Seminararbeit aus Analysis

Der Satz von Krein-Milman und einige Anwendungen

Christoph Spiess

Technische Universität Wien

WS 2020/21

Diese Arbeit wurde betreut von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Harald Woracek

1 Einleitung

In dieser Seminararbeit wird der *Satz von Krein-Milman* behandelt. Nach einer kurzen Wiederholung wichtiger Resultate der Funktionalanalysis (Kapitel 2) wird in Kapitel 3 ebenjener Satz bewiesen. Der Satz von Krein-Milman ist sehr vielfältig einsetzbar und in einer Vielzahl von Beweisen an oft sehr unerwarteter Stelle zu finden.
In Kapitel 4 werden die Beziehungen zwischen den Eigenschaften eines kompakten Hausdorff-Raums K und jenen des Raums $C(K)$ der stetigen Funktionen auf K genauer unter die Lupe genommen. Konkret wird gezeigt, dass man ohne wesentlichen Verlust an Information anstatt von K nur $C(K)$ betrachten kann, was bedeutet, dass man mit $C(K)$ eine Menge konstruieren kann, welche homöomorph zu K ist.
Um die Klasse der beschränkten vollständig monotonen Funktionen auf $(0, \infty)$ gemäß dem Satz von Bernstein zu beschreiben (Kapitel 6), wird zuvor in Kapitel 5 der Satz von Krein-Milman in Integralform bewiesen.
Schlussendlich wird in Kapitel 7 der Satz von Ljapunov für vektorielle Maße bewiesen. Als Motivation für diesen Satz wird das berühmte "Cake-cutting Problem"herangezogen.
In diese Arbeit werden einige Errungenschaften der Analysis, der Maßtheorie sowie der Funktionalanalysis einfließen. Vorwissen in diesen Gebieten wird ohne weiteren Kommentar vorausgesetzt. Die wichtigsten der verwendeten Resultate werden allerdings im Laufe der Arbeit wiederholt. Für die Beweise dieser Wiederholungen wird meist auf [4, Fundament Analysis, Kaltenbäck], [6, Analysis 3, Blümlinger] oder [8, Funktionalanalysis, Woracek, Kaltenbäck, Blümlinger] verwiesen.
Diese Arbeit bezieht sich, wenn nicht anders angegeben, auf das Werk "A Course in Functional Analysis and Measure Theory“ von Vladimir Kadets [5].

2 Grundlegende Definitionen und Sätze

Definition 2.1. (*Topologischer Vektorraum*)
Ein *topologischer Vektorraum* ist ein Vektorraum X über $\mathbb{C}$ versehen mit einer Toplogie $\mathcal{T}$, sodass gilt: Die Abbildungen

$$+ : \begin{cases} X \times X & \to & X \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \cdot : \begin{cases} \mathbb{C} \times X & \to & X \\ (\lambda, y) & \mapsto & \lambda y \end{cases}$$

sind stetig, wobei X mit der Topologie $\mathcal{T}$, $\mathbb{C}$ mit der üblichen (von der euklidischen Metrik induzierten) Topologie $\mathcal{E}$ und $X \times X$ bzw. $\mathbb{C} \times X$ jeweils mit der Produkttopologie $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ bzw. $\mathcal{E} \times \mathcal{T}$ versehen sind.
Weiters werden wir immer fordern, dass die Topologie $\mathcal{T}$ Hausdorff ist, also das zweite Trennungsaxiom ($T2$) gilt.

Definition 2.2. (*Lokalkonvexer topologischer Vektorraum*)
Man nennt einen topologischen Vektorraum X *lokalkonvex*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis besitzt, die aus konvexen Mengen besteht.
Äquivalent dazu ist, dass es eine Nullumgebung bestehend aus konvexen Mengen gibt.

Definition 2.3. (*Dualraum*)
Für einen $\mathbb{C}$-Vektorraum X bezeichnen wir mit X^* die Menge aller linearen Abbildungen von X in den Skalarkörper $\mathbb{C}$, und sprechen vom *algebraischen Dualraum* von X. Entsprechend ist der *algebraische Dualraum* eines $\mathbb{R}$-Vektorraums definiert.
Für einen topologischen Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ über $\mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $(X, \mathcal{T})'$ den Raum aller stetigen, linearen Abbildungen von X in den Skalarkörper $\mathbb{C}$. Wir nennen $(X, \mathcal{T})'$ den *topologischen Dualraum* von $(X, \mathcal{T})$. Falls klar ist, welche Topologie gemeint ist, schreibt man auch kurz X statt $(X, \mathcal{T})$ und X' statt $(X, \mathcal{T})'$.

Bemerkung 2.4. Sei X ein Vektorraum, $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$, eine Familie lokalkonvexer Vektorräume, und seien $R_i : X \to X_i$ für alle $i \in I$ lineare Abbildungen mit $\bigcap\limits_{i \in I} \ker R_i = \{0\}$ bzw. äquivalent dazu

$$\forall\, x, y \in X, x \neq y\ \exists i \in I : R_i(x) \neq R_i(y).$$

Dann ist X mit der initialen Topologie $\mathcal{T}$ bezüglich der Familie von Abbildungen

$$R_i : X \to X_i, i \in I$$

ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [8, Kapitel 5, Bemerkung 5.0.3 (ii)]. □

Definition 2.5. (*Schwache Topologie* $\sigma(X,Y)$)
Sei X ein Vektorraum und Y ein punktetrennender linearer Unterraum des algebraischen Dualraums X^*. Die initiale Topologie bezüglich der Familie von Abbildungen
$f : X \to \mathbb{C}, f \in Y$, heißt die von Y auf X erzeugte *schwache Topologie* und wird mit $\sigma(X,Y)$ bezeichnet. Mit Bemerkung 2.4 und aufgrund der Tatsache, dass $\mathbb{C}$ als normierter Raum lokalkonvex ist, folgt, dass $(X, \sigma(X,Y))$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum ist.

Definition 2.6. (*w-Topologie*)
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, so ist $X' := (X, \mathcal{T})'$ ein punktetrennender Unterraum von X^* (siehe [8, Korollar 5.2.7, Seiten 79-80]) und es gilt $(X, \sigma(X, X'))' = X'$ (siehe [8, Korollar 5.2.7, Seiten 79-80]).
Man bezeichnet die Topologie $\sigma(X, X')$ auch als *die schwache Topologie* oder w-Topologie von $(X, \mathcal{T})$.

Definition 2.7. (w^*-*Topologie*)
Sei X ein Vektorraum und Y ein linearer Unterraum von X^*. Betrachte $\iota : X \to Y^*$ definiert durch $\iota(x)(y) = y(x)$. Da $\iota(x) = 0 \Leftrightarrow y(x) = 0\ \forall y \in Y$, ist ι genau dann injektiv, wenn Y punktetrennend ist. Der Unterraum $\iota(X)$ von Y^* ist auf jeden Fall punktetrennend, da $\iota(x)(y) = y(x) = 0\ \forall x \in X \Rightarrow y = 0$.
Also können wir auf Y die Topologie $\sigma(Y, \iota(X))$ betrachten, wofür wir auch $\sigma(Y, X)$ schreiben werden. Somit ist $(Y, \sigma(Y, X))$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum mit $(Y, \sigma(Y, X))' = \iota(X)$. Ist X schon mit einer Topologie $\mathcal{T}$ versehen, sodass $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum ist, so ist $X' := (X, \mathcal{T})'$ ein Unterraum von X^*. Die Topologie $\sigma(X', X) = \sigma(X', \iota(X))$ auf X' nennen wir die *schwach*$-^*$ *Topologie* (w^*-Topologie) auf X'.

Satz 2.8. (*Lemma von Zorn*)
Sei $(P, \leq)$ eine nichtleere halbgeordnete Menge, in der für jede total geordnete Teilmenge eine obere Schranke existiert, so besitzt P ein maximales Element.
Das Lemma von Zorn ist äquivalent zum Auswahlaxiom. Für den Beweis verweisen wir auf [4, Kapitel 13, Seiten 475-478]

Bemerkung 2.9. Klarerweise kann man das Lemma von Zorn auch so anschreiben: Sei $(P, \leq)$ eine nichtleere halbgeordnete Menge, in der für jede total geordnete Teilmenge eine untere Schranke existiert, so besitzt P ein minimales Element.

Satz 2.10. (*Hahn-Banach, geometrisch*)
Sei X ein topologischer Vektorraum und $A, B \subseteq X$ nichtleer, disjunkt und konvex.

(i) Ist A offen, so existieren $f \in X'$ und $\gamma \in \mathbb{R}$, sodass

$$\mathrm{Re}(f(x)) < \gamma \leq \mathrm{Re}(f(y)) \text{ für alle } x \in A, y \in B$$

(ii) Sei X zusätzlich lokalkonvex, A kompakt, B abgeschlossen. So existieren $f \in X', \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\mathrm{Re}(f(x)) \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \mathrm{Re}(f(y)) \text{ für alle } x \in A, y \in B$$

Für den Beweis verweisen wir auf [8, Satz 5.2.5, Seiten 77-78].

Korollar 2.11. Sei X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, so agiert X' punktetrennend auf X. Das heißt, dass für $x, y \in X$, $x \neq y$ ein $f \in X'$ existiert, sodass $\mathrm{Re}(f(x)) \neq \mathrm{Re}(f(y))$.

Beweis. Dies sieht man leicht mit Satz 2.10, (ii), indem man $\{x\} = A$ und $\{y\} = B$ setzt. □

3 Extremalpunkte und der Satz von Krein-Milman

Definition 3.1. (*Extremale Menge*)
Sei K eine konvexe Teilmenge eines Vektorraums X. Eine nichtleere Menge $E \subseteq K$ heißt *extremale Menge* bezüglich K, falls gilt: Sind $x, y \in K, 0 < t < 1$, und $tx + (1-t)y \in E$, so folgt $x, y \in E$.
Wenn also ein Punkt aus E ein innerer Punkt einer Strecke mit Endpunkten in K ist, so liegen diese Endpunkte bereits in E.

Definition 3.2. (*Extremalpunkt*)
Ein Punkt $z \in K$, K konvex, heißt *Extremalpunkt* von K, wenn $\{z\}$ eine extremale Menge ist. Die *Menge aller Extremalpunkte* von K bezeichnen wir mit $\mathrm{Ext}(K)$.

Bemerkung 3.3. Ein Punkt $z \in K$, K konvex, ist also genau dann ein Extremalpunkt von K, wenn gilt:
Sind $x, y \in K, 0 < t < 1$, und $z = tx + (1-t)y \Rightarrow x = y = z$

Beispiel 3.4. Bei einfachen geometrischen Formen ist leicht ersichtlich, welche Mengen extremal sind bzw. welche Extremalpunkte es gibt. Man betrachte ein beliebiges Rechteck $K \subseteq \mathbb{R}^2$, dann sind die Kanten extremale Mengen und $\mathrm{Ext}(K)$ ist die Menge der Eckpunkte. Betrachte man die abgeschlossene Einheitskugel $K_1^{\mathbb{R}^2}(0)$ im $\mathbb{R}^2$, so ist $\mathrm{Ext}(K_1^{\mathbb{R}^2}(0)) = \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| = 1\}$. Die offene Einheitskugel $K_1^{\mathbb{R}^2}(0)$ hat, wie man leicht einsieht, keine Extremalpunkte.

Bemerkung 3.5. Offensichtlich gilt für jede konvexe Teilmenge K eines Vektorraums X, dass K extremal bezüglich sich selbst ist.

Definition 3.6. Die *konvexe Hülle* einer Menge M ist der Durchschnitt aller konvexen Mengen, die M enthalten.
Im folgenden werden wir die *konvexe Hülle* einer Menge M mit $\mathrm{co}(M)$ bezeichnen.
Man überzeugt sich leicht davon, dass

$$\mathrm{co}(M) = \{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \ \in M, t_1, \ldots, t_n \ \in [0,1], \sum_{i=1}^{n} ti = 1\}$$

Satz 3.7. (*von Krein-Milman*)
Sei X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und sei $K \subseteq X$ eine nichtleere, kompakte und konvexe Teilmenge von X. Dann ist K die abgeschlossene konvexe Hülle von $\mathrm{Ext}(K)$, also gilt $K = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))}$. Insbesondere besitzt K Extremalpunkte.

Beweis. Um dies zu zeigen, wollen wir das Lemma von Zorn (Satz 2.8) anwenden.
Betrachte hierzu die Menge $\mathcal{P}$ aller nichtleeren, kompakten, extremalen Teilmengen von K. Da nun insbesondere $K \in \mathcal{P}$, gilt $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Diese Menge ist durch die Mengeninklusion halbgeordnet.
Wir zeigen nun Folgendes:

(i) Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}$, so gilt für $S := \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$ entweder $S = \emptyset$ oder $S \in \mathcal{P}$.

(ii) Sei $S \in \mathcal{P}$, $f \in X'$, $\mu := max\{\mathrm{Re}(f(x)) : x \in S\}$, und setze $S_f := \{x \in S : \mathrm{Re}(f(x)) = \mu\}$. Dann folgt $S_f \in \mathcal{P}$.

Die Eigenschaft (i) ist schnell einzusehen: Sei $S \neq \emptyset$. Jede kompakte Teilmenge eines topologischen Vektorraums ist abgeschlossen, der Durchschnitt abgeschlossener Mengen wiederum abgeschlossen und als Teilmenge einer kompakten Menge daher wieder kompakt. Gelte für $s \in S$, $t \in (0,1)$, $x, y \in K$, $s = tx + (1-t)y$, so ist für $U \in \mathcal{U}$ beliebig $s \in U$ und da U extremal in K ist, sind $x, y \in U$. Da nun U beliebig war, gilt $x, y \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = S$, also $S \in \mathcal{P}$.
(ii) Die Kompaktheit von S und die Stetigkeit von f garantieren $S_f \neq \emptyset$. Als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Funktion ist S_f abgeschlossen und daher als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge kompakt. Sei nun $z \in S_f, z = tx + (1-t)y$ für $x, y \in K$, $t \in (0,1)$. Da $z \in S$ und S extremal ist, folgt $x, y \in S$, also gilt $\mathrm{Re}(f(x)) \leq \mu$ und $\mathrm{Re}(f(y)) \leq \mu$. Nun gilt aber

$$\mu = \mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(f(tx + (1-t)y)) = t\mathrm{Re}(f(x)) + (1-t)\mathrm{Re}(f(y))$$

und daher $\mathrm{Re}(f(x)) = \mathrm{Re}(f(y)) = \mu$, also $x, y \in S_f$.
Sei $S_0 \in \mathcal{P}$ und betrachte $\mathcal{P}' := \{T \in \mathcal{P} : T \subseteq S_0\}$. Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}'$ totalgeordnet. Da die Mengen $T \in \mathcal{U}$ alle kompakt sind und $\mathcal{U}$ klarerweise die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, folgt $\bigcap_{T \in \mathcal{U}} T \neq \emptyset$ und mit (i) folgt $\bigcap_{T \in \mathcal{U}} T \in \mathcal{P}'$. Nun hat $\mathcal{U}$ also eine untere Schranke in $\mathcal{P}'$ und nach Zorn existiert ein minimales Element M in $\mathcal{P}'$. Wegen (ii) muss $\mathrm{Re}(f)$ für alle $f \in X'$ auf M konstant sein. Da nun X' auf X wegen Korollar 2.11 punktetrennend agiert, muss M eine einpunktige Menge sein. Somit haben wir gezeigt, dass jedes S_0 einen Extremalpunkt enthält, also $S_0 \cap \mathrm{Ext}(K) \neq \emptyset$ für alle $S_0 \in \mathcal{P}$.
Da K kompakt und konvex ist, gilt klarerweise $\overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))} \subseteq K$. Weiters ist $\overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))}$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge kompakt.
Um zu zeigen, dass $K \subseteq \overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))}$, nehmen wir indirekt an, es gäbe ein
$x_0 \in K \setminus \overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))}$. Wegen Satz 2.10, (ii), gibt es ein $f \in X'$ mit $\mathrm{Re}(f(x_0)) > \mathrm{Re}(f(y))$, $y \in \overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))}$. Dann ist aber $K_f \in \mathcal{P}$ und $K_f \cap \overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))} = \emptyset$, Widerspruch. $\square$

4 Beziehung zwischen den Eigenschaften eines kompakten Raums K und jenen von $C(K)$

Es fällt uns leichter, den Raum $C(K)$ aller stetigen Abbildungen eines kompakten Hausdorff-Raums K in den Skalarkörper $\mathbb{C}$ zu studieren als K selbst, da man mit den Elementen in $C(K)$ besser umgehen kann als mit den Punkten in K. So kann man beispielsweise stetige Funktionen addieren oder mit einem Skalar multiplizieren und erhält wieder ein Element aus $C(K)$. Dies ist bei Punkten aus K nicht zwingend möglich. Außerdem wird durch die Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)|$ auf $C(K)$ eine kanonische Topologie induziert, was es erlaubt, über Cauchy-Folgen, Vollständigkeit, Konvergenz von Folgen etc. zu sprechen. Nun stellt sich natürlich die Frage, ob es zulässig ist, anstatt des Raums K den Funktionenraum $C(K)$ zu betrachten, oder ob im Übergang Information verloren geht. Wir werden zeigen, dass dies tatsächlich nicht der Fall ist und alle Eigenschaften von K bereits aus jenen von

$C(K)$ hergeleitet werden können. Um dies bewerkstelligen zu können, rufen wir uns einige Hilfsmittel in Erinnerung.

Definition 4.1. (*Lokalkompakter Raum*)
Ein topologischer Raum L heißt *lokalkompakt*, wenn für jeden Punkt $x \in L$ gilt, dass jede Umgebung von x eine kompakte Umgebung enthält.

Definition 4.2. ($C_0(L)$)
Für einen lokalkompakten Hausdorff-Raum L bezeichnet $C_0(L)$ die Menge aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf L, welche im Unendlichen verschwinden.

$$C_0(L) := \{f \in C(L) : \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, K \subseteq L, K \text{ kompakt} : |f(x)| < \epsilon, x \notin K\}$$

Definition 4.3. ($M_{reg}(L)$)
Sei L ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Mit $M_{reg}(L)$ bezeichnen wir die Menge aller komplexwertigen, regulären Borelmaße auf L.
Versieht man $M_{reg}(L)$ mit der Norm $\|\mu\| := |\mu|(L)$, wobei $|\mu|$ die Totalvariation bezeichnet, so wird $(M_{reg}(L), \|.\|)$ zu einem Banachraum.

Satz 4.4. (*Darstellungssatz von Riesz-Markov*)
Sei L ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Dann ist $C_0(L)' \cong M_{reg}(L)$. Genauer ist die Abbildung $\Phi : M_{reg}(L) \to C_0(L)'$, welche jedem regulären, komplexwertigen Borelmaß μ das durch

$$\Phi(\mu)f := \int_L f\, d\mu,\ f \in C_0(L)$$

definierte lineare Funktional $\Phi(\mu)$ zuweist, ein isometrischer Isomorphismus von $M_{reg}(L)$ auf $C_0(L)'$.
Für den Beweis verweisen wir auf [2, Theorem 6.19, Seite 130].

Wir werden nun nach dem Satz von Riesz-Markov die stetigen Funktionale auf einem kompakten Hausdorff-Raum $C(K)$ mit den regulären komplexen Borelmaßen auf K identifizieren (klarerweise gilt $C_0(K) = C(K)$ für kompaktes K) und setzen $\langle \mu, f\rangle := \int_K f\, d\mu$.

Definition 4.5. (δ_x)
Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, wobei Ω die Grundmenge und $\mathcal{A}$ eine darauf definierte σ-Algebra ist. Bezeichne δ_x das *Diracmaß* oder *Punktmaß* im Punkt x. Für $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Bemerkung 4.6. Klarerweise gilt $\langle \delta_x, f\rangle = \int_K f\, d\delta_x = f(x)$. Also kann man δ_x mit dem Punktauswertungsfunktional bezüglich x identifizieren.

Definition 4.7. (supp μ)
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und μ ein nichtnegatives, reguläres Borelmaß, so nennt man $\operatorname{supp} \mu := \{x \in X : \text{für alle } U \subseteq X, \text{ U offene Umgebung von x, gilt } \mu(U) > 0\}$ den *Träger* von μ.
Der Träger eines komplexen, regulären Borelmaßes μ ist definiert als der Träger von $|\mu|$.

Bemerkung 4.8. Es gilt $\operatorname{supp} \delta_x = \{x\}$ und falls $\operatorname{supp} \mu = x$, so ist $\mu = \lambda \delta_x$ für ein $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definition 4.9. (*Borelmaß* $g \times \mu$)
Sei $(K, \mathcal{T})$ ein kompakter Hausdorffraum, g eine Borel-messbare, beschränkte Funktion und μ ein reguläres Borelmaß auf K. Wir bezeichnen mit $g \times \mu$ das reguläre Borelmaß

$$(g \times \mu)(A) = \int_A g \, d\mu$$

Das durch $g \times \mu$ definierte Funktional agiert folglich so:

$$\langle g \times \mu, f \rangle = \int_K fg \, d\mu$$

Bemerkung 4.10. Im Setting von Definition 4.9 gilt:

(i) $\mathbb{1} \times \mu = \mu$

(ii) $(g + h) \times \mu = g \times \mu + h \times \mu$

(iii) $(gh) \times \mu = (hg) \times \mu = g \times (h \times \mu)$

(iv) $g \times (\mu + \nu) = g \times \mu + g \times \nu$

(v) Die Norm von $g \times \mu$ wird folgendermaßen berechnet:

$$\|g \times \mu\| = \int_K |g| \, d|\mu|$$

Lemma 4.11. Seien X, Y Vektorräume, $T : X \to Y$ ein linearer Operator und $A \subseteq X$ konvex. Dann ist das Urbild einer extremalen Menge $B \subseteq T(A)$ geschnitten mit A extremal in A. Es gilt also:

$$B \text{ extremal in } T(A) \Rightarrow T^{-1}(B) \cap A \text{ extremal in } A$$

Insbesondere ist das Urbild eines Extremalpunktes x in A extremal in A. Es gilt also

$$x \text{ Extremalpunkt in } T(A) \Rightarrow T^{-1}(\{x\}) \cap A \text{ extremal in } A$$

Beweis. Seien dazu $x_1, x_2 \in A$, $0 < t < 1$ und $tx_1 + (1-t)x_2 \in T^{-1}(B)$, so sind $T(x_1), T(x_2) \in T(A)$ und aufgrund der Linearität $t \cdot T(x_1) + (1-t) \cdot T(x_2) = T(tx_1 + (1-t)x_2) \in B$. Da B extremal in $T(A)$ ist, gilt auch $T(x_1), T(x_2) \in B$ und somit $x_1, x_2 \in T^{-1}(B)$ □

Satz 4.12. Sei $(K, \mathcal{T})$ ein kompakter Hausdorff-Raum. Dann stimmen die Extremalpunkte der abgeschlossenen Einheitskugel in $C(K)'$ mit den Maßen der Form $\lambda\delta_x$ mit $|\lambda| = 1, \lambda \in \mathbb{C}$ überein. Es gilt also $\operatorname{Ext}(K_1^{C(K)'}(0)) = \{\lambda\delta_x : x \in K, |\lambda| = 1, \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Beweis. Um die Gleichheit zu zeigen, beweisen wir beide Ungleichungen:
" $\supseteq$ "
Wir zeigen zuerst, dass alle Maße der Form δ_x Extremalpunkte von $K_1^{C(K)'}(0)$ sind. Seien dazu $\mu_1, \mu_2 \in K_1^{C(K)'}(0)$ und $t\mu_1 + (1-t)\mu_2 = \delta_x$ für $0 < t < 1$. Dann gilt $t\mu_1(\{x\}) + (1-t)\mu_2(\{x\}) = \delta_x(\{x\}) = 1$. Da nun $\mu_1, \mu_2 \in K_1^{C(K)'}(0)$ sind, gilt auch $|\mu_1(\{x\})|, |\mu_2(\{x\})| \leq 1$ und somit $\mu_1(\{x\}) = \mu_2(\{x\}) = 1$. Dies wiederum bedeutet, dass μ_1 und μ_2 auf $K\backslash\{x\}$ verschwinden, da $\mu_1, \mu_2 \in K_1^{C(K)'}(0)$. Somit gilt $\mu_1 = \mu_2 = \delta_x$. Nun können wir Lemma 4.11 mit der Abbildung $T : K_1^{C(K)'}(0) \to K_1^{C(K)'}(0)$, wobei $T(\mu) := \lambda^{-1}\mu$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$, anwenden. Die Abbildung ist klarerweise linear. Da $K_1^{C(K)'}(0)$ kreisförmig ist, gilt $T(K_1^{C(K)'}(0)) = K_1^{C(K)'}(0)$ und somit ist $T^{-1}(\{\delta_x\}) = \lambda\delta_x$ auch ein Extremalpunkt von $K_1^{C(K)'}(0)$.
" $\subseteq$ "
Nun zeigen wir, dass ein Maß $\mu \in K_1^{C(K)'}(0)$ kein Extremalpunkt von $K_1^{C(K)'}(0)$ sein kann, wenn der Träger von μ nicht an einem Punkt konzentriert ist. Nehme man hierzu an, dass $x, y \in \operatorname{supp}\mu$ für zwei Punkte $x, y \in K, x \neq y$. Da K Hausdorff ist, finden wir disjunkte Umgebungen U von x und V von y. Nun gilt $|\mu|(U), |\mu|(V) \neq 0$. Sei $\epsilon := \min\{|\mu|(U), |\mu|(V)\}$. Betrachte die Funktion

$$g := \frac{\epsilon}{|\mu|(U)}\mathbb{1}_U - \frac{\epsilon}{|\mu|(V)}\mathbb{1}_V$$

und die Maße

$$\mu_1 := (1-g) \times \mu \text{ und } \mu_2 := (1+g) \times \mu.$$

Da $|g| \leq 1$, gilt auch $|1 \pm g| = 1 \pm g$. Außerdem gilt

$$\int_K |1 \pm g|\ d|\mu| = \int_K 1 \pm g\ d|\mu| = \|\mu\| \pm \left(\frac{\epsilon}{|\mu|(U)}\int_U d|\mu| - \frac{\epsilon}{|\mu|(V)}\int_V d|\mu|\right) = \|\mu\| \leq 1$$

und somit $\mu_1, \mu_2 \in K_1^{C(K)'}(0)$. Es gilt aber auch $\frac{\mu_1+\mu_2}{2} = \mu$ und

$$\|\mu_1 - \mu_2\| = 2\int_K |g|\ d|\mu| = 4\epsilon > 0$$

und somit kann μ kein Extremalpunkt von $K_1^{C(K)'}(0)$ sein. Klarerweise ist $\lambda\delta_x$ für $|\lambda| < 1$ kein Extremalpunkt, da $\lambda\delta_x = \frac{(\lambda+\epsilon)\delta_x + (\lambda-\epsilon)\delta_x}{2}$ und $(\lambda \pm \epsilon)\delta_x \in K_1^{C(K)'}(0)$ für $|\epsilon| \leq 1 - |\lambda|$. $\square$

Nun wollen wir unser Ziel weiter verfolgen und nehmen dazu an, es sei ein Banachraum X gegeben. Wir wissen nur, dass $X = C(K)$ für einen kompakten Hausdorff-Raum K, haben jedoch keine weiteren Informationen über K. Der vorangehende Satz legt nahe, die Extremalpunkte der Einheitskugel $K_1^{X'}(0)$ in X' bezüglich der Operatornorm zu betrachten. Um $\operatorname{Ext}(K_1^{X'}(0))$ genauer unter die Lupe zu nehmen, führen wir einige Definitionen und Notationen ein. Wir werden im Folgenden $\operatorname{Ext}(K_1^{X'}(0))$ als Teilraum von $(X', \sigma(X', X))$ auffassen, statten also $\operatorname{Ext}(K_1^{X'}(0))$ mit der w^*-Topologie aus.
Zunächst definieren wir eine Äquivalenzrelation auf $\operatorname{Ext}(K_1^{X'}(0))$ wie folgt:

$$\mu \sim \nu \Leftrightarrow \mu = \lambda\nu, |\lambda| = 1.$$

Die Menge der Äquivalenzklassen, in die $\mathrm{Ext}(K_1^{X'}(0))$ durch $\sim$ eingeteilt wird, bezeichnen wir mit $\tilde{K}(X') = \{[\mu]_\sim : \mu \in \mathrm{Ext}(K_1^{X'}(0))\}$. Mit q bezeichnen wir die kanonische Projektion $q : \mathrm{Ext}(K_1^{X'}(0)) \to \tilde{K}(X')$ mit $q(\mu) = [\mu]_\sim$. Auf $\tilde{K}(X')$ können wir die Quotiententopologie, also die finale Topologie bezüglich q, betrachten. Es ist also $A \subseteq \tilde{K}(X')$ offen in $\tilde{K}(X')$ genau dann, wenn $q^{-1}(A)$ w^*-offen in $\mathrm{Ext}(K_1^{X'}(0))$ ist.

Lemma 4.13. Sei X ein Vektorraum und seien $f, f_1, \ldots, f_n \in X^*$,so sind äquivalent:

i) $f \in \mathrm{span}\{f_1, \ldots, f_n\}$

ii) $\exists\, \gamma < \infty$, sodass $|f(x)| \leq \gamma \cdot \max\limits_{k=1,\ldots,n} |f_k(x)|, \forall\, x \in X$

iii) $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \ker f_k \subseteq \ker f$

Beweis. Siehe [8, Lemma 5.3.4, Seiten 81-82] □

Lemma 4.14. $\tilde{K}(X')$ ist ein Hausdorffraum.

Beweis. Seien dazu $[\mu]_\sim \neq [\nu]_\sim$ für $[\mu]_\sim, [\nu]_\sim \in \tilde{K}(X')$. Nun müssen μ und ν linear unabhängig sein, da sonst oBdA. $\nu = \lambda\mu$ mit $|\lambda| \leq 1$ (sonst $\mu = \lambda^{-1}\nu$). Für $\lambda = \alpha|\lambda|, |\alpha| = 1$ ist nun $\nu = |\lambda|\cdot\alpha\mu + (1-|\lambda|)\cdot 0$ und da $0, \alpha\mu \in K_1^{X'}(0)$ gilt $\nu \notin \mathrm{Ext}(K_1^{X'}(0))$. Da nun μ, ν linear unabhängig sind, kann aufgrund von Lemma 4.13 weder $\ker\mu$ in $\ker\nu$ noch $\ker\nu$ in $\ker\mu$ enthalten sein. Es gibt also ein $f \in \ker\mu \backslash \ker\nu$. Durch Multiplikation von f mit einem geeigneten Skalar können wir oBdA. annehmen, dass $\langle \nu, f\rangle = 1$. Da $|\langle \nu, f\rangle| = |\langle \eta, f\rangle|$ für $\eta = \lambda\nu, |\lambda| = 1$, finden wir mit $U := \{[\eta]_\sim \in \tilde{K}(X') : |\iota(f)(\eta)| > \frac{1}{2}\}$ bzw. $V := \{[\eta]_\sim \in \tilde{K}(X') : |\iota(f)(\eta)| < \frac{1}{2}\}$ zwei disjunkte Umgebungen von $[\nu]_\sim$ bzw. $[\mu]_\sim$. □

Satz 4.15. Sei $X = C(K)$ für einen kompakten Hausdorffraum K. Dann ist $\tilde{K}(X')$ homöomorph zu K.

Beweis. Betrachte die Abbildung $\delta : K \to \mathrm{Ext}(K_1^{X'}(0))$ definiert durch $\delta(x) = \delta_x$. Für $f \in X$ gilt $\iota(f)(\delta(x)) = \langle \delta(x), f\rangle = f(x)$ und f hängt stetig von x ab. Somit ist $\iota(f) \circ \delta$ für alle $f \in C(K)$ stetig und somit auch δ, da $\mathrm{Ext}(K_1^{X'}(0))$ mit der w^*-Topologie ausgestattet ist. Somit ist auch $j := q \circ \delta$ als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig. Da nun $j(x) = [\delta_x]_\sim$, liefert uns Satz 4.12 die Bijektivität von j. Da aber jede stetige Bijektion eines kompakten Raums in einen Hausdorffraum ein Homöomorphismus ist (siehe [6, Satz 1.4.6, Seite 15]), ist die Aussage bewiesen. □

Satz 4.16. (*Satz von der offenen Abbildung*)
Seien X und Y Banachräume und $R : X \to Y$ eine surjektive und beschränkte lineare Abbildung. Dann ist R offen.
Insbesondere gilt: Falls R bijektiv ist, so ist R^{-1} stetig.

Beweis. Siehe [8, Satz 4.3.1, Seite 62] □

Korollar 4.17. Sind $C(K)$ und $C(L)$ für zwei kompakte Hausdorffräume K und L isometrisch isomorph, so sind K und L homöomorph. Es gilt also:

$$C(K), C(L) \text{ isometrisch isomorph} \Rightarrow K, L \text{ homöomorph}$$

Beweis. Nach Satz 4.15 ist K zu $\tilde{K}(C(K)')$ und L zu $\tilde{K}(C(L)')$ homöomorph. Sei $\phi : C(K) \to C(L)$ ein isometrischer Isomorphismus. Dieser ist laut Satz 4.16 ein Homöomorphismus. Betrachte $\Psi : K_1(C(K)') \to K_1(C(L)')$ mit $\Psi(\mu) = \mu \circ \phi^{-1}$. Da ϕ isometrisch und linear ist, erhält Ψ die Abbildungsnorm. Es gilt $\iota_2(f)(\Psi(\mu)) = \Psi(\mu)(f) = \mu \circ \phi^{-1}(f)$ ist stetig für alle $f \in C(L)$, wobei $\iota_2 : C(L) \to C(L)''$ jedes f auf das Punktauswertungsfunktional bezüglich f abbildet, und somit ist Ψ stetig bezüglich der w^*-Topologie. Da wir durch $\Psi^{-1} : K_1(C(L)') \to K_2(C(K)')$ mit $\Psi^{-1}(f) = f \circ \phi$ eine Inverse finden, für die wir analoge Argumente verwenden können, haben wir einen isometrischen Isomorphismus, welcher wiederum mit Satz 4.16 ein Homöomorphismus ist. Mit Lemma 4.11 erkennt man, dass dieser auch $\mathrm{Ext}(K_1(C(K)'))$ auf $\mathrm{Ext}(K_2(C(L)'))$ abbildet. Aufgrund der Linearität von Ψ gilt $\Psi(\lambda\delta_x) = \lambda\Psi(\delta_x)$ und somit $\Psi([\delta_x]) = [\Psi(\delta_x)]$. Wenn wir nun auf diese Weise $\tilde{\Psi}$ als Abbildung von $\tilde{K}(C(K)')$ nach $\tilde{L}(C(L)')$ auffassen, so überträgt sich die Bijektivität und Stetigkeit von Ψ auf $\tilde{\Psi}$ und ebenso von Ψ^{-1} auf $\tilde{\Psi}^{-1}$. Also sind $\tilde{K}(C(K)')$ und $\tilde{L}(C(L)')$ homöomorph und damit auch K und L. □

Satz 4.18. (*Satz von Banach-Alaoglu*)
Für einen normierten Raum $(X, \|.\|)$ ist die bezüglich der Abbildungsnorm abgeschlossene Einheitskugel um die Null in X',

$$K_1^{X'}(0) := \{f \in X' : \|f\| \leq 1\},$$

kompakt bezüglich der w^*-Topologie $\sigma(X', X)$.

Beweis. Siehe [8, Satz 5.5.6, Seiten 90-92] □

Definition 4.19. (*duales Paar*) Ist X ein Vektorraum und Y ein punktetrennender Teilraum von X^*, so wollen wir im Folgenden immer von einem *dualen Paar* (X, Y) sprechen.

Definition 4.20. (*separabel*) Ein topologischer Raum heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Definition 4.21. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *metrisierbar*, wenn es eine Metrik d auf X gibt, sodass die von d erzeugte Topologie genau $\mathcal{T}$ entspricht.

Lemma 4.22. Sei X ein Banachraum, (X, Y) ein duales Paar, $K \subseteq X$ kompakt bezüglich $\sigma(X, Y)$ und $L = \operatorname{span} K$. Bezeichne $\sigma_K(X, Y)$ die Spurtogologie $\sigma(X, Y)|_K$. Existiert eine abzählbare Menge $F = \{f_1, f_2, \dots\} \subseteq Y$, welche punktetrennend auf L agiert, so gibt es eine Norm p auf L, sodass die von p erzeugte Topologie auf K mit $\sigma_K(X, Y)$ übereinstimmt. Insbesondere ist die schwache Topologie auf K metrisierbar.

Beweis. Da K kompakt bezüglich der schwachen Topologie ist und alle f_n stetig bezüglich $\sigma(X, Y)$ sind, sind auch alle f_n durch ein $a_n \geq 0$ beschränkt, also $|f_n| \leq a_n$. Wir können oBdA. annehmen, dass für alle n gilt, dass $a_n \leq 1$. Wir multiplizieren sonst f_n mit a_n^{-1} und verlieren dabei nicht die Eigenschaft, dass F punktetrennend auf L agiert. Nun setzen wir $p(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f_n(x)|$ für $x \in L$. Wir wollen zeigen, dass p schon die gesuchte Norm ist. Wir sehen, dass jeder der Terme $2^{-n}|f_n(x)|$ nichtnegativ ist, die Dreiecksungleichung erfüllt und $2^{-n}|f_n(\lambda x)| = |\lambda| 2^{-n}|f_n(x)|$. Diese Eigenschaften übertragen sich direkt auf die Summe und

somit auf p. Falls nun $p(x) = 0$ für ein $x \in L$, muss auch $f_n(x) = 0$ für alle n und somit auch $x = 0$, da F punktetrennend ist. Wir haben also eine Norm. Vergleichen wir nun die Topologien.
Sei dazu $x \in K$. Betrachte für $r > 0$ die offene Kugel $U_r^p(x)$ um x mit Radius r bezüglich der Norm p. Wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass $2^{-N} < \frac{r}{2}$ und betrachte die Menge

$$V := \{y \in K : \max_{1 \le i \le N} |f_i(y - x)| < \frac{r}{2}\}$$

Dies ist nun eine Umgebung von x bezüglich $\sigma_K(X, Y)$. Für $y \in V$ gilt:

$$p(y - x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f_n(y - x)| \le \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}|f_n(y - x)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \le \max_{1 \le i \le N} |f_i(y - x)| + \frac{1}{2^N} < r$$

Somit gilt $V \subseteq U_r^p(x)$. Also ist $\sigma_K(X, Y)$ feiner als die von der Norm p induzierte Topologie. Daher ist id: $(K, \sigma_K(X, Y)) \to (X, p)$ eine stetige Bijektion eines kompakten Raums auf einen Hausdorffraum und somit ein Homöomorphismus (siehe [6, Satz 1.4.6, Seite 15]). Also stimmen die Topologien überein. □

Korollar 4.23. Sei X ein separabler Banachraum. Dann ist die w^*-Topologie auf beschränkten Teilmengen von X' metrisierbar.

Beweis. Da mit X auch $(X', \|.\|_{X'})$ ein Banachraum ist, betrachten wir das duale Paar $(X', \iota(X))$. Nach Banach Alaoglu, Satz 4.18, ist $K := K_r^{X'}(0)$ für $r > 0$ kompakt bezüglich $\sigma(X', X)$. X besitzt aufgrund der Separabilität eine abzählbare, dichte Teilmenge F. Da nun $\iota(X)$ punktetrennend auf X' ist, muss auch $\iota(F)$ punktetrennend sein, da sonst für $0 \ne y \in \ker \iota(x), x \in F$ auch für beliebiges $x_0 \in X$ mit $\|x_n - x_0\| \longrightarrow 0, x_n \in F$ gilt: $|\iota(x_0)(y)| = |y(x_0)| = |y(x_0) - y(x_n)| = |y(x_0 - x_n)|$. Diese Gleichung gilt für alle n und geht gegen 0, da y stetig ist. Also gilt auch $y \in \ker \iota(x_0)$. Dies ist ein Widerspruch, da $\iota(X)$ punktetrennend auf X' ist. Nun können wir Lemma 4.22 anwenden und sehen, dass die w^*-Topologie auf $K_r^{X'}(0)$ für beliebiges $r > 0$ und somit auf allen beschränkten Teilmengen metrisierbar ist. □

Definition 4.24. (*Zerlegung der Eins*)
Sei K eine nichtleere Teilmenge eines metrischen Raums X. Sei $(U_i)_{i=1}^n, 1 \le n \le \infty$ eine offene Überdeckung von K, also $\bigcup_{i=1}^n U_i \supseteq K$. Eine Familie stetiger Funktionen $\phi_i : K \to \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ nennt man eine *Zerlegung der Eins* über K bezüglich der Überdeckung $(U_i)_{i=1}^n$, falls $\sum_{i=1}^n \phi_i \equiv 1, \phi_i \ge 0$ und $\operatorname{supp} \phi_i \subseteq U_i$, für alle i.

Lemma 4.25. (*Zerlegung der Eins*)
Sei K eine nichtleere Teilmenge eines metrischen Raums X. Sei $(U_i)_{i=1}^n, 1 \le n < \infty$ eine offene Überdeckung von K, also $\bigcup_{i=1}^n U_i \supseteq K$. Dann existiert eine Zerlegung der Eins für diese Überdeckung.

Beweis. Da alle U_i offen sind, sind alle U_i^C abgeschlossen. Falls $U_i^C = \emptyset$ für ein i, so setzen wir $\phi_i \equiv 1$ und sind fertig. Gelte also $U_i^C \neq \emptyset, i = 1 \dots n$. Betrachte auf K die Funktionen $g_i(x) = d(x, U_i^C)$, dann gilt $g_i(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in U_i$. Nun ist jedes x in mindestens einem U_i, also ist $g := \sum_{i=1}^{n} g_i$ überall positiv. Betrachte nun $\phi_i := \frac{g_i}{g}$. Diese Funktionen sind stetig, nichtnegativ und erfüllen $\operatorname{supp} \phi_i \subseteq U_i$. Außerdem gilt: $\sum_{i=1}^{n} \phi_i = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{n} g_i$=1. □

Satz 4.26. $C(K)$ ist genau dann separabel, wenn der kompakte Hausdorffraum K metrisierbar ist.

Beweis. Nehmen wir an, $C(K)$ sei separabel. Dann ist laut Korollar 4.23 die w^*-Topologie auf der Einheitskugel $K_1^{C(K)'}(0)$ metrisierbar. K ist vermöge der Abbildung $x \mapsto \delta_x$ homöomorph zu der Teilmenge $\{\delta_x : x \in K\} \subseteq K_1^{C(K)'}(0)$, wobei $K_1^{C(K)'}(0)$ mit der w^*-Topologie ausgestattet ist (stetige Bijektion eines kompakten Raums auf einen Hausdorffraum). Also ist K metrisierbar.
Sei nun umgekehrt angenommen, dass K ein kompakter metrischer Raum sei. Dann können wir K durch endlich viele Kugeln mit Radius $\frac{1}{n}$ überdecken, also $K = \bigcup_{i=1}^{m_n} U_{\frac{1}{n}}(x_{(n,i)})$. Nach Lemma 4.25 existiert zu dieser Überdeckung eine Zerlegung der Eins. Die zugehörigen Funktionen bezeichnen wir mit $(\phi_{(n,i)})_{i=1}^{m_n}$. Wir wollen nun zeigen, dass die Menge $\{q\phi_{(n,i)} : q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, m_n\}$ dicht in $C(K)$ ist. Sei dazu $f \in C(K)$. Für ein $\epsilon > 0$ finden wir ein $N \in \mathbb{N}$, sodass aus $|x - y| < \frac{1}{n}$ folgt, dass $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$. Wähle weiters für $i = 1, \dots, m_n$ ein $q_{(n,i)} \in \mathbb{Q}$ mit $|f(x_{(n,i)} - q_{(n,i)})| < \frac{\epsilon}{2}$. Betrachte nun die Funktion:

$$f_\epsilon := \sum_{i=1}^{m_n} q_{(n,i)} \phi_{(n,i)}$$

Nun gilt $f(x) = \sum_{i=1}^{m_n} f(x)\phi_{(n,i)}(x), x \in K$ und somit auch:

$$|f(x) - f_\epsilon(x)| \leq \sum_{i=1}^{m_n} |f(x) - q_{(n,i)}|\phi_{(n,i)}(x)$$

Falls in der letzten Summe $\phi_{(n,i)}(x) \neq 0$, so ist $x \in U_{\frac{1}{n}}(x_{(n,i)})$ und somit $|f(x) - q_{(n,i)}| \leq |f(x) - f(x_{(n,i)})| + |f(x_{(n,i)}) - q_{(n,i)}| < \epsilon$ und somit auch

$$|f(x) - f_\epsilon(x)| \leq \sum_{i=1}^{m_n} \epsilon\phi_{(n,i)}(x) = \epsilon.$$

□

5 Der Satz von Krein-Milman in Integralform

Definition 5.1. Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, wobei Ω die Grundmenge und $\mathcal{A}$ eine darauf definierte σ-Algebra ist. Ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß*, wenn es ein nichtnegatives Maß mit $\mu(\Omega) = 1$ ist.

Definition 5.2. Sei K eine nichtleere, kompakte Teilmenge eines lokalkonvexen topologischen Vektorraums X und μ ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf K. Man sagt $x \in X$ *wird dargestellt durch* μ, falls $f(x) = \int_K f \, d\mu$ für alle $f \in X'$ gilt.

Lemma 5.3. Sei K eine kompakte Teilmenge eines lokalkonvexen topologischen Vektorraums X. Es gilt $x \in \overline{\mathrm{co}(K)}$ genau dann, wenn ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf K existiert, welches x darstellt.

Beweis. " $\Leftarrow$ "
Falls μ ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf Y ist, welches x darstellt, so gilt für alle $f \in X'$, dass $\mathrm{Re}(f(x)) \geq \inf\limits_{y \in K} \mathrm{Re}(f(y))\mu(K) \geq \inf\limits_{y \in \overline{\mathrm{co}(K)}} \mathrm{Re}(f(y))$. Nun gilt nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach, Satz 2.10,ii) mit $A = \{x\}$ und $B = \overline{\mathrm{co}(K)}$, dass $x \in \overline{\mathrm{co}(K)}$, da sonst sicher ein $f \in X'$ mit $\mathrm{Re}(f(x)) < \mathrm{Re}(f(y))$ für alle $y \in \overline{\mathrm{co}(K)}$ existieren müsste.
$\Rightarrow$
Sei umgekehrt $x \in \overline{\mathrm{co}(K)}$, so existiert eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathrm{co}(K)$, also $y_n = \sum\limits_{i=1}^{m_n} \lambda_{(i,n)} x_{(i,n)}$ mit $\lambda_{(i,n)} \in [0,1], i \in \{1, \ldots, n\}, \sum\limits_{i=1}^{m_n} \lambda_{(i,n)} = 1, n \in \mathbb{N}$, die gegen x konvergiert. Setzen wir nun $\mu_n = \sum\limits_{i=1}^{m_n} \lambda_{(i,n)} \delta_{x_{(i,n)}}$, so liegen alle μ_n nach dem Darstellungssatz von Riesz in $K_1(C(K)')$ und somit existiert aufgrund der w^*-Kompaktheit von $K_1(C(K)')$ (Satz 4.18) eine Teilfolge μ_{n_k}, die bezüglich der w^*-Topologie konvergiert. Das heißt aber genau $\langle \mu_{n_k}, f \rangle \to \langle \mu, f \rangle, f \in C(K)$ für ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf K, denn insbesondere $1 = \mu_{n_k}(K) = \langle \mu_{n_k}, \mathbb{1}_K \rangle \to \langle \mu, \mathbb{1} \rangle = \mu(K)$ und die Nichtnegativität folgt aus jener der μ_{n_k}. Nun gilt auch $f(y_{n_k}) = \sum\limits_{i=1}^{m_{n_k}} \lambda_{(i,n_k)} f(x_{(i,n_k)}) = \langle \mu_{n_k}, f \rangle \to \langle \mu, f \rangle = \int_K f \, d\mu$ für alle $f \in X'$. Da aber auch $f(y_{n_k}) \to f(x)$ gilt $f(x) = \int_K f \, d\mu$. $\square$

Korollar 5.4. (*Krein-Milman in Integralform*)
Sei X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und K eine kompakte, konvexe Teilmenge von X. Dann gibt es für jedes $x \in K$ ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\overline{\mathrm{Ext}(K)}$, welches x darstellt.

6 Beschreibung der Klasse der vollständig monotonen Funktionen

Definition 6.1. (*Vollständig monotone Funktionen*)
Eine Funktion $f \in C^\infty((0,\infty))$ nennt man *vollständig monoton*, falls $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0, n \in \mathbb{N}_0, x \in (0,\infty)$.

Bemerkung 6.2. Vollständig monotone Funktionen sind insbesondere nichtnegativ ($f(x) \geq 0$), monoton fallend ($-f'(x) \geq 0$) und konvex ($f^{(2)}(x) \geq 0$).

Ein typisches Beispiel einer vollständig monotonen Funktion ist $f(x) = e^{-x}$. Wir wollen nun einen Satz von Sergei Natanovich Bernstein (auch zu finden in [1, Seite 160, Satz 12a]) beweisen.

Satz 6.3. (*von Bernstein*)
Für jede beschränkte vollständig monotone Funktion auf $(0,\infty)$ gibt es ein eindeutiges endliches, nichtnegatives, reguläres Borelmaß auf $[0,\infty]$ mit $\mu([0,\infty]) = f(0^+) := \lim_{x\searrow 0} f(x)$, sodass

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-ax} d\mu(a). \tag{1}$$

Bemerkung 6.4. Im Satz von Bernstein wird f mit der eindeutigen stetigen Fortsetzung auf $[0,\infty]$ identifiziert.

Bemerkung 6.5. Da alle vollständig monotonen Funktionen auf $(0,\infty)$ monoton fallend sind, existiert $f(0^+)$ immer, wenn wir auch ∞ zulassen.

Man erkennt schnell, dass man Differentialoperator und Integral vertauschen kann (siehe hierzu z. B. [6, Satz 2.1.7, Seite 35]) und stellt so fest, dass die Funktionen der Form (1) auch vollständig monoton sind. Also haben wir eine vollständige Beschreibung der Klasse beschränkter vollständig monotoner Funktionen auf $(0,\infty)$. Wir wollen nun den Satz von Krein-Milman verwenden, um diese Aussage zu beweisen.
Zuerst wollen wir die Idee des Beweises erläutern. Dieser orientiert sich stark an der Beweisführung in [3, Seiten 13-16] bzw. [5, Seiten 517-520]. Sei B die Menge aller vollständig monotonen Funktionen auf $(0,\infty)$ mit $f(0^+) < \infty$. Da für $f \in B$ mit $f(0^+) > 1$ auch $\frac{f}{f(0^+)} \in B$ und wir auch die Maße entsprechend skalieren können, reicht es, die Aussage für $K := \{f \in B : f(0^+) \leq 1\}$ zu zeigen. Nun ist $K \subseteq E := C^\infty((0,\infty),\mathbb{R})$. E ist mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz (der Funktion und all ihrer Ableitungen) auf kompakten Teilmengen von $(0,\infty)$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Wir werden zeigen, dass K bezüglich dieser Topologie kompakt ist, um den Satz von Krein-Milman anzuwenden. Weiters werden wir zeigen, dass $\mathrm{Ext}(K)$ genau die Funktionen der Form $x \mapsto e^{-ax}, 0 \leq a \leq \infty$ sind, wobei $x \mapsto e^{-\infty x}$ als Nullfunktion definiert wird. Es wird sich herausstellen, dass $\mathrm{Ext}(K)$ homöomorph zu $[0,\infty]$ ist und somit kompakt. Nach dem Satz von Krein-Milman in Integralform existiert zu jedem $f \in K$ ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathrm{Ext}(K)$, welches f darstellt. Dieses Maß μ kann nun auf ein Maß auf $[0,\infty]$ übergeführt werden und die Punktauswertungsfunktionale $f \mapsto f(x), x > 0$ sind stetig auf E. Setzt man die gesammelten Informationen richtig zusammen, so erhält man die gewünschte Darstellung. Die Eindeutigkeit der Darstellung folgt schließlich aus einer Anwendung des Satzes von Stone-Weierstrass ([6, Seite 20, Satz 1.5.2]).

Lemma 6.6. Sei $K_n := \{(-1)^n f^{(n)} : f \in K, n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt für alle $a > 0$ und $n \geq 0$, dass die Funktionen aus K_n in $[a,\infty)$ nach oben durch $a^{-n} 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ beschränkt sind.

Beweis. Für K_0 sind die Funktionen $f \in K_0$ klarerweise durch 1 beschränkt. Sei die Behauptung also für $n \geq 1$ wahr. Da für $f \in K_n$ gilt $f'(x) = (-1)^n f^{(n+1)}(x) \leq 0$, sind alle $f \in K_n$ monoton fallend. Wenden wir nun die Induktionsvoraussetzung auf die Menge $[\frac{a}{2},\infty)$ und den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an, so gilt:

$$\begin{aligned}
&\exists\, c \in [\frac{a}{2}, a] : \frac{a}{2} f^{(n+1)}(c) = f^{(n)}(a) - f^{(n)}(\frac{a}{2}) \\
&\Rightarrow (-1)^n f^{(n)}(\frac{a}{2}) - (-1)^n f^{(n)}(a) = \frac{a}{2}(-1)^{n+1} f^{(n+1)}(c) \\
&\Rightarrow (-1)^n f^{(n)}(\frac{a}{2}) \geq \frac{a}{2}(-1)^{n+1} f^{(n+1)}(c)
\end{aligned}$$

und somit

$$(\frac{a}{2})^{-n} 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \geq (-1)^n f^{(n)}(\frac{a}{2}) \geq \frac{a}{2}(-1)^{n+1} f^{(n+1)}(c) \geq \frac{a}{2}(-1)^{n+1} f^{(n+1)}(a)$$

Durch multiplizieren beider Seiten mit $\frac{2}{a}$ ergibt sich die gewünschte Darstellung. □

Lemma 6.7. $K := \{f \in B : f(0^+) \leq 1\}$ ist eine kompakte Teilmenge von $E := C^\infty((0,\infty), \mathbb{R})$ bezüglich der durch die Familie

$$p_n(f) := \sup\{|f^{(k)}(x)| : \frac{1}{n} \leq x \leq n, 0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}\}, n \in \mathbb{N}$$

von Seminormen induzierten Topologie.

Beweis. Man kann zeigen, dass die durch die Familie der Seminormen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induzierte Topologie den Raum $C^\infty((0,\infty))$ lokalkonvex macht und dass es reicht, zu zeigen, dass K abgeschlossen und beschränkt bezüglich aller Seminormen p_n ist (siehe hierzu [7, Kapitel 17 bzw. 19, Seite 22 bzw. 25]). Da für $f_n \to f$ in $C^\infty((0,\infty))$ auch alle ihre Ableitungen gleichmäßig konvergieren, kann man mittels des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zeigen, dass auch $f \in C^\infty((0,\infty))$ und klarerweise wieder $f(0^+) \leq 1$. Somit ist K abgeschlossen. Die Beschränktheit bezüglich der Seminormen ergibt sich sofort mit Lemma 6.6, womit wir sehen, dass $\forall f \in K : p_n(f) \leq n^n 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Folglich ist K kompakt. □

Lemma 6.8. Erfüllt eine stetige Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ für alle $x, y \in (0,\infty)$ die Gleichung

$$f(x+y) = f(x)f(y), \tag{2}$$

so gilt $f(x) = a^x$ für ein $a \in \mathbb{R}$.

Beweis. Definiere $a := f(1)$. Für $x = y = 1$ in (2) ergibt sich $f(2) = a^2$. Wenn wir nun induktiv für $x = 1, y = n, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ in (2) einsetzen, so erhalten wir $f(n+1) = f(n)f(1) = a^n a = a^{n+1}, n \in \mathbb{N}$. Weiters gilt für $x = y = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}$ durch einsetzen in (2) und Wurzel ziehen, dass $f(\frac{n}{2}) = a^{\frac{n}{2}}$. Setzen wir nun wieder induktiv für $x = y = \frac{n}{2^k}, k \in \mathbb{N}$ ein, so erhalten wir $f(\frac{n}{2^{k+1}}) = f(\frac{n}{2^k})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{n}{2^k}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{n}{2^{k+1}}}$. Die Aussage kann man nun durch Stetigkeitsargumente auf alle $x > 0$ ausweiten. □

Lemma 6.9. Es gilt $\mathrm{Ext}(K) = \{f : (0,\infty) \to \mathbb{R} : f(x) = e^{-ax}, a \in [0,\infty]\}$, wobei wir $x \mapsto e^{-\infty x}$ als Nullfunktion definieren.

Beweis. " $\subseteq$ "
Sei $f \in \text{Ext}(K)$ und $y > 0$. Definiere $u(x) = f(x+y) - f(x)f(y)$. Wir wollen nun zeigen, dass $f \pm u \in K$ und somit $u \equiv 0$. Sei dazu $b := f(y)$ und somit $b \in [0,1]$. Es gilt

$$(f+u)(0^+) = f(0^+) + f(y) - f(0^+)f(y) = (1-b)f(0^+) + b \leq 1$$
$$(f-u)(0^+) = f(0^+) - f(y) + f(0^+)f(y) = f(0^+) - b(1-f(0^+) \leq 1.$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned}(-1)^n(f+u)^{(n)}(x) &= (-1)^n f^{(n)}(x) + (-1)^n f^{(n)}(x+y) - (-1)^n b f^{(n)}(x) \\ &= (1-b)(-1)^n f^{(n)}(x) + (-1)^n f^{(n)}(x+y) \geq 0 \\ (-1)^n(f-u)^{(n)}(x) &= (-1)^n f^{(n)}(x) - (-1)^n f^{(n)}(x+y) + (-1)^n b f^{(n)}(x) \geq 0,\end{aligned}$$

denn $(-1)^n f^{(n)}$ ist nichtnegativ und monoton fallend. Also sind die Funktionen $f \pm u$ insbesondere monoton fallend, also auch durch 1 beschränkt. Dies bedeutet also $f \pm u \in K$ und somit $f = \frac{1}{2}(f+u) + \frac{1}{2}(f-u)$ und somit $u \equiv 0$, da $f \in \text{Ext}(K)$. Also muss laut Lemma 6.8 $f(x) = \tilde{a}^x$ mit $\tilde{a} \in [0,1]$, da $0 \leq f(x) \leq 1, x > 0$ und somit entweder $f \equiv 0$ oder mit $a = \ln(\tilde{a})$ gilt $f(x) = e^{ax}, a \in (-\infty, 0]$.
" $\supseteq$ "
Dass die konstanten Funktionen $f_0 \equiv 0$ und $f_1 \equiv 1$ Extremalpunkte sind, folgt direkt aus der Bedingung $0 \leq f \leq 1, f \in K$. Weiters muss es mindestens ein $a \in (0,\infty)$ mit $x \mapsto e^{-ax} \in \text{Ext}(K)$ geben, da sonst $\text{Ext}(K)$ nur aus f_0 und f_1 und somit laut Krein-Milman $K = \overline{\text{co}(\text{Ext}(K))}$ nur aus konstanten Funktionen bestehen würde. Betrachte nun den Operator $T_r : K \to K$ mit $T_r f(x) = f(rx)$. Dieser ist klarerweise wohldefiniert, bijektiv und linear, bildet also wegen Lemma 4.11 Extremalpunkte auf Extremalpunkte ab. Also sind alle Funktionen $x \mapsto e^{-ax}, a \in [0,\infty]$ Extremalpunkte von K. □

Definition 6.10. ($[0,\infty]$)
Indem man ∞ zum Intervall $[0,\infty)$ hinzufügt, und die Topologie entsprechend anpasst, indem man fordert, dass alle offenen Mengen in $[0,\infty)$ auch offen in $[0,\infty]$ sind und zusätzlich alle Mengen der Form $(a,\infty], a \geq 0$ offen sind, erhält man einen kompakten Hausdorffraum.

Lemma 6.11. Die Funktion $T : [0,\infty] \to K$ mit $T(a) = e^{-a(\cdot)}$ ist stetig.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}p_n \circ T(a) &= \sup\{|T(a)^{(k)}(x)| : \frac{1}{n} \leq x \leq n, 0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{a^k e^{-ax} : \frac{1}{n} \leq x \leq n, 0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

für eine der Seminormen p_n, definiert in Lemma 6.7. Wir wissen, dass die ϵ-Kugeln in $[0,\infty]$ eine Umgebungsbasis für jeden Punkt bilden. Außerdem ist $p_n \circ T$ genau dann stetig, wenn es für jedes $a_0 \in [0,\infty]$ und jede Umgebung V von $p_n \circ T(a_0)$ eine Umgebung U von a_0 gibt, für die $p_n \circ T(U) \subseteq V$ gilt. Für $a_0 = 0$ gilt $T(0) \equiv 1$, also $p_n \circ T(0) = 1$, da alle Ableitungen verschwinden. Sei nun $0 < \delta < \max\{n|\ln(1-\epsilon)|, 1\}$, so ist $|p_n \circ T(0) - p_n \circ T(a)| \leq 1 - e^{-\frac{\delta}{n}} < 1 - (1-\epsilon) = \epsilon$ für alle $a \in [0,\delta)$, also $p_n \circ T([0,\delta)) \subseteq U_\epsilon(p_n \circ T(0))$.

Seien nun $\epsilon > 0, a_0 \in (0,1]$ beliebig, so gilt $p_n \circ T(a_0) = e^{-\frac{a_0}{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.Wähle $0 < \delta < a_0$ so klein, dass $e^{-\frac{a_0+\delta}{n}} > e^{-\frac{a_0}{n}} - \epsilon$ und $max\{(a_0+\delta)^n e^{-\frac{a_0-\delta}{n}}, e^{-\frac{a_0-\delta}{n}}\} < e^{-\frac{a_0}{n}} + \epsilon$, so gilt wiederum $p_n \circ T(U_\delta(a_0)) \subseteq U_\epsilon(p_n \circ T(a_0))$.
Für $a_0 \in (1, \infty)$ wähle man $\delta \in (0, a_0 - 1)$ so, dass

$$a_0^k e^{-\frac{a_0}{n}} - \epsilon < (a_0 - \delta)^k e^{\frac{a_0}{n}}$$
$$\text{und } (a_0 + \delta)^k e^{-\frac{a_0}{n}} < a_0^k e^{-\frac{a_0}{n}} + \epsilon,$$

so gilt auch

$$a_0^k e^{-\frac{a_0}{n}} - \epsilon = p_n \circ T(a_0) - \epsilon < p_n \circ T(a) < p_n \circ T(a_0) + \epsilon = a_0^k e^{-\frac{a_0}{n}} + \epsilon$$

für $a \in (a_0 - \delta, a_0 + \delta)$, also $p_n \circ T(U_\delta(a_0)) \subseteq U_\epsilon(p_n \circ T(a_0))$.
Für $a_0 = \infty$ gilt $p_n \circ T(\infty) = 0$. Da nun für alle hinreichend großen $a > 0$ gilt, dass $p_n \circ T(a) = a^n e^{-\frac{a}{n}}$ und $\lim\limits_{a \to \infty} a^n e^{-\frac{a}{n}} = 0$, was mit der Regel von de L'Hospital leicht einzusehen ist, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein b_0, sodass $p_n \circ T((b_0, \infty]) \subseteq [0, \epsilon)$.
Somit sind alle $p_n \circ T$ stetig und damit auch T. □

Schlussendlich wollen wir den Satz von Bernstein beweisen.

Beweis. (*von Satz 6.3*)
Da die Abbildung T aus Lemma 6.11 stetig und $[0, \infty]$ kompakt ist, ist auch das Bild von T, also $\mathrm{Ext}(K)$ kompakt und somit auch abgeschlossen. Wegen Korollar 5.4 gibt es also für jedes $f \in K$ ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $\mathrm{Ext}(K)$ mit $L(f) = \int_{\mathrm{Ext}(K)} L \, d\nu$ für jedes $L \in C^\infty((0, \infty))'$. Insbesondere sind die Punktauswertungsfunktionale $L_x(f) := f(x)$ stetig auf $C^\infty((0, \infty))$, es gilt also $f(x) = L_x(f) = \int_{\mathrm{Ext}(K)} L_x \, d\nu$. Definiere auf allen Borelmengen $B \subseteq [0, \infty]$ das Maß $\mu(B) := \nu(T(B))$. Dann gilt

$$f(x) = \int_{\mathrm{Ext}(K)} L_x \, d\nu = \int_{T^{-1}(\mathrm{Ext}(K))} L_x \circ T \, d(\nu \circ T) = \int_0^\infty e^{-ax} d\mu(a).$$

Man sieht schnell mit dominierter Konvergenz, dass $f(0^+) = \int_0^\infty \mathbb{1} d\mu = \mu([0, \infty])$. □

Satz 6.12. Falls $f(x) = \int_0^\infty e^{-ax} d\mu(a)$ für eine Funktion $f \in K$ mit einem nichtegativen regulären Borelmaß μ auf $[0, \infty]$, so ist diese Darstellung eindeutig. Es gibt also kein anderes nichtnegatives reguläres Borelmaß ν auf $[0, \infty]$ mit $f(x) = \int_0^\infty e^{-ax} d\nu(a)$.

Beweis. Da f vollständig monoton und beschränkt ist, existieren $f(0^+)$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, wir können f also als $C([0, \infty])$-Funktion betrachten. Betrachten wir die Menge $A := \{g : [0, \infty] \to \mathbb{R} : g(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e^{-x_i a}, x_i \in [0, \infty], c_i \in \mathbb{R}\}$, so ist diese Menge eine punktetrennende Algebra von Funktionen auf einem kompakten Raum, die die konstante $\mathbb{1}$-Funktion enthält und somit laut dem Satz von Stone-Weierstrass ([6, Seite 20, Satz 1.5.2]) dicht in $C([0, \infty])$ liegt. Da nun μ und ν als stetige Funktionale auf $C([0, \infty])$ interpretiert werden können und auf allen $g \in C([0, \infty])$ der Form $a \mapsto e^{-ax}$, durch die Linearität auch auf allen $g \in A$ und aufgrund der Stetigkeit auf ganz $C([0, \infty])$ übereinstimmen, gilt $\nu = \mu$. □

7 Der Satz von Ljapunov für vektorielle Maße und das "Cake-cutting Problem"

Wir beginnen dieses Kapitel zur Motivation des Satzes von Ljapunov mit dem "Cake-cutting Problem". Moritz und Louisa wollen sich einen Kuchen teilen. Dies soll natürlich so gerecht wie möglich geschehen. Da wir den Kuchen aber nicht in zwei gleiche Teilen schneiden können (an manchen Stellen ist mehr Schokolade, an anderen mehr Marzipan etc.), müssen wir uns etwas einfallen lassen. Eine Idee ist, z. B. Moritz den Kuchen in zwei für ihn gleichwertige Teile schneiden zu lassen und Louisa aussuchen zu lassen, welchen Teil sie nehmen will. Dies funktioniert jedoch nur, wenn Louisa nachher nicht Moritz damit zu ärgern beginnt, dass sie ihrer Meinung nach das bessere Stück bekommen hat und Moritz so neidisch wird und die Aufteilung doch nicht mehr gerecht findet. Wir brauchen also eine Aufteilung des Kuchens in zwei Teile, welche sowohl für Moritz als auch für Louisa gleichwertig sind. Widmen wir uns diesem Problem also etwas formeller.
Sei dazu Ω eine Menge (unser Kuchen), $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω (die Stücke, in die wir den Kuchen zerschneiden können) und μ_1 bzw. μ_2 zwei endliche, nichtnegative[1] Maße auf $\mathcal{A}$ (die Werte, die Moritz und Louisa den verschiedenen Teilen des Kuchens zuweisen). Nun lautet unser Problem wie folgt:
Gibt es eine Menge $A \in \mathcal{A}$, sodass $\mu_1(A) = \frac{1}{2}\mu_1(\Omega)$ und $\mu_2(A) = \frac{1}{2}\mu_2(\Omega)$? Wir werden dafür weiters fordern, dass die beiden Maße atomlos sind (falls ein Stück nicht weiter zerteilt werden kann und beide dieses Stück unbedingt möchten, so ist das Problem nicht lösbar).

Definition 7.1. (*Atom eines Maßes*)
Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Man nennt $A \in \mathcal{A}$ ein *μ-Atom*, falls $|\mu|(A) > 0$ und für alle $B \in \mathcal{A}$ entweder $|\mu|(B) = 0$ oder $|\mu|(A \backslash B) = 0$. Es existiert also insbesondere keine Menge $B \in \mathcal{A}, B \subseteq A$, mit $0 < |\mu|(B) < |\mu|(A)$.Ein Maß μ heißt *atomar*, wenn μ-Atome existieren bzw. *atomlos*, falls keine μ-Atome existieren.

Der folgende Satz von Alexei Andrejewitsch Ljapunov[2] (1940) wird uns zeigen, dass dieses Problem nicht nur für zwei, sondern sogar für beliebig (endlich) viele Kuchenliebhaber lösbar ist. Die Beweisidee stammt von Lindenstrauss (1966), die Beweisführung orientiert sich an jener von Vladimir Kadets ([5, Seiten 521-522]).

Satz 7.2. (*von Ljapunov*) Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ endliche, reellwertige, atomlose Maße auf $\mathcal{A}$. Definiere das vektorielle Maß $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ mit $\mu(A) = (\mu_1(A), \ldots, \mu_n(A))$. Dann ist die Menge $\mu(\mathcal{A}) := \{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ konvex und kompakt in $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Betrachten wir das nichtnegative Maß $\nu = |\mu_1| + |\mu_2| + \cdots + |\mu_n|$. Klarerweise sind alle $\mu_i, 1 \leq i \leq n$ absolutstetig bezüglich ν. somit können wir nach Radon-Nikodým Dichten

[1] Theoretisch könnten die Maße auch negative Werte annehmen, wenn manche Stücke des Kuchens nicht gut aussehen und man sich wünscht, dass dieses Stück der andere bekommt, um es nicht essen bzw. entsorgen zu müssen.

[2] A. A. Ljapunov (1911-1973) war russischer Mathematiker und ist nicht zu verwechseln mit Alexander Michailowitsch Ljapunow (1857-1918), welcher ebenso ein russischer Mathematiker war (auf ihn geht die Definition der Ljapunov-Funktion zurück)

$g_i \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \nu), 1 \leq i \leq n$ definieren, sodass $\forall A \in \mathcal{A} : \mu_i(A) = \int_A g_i \, d\nu$. Sei nun der Operator $T : L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \nu) \to \mathbb{R}^n$ durch

$$Tf = \left(\int_\Omega f g_1 \, d\nu, \ldots, \int_\Omega f g_n \, d\nu \right)$$

definiert.
Die Menge $\mu(\mathcal{A})$, welche wir betrachten wollen, stimmt mit der Menge aller $T(\mathbb{1}_A), A \in \mathcal{A}$ überein. Aufgrund der Endlichkeit von ν können wir $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ mit dem Dualraum von $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ identifizieren (siehe [8, Seite 28, Beispiel 2.3.1]). Dann ist $f \mapsto \int_\Omega f g_i \, d\nu = \int_\Omega f \, d\mu_i, 1 \leq i \leq n, f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ w^*-stetig und somit auch T. Betrachten wir nun die Menge $W := \{f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \nu) : 0 \leq f \leq 1, \nu\text{-f.ü.}\} \subseteq L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$. Dann gilt $W = K_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}\mathbb{1}_\Omega)$ und somit ist W mit dem Satz von Banach-Alaoglu (Satz 4.18) w^*-kompakt. Außerdem sieht man schnell ein, dass W konvex ist. Also ist $T(W)$ eine kompakte, konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Wir müssen also nur noch zeigen, dass $\mu(\mathcal{A}) = T(W)$.
" $\subseteq$ ": Da für $A \in \mathcal{A}$ die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A$ in W liegt, und

$$T(\mathbb{1}_A) = \left(\int_\Omega \mathbb{1}_A g_1 \, d\nu, \ldots, \int_\Omega \mathbb{1}_A g_n \, d\nu \right) = \left(\int_A g_1 \, d\nu, \ldots, \int_A g_n \, d\nu \right) = \mu(A)$$

haben wir $\mu(\mathcal{A}) \subseteq T(W)$.
" $\supseteq$ ": Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in T(W)$. Die Menge $T^{-1}(\{x\})$ ist w^*-abgeschlossen, also ist $T^{-1}(\{x\}) \cap W$ eine w^*-kompakte und aufgrund der Linearität von T konvexe Menge. Sei $f \in \operatorname{Ext}(T^{-1}(\{x\}) \cap W)$. So ein f existiert sicher, da $T^{-1}(\{x\}) \cap W$ eine konvexe kompakte Menge ist und wegen Satz 3.7 (Satz von Krein-Milman). Wir wollen nun zeigen, dass f einer Indikatorfunktion entspricht, also ν-f.ü. die Werte 0 und 1 annimmt. Sei dazu $A := \{t \in \Omega : f(t) \in (0,1)\}$. Wenn wir zeigen können, dass $\nu(A) = 0$, sind wir fertig. Nehmen wir an, $\nu(A) > 0$. Sei $A_n := \{t \in \Omega : \frac{1}{n} \leq f(t) \leq 1 - \frac{1}{n}\}$. Es gilt $A_i \subseteq A_j, i < j$ und somit $\nu(A_i) \leq \nu(A_j), i < j$. Also ist $\nu(A) = \nu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \lim_{n \to \infty} \nu(A_n) > 0$ und somit existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\nu(A_n) > 0$. Betrachten wir nun den Teilraum $L^\infty(A_n) \subseteq L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$, so ist dieser unendlichdimensional, da ν atomlos ist (man betrachte die Indikatorfunktionen einer bezüglich $\subseteq$ absteigenden Folge von Mengen B_n mit $\nu(B_i) > \nu(B_j), i < j$). Da das Bild von T endlichdimensional ist, kann T nicht injektiv sein und somit muss eine Funktion $g \in L^\infty(A_n)$ mit $\|g\|_{L^\infty} = 1$ und $Tg = 0$ existieren. Setzen wir nun g auf Ω durch $g(t) = 0, t \notin A_n$ fort, so sind $f \pm \frac{1}{n} g$ in $T^{-1}(x) \cap W$, was aber ein Widerspruch dazu ist, dass f extremal in $T^{-1} \cap W$ ist. Somit muss also $f = \mathbb{1}_A$ für eine Menge $A \in \mathcal{A}$ und daher $x = T(\mathbb{1}_A) = \mu(A)$. □

Bemerkung 7.3. Für das "Cake-cutting Problem" müssen wir nur noch Satz 7.2 und $\frac{1}{2}\mu(\emptyset) + \frac{1}{2}\mu(\Omega) = (\frac{1}{2}\mu_1(\Omega), \frac{1}{2}\mu_2(\Omega)) = \mu(A) = (\mu_1(A), \mu_2(A))$ für eine Menge $A \in \mathcal{A}$ verwenden.

Beispiel 7.4. Definiere auf dem Intervall $[0,1]$ das Maß μ mit Werten in $L^2([0,1])$ mit $\mu(A) = \mathbb{1}_A$. Man erkennt leicht, dass μ σ-additiv und somit tatsächlich ein Maß und atomlos ist. Die Menge $\mu(\mathcal{B})$ der Werte von μ auf den Borelmengen von $[0,1]$ ist jedoch nicht konvex, da $\frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,1]} \notin \mu(\mathcal{B})$, aber die Nullfunktion und $\mathbb{1}_{[0,1]}$ schon.

Literaturverzeichnis

[1] D. V. Widder. *The Laplace Transform.* 2. Aufl. Princeton University Press, 1946.

[2] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* 3. Aufl. MGH, 1987. ISBN: 0-07-054234-1.

[3] Robert R. Phelps. *Lectures on Choquet's Theorem.* 2. Aufl. Springer, 2001. ISBN: 978-3-540-48719-7.

[4] Michael Kaltenbäck. *Fundament Analysis.* Berliner Studienreihe zur Mathematik. Heldermann Verlag, 2015. ISBN: 978-3-88538-126-.

[5] Vladimir Kadets. *A Course in Functional Analysis and Measure Theory.* Übers. von Andrei Iacob. Springer, 2018. ISBN: 978-3-319-92003-0.

[6] Martin Blümlinger. *Analysis 3.* TU Wien, Sep. 2019.

[7] Stephen Semmes. *An introduction to some aspects of functional analysis, 5: Smooth functions and distributions.* Rice University, Dez. 2019.

[8] Martin Blümlinger Harald Woracek Michael Kaltenbäck. *Funktionalanalysis.* 14. Aufl. Feb. 2020.