



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

SEMINARARBEIT

# Teilbarkeit in der Halbgruppe der stetigen Funktionen

ausgeführt am

Institut für  
Analysis und Scientific Computing  
TU Wien

unter der Anleitung von

**Ao.Univ.Prof. Dr. Harald Woracek**

durch

**Leon Renkin**

Matrikelnummer: 11919176

## *INHALTSVERZEICHNIS*

### **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Realkompakte Räume</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Halbgruppen und Ideale</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>d-Ideale und z-Filter</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b><math>\sigma</math>-Stabilität</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Hauptresultate</b>	<b>15</b>

## 1 Einleitung

Diese Seminararbeit beschäftigt sich mit der Fragestellung, inwiefern ein topologischer Raum  $X$  durch gewisse strukturelle Eigenschaften der Algebra  $C(X)$  eindeutig bestimmt ist. Mit  $C(X)$  ist hier der Raum der stetigen Funktionen von  $X$  nach  $\mathbb{R}$  gemeint. Konkret geht es um eine Verallgemeinerung des folgenden bekannten Satzes:

**Satz 1.1.** *Seien  $X$  und  $Y$  kompakte Hausdorff-Räume. Dann sind  $X$  und  $Y$  homöomorph genau dann, wenn  $C(X)$  und  $C(Y)$  als Ringe isomorph sind.*

Ein Beweis für diesen Satz wird in [7, Kapitel 2.5] ausgearbeitet.

Als erste Verallgemeinerung kann die Voraussetzung, dass  $X$  und  $Y$  kompakte Hausdorff-Räume sind, abgeschwächt werden. Der Begriff des realkompakten Raumes (siehe Def. 2.8) wurde von Edwin Hewitt eingeführt<sup>1</sup>. Hewitt zeigt in [6, Seite 92-93], dass in Satz 1.1 die Voraussetzungen „kompakt“ und „Hausdorff“ durch „realkompakt“ ersetzt werden können. Dass es sich wirklich um eine Verallgemeinerung handelt, wird in [3, Seite 153] gezeigt: Jeder kompakte Hausdorff-Raum ist realkompakt. Im Allgemeinen müssen realkompakte Räume nicht kompakt sein. In Abschnitt 2 werden realkompakte Räume genauer behandelt.

Zusätzlich ist es möglich, die Voraussetzung der „Ringisomorphie“ in Satz 1.1 durch „multiplikative Halbgruppenisomorphie“ zu ersetzen. Aber auch die Halbgruppenisomorphie kann noch weiter abgeschwächt werden. Im Rahmen dieser Seminararbeit wird gezeigt, dass realkompakte Räume eindeutig durch die Teilbarkeitsrelation bezüglich der punktweisen Multiplikation auf  $C(X)$  bestimmt sind (siehe Satz 6.1). Außerdem lässt sich aus diesem Resultat folgern, dass für beliebige topologische Räume die multiplikative Halbgruppenisomorphie der jeweiligen stetigen Funktionen äquivalent zur Ringisomorphie ist (siehe Korollar 6.4).

In Abschnitt 2 werden  $z$ -Filter und realkompakte Räume definiert und untersucht. Im dritten Abschnitt werden quasireelle Halbgruppen definiert und  $d$ -Ideale mit Hilfe eines Teilbarkeitsoperators eingeführt. In den Kapiteln 4 und 5 werden die Zusammenhänge der  $z$ -Filter und  $d$ -Ideale untersucht. Mithilfe der Resultate aus den vorherigen Kapitel wird dann in Abschnitt 6 die Verallgemeinerung von Satz 1.1 bewiesen.

Diese Arbeit nimmt Bezug auf das Werk „Semigroups of continuous functions“ von Ákos Császár [1], sofern nicht explizit auf andere Quellen hingewiesen wird.

---

<sup>1</sup>in [6] werden realkompakte Räume von Hewitt als „Q-Spaces“ bezeichnet

## 2 Realkompakte Räume

Für einen beliebigen topologischen Raum  $X$  sei  $C(X)$  der Raum aller stetigen Funktionen von  $X$  nach  $\mathbb{R}$  mit der euklidischen Topologie. Weiters definiere für  $f \in C(X)$ :

$$Z(f) := \{x \in X : f(x) = 0\}$$

$$Z(X) := \{Z(f) : f \in C(X)\}$$

**Definition 2.1.** Für einen beliebigen topologischen Raum  $X$  heißt eine Menge  $\mathcal{F} \subseteq Z(X)$  *z-Filter* auf  $X$ , wenn

- (i)  $\emptyset \neq \mathcal{F} \neq Z(X)$
- (ii)  $\forall Z_1 \in \mathcal{F} \forall Z_2 \in Z(X) : Z_1 \subseteq Z_2 \Rightarrow Z_2 \in \mathcal{F}$
- (iii)  $\forall Z_1, Z_2 \in \mathcal{F} : Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{F}$

Ein z-Filter  $\mathcal{F}$  heißt *maximal*, wenn er bezüglich der Halbordnung „ $\subseteq$ “ in der Menge aller z-Filter maximal ist. Ein z-Filter  $\mathcal{F}$  heißt  *$\sigma$ -stabil*, wenn er bezüglich abzählbaren Durchschnitten abgeschlossen ist<sup>2</sup>. Wir bezeichnen einen z-Filter  $\mathcal{F}$  als *fixiert*, wenn  $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ .

**Bemerkung 2.2.** Es gilt  $\emptyset = Z(1) \in Z(X)$ , wobei mit 1 die konstante 1-Funktion gemeint ist. Offensichtlich gilt für jeden Filter, dass  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ . Denn sonst würde  $\mathcal{F} = Z(X)$  aus (ii) folgen.

**Bemerkung 2.3.** Für jeden z-Filter  $\mathcal{F}$  gibt es einen maximalen z-Filter  $\mathcal{F}_{max}$  mit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{max}$ . Betrachte hierfür die Menge

$$M := \{\mathcal{F}' : \mathcal{F}' \text{ ist z-Filter} \wedge \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'\}.$$

Für jede Kette  $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$  in  $M$  ist  $\overline{\mathcal{F}} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$  ebenfalls in  $M$ , denn  $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathcal{F}}$  und  $\overline{\mathcal{F}}$  ist ein z-Filter:

- (i)  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$  ist nichtleer, da alle  $\mathcal{F}_i$  nichtleer sind. Für alle  $i \in I$  ist  $\emptyset \notin \mathcal{F}_i$ , dementsprechend ist  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i \neq Z(X)$ .
- (ii) Seien  $Z_1 \in \overline{\mathcal{F}}, Z_2 \in Z(X)$  mit  $Z_1 \subseteq Z_2$  beliebig. Es gibt ein  $i \in I$  mit  $Z_1 \in \mathcal{F}_i$ . Dieses  $\mathcal{F}_i$  ist ein z-Filter, also folgt  $Z_2 \in \mathcal{F}_i \subseteq \overline{\mathcal{F}}$  aus Eigenschaft (ii).
- (iii) Für  $Z_1, Z_2 \in \overline{\mathcal{F}}$  gibt es  $i, j \in I$ , sodass  $Z_1 \in \mathcal{F}_i$  und  $Z_2 \in \mathcal{F}_j$ . Da  $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$  eine Kette bezüglich „ $\subseteq$ “ ist, muss entweder  $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$  oder  $\mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_i$  gelten. Sei o.B.d.A  $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$ , dann sind  $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}_j$ . Aus Eigenschaft (iii) folgt nun  $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{F}_j \subseteq \overline{\mathcal{F}}$ .

<sup>2</sup>in der (englischsprachigen) Literatur wird üblicherweise die Bezeichnung „real“ statt „ $\sigma$ -stabil“ verwendet

## 2 REALKOMPAKTE RÄUME

Also ist  $\overline{\mathcal{F}}$  eine obere Schranke der Kette. Deshalb ist durch das Lemma von Kuratowski-Zorn die Existenz eines maximalen Elements in  $M$  gewährleistet. Ein maximales Element in  $M$  ist offensichtlich auch ein maximales Element in der Menge aller  $z$ -Filter.

**Lemma 2.4.** *Für einen beliebigen topologischen Raum  $X$  ist  $Z(X)$  bezüglich abzählbaren Durchschnitten abgeschlossen. ([4, Lemma 1.14])*

*Beweis.* Sei  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige abzählbare Familie in  $Z(X)$ , wähle  $f_n \in C(X)$  mit  $Z_n = Z(f_n)$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Definiere:

$$h_n(x) := \min \{2^{-n}, |f_n(x)|\}$$

$$h(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} h_n(x)$$

Die Funktionen  $h_n$  sind als Maximum von stetigen Funktionen stetig. Die Reihe konvergiert gleichmäßig, da  $|h_n| \leq 2^{-n}$ . Dementsprechend ist auch  $h$  stetig. Nun gilt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z(f_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z(h_n) = Z(h) \in Z(X).$$

□

**Satz 2.5.** *Sei  $X$  ein beliebiger topologischer Raum und  $\mathcal{F}$  ein maximaler  $z$ -Filter auf  $X$ . Eine Menge  $Z \in Z(X)$  erfüllt  $Z \in \mathcal{F}$  genau dann, wenn  $Z$  mit allen Elementen von  $\mathcal{F}$  nichtleeren Schnitt hat. ([4, Theorem 2.6])*

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Sei  $Z \in \mathcal{F}$ . Angenommen, es gibt  $A \in \mathcal{F}$ , sodass  $A$  und  $Z$  leeren Schnitt haben. Dann folgt  $\emptyset = Z \cap A \in \mathcal{F}$ . Dies ist ein Widerspruch, siehe Bemerkung 2.2.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $Z \in Z(X)$  mit  $Z \cap Z' \neq \emptyset$  für alle  $Z' \in \mathcal{F}$ . Dann wird durch  $\mathcal{F} \cup \{Z\}$  ein  $z$ -Filter erzeugt. Genauer:

$$\mathcal{F}' := \{Z' \in Z(X) : \exists n \in \mathbb{N} \exists Z_1, \dots, Z_n \in \mathcal{F} \cup \{Z\} : \bigcap_{i=1}^n Z_i \subseteq Z'\}$$

ist ein  $z$ -Filter.

- (i) Offensichtlich ist  $\mathcal{F}'$  nichtleer. Die Menge  $\mathcal{F}$  ist ein  $z$ -Filter, deshalb gilt  $\emptyset \notin \mathcal{F}$  und da  $\mathcal{F}$  bezüglich endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist, sind alle endliche Schnitte von Elementen aus  $\mathcal{F}$  nichtleer. Da auch  $Z$  mit jedem  $Z' \in \mathcal{F}$  nichtleeren Schnitt hat, folgt  $\emptyset \notin \mathcal{F}'$ .
- (ii)  $\mathcal{F}'$  ist trivialerweise bezüglich Obermengen abgeschlossen.

## 2 REALKOMPAKTE RÄUME

(iii) Für  $\bigcap_{i=1}^n Z_i \subseteq Z'$  und  $\bigcap_{j=1}^m \overline{Z_j} \subseteq \overline{Z}$  gilt

$$\left( \bigcap_{i=1}^n Z_i \right) \cap \left( \bigcap_{j=1}^m \overline{Z_j} \right) \subseteq Z' \cap \overline{Z}.$$

Somit ist  $\mathcal{F}'$  ein  $z$ -Filter mit  $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ . Aus der Maximalität von  $\mathcal{F}$  folgt nun  $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ . Insbesondere gilt also  $Z \in \mathcal{F}$ .  $\square$

**Korollar 2.6.** *Sei  $X$  ein beliebiger topologischer Raum und  $\mathcal{F}$  ein maximaler  $z$ -Filter auf  $X$ . Dann gilt für  $Z_1, Z_2 \in Z(X)$ : ([4, Lemma 2.13])*

$$Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{F} \Leftrightarrow Z_1 \in \mathcal{F} \vee Z_2 \in \mathcal{F}$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “: Folgt direkt aus Eigenschaft (ii) von  $z$ -Filtern.

„ $\Rightarrow$ “ mit Kontraposition: Seien  $Z_1, Z_2 \notin \mathcal{F}$ . Wegen Satz 2.5 gibt es nun  $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$  mit

$$Z_1 \cap A_1 = Z_2 \cap A_2 = \emptyset.$$

Die Menge  $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$  erfüllt

$$(A_1 \cap A_2) \cap (Z_1 \cup Z_2) = \emptyset.$$

Dementsprechend folgt  $Z_1 \cup Z_2 \notin \mathcal{F}$ , denn  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ .  $\square$

**Definition 2.7.** Ein topologischer Hausdorff-Raum  $X$  heißt *vollständig regulär*, wenn es für jede abgeschlossene Menge  $A \subseteq X$  und für jeden Punkt  $x \in X \setminus A$  eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, die  $f(x) = 0$  und  $f(A) = \{1\}$  erfüllt.

**Definition 2.8.** Ein vollständig regulärer Raum heißt *realkompakt*, wenn jeder maximale und  $\sigma$ -stabile  $z$ -Filter fixiert ist.

**Bemerkung 2.9.** In [4, Seite 160] wird folgende Äquivalenz bewiesen: Ein topologischer Raum ist genau dann realkompakt, wenn er homöomorph zu einer abgeschlossenen Teilmenge eines kartesischen Produktes (mit beliebiger Indexmenge) der reellen Zahlen mit der Produkttopologie ist. Dementsprechend sind zum Beispiel alle abgeschlossenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  realkompakt. Außerdem wird in [3, Seite 153] gezeigt, dass jeder kompakte Hausdorff-Raum realkompakt ist. Also ist realkompakt eine echt schwächere Voraussetzung als kompakt und Hausdorff.

**Lemma 2.10.** *Sei  $X$  ein vollständig regulärer Raum. Dann ist für alle  $x \in X$  die Menge  $\mathcal{F}_x := \{Z \in Z(X) : x \in Z\}$  ein maximaler,  $\sigma$ -stabiler und fixierter  $z$ -Filter auf  $X$ . Außerdem gilt  $\mathcal{F}_x \neq \mathcal{F}_y$  für  $x \neq y$ .*

## 2 REALKOMPAKTE RÄUME

*Beweis.*

- (i) Es gilt  $Z(0) = X \in \mathcal{F}_x$  und  $Z(1) = \emptyset \notin \mathcal{F}_x$ .
- (ii) Seien  $Z_1 \in \mathcal{F}_x, Z_2 \in Z(X)$  mit  $Z_1 \subseteq Z_2$ . Dann gilt  $x \in Z_1 \subseteq Z_2$ .
- (iii) Seien  $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}_x$ . Aus  $x \in Z_1$  und  $x \in Z_2$  folgt  $x \in Z_1 \cap Z_2$ .

Der Filter  $\mathcal{F}_x$  ist trivialerweise fixiert, da  $x \in \bigcap \mathcal{F}_x$ . Laut Lemma 2.4 gilt für  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $\mathcal{F}_x$ , dass  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_n \in Z(X)$ . Offensichtlich gilt auch  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_n$ , somit folgt insgesamt  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_n \in \mathcal{F}_x$ . Also ist  $\mathcal{F}_x$   $\sigma$ -stabil.

Nun zeigen wir die Maximalität von  $\mathcal{F}_x$ : Angenommen, es gibt einen  $z$ -Filter  $\mathcal{F}$ , der eine echte Obermenge von  $\mathcal{F}_x$  ist. Dann gibt es  $Z(g) \in \mathcal{F}$ , sodass  $x \notin Z(g)$  beziehungsweise  $g(x) \neq 0$ . Die Menge  $Z(g) = g^{-1}(\{0\})$  ist eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$  mit  $x \notin Z(g)$ . Da  $X$  vollständig regulär ist, können wir  $f \in C(X)$  mit  $f(x) = 0$  und  $f|_{Z(g)} = 1$  wählen. Da  $x \in Z(f)$ , gilt  $Z(f) \in \mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{F}$ . Also folgt  $\emptyset = Z(f) \cap Z(g) \in \mathcal{F}$ . Das ist ein Widerspruch, siehe Bemerkung 2.2. Somit ist  $\mathcal{F}_x$  ein maximaler  $z$ -Filter.

Der Raum  $X$  ist ein Hausdorff-Raum, also wähle für  $x \neq y$  zwei disjunkte offene Mengen  $O_x, O_y$  mit  $x \in O_x, y \in O_y$ . Durch die vollständige Regularität von  $X$  ist die Existenz einer Funktion  $f \in C(X)$  mit  $f(x) = 0$  und  $f(X \setminus O_x) = \{1\}$  gewährleistet. Offensichtlich liegt  $Z(f)$  in  $\mathcal{F}_x$ , aber nicht in  $\mathcal{F}_y$ . Dementsprechend gilt  $\mathcal{F}_x \neq \mathcal{F}_y$ .  $\square$

**Definition 2.11.** Sei  $X$  ein vollständig regulärer Raum. Definiere

$$vX := \{\mathcal{F} \subseteq Z(X) : \mathcal{F} \text{ ist } \sigma\text{-stabiler, maximaler } z\text{-Filter}\},$$

wobei durch die Mengen

$$B_X(Z) = \{\mathcal{F} \in vX : Z \in \mathcal{F}\} \text{ für } Z \in Z(X)$$

eine Basis der abgeschlossenen Mengen in  $vX$  gegeben ist. Wir nennen  $vX$  die *Hewitt-Realkompaktifizierung* von  $X$ .

**Bemerkung 2.12.** Es gilt

$$B_X(Z(1)) = \{\mathcal{F} \in vX : Z(1) = \emptyset \in \mathcal{F}\} = \emptyset,$$

insbesondere ist  $\bigcap_{Z \in Z(X)} B_X(Z) = \emptyset$ . Weiters ist  $\{B_X(Z) : Z \in Z(X)\}$  unter endlichen Vereinigungen abgeschlossen:

$$\begin{aligned} & B_X(Z(f)) \cup B_X(Z(g)) \\ &= \{\mathcal{F} \in vX : Z(f) \in \mathcal{F} \vee Z(g) \in \mathcal{F}\} \\ &= \{\mathcal{F} \in vX : Z(f) \cup Z(g) \in \mathcal{F}\} \\ &= \{\mathcal{F} \in vX : Z(f \cdot g) \in \mathcal{F}\} \\ &= B_X(Z(f \cdot g)) \end{aligned}$$

### 3 HALBGRUPPEN UND IDEALE

Hier wurde für den zweiten Schritt Korollar 2.6 verwendet. Somit wird durch die Familie  $B_X(Z)_{Z \in Z(X)}$  als Basis der abgeschlossenen Mengen wirklich eine Topologie auf  $vX$  induziert.

**Bemerkung 2.13.** Laut Lemma 2.10 gilt  $\mathcal{F}_x = \{Z \in Z(X) : x \in Z\} \in vX$  für alle  $x \in X$ . In [4, Theorem 6.5, Corollary 8.5] wurde gezeigt, dass jeder vollständig reguläre Raum  $X$  durch die Abbildung

$$x \mapsto \{Z \in Z(X) : x \in Z\}$$

stetig und als dichte Teilmenge in  $vX$  eingebettet werden kann. Jede stetige Funktion von  $X$  nach  $\mathbb{R}$  kann auf eine stetige Funktion von  $vX$  nach  $\mathbb{R}$  fortgesetzt werden. Ein weiteres wichtiges Resultat ist das Folgende: Ein vollständig regulärer Raum  $X$  ist realkompakt genau dann, wenn  $X$  homöomorph zu  $vX$  ist. Diese Charakterisierung realkompakter Räume wird im Laufe dieser Arbeit verwendet, um die Homöomorphie von zwei realkompakten Räumen auf ihre jeweiligen  $z$ -Filter zurückzuführen. In dem Buch „Rings of Continuous Functions“ von Gillman und Jerison [4] werden realkompakte Räume genauer behandelt.

## 3 Halbgruppen und Ideale

**Definition 3.1.** Sei  $(H, \cdot)$  eine Halbgruppe. Dann heißt  $f \in H$  *rechter Teiler* von  $g \in H$ , wenn  $\exists h \in H : g = h \cdot f$ . Weiters definiere die Relation der rechten Teilbarkeit:  $g \triangleright f \Leftrightarrow f$  ist rechter Teiler von  $g$ .

**Definition 3.2.** Seien  $H_1, H_2$  Halbgruppen mit den zugehörigen rechten Teilbarkeitsrelation  $\triangleright_1, \triangleright_2$ .

Eine Funktion  $\varphi : H_1 \rightarrow H_2$  heißt *d-Homomorphismus*, wenn  $\forall f, g \in H_1 : g \triangleright_1 f \Rightarrow \varphi(g) \triangleright_2 \varphi(f)$ .

Eine Funktion  $\varphi$  heißt *d-Isomorphismus*, wenn  $\varphi$  bijektiv ist und  $\varphi, \varphi^{-1}$  d-Homomorphismen sind.  $H_1$  und  $H_2$  heißen d-isomorph, wenn es einen d-Isomorphismus von  $H_1$  nach  $H_2$  gibt.

**Bemerkung 3.3.** Offensichtlich ist jeder Halbgruppenshomomorphismus  $\varphi$  auch ein d-Homomorphismus, denn aus  $g = h \cdot f$  folgt  $\varphi(g) = \varphi(h) \cdot \varphi(f)$ . Insbesondere ist jeder Halbgruppenisomorphismus ein d-Isomorphismus. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Wenn  $H_1$  und  $H_2$  Gruppen sind, dann ist jede bijektive Funktion  $\varphi : H_1 \rightarrow H_2$  ein d-Isomorphismus, da in Gruppen die rechte Teilbarkeitsrelation der Allrelation entspricht. Also sind zwei Gruppen mit der selben Kardinalität immer d-isomorph, aber offensichtlich sind nicht alle Gruppen mit der selben Kardinalität isomorph als Halbgruppen.

### 3 HALBGRUPPEN UND IDEALE

**Definition 3.4.** Sei  $H$  eine Halbgruppe. Dann heißt  $D \subseteq H$  *d-Ideal*, wenn

- (i)  $\emptyset \neq D \neq H$
- (ii)  $\forall f \in D \forall g \in H : g \triangleright f \Rightarrow g \in D$
- (iii)  $\forall f, g \in D \exists h \in D : f \triangleright h \wedge g \triangleright h$

Ein d-Ideal heißt *maximal*, wenn es bezüglich der Halbordnung " $\subseteq$ " in der Menge aller d-Ideale maximal ist.

**Lemma 3.5.** *In einer Halbgruppe  $H$  mit einem neutralen Element  $e$  ist jede Einheit  $f \in H$  in keinem d-Ideal enthalten.*

*Beweis.* Angenommen, es gibt ein d-Ideal  $D$  und eine Einheit  $f$  mit  $f \in D$ . Da  $e = f^{-1} \cdot f$  und somit auch  $e \triangleright f$  gilt, folgt  $e \in D$  aus Eigenschaft (ii) für d-Ideale. Offensichtlich gilt  $g \triangleright e$  für alle  $g \in H$ , deshalb folgt  $D = H$  aus (ii). Dies ist ein Widerspruch zu (i).  $\square$

**Bemerkung 3.6.** In einer Halbgruppe mit einem neutralem Element  $e$  folgt ähnlich wie in Bemerkung 2.3 aus dem Lemma von Kuratowski-Zorn, dass für jedes d-Ideal  $D$  ein maximales d-Ideal  $D_{max}$  mit  $D \subseteq D_{max}$  existiert. Dabei wird für Eigenschaft (i) verwendet, dass  $e$  in keinem d-Ideal enthalten sein kann.

**Lemma 3.7.** *Seien  $H_1, H_2$  Halbgruppen,  $\varphi : H_1 \rightarrow H_2$  ein d-Isomorphismus und  $D \subseteq H_1$  ein (maximales) d-Ideal in  $H_1$ . Dann ist die Menge  $\varphi(D) = \{\varphi(f) : f \in D\}$  ein (maximales) d-Ideal in  $H_2$ .*

*Beweis.*

- (i) Da  $\varphi$  bijektiv ist, gilt  $\emptyset = \varphi(\emptyset) \neq \varphi(D) \neq \varphi(H_1) = H_2$
- (ii) Seien  $f \in \varphi(D), g \in H_2$  mit  $g \triangleright f$  beliebig. Dann ist  $\varphi^{-1}(f) \in D$  und  $\varphi^{-1}(g) \triangleright \varphi^{-1}(f)$ . Da  $D$  ein d-Ideal ist, gilt also  $\varphi^{-1}(g) \in D$  und somit  $g \in \varphi(D)$ .
- (iii) Seien  $f, g \in \varphi(D)$  beliebig. Dann gibt es ein  $h \in D$  mit  $\varphi^{-1}(f) \triangleright h, \varphi^{-1}(g) \triangleright h$ . Dementsprechend gilt auch  $f \triangleright \varphi(h)$  und  $g \triangleright \varphi(h)$ . Somit erfüllt  $\varphi(h) \in \varphi(D)$  die gewünschte Eigenschaft.

Also ist  $\varphi(D)$  ein d-Ideal.

Sei nun  $D$  ein maximales d-Ideal in  $H_1$ , also

$$\forall D' \subseteq H_1, D' \text{ d-Ideal} : D \subseteq D' \Rightarrow D = D'$$

Sei  $\overline{D} \subseteq H_2$  mit  $\varphi(D) \subseteq \overline{D}$  beliebiges d-Ideal. Dann ist

$$D = \varphi^{-1}(\varphi(D)) \subseteq \varphi^{-1}(\overline{D})$$

und aus dem ersten Teil des Beweises wissen wir bereits, dass  $\varphi^{-1}(\overline{D})$  ein d-Ideal in  $H_1$  ist. Aus der Maximalität von  $D$  folgt nun  $D = \varphi^{-1}(\overline{D})$  und dementsprechend auch  $\varphi(D) = \overline{D}$ .  $\square$

### 3 HALBGRUPPEN UND IDEALE

**Definition 3.8.** Eine Halbgruppe  $(H, \cdot)$  heißt *quasireell*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $(\mathbb{R}_0^+, \cdot)$  ist eine Unterhalbgruppe von  $H$ .
- (ii)  $1 \in \mathbb{R}_0^+$  ist ein neutrales Element in  $H$ .
- (iii) Für  $0 \in \mathbb{R}_0^+$  gilt  $\forall x \in H : x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$ .
- (iv)  $\forall x \in H \setminus \{0\} \exists y \in H : x \cdot y = 1 = y \cdot x$ . Dieses Element  $y$  ist eindeutig (Siehe Bemerkung 3.9) und wird von nun an als  $\frac{1}{x}$  bezeichnet.
- (v)  $H$  ist ein topologischer Raum und die Spurtopologie auf  $\mathbb{R}_0^+$  von  $H$  entspricht der euklidischen Topologie.
- (vi) Die Funktionen  $x \mapsto \frac{1}{x}$  von  $H \setminus \{0\}$  nach  $H$  und  $(x, y) \mapsto x \cdot y$  von  $H \times H$  nach  $H$  sind stetig.
- (vii) Es gibt eine stetige Funktion  $|\cdot| : H \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , sodass

$$\forall x, y \in H : |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \text{und} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+ : |x| = x.$$

- (viii) Die Mengen  $W_\epsilon := \{x \in H : |x| < \epsilon\}$  für  $\epsilon > 0$  bilden eine Umgebungsbasis der 0.

**Bemerkung 3.9.** Das inverse Element aus Punkt (iv) ist für jedes  $x \in H \setminus \{0\}$  eindeutig, denn für zwei inverse Elemente  $y_1, y_2$  gilt:

$$y_1 = y_1 \cdot x \cdot y_2 = y_2$$

**Bemerkung 3.10.** Es gilt:  $|x| = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$ .

Wegen  $0 \in \mathbb{R}_0^+$  folgt  $|0| = 0$  direkt aus (vii). Angenommen, es gäbe ein  $x \in H \setminus \{0\}$  mit  $|x| = 0$ , dann wäre

$$1 = |x \cdot 1/x| = |x| \cdot |1/x| = 0 \cdot |1/x| = 0.$$

Daraus folgt, dass  $\{0\} = |\cdot|^{-1}(\{0\})$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $H$  ist.

Beispiele für quasireelle Halbgruppen sind  $\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ ; jeweils mit der euklidischen Topologie sowie der üblichen Multiplikation und Betragsfunktion. Die Quaternionen mit der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}^4$  sowie der üblichen Multiplikation und Betragsfunktion sind ein Beispiel für eine nicht-kommutative quasireelle Halbgruppe.

## 4 d-Ideale und z-Filter

Betrachte in diesem Abschnitt einen beliebigen topologischen Raum  $X$  und eine quasireelle Halbgruppe  $H$ . Dann bildet  $H(X) := \{f : X \rightarrow H \mid f \text{ stetig}\}$  mit der punktweisen Multiplikation eine Halbgruppe mit Einselement. In diesem Kapitel wird ein Zusammenhang zwischen den d-Idealen in  $H(X)$  und den z-Filtern auf  $X$  hergestellt. Definiere dazu für  $f \in H(X)$ :

$$Z_H(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$$

$$|f|(x) := |f(x)|$$

**Lemma 4.1.** *Für  $f \in H(X)$  ist  $|f| \in C(X)$  und für  $g \in C(X)$  ist  $|g| \in H(X)$ . Insbesondere gilt*

$$Z(X) = \{Z_H(f) : f \in H(X)\}$$

*Beweis.* Sei  $f \in H(X)$  beliebig. Laut Punkt (vii) in Definition 3.8 von quasireellen Halbgruppen ist  $|\cdot| : H \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  eine stetige Abbildung. Somit ist  $|f| = |\cdot| \circ f$  als Verknüpfung von stetigen Funktionen ebenfalls stetig. Sei  $g \in C(X)$  beliebig, dann ist  $|g|$  eine stetige Abbildung von  $X$  nach  $\mathbb{R}_0^+$ . Da die Spurtopologie von  $\mathbb{R}_0^+$  in  $H$  der euklidischen Topologie entspricht, ist die Inklusionsabbildung  $\iota : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow H$  stetig. Insgesamt ist also

$$\iota \circ |\cdot| \circ g \in H(X).$$

Weiters gilt für  $f \in H(X), g \in C(X)$ :

$$Z_H(f) = Z(|f|) \in Z(X) = \{Z(h) : h \in C(X)\}$$

$$Z(g) = Z_H(|g|) \in \{Z(h) : h \in H(X)\}$$

Damit wurde  $Z(X) = \{Z_H(h) : h \in H(X)\}$  gezeigt. □

Wegen Lemma 4.1 können wir den Index  $H$  weglassen und  $Z(f)$  statt  $Z_H(f)$  für  $f \in H(X)$  schreiben. Weiters können wir für  $Z \in Z(X)$  immer einen Repräsentanten  $f \in H(X)$  wählen, sodass  $Z = Z(f)$ . Von nun an werden in dieser Arbeit immer Repräsentanten aus  $H(X)$  statt aus  $C(X)$  gewählt.

**Lemma 4.2.**  $Z(f \cdot g) = Z(f) \cup Z(g)$  für  $f, g \in H(X)$  oder  $f, g \in C(X)$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned} Z(f \cdot g) &= \{x \in X : f(x) \cdot g(x) = 0\} \\ &= \{x \in X : f(x) = 0\} \cup \{x \in X : g(x) = 0\} \\ &= Z(f) \cup Z(g) \end{aligned}$$

□

#### 4 D-IDEALE UND Z-FILTER

**Lemma 4.3.** *Sei  $D$  ein  $d$ -Ideal in  $H(X)$ . Dann ist*

$$Z(D) := \{Z(f) : f \in D\}$$

*ein  $z$ -Filter auf  $X$ .*

*Beweis.*

- (i) Laut Lemma 4.1 gilt  $Z(D) \subseteq Z(X)$ . Da  $D$  nichtleer ist, ist auch  $Z(D)$  nichtleer. Wir zeigen, dass  $\emptyset \notin Z(D)$ :  
Sei  $f \in H(X)$  eine Funktion mit  $Z(f) = \emptyset$ . Dann ist

$$\frac{1}{f}(x) := \frac{1}{f(x)}$$

wohldefiniert und als Verknüpfung von stetigen Funktionen wieder stetig ( $x \mapsto \frac{1}{x}$  von  $H \setminus \{0\}$  nach  $H$  ist stetig, siehe Punkt (vi) in Definition 3.8). Also ist  $\frac{1}{f} \in H(X)$  und  $1 = 1/f \cdot f$ . Weil  $f$  daher eine Einheit in  $H(X)$  ist, folgt  $f \notin D$  aus Lemma 3.5.

- (ii) Seien  $Z_1 \in Z(D), Z_2 \in Z(X)$  mit  $Z_1 \subseteq Z_2$ . Wähle  $f \in D, g \in H(X)$  mit  $Z(f) = Z_1, Z(g) = Z_2$ . Offensichtlich ist  $f$  ein rechter Teiler von  $g \cdot f$  und da  $f$  in  $D$  liegt, folgt aus Eigenschaft (ii) von  $d$ -Idealen  $g \cdot f \in D$ .

$$Z_2 = Z(g) = Z(g) \cup Z(f) = Z(g \cdot f) \in Z(D).$$

- (iii) Seien  $Z_1, Z_2 \in Z(D)$  und  $f, g \in D$  mit  $Z(f) = Z_1$  bzw.  $Z(g) = Z_2$  geeignete Repräsentanten. Es gilt  $Z_1 \cap Z_2 = Z(|f| + |g|) \in Z(X)$ , denn  $|f| + |g|$  ist als Komposition von stetigen Funktionen stetig. Da  $D$  ein  $d$ -Ideal ist, gibt es ein  $h \in D$ , sodass  $f \triangleright h$  und  $g \triangleright h$ . Wähle  $h_1 \in H(X)$  mit  $f = h_1 \cdot h$ .

$$Z(h) \subseteq Z(h_1) \cup Z(h) = Z(h_1 \cdot h) = Z(f).$$

Analog folgt  $Z(h) \subseteq Z(g)$ , insgesamt gilt  $Z(h) \subseteq Z_1 \cap Z_2$ . In (ii) wurde bereits gezeigt, dass  $Z(D)$  bezüglich Obermengen in  $Z(X)$  abgeschlossen ist. Deshalb folgt  $Z_1 \cap Z_2 \in Z(D)$  aus  $Z(h) \in Z(D)$  und  $Z(h) \subseteq Z_1 \cap Z_2$ .

□

**Lemma 4.4.** *Sei  $\mathcal{F}$  ein  $z$ -Filter auf  $X$ . Dann ist*

$$Z^{-1}(\mathcal{F}) := \{f \in H(X) : Z(f) \in \mathcal{F}\}$$

*ein  $d$ -Ideal in  $H(X)$ .*

#### 4 D-IDEALE UND Z-FILTER

*Beweis.*

- (i) Es gilt  $Z^{-1}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ , denn  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  und laut Lemma 4.1 können für  $Z \in \mathcal{F} \subseteq Z(X)$  Repräsentanten in  $H(X)$  gewählt werden. Laut Bemerkung 2.2 gilt  $Z(1) = \emptyset \notin \mathcal{F}$ , dementsprechend folgt  $1 \notin Z^{-1}(\mathcal{F})$ .
- (ii) Seien  $f \in Z^{-1}(\mathcal{F})$ ,  $g \in H(X)$  mit  $g \triangleright f$ . Im Beweis des vorherigen Lemmas wurde bereits gezeigt, dass  $g \triangleright f \Rightarrow Z(g) \supseteq Z(f)$  gilt.  $\mathcal{F}$  ist als z-Filter bezüglich Obermengen in  $Z(X)$  abgeschlossen, deshalb folgt  $Z(g) \in \mathcal{F}$  aus  $Z(g) \supseteq Z(f)$  und  $Z(f) \in \mathcal{F}$ . Laut der Definition von  $Z^{-1}(\mathcal{F})$  gilt also  $g \in Z^{-1}(\mathcal{F})$ .
- (iii) Seien  $f, g \in Z^{-1}(\mathcal{F})$ . Definiere die Funktion

$$h(x) := \sqrt{|f(x)| + |g(x)|}.$$

Es gilt  $h \in H(X)$ , weil  $h$  als Komposition von stetigen Funktionen stetig ist. Weiters gilt  $Z(h) = Z(f) \cap Z(g) \in \mathcal{F}$ , also  $h \in Z^{-1}(\mathcal{F})$ . Zeige nun  $f \triangleright h$ . Definiere hierfür die Funktion

$$k(x) := \begin{cases} 0 & x \in Z(f) \\ f(x) \cdot \frac{1}{h(x)} & x \notin Z(f). \end{cases}$$

Offensichtlich gilt  $f = k \cdot h$ . Also muss nur noch  $k \in H(X)$  gezeigt werden. Wir zeigen die Stetigkeit von  $k$  mittels

$$\forall x \in X \forall U \in \mathcal{U}^H(k(x)) \exists O \in \mathcal{U}^X(x) : k(O) \subseteq U.$$

Seien nun  $x \in X$  und  $U \in \mathcal{U}^H(k(x))$ .

Fall 1:  $x \in Z(f)$ , also  $f(x) = 0 = k(x)$ . Laut Eigenschaft (viii) in Definition 3.8 für quasireelle Halbgruppen bilden die Mengen

$$W_\epsilon = \{a \in H : |a| < \epsilon\} \text{ für } \epsilon > 0$$

eine Umgebungsbasis der 0. Deshalb gibt es ein  $\epsilon > 0$ , sodass  $W_\epsilon \subseteq U$ . Außerdem gilt für  $x \in X \setminus Z(f)$  die folgende Abschätzung:

$$|k(x)| = \frac{\sqrt{|f(x)|}}{\sqrt{|f(x)| + |g(x)|}} \cdot \sqrt{|f(x)|} \leq \sqrt{|f(x)|}.$$

Die Menge  $O := f^{-1}(W_{\epsilon^2})$  ist offen, da  $f$  eine stetige Funktion ist ( $W_{\epsilon^2}$  ist offen, weil  $|\cdot| : H \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  stetig ist). Sei  $y \in O$  beliebig.

Falls  $y \in Z(f) : k(y) = 0 \in W_\epsilon \subseteq U$ .

Falls  $y \in X \setminus Z(f) : |k(y)| \leq \sqrt{|f(y)|} < \epsilon$ , also  $k(y) \in W_\epsilon \subseteq U$ .

#### 4 D-IDEALE UND Z-FILTER

Fall 2:  $x \in X \setminus Z(f)$ . Die Menge  $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$  ist abgeschlossen, denn  $\{0\} = |\cdot|^{-1}(\{0\})$  ist in  $H$  abgeschlossen. Somit ist  $X \setminus Z(f)$  offen. Offensichtlich ist die Funktion  $h : X \setminus Z(f) \rightarrow H$  als Komposition von stetigen Funktionen stetig.

Also gilt  $f \triangleright h$ , analog folgt  $g \triangleright h$ .

□

**Lemma 4.5.** *Sei  $D$  ein  $d$ -Ideal in  $H(X)$ ,  $\mathcal{F}$  ein  $z$ -Filter auf  $X$ . Dann gilt:*

$$Z^{-1}(Z(D)) \supseteq D \text{ und } Z(Z^{-1}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}.$$

*Beweis.* Sei  $f \in D$  beliebig, dann ist

$$f \in \{g \in H(X) : Z(g) \in Z(D)\} = Z^{-1}(Z(D)).$$

Weiters gilt:

$$\begin{aligned} Z(Z^{-1}(\mathcal{F})) &= \{Z(f) \in Z(X) : f \in Z^{-1}(\mathcal{F})\} \\ &= \{Z(f) \in Z(X) : Z(f) \in \mathcal{F}\} \\ &= \mathcal{F}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 4.6.** *Sei  $D$  ein maximales  $d$ -Ideal in  $H(X)$ . Dann ist  $Z(D)$  ein maximaler  $z$ -Filter auf  $X$  und es gilt  $D = Z^{-1}(Z(D))$ .*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{F}' \supseteq Z(D)$  ein  $z$ -Filter. Aus Lemma 4.5 folgt

$$D \subseteq Z^{-1}(Z(D)) \subseteq Z^{-1}(\mathcal{F}').$$

Wir wissen aus Lemma 4.4, dass  $Z^{-1}(\mathcal{F}')$  ein  $d$ -Ideal ist. Nun folgt aus der Maximalität von  $D$  die Gleichheit  $D = Z^{-1}(Z(D)) = Z^{-1}(\mathcal{F}')$ . Durch anwenden von  $Z$  und Lemma 4.5 erhalten wir

$$Z(D) = Z(Z^{-1}(\mathcal{F}')) = \mathcal{F}'.$$

Also ist  $Z(D)$  ein maximaler  $z$ -Filter.

□

**Lemma 4.7.** *Sei  $\mathcal{F}$  ein maximaler  $z$ -Filter auf  $X$ . Dann ist  $Z^{-1}(\mathcal{F})$  ein maximales  $d$ -Ideal in  $H(X)$ .*

*Beweis.* Sei  $D'$  ein  $d$ -Ideal mit  $D' \supseteq Z^{-1}(\mathcal{F})$ . Anwenden von  $Z$  und Lemma 4.5 ergeben die folgende Mengeninklusion:

$$Z(D') \supseteq Z(Z^{-1}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}.$$

Da  $Z(D')$  laut Lemma 4.3 ein  $z$ -Filter ist und  $\mathcal{F}$  maximal in der Menge aller  $z$ -Filter auf  $X$  ist, folgt  $Z(D') = \mathcal{F}$ . Mit Lemma 4.5 folgt nun

$$D' \subseteq Z^{-1}(Z(D')) = Z^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq D'$$

und somit  $D' = Z^{-1}(\mathcal{F})$ .

□

**Lemma 4.8.** *Die Funktion  $Z : D \mapsto \{Z(f) : f \in D\}$  ist eine Bijektion von der Menge aller maximalen  $d$ -Ideale in  $H(X)$  auf die Menge aller maximalen  $z$ -Filter auf  $X$ , wobei  $Z^{-1} : \mathcal{F} \mapsto \{f \in H(X) : Z(f) \in \mathcal{F}\}$  die zugehörige inverse Funktion ist.*

*Beweis.* Folgt direkt aus den letzten drei Lemmata. □

Daraus können wir nun schließen, dass alle maximalen  $z$ -Filter auf einem beliebigen topologischen Raum  $X$  durch die Teilbarkeitsrelation „ $\triangleright$ “ auf  $H(X)$  beschrieben werden können.

## 5 $\sigma$ -Stabilität

Im letzten Abschnitt haben wir maximale  $z$ -Filter durch rechte Teilbarkeit in  $H(X)$  charakterisiert. Das Ziel dieses Abschnitts ist es, auch die  $\sigma$ -Stabilität von  $z$ -Filtern durch die Teilbarkeitsrelation „ $\triangleright$ “ auf  $H(X)$  zu charakterisieren. Im Gegensatz zum letzten Abschnitt wird in diesem Kapitel ein vollständig regulärer Raum  $X$  betrachtet.

**Lemma 5.1.** *Für  $f, g \in H(X)$  gilt  $Z(f) \subseteq Z(g)$  genau dann, wenn jedes maximale  $d$ -Ideal  $D$  mit  $f \in D$  auch  $g \in D$  erfüllt.*

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Seien  $f, g \in H(X)$  mit  $Z(f) \subseteq Z(g)$ ,  $D$  ein maximales  $d$ -Ideal mit  $f \in D$ . Laut Lemma 4.6 ist  $Z(D)$  ein maximaler  $z$ -Filter, deshalb folgt  $Z(g) \in Z(D)$  aus  $Z(f) \in Z(D)$  und  $Z(f) \subseteq Z(g)$ . Somit gilt  $g \in Z^{-1}(Z(D)) = D$  mit Lemma 4.7.

„ $\Leftarrow$ “ mit Kontraposition: Seien  $f, g \in H(X)$  mit  $Z(f) \not\subseteq Z(g)$ . Dann gibt es ein  $x \in Z(f) \setminus Z(g)$ . Der Raum  $X$  ist vollständig regulär, dementsprechend ist  $\mathcal{F}_x = \{Z \in Z(X) : x \in Z\}$  laut Lemma 2.10 ein maximaler  $z$ -Filter. Offensichtlich ist  $Z(f) \in \mathcal{F}_x$ , aber  $Z(g) \notin \mathcal{F}_x$ . Mit Lemma 4.7 ist also  $Z^{-1}(\mathcal{F}_x)$  ein maximales  $d$ -Ideal, welches  $f \in Z^{-1}(\mathcal{F}_x)$  und  $g \notin Z^{-1}(\mathcal{F}_x)$  erfüllt. □

**Lemma 5.2.** *Sei  $D$  ein maximales  $d$ -Ideal. Dann gilt:*

$$Z(D) \text{ ist } \sigma\text{-stabil} \Leftrightarrow \forall (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}} \exists g \in D \forall n \in \mathbb{N} : Z(g) \subseteq Z(f_n)$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Da  $Z(D)$  ein  $\sigma$ -stabiler  $z$ -Filter ist, gilt:

$$Z' := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z(f_n) \in Z(D).$$

Deshalb gibt es  $g \in D$  mit  $Z(g) = Z'$ ; dieses  $g$  erfüllt trivialerweise  $Z(g) \subseteq Z(f_n)$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

## 6 HAUPTRESULTATE

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beliebige abzählbare Familie in  $Z(D)$ , wähle  $f_n \in D$  mit  $Z_n = Z(f_n)$ . Nun gibt es  $g \in D$  mit  $Z(g) \subseteq Z(f_n)$  für  $n \in \mathbb{N}$ , also gilt insbesondere

$$Z(g) \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z(f_n).$$

Laut Lemma 2.4 ist  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z(f_n) \in Z(X)$ . Da  $z$ -Filter bezüglich Obermengen abgeschlossen sind, folgt  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z(f_n) \in Z(D)$  aus  $Z(g) \in Z(D)$ .  $\square$

**Bemerkung 5.3.** Durch kombinieren der beiden Lemmata erhält man folgende Charakterisierung der  $\sigma$ -Stabilität von  $Z(D)$ :

$$\forall (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}} \exists g \in D \forall n \in \mathbb{N} \forall D' \text{ max. d-Ideal: } g \in D' \Rightarrow f_n \in D'.$$

Wir kürzen diese Eigenschaft für  $d$ -Ideale aus notationellen Gründen nun mit  $E(D)$  ab. Diese Charakterisierung hängt nur noch von  $d$ -Idealen in  $H(X)$  ab und kann somit auch auf den Teilbarkeitsoperator „ $\triangleright$ “ zurückgeführt werden. In Lemma 3.7 wurde gezeigt, dass ein  $d$ -Isomorphismus  $\varphi$  maximale  $d$ -Ideale auf maximale  $d$ -Ideale abbildet. Da die Eigenschaft  $E$  nur von der rechten Teilbarkeit abhängt, gilt für ein maximales  $d$ -Ideal  $D$  offensichtlich auch  $E(D) \Leftrightarrow E(\varphi(D))$ . Insgesamt gilt also für jedes maximale  $d$ -Ideal  $D$ :

$$Z(D) \text{ ist } \sigma\text{-stabil} \Leftrightarrow Z(\varphi(D)) \text{ ist } \sigma\text{-stabil.}$$

## 6 Hauptresultate

Mithilfe der Definitionen und Resultate der bisherigen Kapitel kann nun der zentrale Satz dieser Seminararbeit formuliert werden:

**Satz 6.1.** *Seien  $X, Y$  vollständig reguläre Räume und  $H_1, H_2$  quasireelle Halbgruppen. Sei  $H_1(X)$  der Raum aller stetigen Funktionen von  $X$  nach  $H_1$ ,  $H_2(X)$  analog. Wenn  $H_1(X)$  und  $H_2(X)$   $d$ -isomorph sind, dann sind  $\nu X$  und  $\nu Y$  homöomorph. Wenn  $X$  und  $Y$  zusätzlich realkompakt sind, dann sind  $X$  und  $Y$  homöomorph.*

*Beweis.* Die Hewitt-Realkompaktifizierung  $\nu X$  für einen vollständig regulären Raum  $X$  ist folgendermaßen definiert: (Siehe Def. 2.11)

$$\nu X := \{\mathcal{F} \subseteq Z(X) : \mathcal{F} \text{ ist } \sigma\text{-stabiler, maximaler } z\text{-Filter}\},$$

wobei durch die Mengen

$$B_X(Z) = \{\mathcal{F} \in \nu X : Z \in \mathcal{F}\} \text{ für } Z \in Z(X)$$

eine Basis der abgeschlossenen Mengen in  $\nu X$  gegeben ist. Laut Bemerkung 2.13 sind realkompakte Räume homöomorph zu ihrer Hewitt-Realkompaktifizierung. Dementsprechend folgt für realkompakte Räume aus der

## 6 HAUPTRESULTATE

Homöomorphie von  $vX$  und  $vY$  direkt, dass auch  $X$  und  $Y$  homöomorph sind.

Definiere für  $X$ :

$$dX := \{D \subseteq H_1(X) : D \text{ ist maximales d-Ideal, } Z(D) \text{ ist } \sigma\text{-stabil.}\}$$

$$B_X(f) := \{D \in dX : f \in D\} \text{ für } f \in H_1(X).$$

Definiere  $dY$  und  $B_Y(f)$  analog. Wir werden in diesem Beweis wie in der folgenden Skizze einen Homöomorphismus von  $vX$  nach  $vY$  konstruieren.

$$\begin{array}{ccc} vX & & vY \\ \downarrow Z^{-1} & & \uparrow Z \\ dX & \xrightarrow{\varphi} & dY \end{array}$$

Laut Lemma 4.8 ist die Funktion  $Z : D \mapsto \{Z(f) : f \in D\}$  eine Bijektion von der Menge aller maximalen d-Ideale in  $H_1(X)$  in die Menge aller maximalen z-Filter auf  $X$ . Dementsprechend ist auch  $Z|_{dX}$  eine Bijektion von  $dX$  nach  $vX$ . Weiters gilt:

$$\begin{aligned} Z(B_X(f)) &= \{Z(D) \in vX : D \in B_X(f)\} \\ &= \{Z(D) \in vX : f \in D\} \\ &= \{Z(D) \in vX : Z(f) \in Z(D)\} \\ &= \{\mathcal{F} \in vX : Z(f) \in \mathcal{F}\} \\ &= B_X(Z(f)). \end{aligned}$$

Die Äquivalenz  $f \in D \Leftrightarrow Z(f) \in Z(D)$  gilt laut Lemma 4.6, da  $D$  ein maximales d-Ideal ist. Also ist durch die Menge  $\{B_X(f) : f \in H_1(X)\}$  eine Basis der abgeschlossenen Mengen auf  $dX$  gegeben und  $Z : dX \rightarrow vX$  ist ein Homöomorphismus.

Sei nun  $\varphi : H_1 \rightarrow H_2$  ein d-Isomorphismus. Fasse  $\varphi$  als Funktion von  $\mathcal{P}(H_1(X))$  nach  $\mathcal{P}(H_2(Y))$  auf. Laut Lemma 3.7 bildet  $\varphi$  maximale d-Ideale auf maximale d-Ideale ab. In Bemerkung 5.3 wurde gezeigt, dass für maximale d-Ideale  $D$  in  $H_1(X)$  gilt:

$$Z(D) \text{ ist } \sigma\text{-stabil} \Leftrightarrow Z(\varphi(D)) \text{ ist } \sigma\text{-stabil.}$$

Dementsprechend ist die Einschränkung  $\varphi : dX \rightarrow dY$  wohldefiniert und

## 6 HAUPTRESULTATE

bijektiv. Zusätzlich gilt:

$$\begin{aligned}
 \varphi(B_X(f)) &= \{\varphi(D) \in dY : D \in B_X(f)\} \\
 &= \{\varphi(D) \in dY : f \in D\} \\
 &= \{\varphi(D) \in dY : \varphi(f) \in \varphi(D)\} \\
 &= \{D' \in dY : \varphi(f) \in D'\} \\
 &= B_X(\varphi(f)).
 \end{aligned}$$

Somit ist  $\varphi : dX \rightarrow dY$  ein Homöomorphismus. □

**Korollar 6.2.** *Seien  $X$  und  $Y$  realkompakte Räume. Wenn  $C(X)$  und  $C(Y)$  als multiplikative Halbgruppen isomorph sind, dann sind  $X$  und  $Y$  homöomorph.*

*Beweis.* Offensichtlich ist jeder multiplikative Halbgruppenisomorphismus auch ein d-Isomorphismus. Dementsprechend folgt aus Satz 6.1 mit  $H_1 = H_2 = \mathbb{R}$  die Behauptung. □

**Satz 6.3.** *Seien  $X$  und  $Y$  beliebige topologische Räume. Dann sind  $C(X)$  und  $C(Y)$  isomorph als Ringe genau dann wenn  $C(X)$  und  $C(Y)$  d-isomorph sind.*

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Diese Richtung ist trivial, da jeder Ringisomorphismus insbesondere ein multiplikativer Halbgruppenisomorphismus ist und offensichtlich jeder Halbgruppenisomorphismus ein d-Isomorphismus ist.

„ $\Leftarrow$ “: Dieser Beweis ist eine adaptierte Version des Beweises in [5]. Betrachte zwei beliebige topologische Räume  $X$  und  $Y$ , sodass  $C(X)$  und  $C(Y)$  d-isomorph sind. In [2, Lemma 1] wurde gezeigt, dass für jeden topologischen Raum  $X$  ein realkompakter Raum  $X^*$  existiert, sodass  $C(X)$  und  $C(X^*)$  als Ringe isomorph sind. Zuerst entsteht mit der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \Leftrightarrow \forall f \in C(X) : f(x) = f(y)$$

und der Quotiententopologie ein vollständig regulärer Raum. Die Hewitt-Realkompaktifizierung des Raumes der Äquivalenzklassen bildet dann den gesuchten realkompakten Raum.

Wähle also  $X^*$  und  $Y^*$  wie oben beschrieben. Da jeder Ringisomorphismus auch ein d-Isomorphismus ist, wird die d-Isomorphie auf  $C(X^*)$  und  $C(Y^*)$  übertragen. Die Räume  $X^*$  und  $Y^*$  sind realkompakt, deshalb folgt aus Satz 6.1 mit  $H_1 = H_2 = \mathbb{R}$ , dass  $X^*$  und  $Y^*$  homöomorph sind. Dementsprechend sind also  $C(X^*)$  und  $C(Y^*)$  als Ringe isomorph, und daraus folgt direkt aus der Wahl von  $X^*$  und  $Y^*$  die Ringisomorphie von  $C(X)$  und  $C(Y)$ . □

## LITERATUR

**Korollar 6.4.** *Seien  $X, Y$  beliebige topologische Räume. Dann sind  $C(X)$  und  $C(Y)$  isomorph als Ringe genau dann wenn  $C(X)$  und  $C(Y)$  als multiplikative Halbgruppen isomorph sind.*

*Beweis.* Folgt direkt aus Satz 6.3, da jeder multiplikative Halbgruppenisomorphismus insbesondere ein  $d$ -Isomorphismus ist.  $\square$

## Literatur

- [1] Ákos Császár. “Semigroups of continuous functions”. In: *Acta Scientiarum Mathematicarum* 45 (1983), S. 131–140.
- [2] Ákos Császár. “Some problems concerning  $C(X)$ ”. In: *General topology and its relations to modern analysis and algebra IV* Part A: Invited papers (1976), S. 43–55.
- [3] Ryszard Engelking. *Outline of General Topology*. North-Holland Publ. Co., 1968.
- [4] Leonard Gillman und Meyer Jerison. *Rings of Continuous Functions*. D. Van Nostrand Company, 1960.
- [5] Melvin Henriksen. “On the Equivalence of the Ring, Lattice, and Semigroup of Continuous Functions”. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* (1956), S. 959–960.
- [6] Edwin Hewitt. “Rings of real-valued continuous functions. I”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 64 (1948), S. 45–99.
- [7] Harald Woracek. *Topology*. TU Wien. Aug. 2021.