Maria Heitzinger

Seminararbeit 2021

Verallgemeinerungen des Satzes von Arzelà Ascoli

betreut von
Prof. Harald Woracek

10. September 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der Satz von Arzelà-Ascoli wurde im dritten Semester des Mathematikstudiums an der technischen Universität Wien in Analysis 3 vorgestellt und bewiesen. In dieser Seminararbeit wird nicht nur die ursprüngliche Version als Erinnerung kurz angeführt (Satz 2.5) sondern auch zwei Verallgemeinerungen bewiesen.

Zunächst wird dafür die kompakt offene Topologie erläutert und einige ihrer Eigenschaften. Sätze 3.15 bis 3.16 dienen als Vorbereitung für den Beweis der zweiten Verallgemeinerung, der ohne weitere Rechnungen aus diesen folgt.

2 Der ursprüngliche Satz von Arzelà-Ascoli

Der ursprüngliche Satz von Arzelà-Ascoli ist nach zwei italienischen Mathematiker benannt, welche unabhängig von einander den Satz entdeckten und bewiesen.

Er behandelt Kompaktheit und etwaige Voraussetzungen die darauf schließen lassen. Zunächst sollen hier notwendige Definitionen aufgelistet werden.

Definition 2.1. *Sei $< X, \tau >$ ein topologischer Raum und $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^X$, dann nennt man $\mathcal{F}$* ***punktweise beschränkt****, wenn:*

$$\forall x \in X : \sup_{x \in X}\{|f(x)| : f \in \mathcal{F}\} < \infty \tag{2.1}$$

Definition 2.2. ***gleichgradig stetig***

$$\forall x \in X, \epsilon > 0 \ \exists U \in \mathcal{U}^x(x) : \forall f \in \mathcal{F} \ und \ \forall y \in U : |f(y) - f(x)| \leq \epsilon \tag{2.2}$$

Definition 2.3. *Sei $< X, d >$ ein metrischer Raum und $M \subseteq X$, dann heißt M* ***total beschränkt****, wenn:*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists M_1, ..., M_n \subseteq X : d(M_1), ..., d(M_n) \leq \epsilon \ und \ M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} M_i \tag{2.3}$$

wobei $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik und $d(M) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in M\}$ der Durchmesser ist.

Definition 2.4. *Ein topologischer Raum heißt* ***kompakt****, wenn jede offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine endliche Teilüberdeckug hat: $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$*

Der Satz von Arzelà-Ascoli lautet nun:

Satz 2.5 (Arzelà-Ascoli)**.** *Sei $< X, \tau >$ ein kompakter topologischer Raum und $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) $\mathcal{F}$ ist total beschränkt bezüglich der von $\|.\|_\infty$ induzierten Metrik

ii) $\mathcal{F}$ ist punktweise beschränkt und gleichgradig stetig ([4], Seite 278)

3 Die kompakt offene Topologie

Definition 3.1. *Ein topologischer Raum $< X, \tau >$ heißt* ***lokal kompakt****, wenn jeder Punkt x eine kompakte Umgebung besitzt.*

Definition 3.2. *Sei $< X, \tau >$ ein topologischer Raum. $Y, Z \subseteq X$ heißen durch Umgebungen getrennt, falls:*

$$\exists U, V \text{ offen, mit } U \cap V = \emptyset \text{ und } Y \subseteq U \text{ und } Z \subseteq V. \tag{3.1}$$

X heißt ***regulärer Raum*** *falls jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ und jeder Punkt $x \notin A$ durch Umgebungen getrennt sind.*

Definition 3.3. *Sei $< X, \tau >$ toplogischer Raum und $K \subseteq X$. K heißt* ***relativ kompakt****, wenn der topologische Abschluss $\bar{K}$ in X kompakt ist.*

Weiters sei $A \subseteq X$ und man definiere:

$$U[A] := \{y \mid (x, y) \in U \text{ für ein } x \in A\}. \tag{3.2}$$

Mit diesen Definitionen soll nun die uniforme Struktur und der uniformen Raum definiert werden. Im Folgenden führt dies dann auch zu einer Topologie.

Definition 3.4. *Sei X eine Menge und $\mathcal{U}$ ein System von Teilmengen des kartesischen Produkts $X \times X$. $\mathcal{U}$ wird uniforme Struktur genannt, wenn folgende Eigenschaften gelten:*

- *i) für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt, dass die Diagonale $\{(x, x) | x \in X\}$ in U ist*
- *ii) für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt $U^{-1} \in \mathcal{U}$*
- *iii) für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt, dass es ein $V \in \mathcal{U}$ mit $V \circ V \subseteq U$*
- *iv) für alle $U, V \in \mathcal{U}$ gilt $U \cap V \in \mathcal{U}$*
- *v) für alle $U \in \mathcal{U}$ und $U \subseteq V \subseteq X \times X$ gilt $V \in \mathcal{U}$*

Das Paar $(X, \mathcal{U})$ wird dann uniformer Raum genannt.

Uniforme Räume sind eine Art Verallgemeinerung von metrischen Räumen und die dazugehörige Topologie lässt auch Begriffe wie *näher* zu, welche in topologischen Räumen nur schwer fassbar sind.

Proposition 3.5. *Sei $(X,\mathcal{U})$ ein uniformer Raum.*
Die Familie τ aller Teilmengen T von X, sodass für alle $x \in T$ es ein $U \in \mathcal{U}$ gibt mit $U[x] \subseteq T$ ist die Topologie der uniformen Struktur $\mathcal{U}$.

Beweis. Die Vereinigung von Elemeneten von τ sind offensichtlich wieder in τ.
Für ein $T, S \in \tau$ und $x \in T \cap S$ gibt es ein $U, V \in \mathcal{U}$, sodass $U[x] \subseteq T$ und $V[x] \subseteq S$. Daher $(U \cap V)[x] \subseteq T \cap S$ und damit $T \cap S \in \tau$. Damit is τ eine Topologie.
□

Weiters betrachte man Y^X, also den Raum aller Funktionen, welche von X nach Y gehen.

Mit $(K : U)$, $K \subseteq X$ und $U \subseteq Y$ ist die Menge aller Funktionen $f \in Y^X$ mit $f(K) \subseteq U$ gemeint. Also:

$$(K : U) := \{f \ : \ f \in Y^X, f(K) \subseteq U\} \tag{3.3}$$

Die Familie aller solcher Klassen, wobei K kompakt in X und U offen in Y sind, erzeugt die **kompakt offene Topologie** $\mathcal{C}$, ist also eine Subbasis. Die Menge aller endlichen Schnitte von Elementen aus der Subbasis sind dann eine Basis.
Die Elemente der Basis haben demnach folgende Form:

$$\bigcap \{(K_i, U_i) | i = 0, 1, .., n; K_i \subseteq X \text{ kompakt und } U \subseteq Y \text{offen}\} \tag{3.4}$$

Die Topologie, welche von der Familie der Form $(x : U)$ erzeugt wird, wobei $x \in X$ ein einzelner Punkt ist, wird die Topologie der punktweisen Konvergenz genannt mit der Bezeichnung $\mathcal{P}$.

Proposition 3.6. *Die kompakt offene Topologie enthält die Topologie der punktweisen Konvergenz.*

Beweis. Für alle $x \in X$ und $U \in Y$ offen gilt: $(x : U) = \{f | f(x) \in U\}$ gehört zur kompakt offenen Topologie, da $\{x\}$ kompakt ist.
□

Sei nun $\mathcal{F}$ eine Familie von Funktionen von einer Menge X zu einem uniformen Raum $(Y, \mathcal{V})$.

Definition 3.7. *Für alle $V \in \mathcal{V}$ ist $W(V) = \{(f, g) \mid (f(x), g(x)) \in V \ \forall x \in X\} = \{(f, g) \mid g \circ f^{-1} \subseteq V$ und $W(V)[f] = \{g : g \subseteq V \circ f\} = \{g : g(x) \in V[f(x)] \ \forall x \in X\}$*

Die Familie aller Mengen der Form $W(V), V \in \mathcal{V}$ ist eine Basis für eine uniforme Struktur $\mathcal{U}$ für $\mathcal{F}$. Dieses $\mathcal{U}$ wird die uniforme Struktur der gleichmäßigen Konvergenz und die dadurch induzierte Topologie wird die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz genannt.

Definition 3.8. *Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von stetigen Funktionen von X zu einem uniformen Raum $(Y, \mathcal{V})$ und $\mathcal{U}$ uniforme Struktur für $\mathcal{F}$. Die dazugehörige uniforme Struktur und die Topologie eingeschränkt auf kompakte Mengen wird die* ***Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompkata*** *genannt. Die uniforme Struktur bekommt die Bezeichnung $\mathcal{U}|\mathcal{C}$.*

Satz 3.9. *Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von stetigen Funktionen auf dem topologischen Raum X zu dem uniformen Raum $(Y, \mathcal{V})$. Dann fällt die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta mit der kompakt offenen Topologie zusammen. ([2], Seite 230)*

Beweis. Sei $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq Y$ offen. Sei $f \in \mathcal{F}$ und $f(K) \subseteq U$. Dann ist $f(K)$ kompakt und es existiert ein $V \in \mathcal{V}$, sodass $V[f(K)] \subseteq U$.
Nun gilt für eine Funktion g, welche $g(x) \in V[f(x)]$ für alle $x \in K$ erfüllt, dass $g(K) \subseteq U$. Also es folgt, dass alle Mengen der Form $\{f : f(K) \subseteq U\}$ offen sind bezüglich der Topologie von $\mathcal{U}|\mathcal{C}$, wobei $\mathcal{U}|\mathcal{C}$ die uniforme Struktur der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen ist und $\mathcal{C}$ die Menge aller kompakten Teilmengen von X.

Damit folgt, dass die kompakt offene Topologie kleiner als die von $\mathcal{U}|\mathcal{C}$ ist und die erste Richtung ist gezeigt.

Nun muss noch gezeigt werden, dass für alle $K \subseteq X$ kompakt, $V \in \mathcal{V}$ und stetigem f es $K_1, ..., K_n \subseteq X$ kompakt, $U_1, ..., U_n \subseteq Y$ offen gibt, sodass $f(K_i) \subseteq U_i$ und weiters $g(x) \in V[f(x)]$ für alle $x \in K$ für Funktionen g, welche $g(K_i) \subseteq U_i$ erfüllen.
Dafür wähle man ein symmetrisches und geschlossenes Element W von $\mathcal{V}$, sodass $W \circ W \circ W \subseteq V$. Nun wähle $x_1, ..., x_n \in K$, sodass die Mengen $W[f(x_i)]$ $f(K)$ überdecken. Definiere $K_i = K \cap f^-1(W[f(x_i)])$ und U_i soll das Innere von $W \circ W[f(x_i)]$ sein.
Wenn $g(K_i) \subseteq U_i$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$, dann gilt für $x \in K$, dass es ein i gibt, sodass $x \in K_i$, also $g(x) \in W \circ W[f(x_i)]$. Da $f(x) \in W[f(x_i)]$ folgt, dass $(f(x), g(x)) \in W \circ W \circ W \subseteq V$.

□

Definition 3.10. *Gleichmäßige Stetigkeit (im Sinne definiert in [2])*
$\mathcal{F}$ sei eine Familie von Funktionen zwischen zwei topologischen Räumen. Sie ist ***gleichmäßig stetig****, falls: $\forall x \in X, y \in Y, U \in \mathcal{U}(y), \exists V \in \mathcal{U}(x), W \in \mathcal{U}(y)$, sodass $f(V) \subseteq U$ für $f(x) \in W$*

Definition 3.11. *Seien X, Y topologische Räume und*

$$P : \begin{cases} \mathcal{F} \times X \longrightarrow Y \\ (f, x) \longrightarrow f(x). \end{cases} \tag{3.5}$$

Eine Topologie auf $\mathcal{F}$ heißt ***gemeinsam stetig****, wenn $P|_{(\mathcal{F} \times X)}$ stetig ist.*

Die nächsten Sätze und deren Beweise sind eigentlich alle Arbeit, die zu leisten ist, um die zweite Verallgemeinerung von Arzelà-Ascoli zu beweisen.

Satz 3.12. *Auf Kompakta gemeinsam stetige Topologien sind größer als die komapkt offene Topologie $\mathcal{C}$. Falls X regulär oder Hausdorff ist und alle Elemente aus $\mathcal{F}$ stetig auf Kompakta sind, folgt dass $\mathcal{C}$ gemeinsam stetig auf Kompakta ist. ([2], Seite 223)*

Beweis. Sei nun τ eine Topologie für $\mathcal{F}$, die gemeinsam stetig ist. Sei $U \subseteq Y$ offen, $K \subseteq X$ kompakt und P wie vorher in Definition 3.11. Es ist nun zu zeigen, dass $\{f|f(K) \subseteq U\}$ offen in τ ist, denn diese Menge erzeugt die kompakt offene Topologie und die erste Aussage wäre damit bewiesen.

Dafür definiere man $V := (\mathcal{F} \times K) \cap P^{-1}(U)$ offen in $\mathcal{F} \times K$. Die Offenheit folgt aus der Voraussetzung an τ, nämlich die gemeinsame Stetigkeit. Für ein $f \in \{f|f(K) \subseteq U\}$ folgt $\{f\} \times K \subseteq V$.
Nun gilt damit, dass es ein $N \in \mathcal{U}^\tau(f)$ gibt, sodass $N \times K \subseteq P^{-1}(U)$ und es folgt sogleich, dass $\{f|f(K) \subseteq U\}$ offen ist.
Für die zweite Aussage seien K und U wie vorher und $x \in K, (f,x) \in P^{-1}(U)$. Da f nach Definition stetig auf K ist, folgt: Es gibt ein $M \in \mathcal{U}(x) : f(M) \subseteq U$ mit M kompakt. Dies lässt sich mit der Voraussetzung begründen, dass X entweder Hausdorff oder regulär ist.
Es folgt $\{f|f(M) \subseteq U\} \times M$ ist eine Umgebung in $\mathcal{F} \times K$ und weiters $\{f|f(M) \subseteq U\} \times M \subseteq P^{-1}(U)$. Es wurde das Gewollte bewiesen. □

Satz 3.13. *Sei X ein topologischer Raum und wieder Hausdorff oder regulär. Y sei Hausdorff und $C := \{f : x \longrightarrow Y | f \, stetig \text{ auf alle } K \subseteq X \text{ kompakt}\}$. Dann gilt $\mathcal{F} \subseteq C$ kompakt bezüglich $\mathcal{C}$ ist äquivalent zu den folgenden drei Bedingungen:*

1. *$\mathcal{F}$ ist abgeschlossen in C bezüglich $\mathcal{C}$*
2. *für alle $x \in X$ hat $\mathcal{F}[x]$ kompakten Abschluss*
3. *$\mathcal{P}$ ist gemeinsam stetig auf Kompakta bezüglich $\bar{\mathcal{F}}^{\mathcal{P}}$. ([2], Seite 224)*

Bemerkung 3.14. *In dem folgenden Beweis wird ein Ergebnis aus "General Topology"([2], Theorem 5.5 Seite 138) verwendet, aber in dieser Arbeit nicht explizit bewiesen. Der Satz lautet wie folgt.*
Sei X ein topoogischer Raum. Die im Folgenden aufgelisteten Eigenschaften stehen in unterschiedlicher Relation. Falls X das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, dann sind 1. *und* 2. *äquivalent. Falls das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist, sind alle Eigenschaften äquivalent. Ist X pseudo metrisch, so implizieren die einzelnen Eigenschaften das zweite Abzählbarkeitsaxiom.*

1. *Jede Folge in X hat einen Häufungspunkt*
2. *jede Folge besitzt eine Teilfolge, welche gegen einen Punkt im Raum konvergiert*

3. *der Raum X ist kompakt.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei nun nach Voraussetzung $\mathcal{F}$ $\mathcal{C}$-kompakt. Aus der Hausdorff-Bedingung an Y folgt sofort, dass es auch abegschlossen in C ist. Die ist eine bekannte universelle Eigenschaft von Hausdorffräumen. Weiters ist $F[x]$ kompakt, da die Punktauswertung stetig bezüglich beider Topologien ist und beide fallen zusammen, da nun $\mathcal{F}$ kompakt bezüglich $\mathcal{C}$ und $\mathcal{P}$-Hausdorff ist. $\mathcal{F}$ ist also $\mathcal{P}$-abgeschlossen. Aus Satz 3.2 folgt nun, dass $\mathcal{C}$ und daher $\mathcal{P}$ gemeisam stetig sind.

"$\Leftarrow$" Aus der Voraussetzung gilt $\bar{\mathcal{F}[x]}^{\mathcal{P}}$ komapkt. Nun ist ebenfalls $\bar{\mathcal{F}}^{\mathcal{P}}$ komapkt. Aus Voraussetzung 3. folgt, dass jedes Element aus $\bar{\mathcal{F}}^{\mathcal{P}}$ gemeinsam stetig auf Kompakta und damit $\bar{\mathcal{F}}^{\mathcal{P}} \subseteq C$ ist. Aus Bemerkung 3.1 und dem dort erwähnten Satz folgt, dass die Topolgie $\mathcal{P}$ für $\bar{\mathcal{F}}^{\mathcal{P}}$ größer als die kompakt offene ist, woraus aus bereits bewiesenen Beziehungen folgt, dass sie gleich sein müssen. Es folgt nun dass $\mathcal{F}$ abgeschlossen ist bezüglich beider Topologien und damit $\bar{\mathcal{F}}^{\mathcal{P}} = \mathcal{F}$. Dies ist genau das Gewollte.

□

Satz 3.15. *Sei $\mathcal{F}$ gleichmäßig stetig als Familie vom topologischen Raum X zu einem regulären Raum Y, dann folgt $\bar{\mathcal{F}}^{\mathcal{P}}$ ist ebenfalls gleichmäßig stetig und $\mathcal{P}$ ist gemeinsam stetig auf $\bar{\mathcal{F}}^{\mathcal{P}}$. ([2], Seite 235)*

Beweis. Sei $x \in X, y \in Y$ und $U \in \mathcal{U}(y)$ abgeschlossen. Sei $V \in \mathcal{U}(x)$ und $W \in \mathcal{U}(y)$ offen, sodass für $f \in \mathcal{F}$ mit $f(x) \in W$ dann ist $f(V) \subseteq U$.
Nun betrachte man das Netz $(g_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{F}$, welches punktweise gegen g konvergieren soll und $g(x) \in W$. Nun gilt: $\exists i_0\ \forall i \geq i_0 : \quad g_i(x) \in W$. Es folgt für alle $z \in V : \{g_i(z)|i \in I\}$ ist ab einem Index in U und damit auch $g(z) \in U$. Man sieht, dass $g[V] \subseteq U$.

Letzteres folgt daraus, dass $\{f|f \in \mathcal{F}, f(x) \in W\}$ $\mathcal{P}-$offen ist, wenn W in Y offen ist und einer Umformulierung der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit, welche wie folgt lautet: Für alle $x \in X, y \in Y, U \in \mathcal{U}$, gibt es ein $V \in \mathcal{U}(x), W \in \mathcal{U}(y)$, sodass $\{f|f \in \mathcal{F}, f(x) \in W\} \times V$ durch die kanonische Abbildung nach U getragen wird. □

Satz 3.16. *Sei $\mathcal{F}$ eine Familie stetiger Funktionen von dem topologischen Raum X in den Hausdorff Raum Y. Sie soll kompakt bezüglich einer gemeinsam stetigen Topologie sein. Dann folgt die gleichmäßige Stetigkeit von $\mathcal{F}$. ([2], Seite 236)*

Beweis. Da die identische Abbildung von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{F}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz stetig ist, folgt, dass die zwei Topologien zusammenfallen. Sei nun $x \in X, y \in Y, U \in \mathcal{U}$ offen, $W \in \mathcal{U}(y)$ abgeschlossen, sodass $W \subseteq U$. Betrachte $K := \{f \in \mathcal{F}|f(x) \in W\}$ ist punktweise abgeschlossen und damit kompakt. Für P definiert durch $P(f, x) = f(x)$ ist $K \times \{x\} \subseteq P^{-1}(U)$ kompakt und es gibt ein $V \in \mathcal{U}(x) : \ K \times V \subseteq P^{-1}(U)$. Also für $v \in V, f(x) \in W$ folgt, dass $f(v) \in U$.

□

4 Zwei Verallgemeinerungen

Es sind nun alle Werkzeuge und Mittel gegeben worden, um die zwei Verallgemeinerung des Satzes von Arzelà-Ascoli zu beweisen.

Satz 4.1. *Seien nun X und Y topologische Räume und Y^X der Raum aller Funktionen von X nach Y. Man versehe diesen mit der kompakt offenen Topologie. Dann ist eine abgeschlossene Menge $\mathcal{F} \in Y^X$ kompakt, wenn:*

i) $\forall x \in X$ hat $\mathcal{F}(x)$ kompakten Abschluss

ii) $\mathcal{F}$ ist gleichmäßig stetig.([1], Seite 20)

Zunächst ein für den Beweis hilfreiches Lemma.

Lemma 4.2. *Sei $\mathcal{F} \subseteq Y^X$ gleichmäßig stetig.*
Dann hat $\mathcal{F}$ den gleichen Abschluss bezüglich der kompakt offenen Topologie wie der Topologie der punktweisen Konvergenz. ([1], Seite 20)

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{F}$. Nun wähle man ein beliebiges f_0, welches zum Abschluss der gewählten Teilmenge $\mathcal{A}$ bezüglich der punktweisen Topologie gehört.

Nun wähle man $K_1, ..., K_n \subseteq X$ kompakt und $G_1, ..., G_n \subseteq Y$ offen: $f_0(K_i) \subseteq G_i \; \forall i \in I = \{1, ..., n\}$.

Sei nun $i \in I$ beliebig und $x \in K_i$, dann gilt: $\exists U_x \; \exists W_x$ Umgebungen von x und von $f_0(x)$, sodass $f(U_x) \subseteq G_i$ für alle $f \in \mathcal{A}$ und $f(x) \in W_x$.
Dies folgt aus der gleichmäßigen Steitgkeit, wie sie oben nach Kelly definiert wurde. $\mathcal{A}$ ist als Teilmeinge von $\mathcal{F}$ ebenfalls gleichmäßig stetig.

Nun verwendet man die Kompaktheit der K_i und wählt endlich viele x_i, sodass die dazugehörigen U_{x_i} eine endliche Überdeckung bilden. Betrachtet man $(x_i : W_i)$, so ist der Schnitt aller dieser Klassen eine sogenannte "punctual neighborhood"von f_0. Es beinhaltet also ein $f \in \mathcal{A}$. Es werden insgesamt $k_1 + ... + k_n$ Klassen geschnitten.

Für $i \in I$ und $1 \leq j \leq k_i$:
$f(U_{x_j}) \subseteq G_j$, da $f \in \mathcal{A}$ und $f(x_j) \in W_{x_j}$. Also $\forall i \in I : f(K_i) \subseteq G_i$, sodass gilt: $f \in (K_1 : G_1) \cap ... \cap (K_n : G_i)$.

Also f_0 gehört tatsächlich auch zum Abschluss der kompakt offenen Topologie und damit sind die Abschlüsse gleich.

$\square$

Beweis von Satz 4.1. Man betrachte zunächst $\mathcal{F}$, eine geschlossene Teilmenge von Y^X bezüglich der kompakt offenen Topologie. Man nehme an $\mathcal{F}$ habe an jedem Punkt $x \in X$ kompakten Abschluss und $\mathcal{F}$ sei gleichmäßig stetig.
Sei nun Y_x für alle $x \in X$ der Abschluss von $\mathcal{F}$(x) und betrachte $\prod_{x \in X} Y_x$.

Betrachtet man Y_x nun als topologischen Raum mit der von Y induzierten Topologie, dann ist die Topologie in $\prod_{x \in X} Y_x$, induziert von der Topologie der punktweisen Konvergenz von Y^X, die Produkttopologie.

Es folgt also mit Tychonoff, dass $\prod_{x \in X} Y_x$ kompakt bezüglich der punktweisen Topologie ist und damit auch $\mathcal{F}$. Nun kommt das oben bewiesene Lemma ins Spiel: Es folgt nämlich, da $\mathcal{F}$ punktweise abgeschlossen und kompakt ist, dass $\mathcal{F}$ kompakt bezüglich der kompakt offenen Topologie ist.

$\square$

Nun die zweite Verallgemeinerung. Der Beweis dieses Satzes folgt relativ schnell aus den Sätzen $3.12 - 3.16$.

Satz 4.3. *Sei X ein regulärer lokal kompakter Raum und Y Hausdorff. Sei $\mathcal{C}$ die Familie aller stetigen Funktionen zwischen diesen Räumen versehen mit der kompakt offenen Topologie. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ ist kompakt genau dann wenn:*

1. *$\mathcal{F}$ abgeschlossen in $\mathcal{C}$*
2. *$\mathcal{F}\bar{(}x)$ kompakt $\forall x \in X$*
3. *$\mathcal{F}$ ist gleichmäßig stetig. ([2], Seite 236)*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ kompakt bezüglich der kompakt offenen Topologie, dann folgen $1, 2$ und 3 aus den sätzen 3.13 und 3.16.
Erfülle $\mathcal{F}$ umgekehrt die Bedingungen $1, 2$ und 3. Mit 3.15 folgt, dass $\bar{\mathcal{F}}^{\mathcal{P}}$ gleichmäßig stetig und $\mathcal{P}$ gemeinsam stetig ist. Kompaktheit folgt nun aus Satz 3.13 $\square$

Literaturverzeichnis

[1] J.D Weston, *“A generalization of Ascoli’s theorem”*, 1959, University of Durham, King’s College, S. 19 - 21

[2] J.L Kelly, *“General Topology”*, 1955, S. 223 - 236

[3] M. Krukowski, *“Arzelà-Ascoli theorem in uniform spaces”*, Technical University of Lódz, 2016, S. 1-3

[4] J.Munkres, *“Topology”*, 2014, S. 275-279