Technische Universität Wien

Seminararbeit aus Analysis

Anwendungen des Satzes von Baire

Anni Lü

unter der Leitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Harald Woracek

Wintersemester 2019/2020

Inhaltsverzeichnis

1 Der Satz von Baire

1.1 Grundbegriffe

Der Satz von Baire ist ein zentrales Resultat der Funktionalanalysis. Dieser ermöglicht elegante Beweise für eine Reihe von klassischen Sätzen wie dem *Satz von Banach-Steinhaus*, dem *Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit* und dem *Satz von der offenen Abbildung*. In dieser Arbeit werde ich zwei weitere interessante Sätze vorstellen, die sich mit Hilfe des Satzes von Baire elegant beweisen lassen. Zu Beginn wollen wir relevante Definitionen und einige Resultate aus der Analysis wiederholen.

1.1.1 Definition. Seien X eine nichtleere Menge und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X.

(i) Das *Innere* E° einer Teilmenge E von X ist definiert durch

$$E^\circ = \bigcup\{O \subseteq E : O \text{ ist offen}\}.$$

(ii) Der *Abschluss* $\overline{E}$ einer Teilmenge E von X ist definiert durch

$$\overline{E} = \bigcap\{A \subseteq X : A \text{ abgeschlossen}, A \supseteq E\}.$$

(iii) Eine Teilmenge E von X heißt *dicht* in X, wenn $\overline{E} = X$ gilt.

(iv) Eine Teilmenge E von X heißt *nirgends dicht*, wenn $\overline{E}$ keinen inneren Punkt besitzt, also $(\overline{E})^\circ = \emptyset$.

Im Folgenden seien (X, d) ein metrischer Raum, wobei X eine nichtleere Menge ist, und $\mathcal{T}$ die von d induzierte Topologie auf X.

1.1.2 Bemerkung. Trotz ihrer Bezeichnung bilden *dichte* und *nirgends dichte* Menge keine dualen Begriffe. Es gilt, dass dichte Mengen nie nirgends dicht sind. Um das einzusehen, nehme man das Gegenteil an. Sei E also eine dichte Teilmenge von X, die auch nirgends dicht ist. Da X offen ist, gilt $X^\circ = X$. Wegen der Dichtheit von E in X erhalten wir also $(\overline{E})^\circ = X^\circ = X \neq \emptyset$, was ein Widerspruch zur Annahme, dass E nirgends dicht ist, ergäbe.

1.1.3 Bemerkung. Wie man leicht einsieht, gelten folgende Aussagen:

(i) Jede Teilmenge einer nirgends dichten Menge ist wieder nirgends dicht.

(ii) Der Abschluss einer nirgends dichten Menge ist wieder nirgends dicht.

(iii) Die endliche Vereinigung von nirgends dichten Mengen ist wieder nirgends dicht.

Das folgende elementare Resultat erweist sich als hilfreich.

1.1.4 Lemma. *Sei O eine Teilmenge von X und A das Komplement von O. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) O ist offen und dicht.

(ii) A ist abgeschlossen und nirgends dicht.

Beweis. Wir zeigen hier nur $(i) \Rightarrow (ii)$. Die Rückrichtung folgt analog. Sei O offen und dicht. Dann ist A als Komplement einer offenen Menge abgeschlossen. Es bleibt, zu zeigen, dass $A^\circ = \emptyset$. Wegen der Dichtheit von O in X gilt, dass

$$A^\circ = \left(\overline{A^c}\right)^c = \left(\overline{O}\right)^c = X^c = \emptyset.$$

□

1.1.5 Beispiel.

(i) Jede einpunktige Menge $\{x\}$ aus $\mathbb{R}^d$ ist wegen Lemma 1.1.4 nirgends dicht in $\mathbb{R}^d$.

(ii) Die abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen muss nicht nirgends dicht sein. Man nehme als Beispiel die rationale Zahlen $\mathbb{Q}$. Dann lässt sich $\mathbb{Q}$ als eine abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen schreiben, nämlich $\mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$. Da aber die rationale Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen, kann $\mathbb{Q}$ wegen Bemerkung 1.1.2 nicht nirgends dicht sein.

1.2 Der Baire'sche Kategoriensatz

Ehe wir uns der Aussage des Satzes von Baire widmen, wollen wir uns mit der Notation, die Baire in seiner Doktorarbeit „Sur les fonctions de variable réelles“ von 1899 vorgestellt hat, beschäftigen. In diesem Abschnitt werden wir sehen, warum der Satz von Baire oft als der *Baire'sche Kategoriensatz* bezeichnet wird.

1.2.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann heißt eine Teilmenge E von X

(i) *von 1. Kategorie in X*, wenn sich E als eine abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen in X schreiben lässt. Man bezeichnet die Mengen von 1. Kategorie auch als *mager*.

(ii) *von 2. Kategorie in X*, wenn E nicht von erster Kategorie ist. Mengen von 2. Kategorie nennt man auch *fett*.

(iii) *komager* oder *residuell*, wenn E^c von 1. Kategorie ist.

Baires Idee für den Kategorienbegriff beschreibt die Vorstellung von Größe einer Menge in topologischem Sinn. So kann man magere Mengen in gewissem Sinne als „klein“ und komagere als „groß“ betrachten. Die Mengen von 2. Kategorie sind in diesem Sinne nicht unbedingt „groß“, sondern nur „nicht klein“.

1.2.2 Bemerkung. Offensichtlich gilt:

(i) Jede Teilmenge einer mageren Menge ist mager.

(ii) Die abzählbare Vereinigung von mageren Mengen ist wieder mager.

(iii) Der abzählbare Durchschnitt von komageren Mengen ist wieder komager.

(iv) Jede offene und dichte Menge ist komager.

Obwohl Baire selbst nur die reelle Zahlenebene betrachtet hat, lassen sich die Resultate auch auf vollständige metrische Räume erweitern. Im Folgenden sei (X, d) ein metrischer Raum.

Der Satz von Baire lässt sich auf unterschiedliche Arten formulieren. In dieser Arbeit werden drei Versionen des Satzes von Baire vorgestellt und auf ihre Gleichwertigkeit überprüft. Für den Beweis, dass (i) aus Satz 1.2.3 in jedem vollständigen metrischen Raum gilt, siehe [F, Satz 4.1.1].

1.2.3 Satz. (Varianten des Satzes von Baire). *Folgende drei Aussagen sind äquivalent und in jedem vollständigen metrischen Raum wahr.*

(i) Seien V_n, $n \in \mathbb{N}$, offene und dichte Teilmengen von X. Dann ist auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ dicht in X. Insbesondere gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$.

(ii) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von X mit leerem Inneren, so hat auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ein leeres Inneres.

(iii) Jede offene, nicht leere Teilmenge von X ist von 2. Kategorie, d.h. sie lässt sich nicht als eine abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Teilmengen darstellen. Insbesondere ist (X, d) in sich selbst von 2. Kategorie.

Beweis.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Seien V_n, $n \in \mathbb{N}$, offene und dichte Teilmengen von X. Nach Lemma 1.1.4 sind V_n^c abgeschlossen und nirgends dicht. Wegen (ii) gilt

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n^c\right)^\circ = \emptyset.$$

Nimmt man davon das Komplement, erhält man

$$\overline{\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n^c\right)^c} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n} = X.$$

Somit liegt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ dicht in X.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Seien A_n, $n \in \mathbb{N}$, abgeschlossene Teilmengen von X mit $A_n^\circ = \emptyset$. Dann gilt

$$A_n^\circ = \emptyset \Leftrightarrow \overline{A_n^c} = X.$$

Nach Definition sind A_n^c dichte Teilmengen von X und sind sogar offen. Wegen (i) gilt

$$\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c} = X.$$

Nimmt man davon das Komplement, erhält man

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^\circ = \emptyset.$$

Somit hat auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ein leeres Inneres.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Angenommen es existiert eine offene und nichtleere Teilmenge O von X, sodass O sich als abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Teilmengen E_n darstellen lässt, also

$$O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Da O nichtleer ist, gilt

$$\emptyset \neq O \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{E_n}.$$

Somit haben wir gezeigt, dass es eine Familie von abgeschlossenen Mengen mit leerem Inneren gibt, deren Vereinigung nicht leeres Inneres hat.

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Angenommen A_n, $n \in \mathbb{N}$, seien abgeschlossene Teilmengen von X mit leerem Inneren und

$$O := \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^{\circ}$$

ist eine nichtleere offene Teilmenge von X. Dann gilt

$$O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap O)\,,$$

wobei $A_n \cap O$ nirgends dicht sind. Es gibt also eine nichtleere offene Teilmenge von X, die sich als abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen schreiben lässt. □

1.2.4 Beispiel. Wie aus Beispiel 1.1.5 ersichtlich ist, sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ von 1. Kategorie in $\mathbb{R}$. Somit bilden die irrationale Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine komagere Menge. Der Baire'sche Kategoriensatz liefert uns einen alternativen Beweis für die Dichtheit der irrationalen Zahlen in $\mathbb{R}$. Denn betrachtet man $\mathbb{Q}$ als die abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen, also $\bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\}$. Dann gilt

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{x\in\mathbb{Q}} \mathbb{R} \setminus \{x\},$$

wobei $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ nach Lemma 1.1.4. offen und dicht ist. Als abzählbarer Durchschnitt von offenen und dichten Mengen ist die Menge der irrationalen Zahlen nach dem Satz von Baire dicht in $\mathbb{R}$.

1.2.5 Korollar. *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist jede komagere Teilmenge von X dicht in X.*

Beweis. Angenommen E ist eine komagere Teilmenge von X, die nicht dicht in X ist. Dann existiert eine abgeschlossene Kugel $\overline{B}$, die ganz in E^{c} enthalten ist. Da E komager ist, lässt sich E^{c} als abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen A_n schreiben. Somit gilt

$$\overline{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \overline{B}\right) \subseteq E^{\mathrm{c}},$$

wobei $A_n \cap \overline{B}$ selbst wieder nirgends dichte Mengen sind. Nun ist $\overline{B}$ als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums versehen mit der Metrik $d\,|_{\overline{B}\times\overline{B}}$ selbst ein vollständiger metrischer Raum, womit wir einen Widerspruch zu Satz 1.2.3 erhalten. □

2 Anwendungen

Im folgenden Kaptiel beschäftigen wir uns zunächst mit dem Hauptresultat von Baires Dissertation. Danach setzen wir uns mit einem Theorem von Grothendieck auseinander.

2.1 Stetigkeit der Grenzfunktion einer Folge von stetigen Funktionen

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen und komplexwertigen Funktionen auf X. Angenommen der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

existiert für alle Punkte $x \in X$. Es ist eine wohlbekannte Tatsache, dass dann die Grenzfunktion f stetig ist, wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Nun stellt sich die folgende Frage: Kann man Stetigkeitspunkte von f garantieren, wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur punktweise gegen f konvergiert? Mit Hilfe des Satzes von Baire liefert uns der folgende Satz, dass die Grenzfunktion f in der Tat an den „meisten" Punkten stetig ist.

2.1.1 Satz. *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen und komplexwertigen Funktionen auf X. Existiert der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

für alle $x \in X$, dann ist die Menge aller Punkte, in denen f stetig ist, eine komagere Menge in X.

Mit anderen Worten: Die Menge der Unstetigkeitsstellen von f ist eine magere Menge in X.

Um zu zeigen, dass die Menge $\mathcal{D}$ der Unstetigkeitsstellen von f von 1. Kategorie ist, erweist es sich als nützlich, den Begriff der *Oszillation* einer Funktion in einem Punkt heranzuziehen.

2.1.2 Definition. Seien (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Die *Oszillation von f in einem Punkt $x \in X$* ist definiert durch

$$osc(f)(x) := \lim_{r\to 0} \omega(f)(r, x),$$

wobei $\omega(f)(r, x) := \sup_{y,z\in B_r(x)} |f(y) - f(z)|$.

2.1.3 Bemerkung.

(*i*) Der Grenzwert $osc(f)(x)$ exisitiert sicher, da $\omega(f)(r, x)$ monoton von r abhängt und von unten durch 0 beschränkt ist.

(*ii*) Insbesondere gilt $osc(f)(x) < \epsilon$ genau dann, wenn es eine offene Kugel $B_r(x)$ mit $x \in X$ als Mittelpunkt und Radius $r > 0$ gibt, so dass $|f(y) - f(z)| < \epsilon$ für $y, z \in B_r(x)$.

2.1.4 Lemma. *Seien (X, d) ein metrischer Raum, $f : X \to \mathbb{C}$ eine Abbildung, $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(*i*) *Es ist $osc(f)(x) = 0$ genau dann, wenn f stetig in x ist.*

(ii) Die Menge $E_\epsilon = \{x \in X : osc(f)(x) < \epsilon\}$ ist offen.

Beweis.

(i) Sei $osc(f)(x) = 0$ und sei $\epsilon > 0$. Nach Bemerkung 2.1.3 (ii) gibt es ein $\delta > 0$, sodass $w(f)(\delta, x) < \epsilon$, d.h.

$$w_1, w_2 \in B_\delta(x) \Rightarrow |f(w_1) - f(w_2)| < \epsilon.$$

Also ist f stetig in x.

Sei umgekehrt f stetig in x und sei $\epsilon > 0$ beliebig. Per definitionem gibt es zu beliebigem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für alle $t \in X$ mit $d(x,t) < \delta$ gilt: $|f(x) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2}$. Sei nun $r \leq \delta$ und seien $y, z \in B_r(x)$. Dann gilt

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{und} \quad |f(x) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(z)| < \epsilon.$$

Daraus folgt $w(f)(r, x) \leq \epsilon$ und somit auch $osc(f)(x) \leq \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Behauptung.

(ii) Sei $x \in E_\varepsilon$. Nach Konstruktion gibt es ein $r > 0$, so dass $\sup_{y,z \in B_r(x)} |f(y) - f(z)| < \varepsilon$. Sei nun $x^* \in B_{\frac{r}{2}}(x)$ und $v, w \in B_{\frac{r}{2}}(x^*)$. Dann sind v, w sicherlich auch Elemente von $B_r(x)$. Also gilt

$$\sup_{v,w \in B_{\frac{r}{2}}(x^*)} |f(v) - f(w)| \leq \sup_{v,w \in B_r(x)} |f(v) - f(w)| < \epsilon$$

und damit

$$osc(f)(x^*) \leq \sup_{v,w \in B_r(x)} |f(v) - f(w)| < \epsilon,$$

womit $x^* \in E_\epsilon$ ist.

$\square$

Für den Beweis des Satzes 2.1.1 benötigen wir noch ein Lemma.

2.1.5 Lemma. *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen und komplexwertigen Funktionen auf X. Existiert der Grenzwert*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

für alle $x \in X$, dann existiert für eine gegebene offene Kugel $B \subseteq X$ und $\epsilon > 0$ eine offene Kugel $B_0 \subseteq B$ und eine Zahl $m \geq 1$, sodass

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \textit{für alle} \quad x \in B_0.$$

Beweis. Sei Y eine abgeschlossene Kugel in B. Dann ist Y versehen mit der eingeschränkten Metrik von X auch ein vollständiger metrischer Raum. Wir wollen nun den Satz von Baire auf den vollständigen metrischen Raum $(Y, d|_{Y \times Y})$ anwenden. Dazu definieren wir

$$M_l := \{x \in Y : \sup_{j,k \geq l} |f_j(x) - f_k(x)| \leq \epsilon\}.$$

Offenbar gilt

$$M_l = \bigcap_{j,k\geq l} \{x \in Y : |f_j(x) - f_k(x)| \leq \epsilon\}.$$

Wegen der Stetigkeit von f_j und f_k ist die Menge $\{x \in Y : |f_j(x) - f_k(x)| \leq \epsilon\}$ sogar abgeschlossen. Als Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist M_l selbst abgeschlossen.

Da die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f für alle $x \in X$ konvergiert, erhalten wir

$$Y = \bigcup_{l=1}^{\infty} M_l.$$

Nach dem Satz von Baire existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass M_m einen inneren Punkt enthält, d.h. es existiert ein $x \in M_m$ und eine offene Kugel $B_0 \subseteq M_m$ mit $x \in B_0$. Aufgrund der Konstruktion gilt daher

$$\sup_{j,k\geq m} |f_j(x) - f_k(x)| \leq \epsilon \quad \text{für} \;\; x \in B_0.$$

Lässt man k gegen $+\infty$ streben, so erhält man $|f_m(x) - f(x)| \leq \epsilon$ für alle $x \in B_0$, womit das Lemma bewiesen ist. □

Beweis. (von Satz 2.1.1) Wir definieren

$$F_n := \{x \in X : osc(f)(x) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Wir bemerken, dass F_n das Komplement der Menge E_ϵ mit $\epsilon = \frac{1}{n}$ aus Lemma 2.1.4 ist. Wegen der ersten Aussage von Lemma 2.1.4. erhalten wir

$$\mathcal{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

wobei $\mathcal{D}$ die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f bezeichnet. Der Satz ist bewiesen, wenn wir zeigen können, dass die Mengen F_n nirgends dicht sind.

Sei $n \geq 1$ fest. Da F_n als Komplement einer offenen Menge abgeschlossen ist, müssen wir nur mehr zeigen, dass $F_n^\circ = \emptyset$. Angenommen es würde gelten, dass $F_n^\circ \neq \emptyset$. Dann gibt es per definitionem eine offene Kugel B mit $B \subseteq F_n$. Nach Lemma 2.1.5 gibt es für $\epsilon = \frac{1}{4n}$ eine offene Kugel $B_0 \subseteq B$ und eine Zahl $m \geq 1$, so dass

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \frac{1}{4n} \quad \text{für alle} \;\; x \in B_0. \tag{1}$$

Wegen der Stetigkeit von f_m finden wir eine Kugel $B' \subseteq B_0$, so dass

$$|f_m(y) - f_m(z)| \leq \frac{1}{4n} \quad \text{für alle} \;\; y, z \in B'. \tag{2}$$

Somit erhalten wir mit der Dreiecksungleichung für $y, z \in B'$

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_m(z)| + |f_m(z) - f(z)| \leq \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} = \frac{3}{4n},$$

also

$$|f(y) - f(z)| < \frac{1}{n}.$$

Folglich erhalten wir $osc(f)(x') \leq \frac{1}{n}$, wobei wir mit x' das Zentrum der Kugel B' bezeichnen. Das ist ein Widerspruch zu der Tatsache, dass $x' \in F_n$, womit der Satz bewiesen ist. □

2.2 Grothendiecks Theorem über abgeschlossene Unterräume von L^p-Räumen

In diesem Abschnitt wollen wir eine interessante Aussage über abgeschlossene Unterräume von L^p-Räumen, die auf einer Theorie von Alexander Grothendieck (1928) beruht, beweisen. Dazu benötigen wir einige Resultate aus der Maß- und Integrationstheorie, die wir hier kurz anführen.

2.2.1 Satz. (Hölder-Ungleichung). *Sind f, g messbare Funktionen auf einem Maßraum $(X, \mathfrak{S}, \mu)$, so gilt für $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*

$$\int |fg| \, d\mu \leq \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}},$$

wobei $\frac{1}{q} = 0$ für $q = \infty$ vereinbart ist.

2.2.2 Satz. *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Dann gilt $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ und die entsprechende Normen genügen der Abschätzung*

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q \quad \text{für } f \in L^q(\mu),$$

wobei $\frac{1}{q} = 0$ für $q = \infty$ gesetzt wird.

Weiters benötigen wir den Satz vom abgeschlossenen Graphen, eine weitere Anwendung des Satzes von Baire.

2.2.3 Satz. (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Seien X, Y Banachräume und sei $f\colon X \to Y$ eine lineare Abbildung. Ist der Graph von f abgeschlossen in $X \times Y$, so ist f stetig.*

Beweis. Siehe [F, Satz 4.4.2]. □

2.2.4 Bemerkung. Der Graph von f ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt:
Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in X$, für die die beiden Limiten $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existieren, gilt $y = f(x)$.

Nun kommen wir zu der zentralen Aussage dieses Abschnitts:

2.2.5 Satz. *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Sei nun*

(i) E ein abgeschlossener Unterraum von $L^p(\mu)$ für ein $1 \leq p < \infty$ und

(ii) E in $L^\infty(\mu)$ enthalten.

Dann hat E endliche Dimension.

Wegen $\mu(X) < \infty$ ist $E \subseteq L^\infty(\mu)$ nach Satz 2.2.2 auch in $L^2(\mu)$ enthalten mit

$$\|f\|_2 \leq \mu(X)^{\frac{1}{2}} \|f\|_\infty \quad \text{für } f \in E.$$

Die Idee des Beweises ist es, diese Ungleichung umzudrehen und dann die Hilbertraumstruktur von $L^2(\mu)$ auszunützen.

Beweis. Sei nun E versehen mit der L^p-Norm. Als abgeschlossener Unterraum des Banachraumes $L^p(\mu)$ ist $(E, \|.\|_{L^p})$ also selbst ein Banachraum.

Schritt 1. Die identische Abbildung

$$I\colon \begin{cases} E & \to & L^\infty(\mu) \\ f & \mapsto & I(f) = f \end{cases}$$

ist linear. Wir zeigen nun, dass der Graph von I abgeschlossen in $E \times L^\infty(\mu)$ ist. Sei $((f_n, f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge im Graphen von I, die gegen ein $(f, g) \in E \times L^\infty(\mu)$ konvergiert. Da diese Konvergenz bezüglich der Summennorm zu verstehen ist, konvergiert also $f_n \to f$ bzgl. $\|.\|_p$ in E und $f_n \to g$ bzgl. $\|.\|_\infty$ in $L^\infty(\mu)$. Damit sind f und g Grenzwert einer Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ im Sinne der Konvergenz punktweise fast überall. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes gilt also $f = g$ in $L^\infty(\mu)$ bzw. $L^p(\mu)$. Damit ist der Graph abgeschlossen.

Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen [Satz 2.2.3] ist I dann stetig, also existiert ein $M > 0$, sodass

$$\|f\|_\infty \leq M\|f\|_p \quad \text{für alle} \quad f \in E. \tag{3}$$

Schritt 2. Wir müssen die Ungleichung (3) auf

$$\|f\|_\infty \leq K\|f\|_2 \quad \text{für alle} \quad f \in E \quad \text{und ein} \quad K > 0 \tag{4}$$

verschärfen, damit wir die Hilbertraum-Struktur von $L^2(\mu)$ ausnützen können.

▷ Für $1 \leq p \leq 2$ folgt schon aus dem Satz 2.2.2, dass

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|f\|_2.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\|f\|_\infty \leq M\|f\|_p \leq M\mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|f\|_2 \quad \text{für alle} \quad f \in E.$$

▷ Für $2 < p < \infty$ ehalten wir (4), indem wir folgende offensichtliche Ungleichung integrieren:

$$|f(x)|^p \leq \|f\|_\infty^{p-2}\,|f(x)|^2.$$

Somit erhalten wir

$$\|f\|_p^p \leq \|f\|_\infty^{p-2}\,\|f\|_2^2 \leq M^{p-2}\,\|f\|_p^{p-2}\,\|f\|_2^2,$$

wobei die zweite Ungleichung wegen (3) gilt. Umstellen liefert

$$\|f\|_p \leq M^{\frac{p-2}{2}}\,\|f\|_2.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\|f\|_\infty \leq M\|f\|_p \leq M^{\frac{p}{2}}\|f\|_2 \quad \text{für alle} \quad f \in E.$$

Schritt 3. E hat endliche Dimension.

Sei $\{f_1, \dots, f_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von E. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $\{f_1, \dots, f_n\}$ ein Orthonormalsystem in $L^2(\mu)$ ist, da wir wegen $E \subseteq L^2(\mu)$ mit dem Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt aus jedem endlichen System von unabhängigen Vektoren ein Orthonormalsystem erzeugen können. Folglich gilt

$$(f_i, f_j) = \int_X f_i \overline{f_j}\, d\mu = \begin{cases} 1 \ , & i = j \\ 0 \ , & i \neq j. \end{cases}$$

Weiters sei $\mathbb{B}$ die Einheitskugel in $\mathbb{C}^n$, also

$$\mathbb{B} = \{\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^n |\zeta_i|^2 \leq 1\}.$$

Für jedes $\zeta \in \mathbb{B}$ definieren wir $f_\zeta(x) := \sum_{i=1}^n \zeta_i f_i(x)$. Dann ist f_ζ ein Element von E und es gilt sogar

$$\|f_\zeta\|_2^2 = \|\sum_{i=1}^n \zeta_i f_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \|\zeta_i f_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |\zeta_i|^2 \underbrace{\|f_i\|_2^2}_{=1} = \sum_{i=1}^n |\zeta_i|^2 \leq 1, \tag{5}$$

wobei die zweite Gleichheit wegen des Satzes von Pythagoras gilt, siehe [F, Proposition 3.1.2], und die letzte, da $\{f_1, \dots, f_n\}$ ein Orthonormalsystem ist.

Also erhalten wir mit (4) und (5) für $\zeta \in \mathbb{B}$

$$\|f_\zeta\|_\infty \leq K \|f_\zeta\|_2 \leq K.$$

Das heißt nach der Definition von $L^\infty(\mu)$, dass

$$\mu(\underbrace{\{x \in X : |f_\zeta(x)| > K\}}_{=:X_\zeta^c}) = 0, \quad \zeta \in \mathbb{B}.$$

Somit ist für alle $\zeta \in \mathbb{B}$ die Menge X_ζ messbar mit $\mu(X_\zeta) = \mu(X)$ und

$$|f_\zeta(x)| \leq K \quad \text{für alle } \ x \in X_\zeta.$$

Sei Q eine abzählbare dichte Teilmenge von $\mathbb{B}$. Wir zeigen, dass dann eine Teilmenge X' von X mit vollem Maß existiert, sodass

$$|f_\zeta(x)| \leq K \quad \text{für alle } \ x \in X' \text{ und } \zeta \in Q.$$

Setze

$$X' := \bigcap_{\zeta \in Q} X_\zeta.$$

Nun betrachte man $X'^c = \bigcup_{\zeta \in Q} X_\zeta^c$. Wegen der σ-Subadditivität von μ ist jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge, also

$$\mu(X'^c) \leq \sum_{\zeta \in Q} \mu(X_\zeta^c) = 0.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\mu(X) = \mu(X' \cup X'^c) = \mu(X') + \mu(X'^c) = \mu(X').$$

Für jedes festes $x \in X'$ ist die Abbildung $\zeta \mapsto f_\zeta(x)$ stetig auf $\mathbb{B}$. Somit gilt wegen $\overline{Q} = \mathbb{B}$

$$|f_\zeta(x)| \leq K \quad \text{für alle } \; x \in X' \text{ und } \zeta \in \mathbb{B}. \tag{6}$$

Wir behaupten nun, dass dann Folgendes gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} |f_i(x)|^2 \leq K^2 \quad \text{für alle } \; x \in X'. \tag{7}$$

Um dies einzusehen, sei $\sigma = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ und setze $\zeta_i = \frac{\overline{f_i(x)}}{\sigma}$. Dann ist ζ in $\mathbb{B}$.

Nun setzen wir in (6) ein und erhalten:

$$K \geq |f_\zeta(x)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(x)\overline{f_i(x)}}{\sigma} \right| = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^2}.$$

Also gilt (7).

Wenn wir nun (7) integrieren, erhalten wir

$$K^2 \mu(X) \geq \int\limits_X \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^2 \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int\limits_X |f_i(x)|^2 \, d\mu}_{=1} = n.$$

DAmit haben wir gezeigt, dass dim $E \leq K^2 \mu(X)$. $\square$

Literatur

[F] H. Woracek, M. Kaltenbäck, M. Blümlinger: *Funktionalanalysis*, Vorlesungsskriptum Sommersemester 2017.

[K] N. Kusolitsch: *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie - Eine Einführung*, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 2014.

[P] E. M. Stein, R. Shakarchi: *Functional analysis - an introduction to furhter topics in analysis*, Princeton University Press, Princeton, 2011.