-1}(x), f_i \circ f^{-1}(x)) < \epsilon.$$

□

Definition 2.4. Ein topologischer Raum erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, wenn jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

Definition 2.5. Ein topologischer Raum erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn er eine abzählbare Basis besitzt.

Bemerkung 2.6. Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert das erste. Teilmengen (mit der Spurtopologie) und abzählbare Produkte (mit der Produkttopologie) von Räumen, die das zweite Abzählbarkeitserfüllen, erfüllen wiederum das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Definition 2.7. Ein Raum heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Bemerkung 2.8. Jeder topologische Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist separabel. Teilmengen separabler Räume brauchen im Allgemeinen nicht mehr separabel zu sein.

Definition 2.9. Ein topologischer Raum heißt *Lindelöf*, wenn jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt.

Bemerkung 2.10. Topologische Räume, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, sind Lindelöf.

Definition 2.11. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *metrisierbar*, wenn es eine Metrik auf X gibt, die $\mathcal{T}$ induziert.

Proposition 2.12. *Für einen metrisierbaren topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) X ist separabel

(ii) X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom

(iii) X ist Lindelöf

Für den Beweis sei zum Beispiel auf [2, Satz 1.32] verwiesen.

Definition 2.13. Ein topologischer Raum heißt *lokalkompakt*, wenn jede Umgebung eines Punktes eine kompakte Umgebung enthält.

Definition 2.14. Ein metrischer Raum heißt *eigentlich*, wenn alle abgeschlossenen Kugeln kompakt sind.

Definition 2.15. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *vollständig metrisierbar*, wenn es eine vollständige Metrik auf X gibt, die $\mathcal{T}$ induziert.

Definition 2.16. Ein topologischer Raum heißt *polnischer Raum*, wenn er separabel und vollständig metrisierbar ist.

Definition 2.17. Eine topologische Gruppe X heißt *polnische Gruppe*, wenn die Topologie auf X polnisch ist.

Lemma 2.18. *Jeder eigentliche Raum* (X, d) *ist polnisch.*

Beweis. Die Vollständigkeit der Metrik d ergibt sich aus der Tatsache, dass es für jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X und für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle x_n mit $n \geq N$ gilt: $x_n \in K_\epsilon(x_N)$, wobei $K_\epsilon(x_N)$ die abgeschlossene Kugel um x_N mit Radius ϵ bezeichnet. Wegen der Kompaktheit der Kugel gibt es eine konvergente Teilfolge. Somit konvergiert jede Cauchy-Folge.

Für die Separabilität bemerke, dass X σ-kompakt ist, d.h. durch abzählbar viele kompakte Mengen überdeckt werden kann. Für ein beliebiges $x_0 \in X$ bekommen wir nämlich $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n(x_0)$. Wegen der Totalbeschränkheit der $K_n(x_0)$ existieren für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich viele $x^\epsilon_{n,j}$, sodass $K_n(x_0) \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{m_n} U_\epsilon(x^\epsilon_{n,j})$, wobei $U_\epsilon(x^\epsilon_{n,j}) := \{x \in X \mid d(x, x^\epsilon_{n,j}) < n\}$. Wir erhalten $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{j=1}^{m_n} U_\epsilon(x^\epsilon_{n,j})$ als abzählbare Überdeckung von X. Für jedes $y \in X$ finden wir damit $n, j \in \mathbb{N}$, sodass $d(y, x^\epsilon_{n,j}) < \epsilon$. Die Menge $D := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \{x^{1/k}_{n,j} \mid n \in \mathbb{N}, j = 1..m_n\}$ ist somit eine abzählbare dichte Teilmenge von X. □

3 Isometriegruppen polnischer Räume

Aus Proposition 2.3 wissen wir bereits, dass $(\mathrm{Iso}(X), \circ)$ eine topologische Gruppe bildet. Ist X separabel und vollständig metrisierbar, also polnisch, so übertragen sich diese Eigenschaften auf die Isometriegruppe des Raumes.

Satz 3.1. *Ist* (X, d) *ein polnischer Raum, so ist* $\mathrm{Iso}(X)$ *eine polnische Gruppe.*

Beweis. Da X separabel ist, gibt es eine abzählbare Teilmenge $Y := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$, sodass $\overline{Y} = X$. Definiere für $\phi, \psi \in X^Y$:

$$\delta(\phi, \psi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(\phi(x_n), \psi(x_n))}{1 + d(\phi(x_n), \psi(x_n))}$$

δ ist eine Metrik auf X^Y, die die Produkttopologie induziert. Wegen der Abschätzung

$$d(\phi(x), \psi(x)) \leq d(\phi(x), \phi(x_n)) + d(\phi(x_n), \psi(x_n)) + d(\psi(x), \psi(x_n)) =$$
$$= 2d(x, x_n) + d(\phi(x_n), \psi(x_n))$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und da die Menge der x_n dicht liegt in X, gibt δ auch eine Metrik auf $\mathrm{Iso}(X)$, die die Topologie auf $\mathrm{Iso}(X)$ induziert.

Die Abbildung $\Gamma : \mathrm{Iso}(X) \to X^Y : \phi \mapsto \phi\big|_Y$ ist eine Isometrie und daher ein Homöomorphismus auf $\Gamma(\mathrm{Iso}(X))$. Wir können $\mathrm{Iso}(X)$ also als Teilmenge von X^Y auffassen. X^Y ist als abzählbares Produkt eines vollständigen metrischen Raumes selbst vollständig. Um die Vollständigkeit von $\mathrm{Iso}(X)$ bezüglich δ zu beweisen, reicht es somit, die Abgeschlossenheit von $\Gamma(\mathrm{Iso}(X))$ in X^Y zu zeigen.

Sei ϕ_n eine Folge in $\Gamma(\mathrm{Iso}(X))$, die bezüglich der Metrik δ gegen ϕ konvergiert. Dann ist ϕ eine Isometrie, da aufgrund der Stetigkeit der Metrik d gilt:

$$d(\phi(x), \phi(y)) = \lim_{n\to\infty} d(\phi_n(x), \phi_n(y)) = d(x, y)$$

ϕ ist bijektiv, da für jedes feste $y \in Y$ die Folge $(\phi_n^{-1}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X ist und daher aufgrund der Vollständigkeit von X konvergiert. Der punktweise definierte Grenzwert $\psi(y) := \lim_{n\to\infty} \phi_n^{-1}(y)$ erfüllt genau $\phi^{-1} = \psi$, da

$$d(\phi(\psi(y)), y) = \lim_{n\to\infty} d(\phi_n(\psi(y)), y) = \lim_{n\to\infty} d(\psi(y), \phi_n^{-1}(y)) = 0,$$

analog $d(\psi(\phi(y)), y) = 0$.

Da metrische Räume genau dann separabel sind, wenn sie das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, und da sich die Eigenschaft von Räumen, das zweite Abzählbarkeitsaxiom zu erfüllen, auf deren abzählbares Produkt überträgt, besitzt X^Y eine abzählbare Basis. Daher besitzt auch $\mathrm{Iso}(X)$, aufgefasst als Teilmenge von X^Y vermöge der Einbettung Γ, eine solche. Wiederum mit der Äquivalenz des zweiten Abzählbarkeitsaxioms zur Separabilität in metrischen Räumen folgt schließlich, dass $\mathrm{Iso}(X)$ separabel ist.

$\square$

Die Implikation in Satz 3.1 ist auch unter der schwächeren Voraussetzung gültig, dass (X, d) ein lokalkompakter und separabler metrischer Raum ist. Insbesondere braucht die Metrik d nicht vollständig zu sein. [1]

Satz 3.2. *Ist (X, d) ein lokalkompakter und separabler metrischer Raum, so ist* $\mathrm{Iso}(X)$ *eine polnische Gruppe.*

Beweis. Wir definieren für alle $x \in X$ den *Radius der Kompaktheit* $\rho(x) := \sup\{r > 0 \mid K_r(x) \text{ ist kompakt}\}$, wobei $K_r(x)$ die abgeschlossene Kugel mit Radius r um x bezeichnet. Falls für beliebige $x, y \in X$ gilt, dass $\rho(x) \leq d(x, y)$, so folgt $\rho(x) \leq \rho(y) + d(x, y)$. Anderenfalls nehmen wir o.B.d.A. an, dass $\rho(x) \geq \rho(y)$ und wählen ein $r > 0$ mit $d(x, y) < r < \rho(x)$. Da $K_r(x)$ kompakt ist und wegen der Dreiecksungleichung $K_{r-d(x,y)}(y) \subseteq K_r(x)$ gilt, ist auch $K_{r-d(x,y)}(y)$ als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums kompakt. Damit folgt $r - d(x, y) \leq \rho(y) \Leftrightarrow r \leq \rho(y) + d(x, y)$ und daher

$\rho(x) \leq \rho(y) + d(x, y)$. ρ ist also Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante 1.

Für kompakte Teilmengen K von X existieren Konstanten $\rho_K > 0$ mit der Eigenschaft, dass $\rho(x) \geq \rho_K$ für alle $x \in K$ gilt. Denn angenommen für alle $n \in \mathbb{N}$ existierten $x_n \in K$, sodass $\rho(x_n) \leq \frac{1}{n}$, dann gäbe es aufgrund der Kompaktheit von K eine gegen ein $x \in K$ konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. $\rho(x) = \rho(\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_{n_k}) \leq \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} = 0$ liefert aber einen Widerspruch zur Lokalkompaktheit von X.

Für Isometrien ϕ auf X gilt $\rho(\phi(x)) = \rho(x)$ für alle $x \in X$. Sei $(\phi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathrm{Iso}(X)$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$d(\phi_N(x), \phi_n(x)) \leq \rho(x) = \rho(\phi_N(x)) \text{ für alle } n \geq N.$$

Aufgrund der Kompaktheit muss es eine konvergente Teilfolge geben, daher können wir wiederum den Grenzwert $\phi(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x)$ betrachten. Der Rest des Beweises verläuft analog zu jenem von Satz 3.1. □

4 Isometriegruppen kompakter metrischer Räume

Falls X sogar ein kompakter metrischer Raum ist (insbesondere also polnisch, da kompakte metrische Räume immer vollständig und separabel sind), erhalten wir die analoge Aussage für die Isometriegruppe als Korollar aus dem bereits Gezeigten.

Korollar 4.1. *Ist (X, d) ein kompakter metrischer Raum, so ist* $\mathrm{Iso}(X)$ *kompakt.*

Beweis. Nach dem Satz von Tychonoff ist X^Y kompakt. Wie im Beweis von Satz 3.1 betrachten wir $\mathrm{Iso}(X)$ als abgeschlossene Teilmenge von X^Y. Damit folgt die Kompaktheit. □

5 Isometriegruppen eigentlicher Räume

Die definierende Eigenschaft eigentlicher Räume ist die Kompaktheit aller abgeschlossenen Kugeln. Natürlich ist jeder eigentliche Raum lokalkompakt. Im Folgenden zeigen wir, dass die Isometriegruppe eines eigentlichen Raumes lokalkompakt ist.

Definition 5.1. Seien G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Eine Abbildung $* : G \times X \to X : (g, x) \mapsto g * x$, heißt *eigentlich*, wenn für alle $x, y \in X$ offene Umgebungen U_x, U_y von x respektive y existieren, sodass die Menge $\{g \in G \mid (g * U_x) \cap U_y \neq \emptyset\}$ präkompakt in G ist.

Lemma 5.2. *Sei* (X, d) *ein eigentlicher Raum. Dann ist die Punktauswertung* $\text{Iso}(X) \times X \to X : (\phi, x) \mapsto \phi(x)$ *eine eigentliche Abbildung.*

Beweis. Seien $x, y \in X$ beliebig. Definiere U_x, U_y als die offenen Kugeln um x bzw. y mit Radius $\frac{1}{2}$. Falls für $\phi \in \text{Iso}(X)$ gilt, dass $\phi(U_x) \cap U_y \neq \emptyset$, so muss $d(\phi(x), y) \leq 1$ sein. Sei nämlich $\tilde{x} \in \phi(U_x) \cap U_y$, dann gibt es ein $z \in U_x$ mit $\phi(z) = \tilde{x}$. Somit gilt

$$d(\phi(x), y) \leq d(\phi(x), \tilde{x}) + d(\tilde{x}, y) = d(x, z) + d(\tilde{x}, y) \leq 1.$$

Wir werden zeigen, dass $K := \{\phi \in \text{Iso}(x) \mid d(\phi(x), y) \leq 1\}$ kompakt ist, da dann wegen $\overline{\{\phi \in \text{Iso}(X) \mid \phi(U_x) \cap U_y \neq \emptyset\}} \subseteq K$ die in Definition 5.1 geforderte Präkompaktheit folgt. Sei also $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K und fixiere ein $z \in X$. Wegen $d(\phi_n(z), y) \leq d(\phi_n(z), \phi_n(x)) + d(\phi_n(x), y) \leq d(z, x) + 1$ ist $\phi_n(z) \in K_{d(z,y)+1}(y)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $K_{d(z,y)+1}(y)$ als abgeschlossene Kugel im eigentlichen Raum X kompakt ist, besitzt die Folge $(\phi_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ eine in $K_{d(z,y)+1}(y)$ konvergente Teilfolge. Da die Metrik auf $\text{Iso}(X)$ durch Auswertung an abzählbar vielen Stellen definiert ist, erhält man mit einem Diagonalfolgenargument eine in K eine konvergente Teilfolge von $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Die Tatsache, dass K abgeschlossen ist, ist klar. Damit folgt die Präkompaktheit von $\{\phi \in \text{Iso}(X) \mid \phi(U_x) \cap U_y \neq \emptyset\}$. □

Korollar 5.3. *Ist* (X, d) *ein eigentlicher Raum, so ist* $\text{Iso}(X)$ *lokalkompakt.*

Beweis. Für jedes $x \in X$ und für jede offene Umgebung U_x von x ist die Menge $M := \{\phi \in \text{Iso}(X) \mid \phi(U_x) \cap U_x \neq \emptyset\}$ eine offene Umgebung der Identität. Sei nämlich $(\phi_i)_{i \in I}$ ein Netz in M^c, das gegen ϕ konvergiert. Sei $\tilde{x} \in U_x$ fest. Da für alle $i \in I$ gilt, dass $\phi_i(\tilde{x}) \in U_x^c$ und U_x^c abgeschlossen ist, liegt auch $\phi(\tilde{x})$ im Komplement von U_x und damit, weil $\tilde{x}$ beliebig war, $\phi \in M^c$. Nach Lemma 5.2 ist $\overline{M}$ eine kompakte Umgebung der Identität und somit $\text{Iso}(X)$ lokalkompakt. □

6 Darstellbarkeit polnischer Gruppen als Isometriegruppen

In Abschnitt 3 haben wir bewiesen, dass die Isometriegruppe eines polnischen Raumes polnisch ist. Es stellt sich die Frage, ob eine Umkehrung auch gilt. Das Ziel des folgenden Abschnitts ist es, für eine gegebene polnische Gruppe X einen polnischen Raum Z zu konstruieren, sodass X isomorph zur Isometriegruppe von Z ist. Dafür werden wir einen speziellen Funktionenraum betrachten und Z als geeignete Teilmenge dieses Raumes definieren.

Zunächst sei der folgende wichtige Satz ohne Beweis angeführt:

Satz 6.1 (Birkhoff-Kakutani)**.** *Eine topologische Gruppe ist metrisierbar genau dann, wenn sie Hausdorff ist und das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.*

Korollar 6.2. *Auf einer metrisierbaren Gruppe X existiert stets eine linksinvariante Metrik (d.h. $d(x,y) = d(zx,zy)$ für alle $x,y,z \in X$), die die Topologie von X induziert.*

Für den Beweis von Satz 6.1 und Korollar 6.2 sei zum Beispiel auf [6] verwiesen.

Wir können annehmen, dass die Metrik gleichzeitig linksinvariant und beschränkt ist. Für jede Metrik d erfüllt die zu d äquivalente Metrik $\tilde{d} := \frac{d}{1+d}$ nämlich $\operatorname{diam}(X) \leq 1$. Die Linksinvarianz überträgt sich offensichtlich von d auf $\tilde{d}$.

Proposition 6.3. *Sei $(X, e, \cdot)$ eine polnische Gruppe und bezeichne $L_x : X \to X$ die Linkstranslation $y \mapsto x \cdot y$. Dann ist die Abbildung $X \to \operatorname{Iso}(X) : x \mapsto L_x$ ein Gruppenhomomorphismus und ein Homöomorphismus aufs Bild.*

Beweis. Für jedes $x \in X$ ist L_x klarerweise bijektiv. Nach dem Korollar aus dem Satz von Birkhoff-Kakutani kann d als linksinvariant vorausgesetzt werden. Wegen $d(L_x(y), L_x(z)) = d(xy, xz) = d(y,z)$ ist L_x daher eine Isometrie auf X. Durch Anwendung auf das neutrale Element ergibt sich sofort die Injektivität der Einbettung, die Homomorphie und die Stetigkeit folgen aus der Assoziativität respektive der Stetigkeit der Gruppenoperation. □

Sei im Folgenden X eine polnische Gruppe mit $\operatorname{diam}(X) \leq 1$ und fasse X als Teilmenge von $\operatorname{Iso}(X)$ vermöge der Abbildung aus Proposition 6.3 auf.

Lemma 6.4. *Sei $\psi \in \operatorname{Iso}(X) \setminus X$. Dann gibt es $x_1, x_2 \in X$ und $n > 0$, für die $V_{\psi,n} := \{\phi \in \operatorname{Iso}(X) \mid d(\phi(x_1), \psi(x_1)), d(\phi(x_2), \psi(x_2)) < \frac{1}{n}\}$ eine zu X disjunkte Menge ist.*

Beweis. Wähle ein beliebiges $x_1 \in X$. Aufgrund der Bijektivität der Linkstranslationen finden wir ein $y \in X$, das $y \cdot x_1 = \psi(x_1)$ erfüllt. Da ψ nicht in X liegt, gibt es $x_2 \in X$ mit $y \cdot x_2 \neq \psi(x_2)$. Wenn es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in X$ gäbe, das sowohl $d(y_n \cdot x_1, \psi(x_1)) < \frac{1}{n}$ als auch $d(y_n \cdot x_2, \psi(x_2)) < \frac{1}{n}$ erfüllt, dann müsste $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y konvergieren. Dies liefert mit $\psi(x_2) = \lim_{n\to\infty} y_n \cdot x_2 = y \cdot x_2$ aber einen Widerspruch zur Wahl von x_2. □

Korollar 6.5. *Sei $\psi \in \operatorname{Iso}(X) \setminus X$. Dann existieren $\epsilon > 0$ und paarweise verschiedene $x_1, x_2, x_3 \in X$ mit der Eigenschaft, dass*

(i) $6\epsilon = \min\{d(x_k, x_l) \mid 1 \leq k < l \leq 3\}$ *und*

(ii) $V_\psi := \{\phi \in \operatorname{Iso}(X) \mid d(\phi(x_k), \psi(x_k)) < \epsilon,\ k = 1,2,3\}$ *disjunkt zu X ist.*

Beweis. Seien x_1, x_2 und n wie im vorigen Lemma. Da X eine abzählbare dichte Teilmenge $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ besitzt, gibt es ein Element $y_m \in X \setminus \{y\}$, das $d(x_1, y_m) < \frac{1}{2}d(x_1, x_2)$ und $d(x_1, y_m) < \frac{6}{n}$ erfüllt. Definiere $x_3 := y_m$ und $\epsilon := \frac{1}{6}d(x_1, x_3) < \frac{1}{n}$. Dann ist V_ψ eine Teilmenge von $\mathrm{Iso}(X) \setminus X$ und Bedingung (i) gilt. □

Definition 6.6. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *Katetov-Funktion*, wenn für alle $x, y \in X$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \leq f(x) + f(y).$$

Die Menge aller Katetov-Funktionen auf X bezeichnen wir mit $E(X)$.

Lemma 6.7. *Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist eine Katetov-Funktion genau dann, wenn sie für alle $x, y \in X$ erfüllt, dass*

$$|f(x) - d(x, y)| \leq f(y). \tag{1}$$

Beweis. Da Katetov-Funktionen die Dreiecksungleichung erfüllen, können wir für jedes $f \in E(X)$ die Metrik auf X zu einer Metrik auf $X \cup \{f\}$ ausweiten, indem wir $d(x, f) := f(x)$ definieren. Bedingung (1) folgt für $f \in E(X)$ sofort aus

$$|f(x) - d(x, y)| = |d(x, f) - d(x, y)| \leq d(y, f) = f(y).$$

Umgekehrt gilt $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-d(x, y)|+|f(y)-d(x, y)| \leq f(y)+f(x)$, aus $|f(x) - d(x, y)| \leq f(y)$ folgt $d(x, y) \leq f(x) + f(y)$ und gemeinsam mit $|f(y) - d(x, y)| \leq f(x)$ auch $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$. □

Korollar 6.8. *Für $f, g \in E(X)$ ist $|f - g|$ beschränkt, und $E(X)$ ist mit der Metrik $d(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ ein vollständig metrischer Raum.*

Beweis. Die Differenz zweier Katetov-Funktionen f und g ist beschränkt, da wir wegen $|f(x)-d(x, y)| \leq f(y)$ und $|g(x)-d(x, y)| \leq g(y)$ die Differenz unabhängig von x abschätzen können durch $|f(x)-g(x)| \leq f(y)+g(y)$. Die Supremumsmetrik ist also wohldefiniert und macht $E(X)$ zu einem vollständig metrischen Raum. □

Die Verwendung der Bezeichnung d für die Supremumsmetrik ist gerechtfertigt durch das folgende Lemma:

Lemma 6.9. *Für $x \in X$ setze $\delta_x : X \to \mathbb{R} : y \mapsto d(x, y)$. Dann gilt $\delta_x \in E(X)$, und die Abbildung $x \mapsto \delta_x$ ist isometrisch.*

Beweis. Durch die Dreiecksungleichung erhalten wir für alle $y, z \in X$: $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z) \leq d(x, y) + d(x, z)$. Daher ist δ_x eine Katetov-Funktion. Wegen $\delta_x(x) = 0 \neq d(x, y) = \delta_y(x)$ für $x \neq y$ ist $x \mapsto \delta_x$ injektiv, und wir können die Elemente aus X mit ihren Abstandsfunktionen identifizieren. Die Supremumsmetrik stimmt mit der Erweiterung der Metrik auf X aus dem Beweis von Lemma 6.7 überein, da für $f \in E(X)$ gilt:

$$\sup_{y\in X} |\delta_x(y) - f(y)| = \sup_{y\in X} |d(x,y) - f(y)| = f(x).$$

Dass $x \mapsto \delta_x$ isometrisch ist, folgt nun mit der Dreiecksungleichung aus

$$d(\delta_x, \delta_y) = \sup_{z\in X} |d(x,z) - d(y,z)| = d(x,y).$$

□

Definition 6.10. Eine Teilmenge $S \subseteq X$ heißt *Träger* von $f \in E(X)$, wenn $f(x) = \inf_{s\in S}\{f(s) + d(x,s)\}$ für alle $x \in X$ gilt.

Lemma 6.11. *Falls S endlicher Träger von sowohl f als auch g ist, dann gilt $d(f,g) = \max_{s\in S} |f(s) - g(s)|$.*

Beweis. Um das Lemma zu beweisen, verwenden wir die allgemeine Ungleichung $|\min_{1\leq s\leq n} a_s - \min_{1\leq s\leq n} b_s| \leq \max_{1\leq s\leq n} |a_s - b_s|$. Mit dieser Ungleichung folgt für alle $x \in X$ nämlich sofort

$$|f(x)-g(x)| = |\min_{s\in S}\{f(s)+d(x,s)\} - \min_{s\in S}\{g(s)+d(x,s)\}| \leq \max_{s\in S} |f(s)-g(s)|$$

und damit $d(f,g) \leq \max_{s\in S} |f(s) - g(s)|$. Da die andere Ungleichung trivialerweise erfüllt ist, ist die Aussage gezeigt.

Für den Beweis der Ungleichung sei o.B.d.A. $\min_{1\leq s\leq n} a_s = a_1$. Falls $\min_{1\leq s\leq n} b_s = b_1$, ist die Ungleichung offensichtlich erfüllt. Sei also $\min_{1\leq s\leq n} b_s = b_j$ mit $j \neq 1$. Wenn $b_j \leq a_1 + \frac{a_1+a_j}{2}$, so gilt $|a_1 - b_j| \leq |a_j - b_j|$, anderenfalls erhalten wir $|a_1 - b_j| \leq |a_1 - b_1|$. In beiden Fällen folgt die gewünschte Ungleichung. □

Definition 6.12. Für $\phi \in \mathrm{Iso}(X)$ bezeichnen wir mit ϕ^* die durch ϕ induzierte Isometrie auf $E(X)$ gegeben durch $\phi^*(f)(x) := f(\phi^{-1}(x))$.

Bemerkung 6.13. Da per definitionem für alle $x \in X$ und $f \in E(X)$ gilt, dass $d(f,x) = f(x)$, erfüllt jede isometrische Einbettung $\phi : X \cup \{f\} \to E(X)$ mit $\phi(X) = X$, dass $\phi(f)(x) = d(\phi(f), x) = d(f, \phi^{-1}(x)) = f(\phi^{-1}(x))$, also $\phi = (\phi|_X)^*|_{X\cup\{f\}}$.

Sei X eine polnische Gruppe. Wir leiten nun einige technische Aussagen her, um den angestrebten Satz über die Darstellbarkeit von X als Isometriegruppe zeigen zu können.

Nach Proposition 2.12 ist $\mathrm{Iso}(X) \setminus X$ Lindelöf und kann daher durch eine Folge von $(V_{\psi_i})_{i\in\mathbb{N}}$ überdeckt werden, wobei

$$V_{\psi_i} := \{\phi \in \mathrm{Iso}(X) \mid d(\psi_i(x_k^i), \phi(x_k^i)) < \epsilon_i,\ k = 1, 2, 3\}$$

wie in Korollar 6.5 definiert ist.

Wir betrachten für alle $i \in \mathbb{N}$ folgende Funktionen:

$$\begin{aligned} f_i(x) &:= \min_{1\leq k\leq 3}\{1 + d(x, x_k^i) + 2(k-1)\epsilon_i\} \\ g_i(x) &:= \min_{1\leq k\leq 3}\{1 + d(x, \phi_i(x_k^i)) + 2(k-1)\epsilon_i\} \end{aligned}$$

Diese Funktionen sind nach Lemma 6.7 Elemente aus $E(X)$, da sie wegen $\mathrm{diam}(X) \leq 1$

$$\begin{aligned} &|f_i(x) - d(x,y)| = |\min_{1\leq k\leq 3}\{1 + d(x, x_k^i) + 2(k-1)\epsilon_i\} - d(x,y)| = \\ &= |\min_{1\leq k\leq 3}\{1 + d(x, x_k^i) - d(x,y) + 2(k-1)\epsilon_i\}| \leq \\ &\leq \min_{1\leq k\leq 3}\{1 + d(y, x_k^i) + 2(k-1)\epsilon_i\} = f_i(y) \end{aligned}$$

für alle $x, y \in X$ erfüllen (g_i analog).

Lemma 6.14. *Für alle $\phi \in \mathrm{Iso}(X)$ und für alle $i \geq 1$ gilt, dass $\phi \in V_{\psi_i}$ genau dann, wenn $d(\phi^*(f_i), g_i) < \epsilon_i$.*

Beweis. Zugunsten einer besseren Lesbarkeit werden wir für den Beweis der Äquivalenz auf die Indizes i verzichten. Sei $\phi \in V_\psi$. Für $k \in \{1, 2, 3\}$ gilt:

$$\begin{aligned} &\phi^*(f)(\psi(x_k)) = f(\phi^{-1}(\psi(x_k)) = \\ &= \min_{1\leq l\leq 3}\{1 + d(\phi^{-1}(\psi(x_k)), x_l) + 2(l-1)\epsilon\} = \\ &= \min_{1\leq l\leq 3}\{1 + d(\psi(x_k), \phi(x_l)) + 2(l-1)\epsilon\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Wegen $\phi \in V_\psi$ erhalten wir $d(\psi(x_k), \phi(x_k)) < \epsilon$ sowie für $k \neq l$:

$$d(\psi(x_k), \phi(x_l)) \geq d(\psi(x_k), \psi(x_l)) - d(\phi(x_l), \psi(x_l)) \geq 6\epsilon - \epsilon = 5\epsilon.$$

Damit folgt aber

$$\begin{aligned} &1 + d(\psi(x_k), \phi(x_l)) + 2(l-1)\epsilon - (1 + d(\psi(x_k), \phi(x_k)) + 2(k-1)\epsilon) \geq \\ &\geq 5\epsilon + 2(l-1)\epsilon - \epsilon - 2(k-1)\epsilon = \epsilon(4 + 2(l-k)) \geq \epsilon(4 + 2(1-3)) = 0 \end{aligned}$$

und somit für Gleichung (2) $\phi^*(f)(\psi(x_k)) = 1 + d(\psi(x_k), \phi(x_k)) + 2(k-1)\epsilon$. Analog zeigt man $g(\phi(x_k)) = 1 + d(\phi(x_k), \psi(x_k)) + 2(k-1)\epsilon$. Offensichtlich gilt $g(\psi(x_k)) = 1 + 2(k-1)\epsilon$ und $\phi^*(f)(\phi(x_k)) = f(x_k) = 1 + 2(k-1)\epsilon$.

Da $\{\phi(x_k) \mid k = 1,2,3\} \cup \{\psi(x_k) \mid k = 1,2,3\}$ ein gemeinsamer Träger der Funktionen $\phi^*(f)$ und g ist, erhalten wir mit Lemma 6.11 schließlich $d(\phi^*(f), g) = \max\limits_{1\leq k\leq 3} d(\phi(x_k), \psi(x_k)) < \epsilon$.

Die andere Richtung betrachten wir nur für den Fall $k = 1$, da die anderen beiden Fälle analog erfolgen. Wegen $f(x_1) = 1$ und

$$\epsilon > d(\phi^*(f), g) \geq |\phi^*(f)(\phi(x_1)) - g(\phi(x_1))| = d(\phi(x_1), \psi(x_1))$$

erhalten wir $g(\phi(x_1)) < 1 + \epsilon$. Damit muss aber

$$\begin{aligned} g(\phi(x_1)) &= \min_{1\leq k\leq 3}\{g(\psi(x_k)) + d(\psi(x_k), \phi(x_1))\} = \\ &= g(\psi(x_1)) + d(\psi(x_1), \phi(x_1)) = 1 + d(\psi(x_1), \phi(x_1)) \end{aligned}$$

und somit $d(\psi(x_k), \phi(x_k)) < \epsilon$ gelten. □

Wir definieren $F_0 := X, F_i := \overline{\{\phi^*(f_i) \mid \phi \in X\}} \subseteq E(X)$ für $i \geq 1$ und $Z := \overline{\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} F_i}$. Damit können wir folgendes Resultat festhalten:

Lemma 6.15. *Z ist ein polnischer Raum, und es gilt:*

(i) Jedes $\phi \in X$ lässt sich zu einer Isometrie ϕ^Z auf Z fortsetzen.

(ii) $\{\phi^Z \mid \phi \in X\} = \{\phi \in \mathrm{Iso}(Z) \mid \forall i \geq 0 : \phi(F_i) = F_i\}$.

Beweis. Z ist als abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes $E(X)$ selbst vollständig. Außerdem ist Z separabel, da aus der Separabilität von X jene der einzelnen F_i folgt. Daher ist Z ein polnischer Raum.

(i) Wegen $\phi^*(F_i) = F_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle $\phi \in X$ ist auch $\phi^*(Z) = Z$ und somit $\phi^*\big|_Z$ eine Isometrie auf Z.

(ii) Nach Konstruktion gilt $\phi^Z(F_i) = F_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle $\phi \in X$. Für die umgekehrte Inklusion sei $\phi \in \mathrm{Iso}(Z)$ eine beliebige Isometrie, die $\phi(F_i) = F_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ erfüllt. Setzen wir $i = 0$ ein, so erhalten wir $\phi(X) = X$, also ist $\phi\big|_X \in \mathrm{Iso}(X)$. Wegen Bemerkung 6.13 gilt

$$d((\phi\big|_X)^*(f_i), g_i) = d(\phi(f_i), g_i) \geq d(F_i, g_i) \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Mithilfe der Äquivalenz aus Lemma 6.14 erhalten wir $d(F_i, g_i) \geq \epsilon_i$ und dadurch, wiederum mit Lemma 6.14, $\phi\big|_X \notin V_{\psi_i}$. Da dies für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $\phi\big|_X \in X$, und die Aussage ist gezeigt. □

Wir setzen nun o.B.d.A. $\operatorname{diam}(Z) \leq 1$ voraus. Für alle $i \geq 1$ wählen wir paarweise verschiedene y_i, die nicht Elemente aus Z sind, und definieren $Y := Z \cup \bigcup_{i \geq 1} \{y_i\}$. Wir erweitern die Metrik d auf Y durch

$$\begin{aligned} d(y_i, z) &:= (i+2) + d(z, F_i) \quad \text{für } z \in Z \\ d(y_i, y_j) &:= \inf_{z \in Z} \{d(y_i, z) + d(y_j, z)\} \quad \text{für } i \neq j \end{aligned}$$

Jetzt können wir die zentrale Aussage dieses Kapitels beweisen:

Satz 6.16. *Sei X eine polnische Gruppe. Dann existiert ein polnischer Raum (Y, d), sodass X isomorph zu $\operatorname{Iso}(Y)$ ist.*

Beweis. Dass der oben definierte Raum Y polnisch ist, folgt direkt aus der Tatsache, dass Z polnisch ist. Für $\phi \in X$ setzen wir

$$\phi^Y(z) := \begin{cases} \phi^Z(z) & \text{falls } z \in Z \\ y_i & \text{falls } \exists i \in \mathbb{N}^+ \text{ sodass } z = y_i \end{cases}$$

und zeigen, dass die Abbildung $X \to \operatorname{Iso}(Y) : \phi \mapsto \phi^Y$ ein Isomorphismus ist.

Da $\phi \mapsto \phi^*$ injektiv und stetig ist, besitzt auch $\phi \mapsto \phi^Y$ diese Eigenschaften. $\phi \mapsto \phi^Y$ ist ein Gruppenhomomorphismus von X auf $\operatorname{Iso}(Y)$. Aus einer Adaption des Satzes der offenen Abbildung für topologische Gruppen wie zum Beispiel in [4, Theorem 2.5] folgt nun aus der Surjektivität bereits, dass die Abbildung ein Homöomorphismus ist.

Sei also $\phi \in \operatorname{Iso}(Y)$ beliebig. Aufgrund der Definition der Metrik d können wir die Elemente aus Z charakterisieren:

$$Z = \{y \in Y \mid \exists \tilde{y} \in Y \text{ sodass } 0 < d(y, \tilde{y}) \leq 1\}.$$

Da ϕ eine Isometrie ist, folgt $\phi(Z) = Z$. Außerdem muss ϕ die y_i punktweise fest lassen, da sonst wegen

$$(i+2)+d(z, F_i) = d(y_i, z) = d(\phi(y_i), \phi(z)) = d(y_j, \phi(z)) = (j+2)+d(\phi(z), F_i)$$

aufgrund von $d(z, F_i), d(\phi(z), F_i) < 1$ nur $i = j$ möglich ist. Mit dieser Erkenntnis können wir auch die Elemente aus F_i charakterisieren durch $F_i = \{z \in Z \mid d(z, y_i) = i + 2\}$ und erhalten $\phi(F_i) = F_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 6.15 finden wir ein $\psi \in X$, für das $\phi\big|_Z = \psi^Z$. Damit ist $\phi = \psi^Y$ erfüllt und die Surjektivität der Abbildung gezeigt.

□

7 Darstellbarkeit kompakter Gruppen als Isometriegruppen

Wir wollen den Beweis aus dem vorigen Kapitel ein wenig abändern, um damit die analoge Aussage für kompakte Gruppen zeigen zu können: Jede kompakte metrisierbare Gruppe kann bis auf Isomorphie dargestellt werden als Isometriegruppe eines kompakten, metrischen Raumes.

Sei X eine kompakte metrisierbare Gruppe und d eine – wiederum nach dem Satz von Birkhoff-Kakutani 6.1 existierende – linksinvariante Metrik auf X mit $\operatorname{diam}(X) \leq 1$. Sei in den Bezeichnungen des vorangegangen Abschnitts $\operatorname{Iso}(X) \setminus X \subseteq \bigcup_{i \geq 1} V_{\psi_i}$. Wie vorher definieren wir spezielle Katetov-Funktionen:

$$f_i(x) := \min\{\min_{1 \leq k \leq 3}\{1 + \frac{1}{2^i} + d(x, x_k^i) + 2(k-1)\epsilon_i, 1 + \frac{1}{2^i} + 6\epsilon_i\}$$
$$g_i(x) := \min\{\min_{1 \leq k \leq 3}\{1 + \frac{1}{2^i} + d(x, \psi_i(x_k^i)) + 2(k-1)\epsilon_i, 1 + \frac{1}{2^i} + 6\epsilon_i\}$$

Dass Lemma 6.14 auch für diese Definition der f_i, g_i gilt, kann analog gezeigt werden. Wir betrachten nun die folgende Teilmenge von $E(X)$:

$$\begin{aligned} Y := \{f \in E(X) \mid \exists n \geq 1, x_1 \,..\, x_n \in X \text{ sodass für alle } x \in X :\\ f(x) = \min\{\min_{1 \leq k \leq n}\{1 + 2(k-1)\epsilon + d(x, x_k), 1 + 2n\epsilon\}\}, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei $\epsilon := \frac{1}{2n} \min\{d(x_k, x_l) \mid 1 \leq k < l \leq n\}$. Für $n = 1$ erhalten wir die konstante Einsfunktion. Es gilt:

Lemma 7.1. *Y ist kompakt.*

Beweis. Sei $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in Y mit zugehörigen $x_1^m \,..\, x_{n_m}^m$. Wir unterscheiden zwei Fälle: Entweder gibt es eine Teilfolge $(f_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$, für die $\lim_{k \to \infty} n_k = \infty$ ist, oder die Folge der $(n_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Da aus der Kompaktheit die Totalbeschränktheit von X folgt, muss im ersten Fall $\min_{1 \leq i < j \leq n_{m_k}} d(x_i^{m_k}, x_j^{m_k}) \to 0$ gelten, da sonst keine Überdeckung mit $\frac{\delta}{2}$-Kugeln möglich wäre für $\delta := \lim_{k \to \infty} \min_{1 \leq i < j \leq n_k} d(x_i^{m_k}, x_j^{m_k})$. Wir erhalten $\lim_{k \to \infty} f_{m_k} \equiv 1 \in Y$.

Im zweiten Fall wählen wir eine Teilfolge, die $n_{m_k} = n$ für alle k und ein festes $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Falls $\min_{1 \leq i < j \leq n} d(x_i^{m_k}, x_j^{m_k}) \to 0$, gibt es wie im ersten Fall eine gegen die Einsfunktion konvergente Teilfolge. Gelte also $\min_{1 \leq i < j \leq n} d(x_i^{m_k}, x_j^{m_k}) \geq \delta > 0$ für alle k. Da X kompakt ist, finden wir eine konvergente Teilfolge für jede Stützstelle, o.B.d.A. $x_1^{m_k} \to x_1$ .. $x_n^{m_k} \to x_n$ und daher auch $\min_{1\leq i<j\leq n} d(x_i^{m_k}, x_j^{m_k}) \to \min_{1\leq i<j\leq n} d(x_i, x_j)$. Die Funktion, die sich aus diesen Stützstellen gemäß (3) ergibt, ist der Grenzwert der f_{m_k} bezüglich der Supremumsmetrik. □

Als nächstes setzen wir $F_i := \{\phi^*(f_i) \mid \phi \in X\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und betrachten $Z := X \cup Y \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$.

Lemma 7.2. *Z ist kompakt.*

Beweis. Für die Kompaktheit von Z reicht es zu zeigen, dass jede Folge von Elementen aus $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$ eine in Z konvergente Teilfolge besitzt. Sei $\phi_n^*(f_{i_n})$ eine solche Folge. Aus der Kompaktheit von X folgt die Existenz einer konvergenten Teilfolge der ϕ_n, o.B.d.A. $\phi_n \to \phi$ und daher auch $\phi_n^* \to \phi^*$. Wir benutzen jetzt die spezielle Konstruktion unserer f_{i_n}: Diese lassen sich nämlich darstellen als $f_{i_n} = \frac{1}{2^{i_n}} + y_n$ mit einem geeigneten $y_n \in Y$. Da Y nach dem vorigen Lemma kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge der y_n. Mit $\frac{1}{2^{i_n}} \to 0$ ist die Aussage gezeigt. □

Diesmal müssen wir Z nur um ein einziges Element ergänzen. Wähle dafür ein k, das kein Element aus Z ist, und erweitere die Metrik auf der kompakten Menge $K := \{k\} \cup Z$ durch $d(k, z) := 2\mathrm{diam}(Z) + d(z, X)$ für alle $z \in Z$. Wir erhalten nun:

Satz 7.3. *Sei X eine kompakte metrisierbare Gruppe. Dann existiert ein kompakter metrischer Raum K, sodass X isomorph zu $\mathrm{Iso}(K)$ ist.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz 6.16 bleibt nur mehr die Surjektivität der Abbildung $\phi \mapsto \phi^K$ zu zeigen. Sei $\phi \in \mathrm{Iso}(K)$ beliebig gewählt. Notwendigerweise muss $\phi(k) = k$ erfüllt sein, da sonst wegen $d(k, z) := 2\mathrm{diam}(Z) + d(z, X)$ ein Widerspruch erfolgt. Wir erhalten $\phi(Z) = Z$. Wir können X charakterisieren durch $X = \{z \in Z \mid d(z, k) = 2\mathrm{diam}(Z)\}$, weshalb $\phi(X) = X$. Außerdem bemerken wir $F_i = \{z \in Z \mid d(z, X) = 1 + \frac{1}{2^i}\}$, da gemäß Lemma 6.7 und der Darstellung von f_i wie im Beweis von Lemma 7.2 gilt:

$$d(f_i, X) = \inf_{x\in X} d(f_i, x) = \inf_{x\in X} f_i(x) = \inf_{x\in X} \frac{1}{2^i} + y(x) = \frac{1}{2^i} + 1.$$

Aus der für dieses Kapitel adaptierten Version von Lemma 6.14 erhalten wir $\phi\big|_X \notin V_{\psi_i}$ für alle i und daher $\phi\big|_X \in X$. □

8 Darstellbarkeit eigentlicher polnischer Gruppen als Isometriegruppen

Im letzten Kapitel setzen wir zusätzlich voraus, dass unsere polnische Gruppe X eigentlich ist. Auch hier finden wir einen eigentlichen polnischen Raum, zu dessen Isometriegruppe X isomorph ist. Für den Beweis werden wir konkrete Teilmengen des Raumes der Katetov-Funktionen benötigen.

Definition 8.1. Bezeichne für alle $n \geq 1$ die Menge $E_n'(X)$ als die Menge aller Funktionen f von X nach $\mathbb{R}$, für die es $x_1 \,..\, x_n \in X$ gibt mit

(i) $f(x_i) + f(x_j) \geq d(x_i, x_j)$ für $i, j \in \{1 \,..\, n\}$,

(ii) $|f(x_i) - f(x_j)| \leq \frac{1}{3} d(x_i, x_j)$ für $i, j \in \{1 \,..\, n\}$ und

(iii) $f(x) = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \{f(x_i) + d(x, x_i)\}$ für $x \in X$.

Bemerkung 8.2. Es gilt $E_n'(X) \subseteq E(X)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Um dies einzusehen, zeigen wir $|f(x) - d(x, y)| \leq f(y)$ für alle $x, y \in X$. Die Ungleichung folgt für $f(x) \geq d(x, y)$ sofort aus $d(x, x_i) - d(x, y) \leq d(y, x_i)$ für alle i. Mit $f(x) = f(x_{i_0}) + d(x, x_{i_0})$ erhalten wir im umgekehrten Fall $|f(x) - d(x, y)| = d(x, y) - f(x_{i_0}) - d(x, x_{i_0}) \leq d(y, x_{i_0}) - f(x_{i_0})$. Falls es nun ein j gäbe mit $d(y, x_{i_0}) - f(x_{i_0}) > f(x_j) + d(y, x_j)$, so bekämen wir $f(x_j) + f(x_{i_0}) < d(y, x_{i_0}) - d(y, x_j) \leq d(x_{i_0}, x_j)$ im Widerspruch zu Bedingung (i) aus Definition 8.1. Somit gilt auch hier $|f(x) - d(x, y)| \leq f(y)$, was laut Lemma 6.7 äquivalent dazu ist, dass $f \in E(X)$.

Wichtig für die Hauptaussage dieses Abschnitts ist die folgende Eigenschaft der Menge $E_n'(X)$:

Lemma 8.3. *Wenn X eigentlich ist, so ist auch $E_n'(X)$ eigentlich.*

Beweis. Sei $x \in X$ beliebig. Es reicht, dass $A_r^x := \{f \in E_n' \mid f(x) \leq r\}$ kompakt ist für beliebiges $r > 0$, da damit bereits die Kompaktheit aller abgeschlossenen r-Kugeln $K_r(f) = \{g \in E_n' \mid d(f, g) \leq r\}$ als abgeschlossene Teilmengen von $\bigcap\limits_{x \in X} A_{r+f(x)}^x$ folgt.

Betrachte ein $f \in A_r^x$ mit zugehörigen $x_1 \,..\, x_n$. Wir stellen fest:

- Für $i, j \in \{1..n\}$ gilt wegen der Bedingungen (i) und (ii) aus Definition 8.1, dass $d(x_i, x_j) \leq f(x_i) + f(x_j) \leq 2f(x_i) + \frac{1}{3} d(x_i, x_j)$, und wir erhalten
$$\frac{1}{3} d(x_i, x_j) \leq \min\{f(x_i), f(x_j)\}. \tag{4}$$
- Wähle jenes $i_0 \in \{1..n\}$, das $f(x) = f(x_{i_0}) + d(x, x_{i_0})$ erfüllt. Da $f \geq 0$, gilt:
$$d(x, x_{i_0}) \leq d(x, x_{i_0}) + f(x_{i_0}) = f(x) \leq r.$$
- Mit (4) ergibt sich für alle j:
$$\frac{1}{3} d(x_{i_0}, x_j) \leq \min\{f(x_{i_0}), f(x_j)\} \leq f(x_{i_0}) \leq$$
$$\leq f(x_{i_0}) + d(x, x_{i_0}) = f(x) \leq r.$$

Insgesamt erhalten wir $\max_{1 \leq j \leq n} d(x, x_j) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \{d(x, x_{i_0}) + d(x_{i_0}, x_j)\} \leq 4r$.

Da X eigentlich ist, ist $K_{4r}(x)$ kompakt. Für jede Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Funktionen in A_r^x besitzen die Folgen der einzelnen Stützstellen daher eine konvergente Teilfolge. Die aus diesen Stützstellen resultierende Funktion ist der gesuchte Grenzwert einer Teilfolge von $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$. □

Lemma 8.4. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $f : X \mapsto \mathbb{R}$ und $x_1, x_2 \in X$, sodass*

(i) $f(x_1) + f(x_2) > d(x_1, x_2)$,

(ii) $0 < |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{3} d(x_1, x_2)$ *und*

(iii) $f(x) = \min\{f(x_1) + d(x, x_1), f(x_2) + d(x, x_2)\}$ für $x \in X$.

Sei $\delta > 0$ hinreichend klein. Wenn die Mengen $\{x \in X \mid d(x, x_1) \leq \delta\}$ und $\{x \in X \mid d(x, x_2) \leq \delta\}$ Mengen der Mächtigkeit $k \geq 1$ an Punkten enthalten, die von einander einen Abstand $\geq \delta$ haben, dann enthält die Menge $\{h \in E_{1+k}'(X) \mid \min h = \min f$ und $d(h, f) \leq \delta\}$ eine solche Menge der Mächtigkeit 2^k.

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. $f(x_2) < f(x_1)$ an und erhalten aus Bedingung (ii), dass $f(x_1) - f(x_2) < \frac{1}{3} d(x_1, x_2)$. Seien $y_1 \mathinner{..} y_k \in U_\delta(x)$ mit $d(y_i, y_j) \geq \delta$ für $i \neq j$. Für $\emptyset \neq I \subseteq \{1 \mathinner{..} k\}$ definiere:

$$h_I(x) := \min\{\min_{i \in I}\{f(x_1) + d(x, y_i)\}, f(x_2) + d(x, x_2)\} \text{ und}$$
$$h_\emptyset(x) := \min\{f(x_1) + d(x, x_1) - \delta, f(x_2) + d(x, x_2)\}$$

Wir zeigen nun:

(A) $d(h_I, h_J) \geq \delta$ für $I \neq J$,

(B) $\min h_I = \min f$ für alle I,

(C) $d(h_I, f) \leq \delta$ und

(D) $h_I \in E_{1+k}'$ für alle I.

Für den Beweis von (A) nehmen wir ein $i \in I \triangle J$, o.B.d.A. $i \in I \setminus J$.

- Für alle $j \neq i$ gilt: $f(x_1) + d(y_i, y_j) \geq f(x_1) + \delta$.
- Falls $\delta < \frac{1}{3} d(x_1, x_2)$, ergibt sich:

$$f(x_2) + d(y_i, x_2) \geq f(x_2) + d(x_1, x_2) - d(x_1, y_i) \geq$$
$$\geq f(x_1) + \frac{2}{3} d(x_1, x_2) - \delta \geq f(x_1) + \delta.$$

Daher erhalten wir $h_I(y_i) = \min\{f(x_1), f(x_2) + d(y_i, x_2)\} = f(x_1)$ sowie $h_J(y_i) \geq f(x_1) + \delta$ und daraus $d(h_I, h_J) \geq \delta$. Auch für $I = \emptyset$ und $J \neq \emptyset$ ist (A) wegen $h_\emptyset(x_1) = f(x_1) - \delta$ und $h_J(x_1) \geq f(x_1)$ erfüllt.

Für kleines δ ist $\min h_\emptyset = f(x_2)$. Somit ergibt sich für alle Indexmengen I sofort $\min h_I = \min f = f(x_2)$.

Für (C) verwenden wir die Ungleichung aus dem Beweis von Lemma 6.11. Für nichtleeres I bekommen wir daraus

$|h_I(x) - f(x)| \leq \max\{\max_{i \in I} |d(x, y_i) - d(x, x_1)|, 0\} \leq \max_{i \in I} d(y_i, x_1) \leq \delta$ und analog

$|h_\emptyset(x) - f(x)| \leq \max\{\delta, 0\} = 0.$

Hiermit folgt $d(h_I, f) \leq \delta$.

Der gemeinsame Träger aller h_I ist offensichtlich $\{x_2\} \cup \{y_i \mid 1 \leq i \leq k\}$. Wir erhalten Bedingung (D) aus den Anforderungen an f, da für kleines δ für alle I und alle $i \in I$ gilt: $h_I(y_i) = f(x_1)$ und $h_I(x_2) = f(x_2)$. □

Bemerkung 8.5. Offensichtlich sind Funktionen, die die Voraussetzungen von Lemma 8.4 erfüllen, Elemente aus $E_2'(X)$.

Wir gehen nun analog zu den Kapiteln 6 und 7 vor. Sei X eine eigentliche polnische Gruppe mit $\operatorname{diam}(X) \leq 1$. Für alle $\psi \in \operatorname{Iso}(X) \setminus X$ definieren wir die Menge $V_{\psi,n}$ sowie x_1, x_2 wie in Lemma 6.4. Für $M \geq \frac{1}{2}d(x_1, x_2)$ betrachten wir die folgenden Funktionen:

$$f_M(x) := \min\{M + d(x, x_1), M + \frac{1}{4}d(x_1, x_2) + d(x, x_2)\}$$
$$h_M(x) := \min\{M + d(x, \psi(x_1)), M + \frac{1}{4}d(x_1, x_2) + d(x, \psi(x_2))\}$$

Offensichtlich ist $\min f_M = M$. Außerdem erfüllt f_M die Voraussetzungen von Lemma 8.4:

(i) Aufgrund von $f_M(x_1) = M$ und $f_M(x_2) = M + \frac{1}{4}d(x_1, x_2)$ erhalten wir $f(x_1) + f(x_2) = 2M + \frac{1}{4}d(x_1, x_2) > d(x_1, x_2)$ nach Wahl von M,

(ii) $0 < |f(x_1) - f(x_2)| = \frac{1}{4}d(x_1, x_2) < \frac{1}{3}d(x_1, x_2)$ und

(iii) $f(x) = \min\{f(x_1) + d(x, x_1), f(x_2) + d(x, x_2)\}$.

Lemma 8.6. *Die Menge* $V_\psi := \{\phi \in \operatorname{Iso}(X) \mid d(\phi^*(f_M), h_M) < \epsilon\}$ *ist für hinreichend kleines* $\epsilon > 0$ *eine Teilmenge von* $V_{\psi,n}$.

Beweis. Die beiden Funktionen $\phi^*(f_M)$ und h_M haben den gemeinsamen Träger $S := \{\phi(x_1), \phi(x_2), \psi(x_1), \psi(x_2)\}$. Nach Lemma 6.11 gilt daher

$$d(\phi^*(f_M), h_M) = \max_{s \in S} |\phi^*(f_M)(s) - h_M(s)| = \max_{s \in S} |f_M(\phi^{-1}(s)) - h_M(s)|.$$

Durch Betrachtung der Funktionsauswertungen an diesen vier Punkten ergibt sich die geforderte Aussage für hinreichend klein gewähltes ϵ. □

Da $\text{Iso}(X) \setminus X$ nach Proposition 2.12 Lindelöf ist, erhalten wir unter Verwendung der f_M, h_M mit aufsteigendem M:

Korollar 8.7. *Für alle $i \in \mathbb{N}^+$ existieren ein $\epsilon_i > 0$ und Funktionen $f_i, h_i \in E(X)$, sodass*

(a) $\text{Iso}(X) \setminus X \subseteq \bigcup_{i \geq 1} \{\phi \in \text{Iso}(X) \mid d(\phi^*(f_i), h_i) < \frac{\epsilon_i}{2}\}$,

(b) $\{\phi \in \text{Iso}(X) \mid d(\phi^*(f_i), h_i) < \epsilon_i\}$ *ist disjunkt zu X für jedes $i \in \mathbb{N}$,*

(c) $0 < \min f_i < \min f_{i+1} \to \infty$ *für $i \to \infty$ und*

(d) f_i *erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 8.4.*

Nun wählen wir für alle $i \geq 1$ ein $\delta_i > 0$ mit:

(i) $\delta_i < \frac{\epsilon_i}{2}$,

(ii) $\delta_i < \frac{1}{2} \min_{i \in \mathbb{N}} \{\min f_i\}$ und

(iii) δ_i ist hinreichend klein für die Aussage von Lemma 8.4.

Lemma 8.8. *Für alle $i \geq 1$ existiert ein $k_i \in \mathbb{N}^+$, sodass k_i die maximale Anzahl an Elementen in einer abgeschlossenen δ_i-Kugel in X ist, die von einander einen Abstand je $\geq \delta_i$ haben.*

Beweis. Als Erstes bemerken wir, dass die k_i sicherlich endlich sein müssen. Da in einem eigentlichen Raum abgeschlossene Kugeln kompakt sind, muss eine Folge von Elementen in einer abgeschlossenen δ_i-Kugel nämlich eine konvergente Teilfolge besitzen. Da k_i nur höchstens so groß sein kann wie die aufgrund der Totalbeschränktheit endliche Anzahl von $\frac{\delta_i}{3}$-Kugeln, die eine δ_i-Kugel überdecken, finden wir ein solches maximales k_i. □

Lemma 8.4 garantiert uns die Existenz 2^{k_i}-vieler Funktionen h_i^s mit:

(A) $d(h_i^s, h_i^t) \geq \delta_i$ für $s \neq t$,

(B) $\min h_i^s = \min f_i = M_i$,

(C) $d(h_i^s, f_i) \leq \delta_i$ und

(D) $h_i^s \in E'_{1+k_i}(X)$,

Wir definieren:

$$Z_0 := X$$
$$Z_i := \{\phi^*(f_i) \mid \phi \in X\} \cup \{\phi^*(h_i^s) \mid 1 \leq s \leq 2^{k_i}, \phi \in X\} \text{ für } i \geq 1 \text{ und}$$
$$Z := \overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Z_i}.$$

Bemerke, dass wegen (d) und (D) $Z_i \subseteq E'_{1+k_i}$ für jedes i gilt. Da abgeschlossene Kugeln in Z aufgrund von (c) und (B) nicht in beliebig vielen Z_i liegen können, erhalten wir mit Lemma 8.3, dass Z ein eigentlicher Raum ist. Wie in den vorigen Kapiteln sieht man auch, dass Z polnisch ist.

Lemma 8.9. *Alle $\psi \in \mathrm{Iso}(Z)$ erfüllen für alle $i \geq 1$: $\psi(Z_i) \cap X = \emptyset$.*

Beweis. Angenommen, es gäbe ein i mit $\phi(Z_i) \cap X \neq \emptyset$. Dann müsste entweder $\psi(\phi^*(f_i)) \in X$ für ein $\phi \in X$ oder $\psi(\phi^*(h_i^s)) \in X$ für ein $\phi \in X$ und ein $s \leq 2^{k_i}$. Da ϕ^* eine Isometrie ist, gilt nach (C) $d(\phi^*(f_i), \phi^*(h_i^s)) \leq \delta_i$. Da gemäß Proposition 6.7 für alle $z \in Z_j$ mit $j \geq 1$ und alle $x \in X$ die Metrik definiert ist als $d(z, x) = z(x)$, erhalten wir aus (B), dass $\mathrm{dist}(Z_j, X) \geq M_i > \delta_i$. Somit müssen sowohl $\psi(\phi^*(f_i))$ als auch $\psi(\phi^*(h_i^s))$ – und zwar für alle $1 \leq s \leq 2^{k_i}$ – in X liegen. Damit hätten wir aber in der abgeschlossenen δ_i-Kugel in X um $\psi(\phi^*(f_i))$ 2^{k_i}-viele Elemente gefunden, die nach (A) voneinander mindestens δ_i weit entfernt sind. Dies ist ein Widerspruch zur maximalen Wahl von k_i. □

Wie in den vorigen Kapiteln folgt schließlich der Darstellungssatz für eigentliche polnische Gruppen:

Satz 8.10. *Sei X eine eigentliche polnische Gruppe. Dann existiert ein eigentlicher polnischer Raum Z, sodass X isomorph zu $\mathrm{Iso}(Z)$ ist.*

Beweis. Wiederum beschränken wir uns darauf, die Surjektivität der Abbildung $\phi \mapsto \phi^*\big|_Z$ zu zeigen. Sei $\psi \in \mathrm{Iso}(Z)$. Lemma 8.9 angewandt auf ψ und ψ^{-1} gibt uns $\psi(X) = X$. Setzen wir $\phi := \psi\big|_X$, so gilt wegen Bemerkung 6.13, dass $\phi^*\big|_Z = \psi$. Wegen (c) und (B) gilt $\mathrm{dist}(Z_i, X) \neq \mathrm{dist}(Z_j, X)$ für $i \neq j$ und daher $\phi^*(Z_i) = Z_i$ für jedes i. Wegen $f_i \in Z_i$ muss also auch $\phi^*(f_i) \in Z_i$. Daher finden wir ein $\chi \in X$, sodass $d(\phi^*(f_i), \chi^*(f_i)) \leq \delta_i$. Da wir $\delta_i < \frac{\epsilon_i}{2}$ gewählt haben und wegen (b) $d(\chi^*(f_i), h_i) \geq \epsilon_i$ ist, gilt mit der Dreiecksungleichung $d(\phi^*(f_i), h_i) \geq d(\chi^*(f_i), h_i) - d(\chi^*(f_i), \phi^*(f_i)) \geq \epsilon_i - \frac{\epsilon_i}{2} = \frac{\epsilon_i}{2}$. Da dies für jedes i gilt, erhalten wir unter Verwendung von (a), dass $\phi \in X$. □

Literatur

[1] Su Gao und Alexander S. Kechris. *On the Classification of Polish Metric Spaces Up to Isometry*. Bd. 161. 766. Memoirs of the American Mathematical Society, 2003.

[2] Marcel Erné. *Topologie*. 1984. URL: http://www2.iazd.uni-hannover.de/~erne/Topologie/Dateien/topologie_.pdf (besucht am 01. 02. 2021).

[3] Julien Melleray. *Compact metrizable groups are isometry groups of compact metric spaces*. Bd. 136. 4. Proceedings of the American Mathematical Society, 2008, S. 1451–1455.

[4] Karl H. Hofmann und Sidney A. Morris. *Open mapping theorem for topological groups*. Bd. 31. Topology Proceedings, 2007, S. 533–551.

[5] Maciej Malicki und Slawomir Solecki. *Isometry groups of separable metric spaces*. Bd. 146. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 2008.

[6] Terrence Tao. *The Birkhoff-Kakutani Theorem*. 2011. URL: https://terrytao.wordpress.com/2011/05/17/the-birkhoff-kakutani-theorem/ (besucht am 01. 02. 2021).