TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

SEMINARARBEIT

Charakterisierung von reellen Banachalgebren

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dr. Harald Woracek

durch

Paul Ellinger
Matrikelnummer: 11828303
Einsiedlergasse 34/12-13
1050 Wien

Wien, am 23. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 1

2 Grundlegende Definitionen und Sätze 2

3 Charakterisierung von reellen Banachalgebren 6

4 Der Satz von Gelfand-Naimark 10

Literatur 12

1 Einleitung

In dieser Seminararbeit wird ein einfach zu überprüfendes Kriterium für die Charakterisierung von reellen Banachalgebren bewiesen. Dafür werden Mittel der Funktionalanalysis verwendet. Ein ähnliches Kriterium, der Satz von Arens, welcher in seiner ursprünglichen Version mit den Mitteln der komplexen Analysis bewiesen wurde, wird ebenfalls folgen.

In Kapitel 2 werden grundlegende Begriffe eingeführt und einige Sätze zur Wiederholung zitiert. Im Kapitel 3 beschäftigen wir uns mit dem bereits erwähnten Kriterium und wird es beweisen. Im letzten Kapitel präsentieren wir eine Verallgemeinerung auf komplexe Banachalgebren mit einer Involution da.

Diese Arbeit bezieht sich, wenn nicht anders gekennzeichnet auf das Paper „A Characterization of Real C(K)-Spaces“ von F. Albiac und N.J. Kalton, siehe [1].

2 Grundlegende Definitionen und Sätze

Bevor wir uns mit der Charakterisierung von Banachalgebren beschäftigen, wollen wir einige grundlegende Begriffe und Sätze wiederholen.

Definition 2.1. Sei $\mathcal{A}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Ist $\mathcal{A}$ versehen mit einer bilinearen Abbildung

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ (a,b) \mapsto ab,$$

die assoziativ ist, also

$$(ab)c = a(bc) \text{ für alle } a,b,c \in \mathcal{A},$$

so nennt man $\mathcal{A}$ eine *Algebra*. Ein Element $e \in \mathcal{A}$ heißt *Einselement* der Algebra $\mathcal{A}$, falls

$$ae = ea = a \text{ für alle } a \in \mathcal{A}.$$

Wenn $ab = ba$ für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt, so sprechen wir von einer *kommutativen Algebra*. Wenn des weiteren $\mathcal{A}$ mit einer Norm $\|.\|$ derart versehen ist, dass

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \text{ für alle } a,b \in \mathcal{A}$$

gilt, so nennen wir $(\mathcal{A}, \|.\|)$ eine *normierte Algebra*. Gilt außerdem, dass $(\mathcal{A}, \|.\|)$ ein Banachraum ist, so spricht man von einer *Banachalgebra*. Ist $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $e \in \mathcal{A}$ ein Einselement mit $\|e\| = 1$, heißt e *normiert*. In diesem Fall spricht man von einer *Banachalgebra mit Einselemnt*.

Satz 2.2 (Stone-Weierstrass)**.** *Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra stetig reeller Funktionen auf einem kompakten Raum K, die punktetrennend ist und die konstanten Funktionen enthält, dann liegt $\mathcal{A}$ dicht in $\mathcal{C}(K)$.*

Für den Beweis verweisen wir auf [2, Satz 1.5.2].

Satz 2.3 (Hahn-Banach)**.** *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra, und seien $A, B \subseteq \mathcal{A}$ disjunkt, nichtleer und konvex. Ist A zusätzlich offen, dann existierten $f \in \mathcal{A}^*$ stetig und $\gamma \in \mathbb{R}$, sodass*

$$Re(f(a)) < \gamma \leq Re(f(b)) \qquad \text{für alle } a \in A,\ b \in B.$$

Für den Beweis verweisen wir auf [3, Satz 5.2.5].

Definition 2.4. Ein Punkt x einer konvexen Teilmenge C eines Vektorraums heißt *Extremalpunkt*, wenn $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ mit $x_1, x_2 \in C$ und $0 < \lambda < 1$ impliziert, dass $x = x_1 = x_2$. Mit $\partial_e C$ bezeichne die Menge aller Extremalpunkte von C.

Satz 2.5 (Krein-Milman)**.** *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachraum und $K \subset \mathcal{A}$ nichtleere, kompakte und konvexe Teilmenge von $\mathcal{A}$. Dann ist K die abgeschlossene konvexe Hülle von $\partial_e K$. Insbesondere ist $\partial_e K$ nichtleer.*

Für den Beweis verweisen wir auf [3, Satz 5.9.2].

Definition 2.6. Sei $\mathcal{A}$ ein normierter Vektorraum. Wir sagen ein Netz $(f_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{A}^*$ konvergiert schwach* gegen ein $f \in \mathcal{A}$ genau dann wenn $\lim_{i\in I} f_i(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt. Mithilfe dieses Konvergenzbegriffs lässt sich eine Topologie auf $\mathcal{A}^*$ definieren, wobei $\mathcal{A}^*$ den Dualraum von $\mathcal{A}$ bezeichnet. Diese nennen wir *schwach*-Topologie*.

Für weitere Details zur schwach*-Topologie verweisen wir auf [3, Kapitel 5.4].

Definition 2.7. Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative reelle Banachalgebra mit Einselement. Der *Zustandsraum* $\mathcal{S}$ von $\mathcal{A}$ wird definiert als

$$\mathcal{S} := \{\phi \in \mathcal{A}^* : \|\phi\| = \phi(e) = 1\}.$$

Die Elemente von $\mathcal{S}$ heißen *Zustände*.

Lemma 2.8. *Für $\mathcal{S}$ gelten folgende Eigenschaften:*

1. $\mathcal{S} \neq \emptyset$,
2. *$\mathcal{S}$ ist kompakt in der schwach*-Topologie,*
3. *$\mathcal{S}$ ist konvex.*

Beweis. Für den Beweis werden wir die Punkte 1,2 und 3 in dieser Reihenfolge beweisen.

1.) Nach dem Satz von Hahn-Banach ist $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

2.) Der Satz von Banach-Alaoglu besagt, dass die abgeschlossene Einheitskugel $\mathcal{B}_{\mathcal{A}^*}$ als Teilmenge des Dualraums $\mathcal{A}^*$ eines normierten Vektorraums $\mathcal{A}$ schwach-*-kompakt ist. Aus der Definition von $\mathcal{S}$ folgt, dass $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{A}^*}$. Da die schwach-*-Topologie Hausdorff ist, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{S}$ abgeschlossen in der schwach-*-Topologie ist. Dafür betrachten wir ein konvergentes Netz $(f_i)_{i\in I} \subset \mathcal{S}$ und zeigen, dass $\lim_{i\in I} f_i \in \mathcal{S}$ ist. Betrachte den Grenzwert $f(x) := \lim_{i\in I} f_i(x)$, bezüglich der schwach*-Konvergenz. Da $f_i \in \mathcal{S}$ für alle $i \in I$ gilt:

$$f(e) = \lim_{i\in I} f_i(e) = \lim_{i\in I} 1 = 1.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\|f\| \leq 1$. Ähnlich zum vorigen Schritt folgt

$$|f(x)| = \lim_{i\in I} |f_i(x)| \leq 1 \text{ für alle } x \in \mathcal{A} \text{ mit } \|x\| = 1.$$

Damit folgt also, dass $f \in \mathcal{S}$. Also ist $\mathcal{S}$ eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $B_{\mathcal{A}_*}$.

3.) Für die Konvexität von $\mathcal{S}$ seien $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}$ und $\lambda \in (0,1)$. Es gilt:

1. $\lambda\phi_1(e) + (1-\lambda)\phi_2(e) = \lambda + 1 - \lambda = 1$
2. $\|\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2\| \leq \lambda\|\phi_1\| + \lambda\|\phi_2\| = 1.$

Und damit die Konvexität von $\mathcal{S}$. $\square$

Definition 2.9. Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative reelle Banachalgebra mit Einselement. Wir bezeichnen mit $\mathcal{A}_+$ den Norm-Abschluss der Menge aller Quadrate von $\mathcal{A}$, das heißt $\mathcal{A}_+ := \overline{\{a^2 : a \in \mathcal{A}\}}$.

Wenn $\mathcal{A} = \mathcal{C}(K)$, dann gilt $\mathcal{A}_+ = \{f : f \geq 0\}$.

Lemma 2.10. *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative reelle Banachalgebra. Dann hat $\mathcal{A}$ folgende Eigenschaften:*

1. *$ab \in \mathcal{A}_+$ für alle $a, b \in \mathcal{A}_+$,*
2. *$\lambda x \in \mathcal{A}_+$ für alle $a \in \mathcal{A}_+$ und $\lambda \geq 0$.*

Beweis. Für den Beweis des Lemmas werden wir zuerst den ersten Punkt beweisen.

1.) Seien $a, b \in \mathcal{A}_+$. Per definitionem gibt es $a_n, b_n \in \mathcal{A}$, so dass

$$\|a - a_n^2\|, \|b - b_n^2\| \to 0.$$

Als Kandidat für eine Folge die gegen ab konvergiert, betrachte $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann gilt wegen der Kommutativität von $\mathcal{A}$:

$$\|ab - (a_n b_n)^2\| = \|ab - a_n^2 b_n^2\| = \|ab - ab_n^2 + ab_n^2 - a_n^2 b_n^2\| \leq \|a(b - b_n^2)\| + \|(a - a_n^2)b_n^2\| \to 0.$$

Also sehen wir, dass unser Kandidat tatsächlich gegen ab konvergiert.

2.) Seien $a \in \mathcal{A}_+$ und $\lambda \geq 0$. Wie schon im ersten Schritt existiert $a_n \in \mathcal{A}$ sodass a_n^2 in der Norm gegen a konvergiert. Außerdem ist $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{R}$. Daraus folgt also, dass $\sqrt{\lambda} a_n \in \mathcal{A}$ und $\|\lambda a - \lambda a_n^2\| \to 0$. Also haben wir eine Folge gefunden, deren Quadrat gegen λa konvergiert. $\square$

Proposition 2.11. *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative reelle Banachalgebra mit Einselement e. Dann erfüllt $\mathcal{A}_+$ die folgenden beiden Eigenschaften:*

1. *$\forall a \in \mathcal{A}$ mit $\|a\| \leq 1 : e + a \in \mathcal{A}_+$*
2. *$\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_+$.*

Beweis. Für den Beweis starten wir mit dem ersten Punkt.

1.) Für den Beweis betrachten wir zuerst den Fall, dass $\|a\| < 1$. Dann ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} a^k, \text{ wobei } \binom{1/2}{k} := \begin{cases} \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{k-1} (1/2 - i), & n > 0 \\ 1, & n = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

absolut konvergent, da

$$\lim_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{1/2 - k}{k+1} \right| \|a\| \to \|a\| < 1.$$

Zusammen mit der Vollständigkeit von $\mathcal{A}$ rechtfertigt das die Definition

$$b := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} a^k \in \mathcal{A}.$$

Damit sind wir fast dort wo wir hin wollen. Unser Ziel ist es, $e + a$ als Quadrat eines Elements aus $\mathcal{A}$ darzustellen. Dafür haben wir $(e+a)^{1/2}$ definiert und werden uns jetzt das Quadrat dieses Elements ausrechnen. Zunächst sei $t \in [0, 1)$. Es gilt

$$(1 + t) = (1 + t)^{1/2}(1 + t)^{1/2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} t^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} t^k \right). \tag{2.2}$$

Wegen der absoluten Konvergenz von (2.1), gilt

$$(2.2) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \sum_{n+m=k} \binom{1/2}{n} \binom{1/2}{m} \tag{2.3}$$

Schließlich liefert der Koeffizientenvergleich von (2.3) mit $(1 + t)$, dass für $m, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n+m=k} \binom{1/2}{n} \binom{1/2}{m} = \begin{cases} 1, & k = 0 \vee k = 1 \\ 0, & sonst. \end{cases}$$

Damit folgt

$$b^2 = (a + e)^{1/2}(a + e)^{1/2} = e + a.$$

Also gilt die gewünschte Aussage für alle $a \in \mathcal{A}$ mit $\|a\| < 1$.

Für $\|a\| = 1$ betrachte ra mit $r < 1$. Dann gilt einerseits, dass $ra \to a$ für $r \to 1$ und andererseits für alle $r < 1$ die gewünschte Aussage. Damit gilt, zusammen mit der Vollständigkeit von $\mathcal{A}_+$, $e + a \in \mathcal{A}_+$.

2.) Sei $a \in \mathcal{A}$ mit $\|a\| < 1$. Dann gilt $(a+e) \in \mathcal{A}_+$ und da $\|-a\| < 1$ auch $(e-a) \in \mathcal{A}_+$. Schließlich ist $a = \frac{1}{2}(e + a) - \frac{1}{2}(e - a)$.
Nun sei $a \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann gilt

$$\frac{a}{\|a\|} = \frac{1}{2}\Big(e + \frac{a}{\|a\|}\Big) - \frac{1}{2}\Big(e - \frac{a}{\|a\|}\Big) \iff a = \frac{\|a\|}{2}\Big(e + \frac{a}{\|a\|}\Big) - \frac{\|a\|}{2}\Big(e - \frac{a}{\|a\|}\Big).$$

Zusammen mit Lemma 2.10 folgt die Behauptung. $\square$

3 Charakterisierung von reellen Banachalgebren

In diesem Kapitel werden wir das Hauptergebnis dieser Arbeit beweisen. Im Folgenden werden wir für einen Kompakten Hausdorffraum K mit $\mathcal{C}(K)$ den Raum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf K, versehen mit der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$, bezeichnen.

Satz 3.1. *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative reelle Banachalgebra mit Einselement. Dann ist $\mathcal{A}$ genau dann isometrisch isomorph zu $\mathcal{C}(K)$, wobei K ein kompakter Hausdorffraum ist, wenn*

$$\|a^2 - b^2\| \leq \|a^2 + b^2\| \qquad \text{für alle } a, b \in \mathcal{A}. \tag{3.1}$$

Eine Variante des Satzes 3.1 ist der Satz von Arens.

Satz 3.2 (Arens)**.** *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative reelle Banachalgebra mit Einselement. Dann ist $\mathcal{A}$ isometrisch isomorph zu $\mathcal{C}(K)$, mit K kompakter Hausdorffraum, genau dann wenn*

$$\|a\|^2 \leq \|a^2 + b^2\| \qquad \text{für alle } a, b \in \mathcal{A}. \tag{3.2}$$

Bemerkung 3.3. Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative reelle Banachalgebra mit Einselement und es gelte (3.2). Dann impliziert (3.2) bereits (3.1). Aus (3.1) folgt $\|a^2\| \leq \|a^2 + b^2\|$ für alle $a, b \in \mathcal{A}$. Um dies einzusehen, seien $a, b \in \mathcal{A}$. Nach Voraussetzung gilt:

$$\|a^2 - b^2\|^2 \leq \|(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2\| = \|(a^2 + b^2)^2\| \leq \|a^2 + b^2\|^2.$$

Außerdem gilt

$$\|a^2\| = \frac{1}{2}\|(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)\| \leq \frac{1}{2}(\|a^2 + b^2\| + \|a^2 - b^2\|) \overset{(3.1)}{\leq} \|a^2 + b^2\|. \tag{3.3}$$

Damit sehen wir auch, dass die Implikation $\Leftarrow$ aus dem Satz von Arens unmittelbar aus der Implikation $\Leftarrow$ von Satz 3.1 folgt.

Beweis. Um den Beweis vom Satz von Arnes abzuschließen, bleibt zu zeigen, dass in $\mathcal{C}(K)$ für K kompakter Hausdorffraum (3.2) gilt. Seien $f, g \in \mathcal{C}(K)$. Da K kompakt ist, gibt es einen Punkt $k_0 \in K$ mit

$$(\sup_{k \in K}(f(k)))^2 = |f(k_0)|^2 = |f(k_0)^2| = \sup_{k \in K}(f(k)^2)$$

und damit

$$\|f\|^2 = \|f^2\| \leq \|f^2 + g^2\|.$$

Also gilt die gewünschte Ungleichung.

$\square$

Wir kommen jetzt zum Beweis der Implikation $\Leftarrow$ von Satz 3.1.

Lemma 3.4. *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative reelle Banachalgebra mit Einselement und gelte (3.1). Dann gilt $\phi(x) \geq 0$ für alle $\phi \in \mathcal{S}$ und $x \in \mathcal{A}_+$.*

Beweis. Sei $x \in \mathcal{A}_+$ mit $\|x\| = 1$. Nach Proposition 2.11 gilt $e - x \in \mathcal{A}_+$. Zusammen mit (3.3) folgt

$$\|(e-x)\| \leq \|(e-x)+x\| = 1,$$

und wir erhalten

$$1 = \|\phi\| \geq \phi(e-x) = 1 - \phi(x).$$

Daraus folgt direkt $\phi(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{A}_+$ mit $\|x\| = 1$. Für ein beliebiges $x \in \mathcal{A}_+ \backslash \{0\}$ folgt die Aussage durch Skalieren mit $\|x\|^{-1}$. $\square$

Definition 3.5. Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative reelle Banachalgebra mit Einselement. Dann bezeichne mit $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ die Menge aller multiplikativen Zustände von $\mathcal{A}$, das heißt $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) := \{\phi \in \mathcal{S} : \forall x, y \in \mathcal{A} : \phi(xy) = \phi(x)\phi(y)\}$.

Da schwach*-Konvergenz punktweise Konvergenz bedeutet, ist $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{S}$ und damit kompakt.

Proposition 3.6. *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative reelle Banachalgebra mit Einselement und gelte (3.1). Dann ist $\partial_e \mathcal{S} \subseteq \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Insbesondere ist K nicht leer.*

Beweis. Sei $\psi \in \partial_e \mathcal{S}$. In Proposition 2.11 haben wir gezeigt, dass $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_+$. Zusammen mit der Linearität von ψ genügt es also zu zeigen, dass

$$\psi(xy) = \psi(x)\psi(y) \tag{3.4}$$

für alle $x \in \mathcal{A}_+$,$y \in \mathcal{A}$. Zunächst betrachte $x \in \mathcal{A}_+$, $y \in \mathcal{A}$ mit $\|x\|$,$\|y\| \leq 1$. Wir haben schon gezeigt, dass $x(e \pm y) \in \mathcal{A}_+$. Es gilt

$$\psi(x(e \pm y)) \geq 0 \iff \psi(x) \pm \psi(xy) \geq 0 \iff \psi(x) \geq |\psi(xy)|, \tag{3.5}$$

und Lemma 3.4 zeigen daher, dass

$$\psi(x) \geq |\psi(xy)|. \tag{3.6}$$

Es gilt auch $e - x \in \mathcal{A}_+$ und mit dem gerade Gezeigten folgt

$$|\psi((e-x)y)| \leq \psi(e-x) = 1 - \psi(x). \tag{3.7}$$

Da $\|x\| \leq 1$ ist, gilt sicherlich $0 \leq \psi(x) \leq 1$ und damit ergeben sich drei Fälle.

1. Fall: $\psi(x) = 0$. Dann zeigt (3.6), dass $\psi(xy) = 0$, womit (3.4) gilt.

2. Fall: $\psi(x) = 1$. Dann zeigt (3.7), dass $\psi((e-x)y) = 0$, womit (3.4) folgt.

3.Fall: $0 < \psi(x) < 1$. Zunächst definieren wir zwei neue Funktionen

$$\psi_1(z) := \psi(x)^{-1}\psi(xz)$$

und

$$\psi_2(z) := (1 - \psi(x))^{-1}\psi((e - x)z).$$

Diese Funktionen sind Zustände. Wir zeigen, dass für ψ_1, die Funktion ψ_2 behandelt man analog. Es gilt

$$\psi_1(e) = \psi(x)^{-1}\psi(ex) = 1.$$

Um die Norm von ψ_1 zu bestimmen, sei $y \in \mathcal{A}$ mit $\|y\| = 1$. Dann gilt folgende Abschätzung

$$|\psi_1(y)| = |\psi(x)^{-1}\psi(xy)| \overset{(3.5)}{\leq} |\psi(x)^{-1}\psi(x)| = 1.$$

Damit ist gezeigt, dass $\psi_1 \in \mathcal{S}$. Als nächstes können wir ψ als Konvexkombinatination mit ψ_1 und ψ_2 anschreiben,

$$\psi(y) = \psi(xy) + \psi(y) - \psi(xy) = \psi(x)\psi_1(y) + (1 - \psi(x))\psi_2(y).$$

Da aber ψ ein Element von $\partial_e\mathcal{S}$ ist, gilt $\psi(y) = \psi_1(y) = \psi(x)^{-1}\psi(xy)$. Daraus folgt die Multiplikativität von ψ. □

Betrachte die kanonische Einbettung $\iota : \mathcal{A} \to \mathcal{A}''$, die agiert als $\iota(x) := \big(\phi \mapsto \phi(x)\big)$ für $\phi \in \mathcal{A}'$. Setze

$$J := \begin{cases} \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathfrak{M}(\mathcal{A})) \\ x \mapsto \iota(x)\big|_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Dann ist J wohldefiniert, da $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ die schwach*-Topologie trägt. Weiters ist J linear und kontraktiv, da ι linear und isometrisch ist.

Unser Ziel ist zu zeigen, dass J multiplikativ, isometrisch und surjektiv ist. Haben wir das gezeigt, so haben wir einen isometrischen Algebra-Isomorphismus, wie im Satz verlangt, gefunden.

Die Multiplikativität ist klar, da für $\phi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ und $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$

$$J_{a_1a_2}(\phi) = \phi(a_1a_2) = \phi(a_1)\phi(a_2) = J_{a_1}(\phi)J_{a_2}(\phi) \tag{3.9}$$

gilt. Bevor wir zeigen, dass J isometrisch ist, beweisen wir ein weiteres Lemma.

Lemma 3.7. *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative reelle Banachalgebra mit Einselement. Sei J wie oben definiert. Sei $x \in \mathcal{A}$ mit $\|J_x\|_{\mathcal{C}(K)} \leq 1$. Dann gilt*

$$\textit{für alle } \epsilon > 0 \textit{ existiert ein } t_\epsilon > 0 \textit{ sodass } \|e - t_\epsilon(1+\epsilon)e - t_\epsilon x\| < 1. \tag{3.10}$$

Beweis. Wir werden das Lemma indirekt beweisen. Angenommen (3.10) gilt nicht. Dann existiert ein ϵ sodass für alle $t \geq 0$ gilt $\|e - t(1+\epsilon)e - tx\| \geq 1$.

Wir können jetzt die Menge $M := \{e - t(1+\epsilon)e - tx | \, t \geq 0\}$ betrachten. Wenn wir zeigen, dass M konvex ist, dann können wir M und die offene Einheitskugel $B_{\mathcal{A}}$ vermöge dem Satz von Hahn-Banach trennen. Dafür seien $\lambda \in (0,1)$ und $t_1, t_2 \geq 0$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} &\lambda(e - t_1(1+\epsilon)e - t_1 x) + (1-\lambda)(e - t_2(1+\epsilon)e - t_2 x) \\ =& \, e + \lambda t_1(-(1+\epsilon)e - x) + (1-\lambda)t_2(-(1+\epsilon)e - x) \\ =& \, e + (\lambda t_2 + (1+\lambda)t_2)(-(1+\epsilon)e - x), \end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck genau die Form eines Elements von M hat. Damit sind die Voraussetzungen für Hahn-Banach erfüllt und wir bekommen ein ψ mit $\|\psi\| = 1$ und $\psi(m) \geq 1$ für alle $m \in M$. Außerdem gilt, dass $\psi(e - 0((1+\epsilon)e - x)) = \psi(e) \geq 1$, woraus wegen der Normierung von ψ folgt, dass $\psi(e) = 1$. Damit liegt ψ in $\mathcal{S}$. Insbesondere gilt, dass

$$\psi(e - (1+\epsilon)e - x) \geq 1 \iff \psi((1+e)e + x) \leq 0 \iff \psi(x) \leq -(1+\epsilon) \iff |\psi(x)| \geq 1 + \epsilon.$$

$\mathcal{S}$ ist nach dem Satz von Krein-Milman die abgeschlossene konvexe Hülle von $\partial_e \mathcal{S}$. Da $\psi \in \mathcal{S}$, existiert ein $\kappa \in \partial_e \mathcal{S}$ mit $\kappa(x) \geq 1 + \epsilon$. Insgesamt ergibt das aber einen Widerspruch zu $\|J_x\| \leq 1$, da $1 + \epsilon \leq \kappa(x) = J_x(\kappa)$. Somit ist das Lemma gezeigt.

□

Jetzt zeigen wir, dass J isometrisch ist. Wegen Proposition 2.11 und dem gerade Bewiesenen gilt $e + (-e + t_\epsilon(1+\epsilon)e + t_\epsilon x) \in \mathcal{A}_+$. Außerdem ist $t_\epsilon > 0$, deshalb ist $(1+\epsilon)e + x$ in $\mathcal{A}_+$ für alle $\epsilon > 0$. Da $\mathcal{A}_+$ abgeschlossen ist, liegt auch $e + x$ in $\mathcal{A}_+$. Wenn man die analoge Rechnung mit $-x$ anstatt x durchführt, erhält man $e - x \in \mathcal{A}_+$. Um die Norm von x abzuschätzen, können wir die Überlegung aus Bemerkung 3.3 verwenden und erhalten

$$\|x\| = \frac{1}{2}\|(e+x) - (e-x)\| \leq \frac{1}{2}\|(e+x) + (e-x)\| = 1,$$

womit bewiesen ist, dass J isometrisch ist.

Der letzte Schritt zu zeigen, dass J surjektiv ist. Dafür verwenden wir den Satz von Stone-Weierstrass. Einerseits enthält $J(\mathcal{A})$ alle konstanten Funktionen, da $J_e(K) = \{1\}$ und J linear ist. Es bleibt zu zeigen, dass $J(A)$ punktetrennend ist. Dafür seien $\psi_1, \psi_2 \in K$ mit $\psi_1 \neq \psi_2$. Dann existiert ein $x \in \mathcal{A}$, sodass $J_x(\psi_1) = \psi_1(x) \neq \psi_2(x) = J_x(\psi_2)$. Damit sind alle Voraussetzungen für den Satz von Stone-Weierstrass erfüllt und es gilt $J(\mathcal{A}) = \mathcal{C}(K)$.

4 Der Satz von Gelfand-Naimark

Der Satz von Gelfand-Naimark ist eine Verallgemeinerung von Satze 3.1 auf komplexe Banachalgebren. Dafür seien zuerst einige weitere Begriffe eingeführt.

Definition 4.1. Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative komplexe Algebra. Eine Abbildung $* : a \mapsto a^*$ heißt *Involution* auf $\mathcal{A}$, wenn für alle $a, b \in \mathcal{A}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt, dass:

1. $(a^*)^* = a$,
2. $(\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*$,
3. $(ab)^* = b^* a^*$.

Wir nennen ein Element $a \in \mathcal{A}$ *selbstadjungiert*, wenn $a^* = a$.

Bemerkung 4.2. Jedes Element $x \in \mathcal{A}$ lässt sich darstellen als $x = \mathrm{Re} x + i \mathrm{Im} x$, wobei $\mathrm{Re} x und \mathrm{Im} x$ selbstadjungiert sind. Um das einzusehen, definiere

$$\mathrm{Re} x := \frac{x + x^*}{2} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Im} x := \frac{x - x^*}{2i}.$$

Satz 4.3 (Gelfand-Naimark)**.** *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative komplexe Banachalgebra mit Einselement e und einer Involution $.^*$, mit $\|a^* a\| = \|a\|^2$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Dann existiert ein kompakter Hausdorffraum K, sodass $\mathcal{A}$ isometrisch $*$-isomorph zu $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ ist.*

Beweis. Als erstes bemerke, dass $.^*$ eine Isometrie ist: wegen der Kommutativität gilt

$$\|a^*\|^2 = \|(a^*)^* a^*\| = \|a a^*\| = \|a^* a\| = \|a\|^2 \text{ für alle } a \in \mathcal{A}.$$

Betrachte $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} := \{a \in \mathcal{A} : \ a = a^*\}$. Diese Menge ist abgeschlossen in $\mathcal{A}$ und eine reelle Unteralgebra von $\mathcal{A}$. Somit ist $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ eine kommutative reelle Banachalgebra mit Einselement und wir können Satz 3.1 anwenden. Wir verifizieren nun (3.1). Seien $a, b \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|a^2 - b^2\| &= \frac{1}{2} \|(a + ib)^2 + (a - ib)^2\| \\
&\leq \frac{1}{2} \|(a + ib)^2\| + \frac{1}{2} \|((a + ib)^*)^2\| \\
&= \|(a + ib)^2\| \leq \|a + ib\|^2 \\
&= \|(a + ib)(a - ib)\| = \|a^2 + b^2\| \ .
\end{aligned}$$

Satz 3.1 liefert also einen Algebra-Isomorphismus $J : \mathcal{A}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{C}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}))$.

Um den Beweis abzuschließen, werden wir J zu einem *-Isomorphismus $\widetilde{J} : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$ erweitern. Da wir wissen, dass alle $x \in \mathcal{A}$ darstellbar sind als $x = a + ib$ mit $a, b \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$, liegt es nahe, $\widetilde{J}_x := J_a + iJ_b$ zu definieren. Es übertragen sich im Wesentlichen alle behaupteten Eigenschaften von J auf $\widetilde{J}$, bis auf die Multiplikativität und die Isometrie. Für die Isometrie sei $x \in \mathcal{A}$ beliebig mit $x = a + ib$. Es gilt

$$\begin{aligned}\|x\|^2 = \|a+ib\|^2 = \|(a+ib)(a-ib)\| = \|a^2+b^2\| = \|J(a^2+b^2)\|\\ = \|\widetilde{J}(a+ib)(a-ib)\| = \|\widetilde{J}(a+ib)\widetilde{J}(a-ib)\|\\ = \|\widetilde{J}(a+ib)(\widetilde{J}(a+ib))^*\| = \|\widetilde{J}(x)\|^2.\end{aligned}$$

Für die Multiplikativität seien $x, y \in \mathcal{A}$ mit $x = a + ib$ und $y = c + id$. Es gilt

$$\begin{aligned}\widetilde{J}(xy) &= \widetilde{J}((a+ib)(c+id)) = \widetilde{J}(ac-bd+i(ad+bc) = J(ac-bd)+iJ(ad+bc)\\ &= J(a)J(c)-J(b)J(d)+i(J(a)J(d)+J(b)J(c)) = (J(a)+iJ(b))(J(c)+iJ(d))\\ &= \widetilde{J}(a+ib)\widetilde{J}(c+id) = \widetilde{J}(x)\widetilde{J}(y).\end{aligned}$$

Womit $\widetilde{J}$ die gewünschten Eigenschaften hat. □

Literatur

[1] F. Albiac und N. J. Kalton. „A characterization of real $C(K)$-spaces“. In: *Amer. Math. Monthly* 114.8 (2007), S. 737–743. ISSN: 0002-9890. DOI: 10.1080/00029890.2007.11920466. URL: https://doi.org/10.1080/00029890.2007.11920466.

[2] Martin Bluemlinger. *Analysis 3*. Sep. 2019. URL: https://www.asc.tuwien.ac.at/~blue/Ana3_19.pdf.

[3] Harald Woracek, Martin Bluemlinger und Michael Kaltenbaeck. *Funktionalanalysis*. 14. Aufl. Feb. 2020. URL: https://www.asc.tuwien.ac.at/~woracek/homepage/downloads/lva/2021S_Fana1/fana2020.pdf.