

Das Paradoxon von Banach-Tarski

Paul Winkler
Seminararbeit aus Analysis

Betreuer: Prof. Harald Woracek
Technische Universität Wien
Wintersemester 2020/21

1 Einleitung

Das Banach-Tarski-Paradoxon ist eines der spektakulärsten Resultate der modernen Mathematik. In seiner bekanntesten Fassung lautet es wie folgt:

Satz (Banach-Tarski-Paradoxon). *Es gibt eine endliche Partition der Einheitskugel im \mathbb{R}^3 , die nur durch Rotationen und Translationen der einzelnen Teile in zwei identische Kopien der Einheitskugel überführt werden kann.*

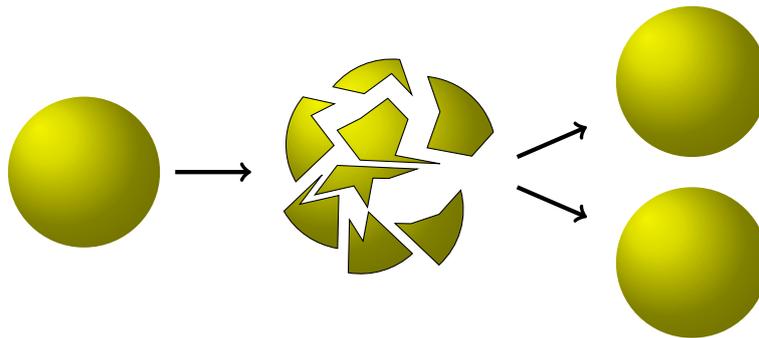


Abb. 1: Das Paradoxon von Banach-Tarski.

Tatsächlich gilt sogar eine stärkere Aussage: Für beliebige beschränkte Teilmengen A und B von \mathbb{R}^3 mit nichtleerem Inneren ist es möglich, A so zu zerteilen und umzuordnen, dass man exakt B erhält. Diese Tatsache, die auf dem Auswahlaxiom fußt, widerspricht diametral unserer Intuition – es scheint, als könnte man Volumen aus dem Nichts erschaffen.

Wir werden das Paradoxon in mehreren Schritten beweisen. Die Beweise und Ideen sind, falls nicht anders angegeben, [1] und [2, Kap. 1-3] entnommen.

Zuerst zeigen wir ein zweidimensionales Analogon dazu. Der wesentliche Beweisschritt wird ein simples Resultat über freie Gruppen sein. Anschließend werden wir diese Erkenntnisse auf spezielle Drehgruppen umlegen, uns mit ein paar technischen Details beschäftigen und dann schrittweise stärkere Aussagen beweisen. Zuletzt werden wir uns noch die Frage stellen, welche mathematischen und philosophischen Konsequenzen der Satz hat.

Beginnen wir also im Zweidimensionalen, wo ein dem Banach-Tarski-Paradoxon ähnliches, wenn auch weniger spektakuläres Phänomen auftritt:

1.1 *Beispiel.* Bezeichne r das offene Intervall $(0, 1)$, ϱ die Rotation der Ebene um einen Radianten gegen den Uhrzeigersinn und ϱ^{-1} die Rotation in die Gegenrichtung.

Wenn wir ϱ wiederholt auf r anwenden, erhalten wir lauter Radien $\varrho^n(r)$ des Einheitskreises in einem Winkel von jeweils n Radianten. Weil der volle Winkel 2π Radianten umfasst und diese Zahl irrational ist, treffen sich die Radien nie. Es gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$

$$r \neq \varrho^{n+1}(r)$$

und folglich

$$\varrho^{-1}(r) \neq \varrho^n(r).$$

Sei nun $\mathcal{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varrho^n(r)$ die Vereinigung aller solcher Radien. Dann gilt, wenn wir ϱ^{-1} auf \mathcal{C} anwenden,

$$\varrho^{-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \cup \varrho^{-1}(r).$$

Wir haben also nur durch eine Rotation der Menge \mathcal{C} die Menge \mathcal{C} selbst *und* noch einen zusätzlichen Radius erhalten. //

2 Freie Gruppen und paradoxe Zerlegungen

2.1 Definition. Wir betrachten die Menge aller Strings (genannt *Wörter*) aus den Zeichen x, y, x^{-1} und y^{-1} . ε sei das leere Wort. Mit der Kürzungsregel

$$xx^{-1} = x^{-1}x = yy^{-1} = y^{-1}y = \varepsilon$$

können wir zwei Wörter als äquivalent auffassen, wenn eines durch Entfernen von aufeinanderfolgenden, zueinander inversen Buchstaben aus dem anderen hervorgeht. $F(x, y)$ bezeichne die Menge all dieser Äquivalenzklassen mit der Konkatenation als binärer Operation. Diese Menge bildet eine Gruppe, die von x und y erzeugte *freie Gruppe*.

Eine detaillierte Konstruktion der freien Gruppe findet sich in [4, Kap. 4.1.4]. Vereinfacht gesagt rührt der Begriff »frei« daher, dass in dieser Gruppe ausschließlich jene Gesetze gelten, die aus den Gruppenaxiomen folgen (das Kommutativgesetz zum Beispiel nicht).

2.2 Definition. Ein Wort heißt *reduziert*, wenn keine aufeinanderfolgenden, zueinander inversen Buchstaben vorkommen.

Jede Äquivalenzklasse enthält ein eindeutiges reduziertes Wort. Der Einfachheit halber wollen wir uns im Folgenden die Elemente von $F(x, y)$ immer als die reduzierten Wörter vorstellen und nicht in Äquivalenzklassen denken. Wir bezeichnen die Wörter, die mit x, x^{-1}, y und y^{-1} beginnen, jeweils mit $F_x, F_{x^{-1}}, F_y$ und $F_{y^{-1}}$. Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$F(x, y) = \{\varepsilon\} \cup F_x \cup F_{x^{-1}} \cup F_y \cup F_{y^{-1}}. \quad (1)$$

Die folgende Feststellung ist eine einfache, wiewohl sehr nützliche:

2.3 Proposition. *Es gelten folgende Aussagen:*

- (i) $F(x, y) = x^{-1}F_x \cup F_{x^{-1}}$
- (ii) $F(x, y) = y^{-1}F_y \cup F_{y^{-1}}$
- (iii) $F(x, y)$ ist abzählbar.

Beweis. Zuerst stellen wir fest, dass $x^{-1}F_x$ und $F_{x^{-1}}$ disjunkt sind: Ein reduziertes Wort $w \in F_x$ kann nämlich nicht mit xx^{-1} beginnen, damit beginnt $x^{-1}w$ nicht mit x^{-1} .

Sei nun z in $F(x, y) \setminus F_{x^{-1}}$ beliebig. Wir können ein neues Wort z' definieren durch $z' = xz$. Wegen $z \notin F_{x^{-1}}$ ist z' reduziert und somit $z = x^{-1}z' \in x^{-1}F_x$. Insgesamt haben wir also (i) gezeigt; (ii) ist bis auf Umbenennung dieselbe Aussage.

Für (iii) kann man $F(x, y)$ explizit aufzählen, indem man die Wörter zuerst aufsteigend nach Länge und dann geeignet alphabetisch sortiert. □

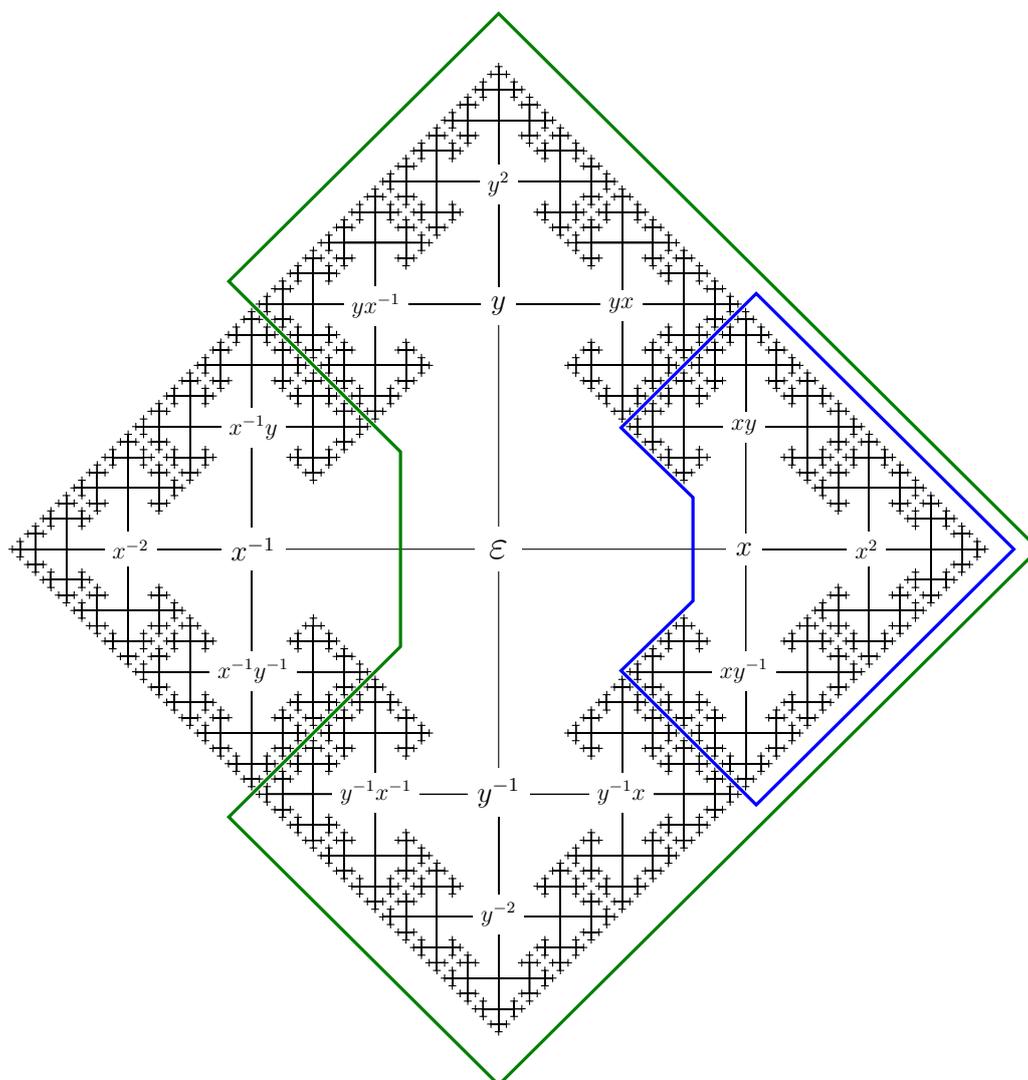


Abb. 2: Cayley-Graph von $F(x, y)$. Wenn man F_x von links mit x^{-1} konkateniert, erhält man $F(x, y) \setminus F_{x^{-1}}$ («aus einem Viertel werden drei«).

Proposition 2.3 sagt uns also, dass man $F(x, y)$ nur durch die Translation von zwei disjunkten Teilmengen duplizieren kann. Das motiviert folgende Definition:

2.4 Definition. Sei X eine Menge, $E \subseteq X$ und G eine Gruppe von Funktionen auf X . Wenn es paarweise disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ und Funktionen $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ gibt mit

$$E = \bigcup_{i=1}^n g_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^m h_j(B_j),$$

so nennen wir E *paradox bezüglich G* .

In dieser Terminologie ist $F(x, y)$ also paradox bezüglich sich selbst, wobei jedes Wort w auch die Rolle der Linkstranslation $x \mapsto wx$ spielt.

3 Unabhängige Rotationen

Wir betrachten nun die Gruppe SO_3 der Rotationen des \mathbb{R}^3 , deren Achse durch den Ursprung verläuft. Diese können wir als orthogonale Matrizen mit Determinante 1 auffassen:

$$SO_3 = \{A \in GL_3(\mathbb{R}) \mid A^T A = I \wedge \det A = 1\}. \quad (2)$$

Ziel des Abschnitts ist es, zwei Rotationen σ und τ zu finden, die unabhängig sind in dem Sinne, dass die von σ und τ erzeugte Untergruppe von SO_3 isomorph zur freien Gruppe $F(x, y)$ ist. Auf diese Untergruppe werden wir dann die Resultate aus dem zweiten Kapitel anwenden. Es wird sich herausstellen, dass folgende Matrizen das Gewünschte leisten:

$$\sigma^{\pm 1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mp 2\sqrt{2} \\ 0 & \pm 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau^{\pm 1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \mp 2\sqrt{2} & 0 \\ \pm 2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass σ und τ Rotationen gegen den Uhrzeigersinn um die x - respektive z -Achse sind, jeweils mit einem Drehwinkel von $\arccos \frac{1}{3}$.

3.1 Definition. Wir nehmen nun die freie Gruppe $F(x, y)$ und ersetzen in jedem Wort x durch σ und y durch τ . Die Einheitsmatrix I übernimmt die Rolle des leeren Wortes. Die so erhaltene Gruppe heißt $F(\sigma, \tau)$, ihre Elemente nennen wir wieder *Wörter*. Weiters sei $\langle \sigma, \tau \rangle$ die von σ und τ erzeugte Untergruppe von SO_3 .

Offensichtlich lässt sich jedes Wort $w \in F(\sigma, \tau)$ als Matrix interpretieren. Umgekehrt ist jedes $v \in \langle \sigma, \tau \rangle$ das Produkt endlich vieler Faktoren aus $\{\sigma^{\pm 1}, \tau^{\pm 1}\}$. Die wesentliche Aussage ist nun, dass diese Faktoren und ihre Reihenfolge eindeutig bestimmt sind, v also eine eindeutige Darstellung als reduziertes Wort hat. Der Beweis richtet sich nach [3, Kap. 2].

3.2 Lemma. Sei $w \in F(\sigma, \tau)$. Dann gibt es eindeutig bestimmte ganze Zahlen a, b und c , sodass

$$w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage mit vollständiger Induktion nach n . Für $n = 0$ ist w das leere Wort und es gilt $w(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, was offensichtlich die gewünschte Form hat.

Sei nun $n > 0$. Dann gibt es ein Wort w' der Länge $n - 1$, sodass w sich in eine der folgenden Darstellung bringen lässt: $\sigma w', \sigma^{-1} w', \tau w'$ oder $\tau^{-1} w'$. Angenommen, w habe die Form $\sigma w'$. Dann gilt

$$\begin{aligned} w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \sigma w' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{(IV)}}{=} \sigma \left(\frac{1}{3^{n-1}} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} 3a \\ (b - 2c)\sqrt{2} \\ 4b + c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ganz analog kann man nachrechnen, dass (3) auch gilt, falls w eine der drei anderen Darstellungen hat. \square

3.3 Lemma. Jedes nichtleere, reduzierte Wort $w \in F(\sigma, \tau)$ ist ungleich der Einheitsmatrix.

Beweis. O. B. d. A. nehmen wir an, dass w auf $\tau^{\pm 1}$ endet.[†] Unter dieser Annahme werden wir zeigen, dass

$$w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Seien a, b und c die zu w gehörigen ganzen Zahlen aus Lemma 3.2. Wir zeigen nun induktiv nach der Wortlänge $3 \nmid b$; insbesondere gilt daher $b \neq 0$ und ergo (4).

Für den Induktionsanfang hat w die Länge eins, also die Form $\tau^{\pm 1}$, wo $b = \pm 2$ nicht durch 3 teilbar ist.

Im Induktionsschritt sei w ein Wort der Länge $n \geq 2$. Dann gibt es ein reduziertes, möglicherweise leeres Wort w'' , sodass w eine der folgenden Darstellungen hat: $\tau^{\pm 1} \sigma^{\pm 1} w'', \sigma^{\pm 1} \tau^{\pm 1} w'', \sigma^{\pm 1} \sigma^{\pm 1} w''$ oder $\tau^{\pm 1} \tau^{\pm 1} w''$.

[†] Es gilt nämlich $w = I \iff \tau w \tau^{-1} = I$. Wenn w bereits auf $\tau^{\pm 1}$ endet, tun wir nichts; wenn es auf $\sigma^{\pm 1}$ endet betrachten wir $w_1 = \tau w \tau^{-1}$ statt w . Dann ist w_1 ein reduziertes Wort, außer w hat die Form $\tau^{-1} w_2$; in diesem Fall ist $w_3 = w_2 \tau^{-1}$ ein reduziertes Wort mit $w_3 = I$.

↪ Fall 1: $w = \tau^{\pm 1} \sigma^{\pm 1} w''$. Es seien

$$\begin{aligned} w'' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3^{n-2}} \begin{pmatrix} a'' \\ b''\sqrt{2} \\ c'' \end{pmatrix}, \\ \sigma^{\pm 1} w'' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3^{n-1}} \begin{pmatrix} 3a'' \\ (b'' \pm 2c'')\sqrt{2} \\ c'' \mp 4b'' \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{n-1}} \begin{pmatrix} a' \\ b'\sqrt{2} \\ c' \end{pmatrix}, \\ \tau^{\pm 1} \sigma^{\pm 1} w'' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} a' \pm 4b' \\ (b' \pm 2a')\sqrt{2} \\ 3c' \end{pmatrix} = \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es gilt also $b = b' \pm 2a'$. Wegen $a' = 3a''$ gilt $3 \mid 2a'$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $3 \nmid b'$ und somit $3 \nmid b$.

↪ Fall 2: $w = \sigma^{\pm 1} \tau^{\pm 1} w''$. Der Beweis für diesen Fall geht analog zu jenem von Fall 1.

↪ Fall 3: $w = \tau^{\pm 1} \tau^{\pm 1} w''$. Seien

$$\begin{aligned} w'' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3^{n-2}} \begin{pmatrix} a'' \\ b''\sqrt{2} \\ c'' \end{pmatrix}, \\ \tau^{\pm 1} w'' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3^{n-1}} \begin{pmatrix} a'' \mp 4b'' \\ (b'' \pm 2a'')\sqrt{2} \\ 3c'' \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{n-1}} \begin{pmatrix} a' \\ b'\sqrt{2} \\ c' \end{pmatrix}, \\ \tau^{\pm 1} \tau^{\pm 1} w'' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} a' \mp 4b' \\ (b' \pm 2a')\sqrt{2} \\ 3c' \end{pmatrix} = \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es gilt $b = b' \pm 2a' = b' \pm 2(a'' \mp 4b'') = b' \pm 2a'' \mp 8b'' = b' + (b'' \pm 2a'') - 9b'' = 2b' - 9b''$. Nach Induktionsvoraussetzung ist b' nicht durch 3 teilbar, deshalb auch $b = 2b' - 9b''$ nicht.

↪ Fall 4: $w = \sigma^{\pm 1} \sigma^{\pm 1} w''$. Man kann in diesem Fall einen Beweis ganz analog zum vorherigen führen. \square

Die vollbrachten technischen Anstrengungen haben sich gelohnt, denn wir erhalten jetzt sehr einfach die Hauptaussage dieses Kapitels:

3.4 Proposition. $\langle \sigma, \tau \rangle$ und $F(\sigma, \tau)$ sind isomorph.

Beweis. Natürlich können wir $F(\sigma, \tau)$ auf kanonische Weise in $\langle \sigma, \tau \rangle$ einbetten. Zu zeigen bleibt lediglich die Injektivität.

Angenommen, es gäbe zwei verschiedene Wörter $w_1, w_2 \in F(\sigma, \tau)$, die dieselbe Matrix repräsentieren würden. Dann wäre $w_1 w_2^{-1}$ ein nichtleeres Wort, das die Einheitsmatrix darstellen würde, im Widerspruch zu Lemma 3.3. \square

4 Das Hausdorff-Paradoxon

Bezeichne \mathcal{S} die Einheitssphäre im \mathbb{R}^3 . Wir wollen \mathcal{S} nun auf eine ähnliche Art zerlegen wie die freie Gruppe im zweiten Kapitel.

4.1 Definition. Die freie Gruppe $F(\sigma, \tau)$ induziert eine Äquivalenzrelation auf \mathcal{S} wie folgt: x und y liegen in der selben Äquivalenzklasse, falls es eine Rotation φ in $F(\sigma, \tau)$ gibt mit $\varphi(x) = y$. Diese Äquivalenzklassen nennen wir *Orbits*.

Der Orbit von x ist also gegeben durch

$$\mathcal{O}(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in F(\sigma, \tau)\}.$$

\mathcal{S} ist eine überabzählbare Menge; andererseits ist $\mathcal{O}(x)$ sicher stets abzählbar. Deshalb muss es überabzählbar viele solcher Orbits geben. Mithilfe des Auswahlaxioms können wir aus jedem Orbit einen Repräsentanten auswählen. Die Menge all dieser Repräsentanten bezeichnen wir mit \mathcal{M}_0 .

Erinnern wir uns an dieser Stelle kurz an unsere Zerlegung von freien Gruppen:

$$F(\sigma, \tau) = \{I\} \cup F_\sigma \cup F_{\sigma^{-1}} \cup F_\tau \cup F_{\tau^{-1}}. \quad (5)$$

Weil \mathcal{M}_0 einen Repräsentanten aus jedem Orbit enthält, gilt

$$\mathcal{S} = F(\sigma, \tau)\mathcal{M}_0. \quad (6)$$

Wenn wir (5) und (6) kombinieren, erhalten wir

$$\mathcal{S} = F(\sigma, \tau)\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0 \cup F_\sigma\mathcal{M}_0 \cup F_{\sigma^{-1}}\mathcal{M}_0 \cup F_\tau\mathcal{M}_0 \cup F_{\tau^{-1}}\mathcal{M}_0. \quad (7)$$

Auf den ersten Blick sieht es so aus, als hätten wir \mathcal{S} in fünf Teile partitioniert, wobei wir nur durch Anwendung von Rotationen \mathcal{S} aus all diesen fünf Teilen wieder herstellen könnten. Bei näherer Betrachtung stellt sich heraus, dass diese naive Zerlegung leider nicht mehr disjunkt sein muss. Wenn nämlich zum Beispiel $(1, 0, 0)$ in \mathcal{M}_0 liegt, gilt wegen $\sigma(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ auch $(1, 0, 0) \in F_\sigma\mathcal{M}_0$.

Um das Problem mit den doppelt vorkommenden Punkten zu beheben, genügt es, wie wir gleich sehen werden, die Fixpunkte nichttrivialer Rotationen zu entfernen. Sei

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{S} \mid \exists \varrho \in F(\sigma, \tau): \varrho \neq I \wedge \varrho(x) = x\}.$$

Die Fixpunktmenge einer Rotation $\varrho \in F(\sigma, \tau)$ ist genau ihre Rotationsachse, also eine Gerade durch den Ursprung. Daher hat ϱ genau zwei Fixpunkte in \mathcal{S} . Aus der Abzählbarkeit von $F(\sigma, \tau)$ folgt damit auch jene von \mathcal{D} .

4.2 Lemma. $\mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$ ist abgeschlossen unter Rotationen aus $F(\sigma, \tau)$.

Beweis. Seien $x \in \mathcal{S}$ und $\varrho \in F(\sigma, \tau)$ mit $\varrho(x) \in \mathcal{D}$. Nach der Definition von \mathcal{D} gibt es ein $\varphi \in F(\sigma, \tau)$, $\varphi \neq I$, sodass $\varphi\varrho(x) = \varrho(x)$. Daraus erhält man $\varrho^{-1}\varphi\varrho(x) = x$. Wegen $\varphi \neq I$ gilt auch $\varrho^{-1}\varphi\varrho \neq I$ und somit $x \in \mathcal{D}$. \square

Wir sehen also, dass die Rotationen aus $F(\sigma, \tau)$ auch auf $\mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$ wohldefiniert sind. Analog zu oben können wir jetzt aus jedem Orbit $\mathcal{O}(x)$, $x \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$, einen Repräsentanten aus $\mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$ auswählen. Die Menge dieser Repräsentanten taufen wir \mathcal{M} .

4.3 Lemma. Für $\varrho_1, \varrho_2 \in F(\sigma, \tau)$ mit $\varrho_1 \neq \varrho_2$ gilt $\varrho_1(\mathcal{M}) \cap \varrho_2(\mathcal{M}) = \emptyset$.

Beweis. Wir führen einen Beweis durch Kontraposition: Seien $x_1, x_2 \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$ mit $\varrho_1(x_1) = \varrho_2(x_2)$. Durch linksseitige Multiplikation mit ϱ_1^{-1} erhält man $x_1 = \varrho_1^{-1}\varrho_2(x_2)$, insbesondere also $x_1 \in \mathcal{O}(x_2)$. Weil \mathcal{M} aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Repräsentanten enthält, muss $x_1 = x_2$ sein. Das bedeutet aber, dass x_1 ein Fixpunkt von $\varrho_1^{-1}\varrho_2$ ist. Aus $x_1 \notin \mathcal{D}$ folgt damit $\varrho_1^{-1}\varrho_2 = \text{I}$ und somit $\varrho_1 = \varrho_2$. \square

Wir erhalten nun leicht folgendes wichtiges Resultat:

4.4 Satz (Hausdorff-Paradoxon). $\mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$ ist paradox bezüglich SO_3 .

Beweis. Wir können erneut die Partitionierung der freien Gruppe ausnutzen und erhalten

$$\mathcal{S} \setminus \mathcal{D} = F(\sigma, \tau)\mathcal{M} = \mathcal{M} \cup F_\sigma\mathcal{M} \cup F_{\sigma^{-1}}\mathcal{M} \cup F_\tau\mathcal{M} \cup F_{\tau^{-1}}\mathcal{M}. \quad (8)$$

Dass diese Vereinigung disjunkt ist, folgt direkt aus Lemma 4.3. Daraus und aus Proposition 2.3 folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \setminus \mathcal{D} &= \sigma^{-1}(F_\sigma\mathcal{M}) \cup F_{\sigma^{-1}}\mathcal{M}, \\ \mathcal{S} \setminus \mathcal{D} &= \tau^{-1}(F_\tau\mathcal{M}) \cup F_{\tau^{-1}}\mathcal{M}. \end{aligned} \quad (9)$$

Damit ist der Satz bewiesen. \square

Fassen wir zusammen: Wir haben die Einheitssphäre \mathcal{S} – bis auf eine explizit konstruierte, abzählbare Teilmenge \mathcal{D} – in fünf überabzählbare, disjunkte Mengen zerteilt. Diese fünf Mengen haben wir nur auf inkonstruktive Weise mit dem Auswahlaxiom gefunden. Nur durch Anwendung von Rotationen konnten wir aus ihnen *zwei* Kopien von $\mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$ erhalten.

5 Zerlegungsgleichheit

5.1 Definition. Sei X eine Menge, $A, B \subseteq X$ und G eine Gruppe von Funktionen auf X . Wir nennen A und B *zerlegungsgleich bezüglich G* , in Zeichen $A \sim_G B$, wenn es zwei gleichmächtige, endliche Partitionen

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{i=1}^n B_i$$

und für $i = 1, \dots, n$ Funktionen $g_i \in G$ gibt mit $g_i(A_i) = B_i$.

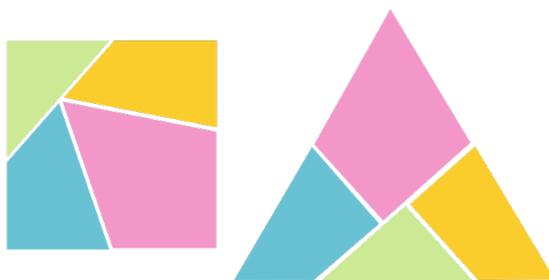


Abb. 3: Zwei zerlegungsgleiche Mengen (Quelle: Wikipedia/PD).

5.2 Proposition. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kreis und $x \in K$. Dann gilt $K \sim_{SO_2} K \setminus \{x\}$, wobei SO_2 die Gruppe der Rotationen des \mathbb{R}^2 ist.

Beweis. O. B. d. A. sei K der Einheitskreis und $x = (1, 0)$. Der Einfachheit halber identifizieren wir \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} . Seien $E = \{e^{in} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ und $\varrho: z \mapsto ze^{-i}$ (ϱ entspricht einer Rotation um einen Radianten im Uhrzeigersinn). Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $e^{in} = e^{im} \implies 2\pi \mid (n - m)$, daher sind alle e^{in} paarweise verschieden. Folglich ist $\varrho(E) = E \cup \{x\}$ und somit

$$K \setminus \{x\} = K \setminus \{E \cup \{x\}\} \cup E \sim_{SO_2} K \setminus \{E \cup \{x\}\} \cup \varrho(E) = K. \quad \square$$

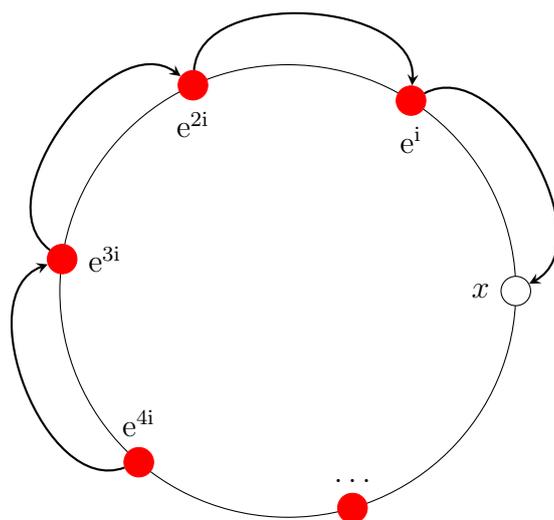


Abb. 4: Der Kreis mit Loch ist zerlegungsgleich zum ganzen Kreis: Wenn man die Menge E um einen Radianten im Uhrzeigersinn rotiert, »stopft« e^i das Loch bei x , ohne dass dabei ein neues Loch entsteht.

5.3 Lemma. *Zerlegungsgleichheit ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Die Reflexivität ist trivial. Für die Symmetrie stellen wir fest, dass in der Gruppe G alle Elemente invertierbar sind und $g_i(A_i) = B_i \iff A_i = g_i^{-1}(B_i)$ gilt.

Für die Transitivität gelte $A \sim_G B$, wobei die einschlägigen Partitionen n Elemente haben sollen, sowie $B \sim_G C$, wo sie n' -elementig seien. Die zugehörigen Funktionen seien g_i respektive g'_j . Wir setzen $A_{ij} = g_i^{-1}(B_i \cap B'_j)$; diese Mengen partitionieren A :

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{i,j} A_{ij} &= \bigsqcup_{i=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{n'} g_i^{-1}(B_i \cap B'_j) \\ &= \bigsqcup_{i=1}^n g_i^{-1} \left(B_i \cap \bigsqcup_{j=1}^{n'} B'_j \right) \\ &= \bigsqcup_{i=1}^n g_i^{-1}(B_i) = A. \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt nun

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{i,j} g'_j g_i(A_{ij}) &= \bigsqcup_{i,j} g'_j g_i g_i^{-1}(B_i \cap B'_j) \\ &= \bigsqcup_{j=1}^{n'} \bigsqcup_{i=1}^n g'_j(B_i \cap B'_j) \\ &= \bigsqcup_{j=1}^{n'} g'_j \left(B'_j \cap \bigsqcup_{i=1}^n B_i \right) \\ &= \bigsqcup_{j=1}^{n'} g'_j(B'_j) = C, \end{aligned}$$

womit eine Dekomposition gefunden ist und $A \sim_G C$ gilt. □

5.4 Proposition. *Seien X, Y Mengen und G eine Gruppe. Wenn X paradox bezüglich G ist und $X \sim_G Y$ gilt, so ist auch Y paradox bezüglich G .*

Beweis. Klarerweise ist X genau dann paradox bezüglich G , wenn es zwei disjunkte Teilmengen X', X'' von X gibt mit $X' \sim_G X \sim_G X''$. Sei $f: X \rightarrow Y$ jene Bijektion, die wir aus der Zerlegungsgleichheit von X und Y erhalten.[†] Dann gilt $X' \sim_G f(X')$ sowie $X'' \sim_G f(X'')$, wobei $f(X')$ und $f(X'')$ aufgrund der Bijektivität von f wieder disjunkt sind. Nach Lemma 5.3 ist \sim_G transitiv, also ist $f(X') \sim_G Y \sim_G f(X'')$ eine paradoxe Zerlegung von Y . □

[†] Für jedes $x \in X$ gibt es ein $i(x)$ mit $x \in X_{i(x)}$. Gemeint ist nun die Abbildung $f: x \mapsto g_{i(x)}(x)$.

6 Das Banach-Tarski-Paradoxon

In diesem Abschnitt werden wir eine paradoxe Zerlegung von \mathcal{S} finden und diese zu einer paradoxen Zerlegung von \mathcal{B} fortsetzen. Dazu müssen wir nur mehr kleinere technische Komplikationen mit Fixpunkten und dem Ursprung beheben.

6.1 Lemma. *Es gibt eine Rotation ψ von \mathcal{S} , sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gilt:*

$$\psi^n(\mathcal{D}) \cap \psi^m(\mathcal{D}) = \emptyset. \quad (10)$$

Beweis. Sei zunächst l eine Gerade durch den Ursprung mit $l \cap \mathcal{D} = \emptyset$. So ein l existiert, weil \mathcal{D} abzählbar ist, es aber überabzählbar viele Geraden durch den Ursprung gibt. Bezeichne ψ_α jene Rotation, die l als Rotationsachse und einen Drehwinkel von α (gegen den Uhrzeigersinn) hat. Für $d \in \mathcal{D}$ und $n \in \mathbb{N}^+$ definiere

$$A_{d,n} = \{\alpha \in [0, 2\pi) \mid \psi_\alpha^n(d) \in \mathcal{D}\}.$$

Jedes $\alpha \in A_{d,n}$ korrespondiert mit einem $d' \in \mathcal{D}$, nämlich jenem, für das $\psi_\alpha^n(d) = d'$ gilt; also ist $|A_{d,n}| \leq |\mathcal{D}|$. Aus der Abzählbarkeit von \mathcal{D} und \mathbb{N} folgt also auch jene von

$$A = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} A_{d,n}.$$

Andererseits ist $[0, 2\pi)$ überabzählbar, deshalb gibt es ein $\omega \in [0, 2\pi) \setminus A$. Wir wählen $\psi = \psi_\omega$. Nach Konstruktion gilt nun für alle $n \in \mathbb{N}^+$

$$\psi^n(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D} = \emptyset. \quad (11)$$

Angenommen, es gäbe verschiedene $m, n \in \mathbb{N}$ (o. B. d. A. $m > n$) und $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$, sodass $\psi^n(d_1) = \psi^m(d_2)$. Durch beidseitiges Anwenden von $(\psi^n)^{-1}$ erhalten wir $\psi^{m-n}(d_1) = d_2$, im Widerspruch zu (11). \square

6.2 Proposition. *\mathcal{S} und $\mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$ sind zerlegungsgleich bezüglich SO_3 .*

Beweis. Wir definieren

$$\mathcal{E} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \psi^n(\mathcal{D});$$

die Disjunktheit wird uns dabei von Lemma 6.1 garantiert. Unsere Partitionen für die Zerlegungsgleichheit lauten

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \mathcal{S} \setminus \mathcal{E} \cup \mathcal{E}, \\ \mathcal{S} \setminus \mathcal{D} &= \mathcal{S} \setminus \mathcal{E} \cup \mathcal{E} \setminus \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Aus $I(\mathcal{S} \setminus \mathcal{E}) = \mathcal{S} \setminus \mathcal{E}$ und

$$\psi \mathcal{E} = \psi \bigcup_{n=0}^{\infty} \psi^n(\mathcal{D}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \psi^n(\mathcal{D}) = \mathcal{E} \setminus \mathcal{D}$$

folgt die Behauptung. \square

6.3 Satz. \mathcal{S} ist paradox bezüglich SO_3 .

Beweis. Nach Satz 4.4 ist $\mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$ paradox bezüglich SO_3 . Laut Proposition 6.2 gilt $\mathcal{S} \sim_{SO_3} \mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$. Damit ist nach Proposition 5.4 auch \mathcal{S} paradox bezüglich SO_3 . \square

6.4 Korollar. Die Einheitskugel ohne Ursprung, $\mathcal{B} \setminus \{0\}$, ist paradox bezüglich SO_3 .

Beweis. Indem wir jedem $s \in \mathcal{S}$ die Strecke vom Ursprung zu s (exklusive ersterem) zuordnen (d. h. $s \mapsto \{ts : 0 < t \leq 1\}$), können wir Teilmengen von \mathcal{S} mit Teilmengen von $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ identifizieren. Die paradoxe Zerlegung von \mathcal{S} überträgt sich auf diese Weise zu einer von $\mathcal{B} \setminus \{0\}$. \square

6.5 Lemma. Es gilt $\mathcal{B} \sim_{SO_3} \mathcal{B} \setminus \{0\}$.

Beweis. Sei $K \subseteq \mathcal{B}$ ein Kreis mit $0 \in K$ und sei $K' = K \setminus \{0\}$. Wir betrachten folgende Zerlegungen:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \mathcal{B} \setminus K \cup K, \\ \mathcal{B} \setminus \{0\} &= \mathcal{B} \setminus K \cup K'.\end{aligned}$$

Aus Proposition 5.2 wissen wir, dass K und K' zerlegungsgleich sind, womit die Aussage bewiesen ist. \square

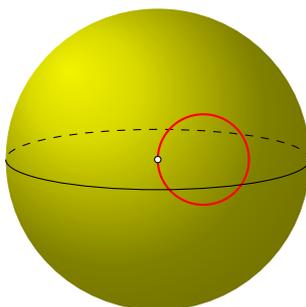


Abb. 5: $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ enthält einen Kreis K' mit Loch im Ursprung. Indem wir einen Teil von K' rotieren, können wir das Loch »stopfen« und ganz \mathcal{B} erhalten.

6.6 Satz (Banach-Tarski-Paradoxon, klassische Fassung). \mathcal{B} ist paradox bezüglich SO_3 .

Beweis. Nach Korollar 6.4 ist $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ paradox bezüglich SO_3 . Nach Lemma 6.5 ist $\mathcal{B} \sim_{SO_3} \mathcal{B} \setminus \{0\}$. Damit ist nach Proposition 5.4 auch \mathcal{B} paradox bezüglich SO_3 . \square

Um auch anschaulich zwei Kugeln zu bekommen (also nicht zwei deckungsgleiche), kann man einfach eine der beiden erhaltenen Kopien translatieren.

Dass \mathcal{B} Radius eins hat, ist eine willkürliche Wahl. Tatsächlich sind Kugeln beliebiger Größe, die ihren Mittelpunkt im Ursprung haben, und sogar der ganze \mathbb{R}^3 paradox bezüglich SO_3 . Das sieht man ganz leicht, indem man die in Korollar 6.4 konstruierten von \mathcal{S} ausgehenden Radiallinien entsprechend verlängert bzw. verkürzt.

7 Verallgemeinerungen

7.1 Definition. Seien X eine Menge, G eine Gruppe von Funktionen auf X und $A, B \subseteq X$. Wir schreiben $A \preceq_G B$, falls es ein $B' \subseteq B$ gibt mit $A \sim_G B'$.

7.2 Lemma. Seien $A, B, A', B' \subseteq X$ Mengen und G eine Gruppe von Funktionen auf X . Dann gilt:

- (i) Wenn $A \sim_G B$ ist, dann gibt es eine Bijektion $\alpha: A \rightarrow B$, sodass für alle $C \subseteq A$ gilt: $C \sim_G \alpha(C)$.
- (ii) Wenn $A \sim_G A', B \sim_G B'$ und $A \cap B = \emptyset = A' \cap B'$ gilt, so ist $A \cup B \sim_G A' \cup B'$.

Beweis. Gelte zunächst $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i, B = \bigsqcup_{i=1}^n B_i, A' = \bigsqcup_{j=1}^{n'} A'_j, B' = \bigsqcup_{j=1}^{n'} B'_j$ sowie $g_i, g'_j \in G$ mit $g_i(A_i) = B_i$ und $g'_j(A'_j) = B'_j$.

- (i) Für jedes $a \in A$ gibt es ein $i(a)$ mit $a \in A_{i(a)}$. Die Abbildung $\alpha: a \mapsto g_{i(a)}(a)$ ist eine Bijektion, weil jedes g_i eine solche ist. Sei nun $C \subseteq A$ beliebig. Dann gilt

$$C = \bigsqcup_{i=1}^n (A_i \cap C) \quad \text{und}$$

$$\alpha(C) = \bigsqcup_{i=1}^n g_i(A_i \cap C).$$

- (ii) Es gilt $A \cup B = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \cup \bigsqcup_{j=1}^{n'} B_j$ und $A' \cup B' = \bigsqcup_{i=1}^n g_i(A_i) \cup \bigsqcup_{j=1}^{n'} g'_j(B_j)$. □

7.3 Satz (Banach-Schröder-Bernstein). Aus $A \preceq_G B$ und $B \preceq_G A$ folgt $A \sim_G B$.

Beweis. Seien $A' \subseteq A, B' \subseteq B$ mit $A \sim_G B', B \sim_G A'$ und seien $f: A \rightarrow B', g: A' \rightarrow B$ Bijektionen wie in Lemma 7.2 (i). Wir definieren induktiv eine Mengensequenz $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$C_0 = A \setminus A',$$

$$C_{n+1} = g^{-1}(f(C_n)).$$

Sei $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n \subseteq A$. Nun gilt

$$\begin{aligned} g(A \setminus C) &= g\left(A' \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) \\ &= g(A') \setminus g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}(f(C_{n-1}))\right) \\ &= B \setminus f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\right) = B \setminus f(C) \end{aligned}$$

und somit (wegen der Wahl von g) $A \setminus C \sim_G B \setminus f(C)$ und außerdem (wegen der Wahl von f) $C \sim_G f(C)$. Nach Lemma 7.2 (ii) gilt damit

$$A = A \setminus C \cup C \sim_G B \setminus f(C) \cup f(C) = B. \quad \square$$

Wir haben nun alle Hilfsmittel gesammelt, um das Paradoxon in seiner stärksten Form zu zeigen. Bezeichne M_3 die Gruppe der Isometrien (Rotationen und Translationen) des \mathbb{R}^3 .

7.4 Satz (Banach-Tarski-Paradoxon, allgemeine Fassung). *Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ beschränkt mit nichtleerem Inneren. Dann sind A und B zerlegungsgleich bezüglich M_3 .*

Beweis. Seien B_A und B_B zwei Kugeln mit $A \subseteq B_A$ und $B_B \subseteq B$. Nun wählen wir n so groß, dass wir B_A durch n Kopien von B_B überdecken können. Sei W eine disjunkte Vereinigung von n Kopien von B_B . Nach Konstruktion können wir diese n Kopien so translatieren, dass wir B_A überdecken. Wenn wir nicht die vollständigen Kopien betrachten, sondern nur geeignete Teilmengen, und diese verschieben, erhalten wir sogar genau B_A . Damit haben wir $B_A \preccurlyeq_{M_3} W$ gezeigt.

Indem wir das klassische Banach-Tarski-Paradoxon iterieren, können wir n Kopien von B_B aus B_B erzeugen, also gilt $W \preccurlyeq_{M_3} B_B$. Insgesamt haben wir

$$A \subseteq B_A \preccurlyeq_{M_3} W \preccurlyeq_{M_3} B_B \subseteq B$$

und damit $A \preccurlyeq_{M_3} B$ gezeigt. Mit einem symmetrischen Argument zeigt man $B \preccurlyeq_{M_3} A$. Nach dem Satz von Banach-Schröder-Bernstein gilt insgesamt $A \sim_{M_3} B$. \square

In anderen Worten: Wann immer wir zwei beschränkte Teilmengen A und B von \mathbb{R}^3 mit nichtleerem Inneren haben, gibt es eine Partition von A in *endlich* viele Teile, sodass wir, wenn wir auf jeden dieser Teile eine Isometrie anwenden, genau B erhalten. Das Wort »endlich« ist hier entscheidend: Würde man auch unendliche Partitionen zulassen, wäre die Aussage trivial, da alle Teilmengen des \mathbb{R}^3 mit nichtleerem Inneren dieselbe Kardinalität haben.

Weil das Größenverhältnis zwischen A und B total irrelevant ist, wird Satz 7.4 auch »pea and the Sun paradox« genannt.

8 Folgerungen und Interpretation

Selbstverständlich können in unserer realen, diskreten Welt keine derartigen Phänomene auftreten – das Universum ist keine Teilmenge des \mathbb{R}^3 . Deshalb der modernen Mathematik pathologische Züge zu attestieren, wäre jedoch populistisch – das Paradoxon zeigt lediglich ihre Grenzen im Hinblick auf einen totalen Volumsbegriff auf.

Betrachten wir dazu das sogenannte *Inhaltsproblem*: Gibt es für $d \in \mathbb{N}$ eine Funktion $\mu: 2^{\mathbb{R}^d} \rightarrow [0, \infty]$, die folgende Eigenschaften erfüllt?

- (i) $A, B \subseteq \mathbb{R}^d, A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (Additivität)
- (ii) $A, B \subseteq \mathbb{R}^d, A \cong B \implies \mu(A) = \mu(B)$ (Bewegungsinvarianz)
- (iii) $\mu([0, 1]^d) = 1$ (Normiertheit)

Als unmittelbare Folgerung aus dem Banach-Tarski-Paradoxon erhalten wir:

8.1 Korollar. *Für $d = 3$ hat das Inhaltsproblem keine Lösung. Insbesondere gibt es Mengen, die nicht Lebesgue-messbar sind.*

Tatsächlich kann man das Banach-Tarski-Paradoxon auf alle höheren Raumdimensionen verallgemeinern (siehe [2, Kap. 6]), woraus die Unmöglichkeit des Inhaltsproblems für $d \geq 3$ folgt. Banach konnte zeigen, dass das Problem für $d = 1$ und $d = 2$ zwar lösbar, die Lösung aber nicht eindeutig ist. Ein Beweis davon und eine tiefere Betrachtung des Inhaltsproblems finden sich in [5].

Zuletzt wollen wir uns noch einmal in Erinnerung rufen, dass wir für den Beweis des Banach-Tarski-Paradoxons das Auswahlaxiom verwendet haben. Um derartige kontraintuitive Sätze zu umgehen, ohne komplett auf das Auswahlaxiom verzichten zu müssen, kann man es zum *Axiom der abhängigen Auswahl* (engl. *axiom of dependent choice*, kurz DC) abschwächen:

Sei X eine nichtleere Menge und $R \subseteq X^2$ eine linkstotale Relation.

Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $R(x_n, x_{n+1})$.

Tatsächlich gilt:

8.2 Satz. *Das Banach-Tarski-Paradoxon ist nicht beweisbar in $\text{ZF} + \text{DC}$.*

Allerdings hat dieser semi-konstruktivistische Ansatz zur Konsequenz, dass andere wichtige Resultate ihre Gültigkeit verlieren; so sind die Sätze von Hahn-Banach und Krein-Milman oder der Kompaktheitssatz für die Prädikatenlogik erster Stufe nicht aus $\text{ZF} + \text{DC}$ ableitbar (die Äquivalenz von Stetigkeit und Folgenstetigkeit und etliche Ergebnisse der reellen Analysis hingegen schon). Für einen Beweis von Satz 8.2 und weitere Aspekte zur Rolle des Auswahlaxioms im Hinblick auf diese Thematik, siehe [2, Kap. 15].

Literatur

- [1] WESTON, TOM: *The Banach-Tarski Paradox*. 2003.
<https://people.math.umass.edu/~weston/oldpapers/banach.pdf>
- [2] TOMKOWICZ, GRZEGORZ und WAGON, STAN: *The Banach-Tarski Paradox*. 2. Auflage, Cambridge University Press, 2016.
- [3] WAGON, STAN: *The Banach-Tarski Paradox*. Cambridge University Press, 1985.
- [4] WINKLER, REINHARD und GOLDSTERN, MARTIN: *Algebra*. Vorlesungsskript, Technische Universität Wien, 2020.
- [5] KREUTER, MARCEL: *Das Inhaltsproblem*. Bachelorarbeit, Universität Ulm, 2012.
https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.020/abschlussarbeiten/BA_Marcel_Kreuter.pdf