Die Stone–Čech-Kompaktifizierung der natürlichen Zahlen

Bachelorarbeit

Dominik Pichler

18. Februar 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **2**

1.1 Motivation 2

1.2 Die grundlegenden Definitionen und deren Folgerungen 3

2 Die Stone–Čech-Kompaktifizierung **7**

2.1 Definition durch C(X, [0,1]) 7

2.2 Definition durch Z-Ultrafilter 11

3 Die Stone–Čech-Kompaktifizierung von $\mathbb{N}$ **17**

3.1 Grundvorstellung 17

3.2 Die Kardinalität von $\beta(\mathbb{N})$ 19

3.3 Eine abgeschloffene Basis von $\beta(\mathbb{N})$ 23

3.4 Der Raum $\mathbb{N}^*$ 26

Literaturverzeichnis **28**

Kapitel 1

Einführung

1.1 Motivation

Im Bereich der Topologie ist es des Öfteren einfacher, Aussagen für kompakte Räume zu beweisen. Um diese Aussagen auf einen allgemeineren topologischen Raum zu erweitern, hilft es eine sogenannte Kompaktifizierung des Raumes zu betrachten. Die Stone–Čech-Kompaktifizierung eines topologischen Raumes ist eine spezielle Kompaktifizierung, welche eine eindeutige Fortsetzung jeder beschränkten Funktion auf die Kompaktifizierung zulässt.
Die erste Hälfte dieser Arbeit widmet sich der Existenz, der Eindeutigkeit und dem Aufbau dieser Kompaktifizierung. Im zweiten Teil dieser Arbeit wird die Stone–Čech-Kompaktifizierung der natürlichen Zahlen genauer behandelt. Dieser kompakte Raum weist eine große Menge interessanter Eigenschaften auf, von denen einige im Verlauf dieser Arbeit beschrieben und bewiesen werden.
Die für diese Arbeit vorausgesetzten Definitionen und Sätze sind in dem Buch, Fundament Analysis [1] von Michael Kaltenbäck zu finden.

1.2 Die grundlegenden Definitionen und deren Folgerungen

Definition 1.2.1 (Topologie)**.** *Sei X eine Menge und $\mathcal{T} \subseteq P(X)$, dann ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, wenn er folgende Eigenschaften besitzt:*

i) $\emptyset, X \subseteq \mathcal{T}$

ii) $\forall A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$

iii) $\forall A_i \in \mathcal{T}, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

Die Mengen einer Topologie nennt man *offen* und ihre Komplemente *abgeschlossen*. Die Menge aller abgeschlossenen Mengen eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}^c$. Ist eine Menge sowohl offen als auch abgeschlossen bezeichnen wir sie als *abgeschloffen*.
Alle offenen Mengen einer Topologie auf einer Menge X können durch eine *Basis* beschrieben werden.

Definition 1.2.2 (Basis)**.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, dann nennen wir eine Teilmenge $\mathcal{B}$ von $\mathcal{T}$ eine Basis von $\mathcal{T}$, wenn für sie gilt:*

$$\forall O \in \mathcal{T} \ \forall x \in O \ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq O \tag{1.1}$$

Eine Familie $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ ist genau dann eine Basis einer Topologie auf X, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

i) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$

ii) $\forall A, B \in \mathcal{B} \ \forall x \in A \cap B \ \exists C \in \mathcal{B} : x \in C \subseteq A \cap B$

Analog kann man die *abgeschlossene Basis* eines topologischen Raumes definieren.

Definition 1.2.3 (Abgeschlossene Basis)**.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, dann nennen wir eine Teilmenge $\mathcal{C} \subseteq P(X)$ eine abgeschlossene Basis von $\mathcal{T}$ wenn $\mathcal{C}^c := \{O \in P(X) : O^c \in \mathcal{C}\}$ eine Basis von $(X, \mathcal{T})$ ist, dh. für $\mathcal{C}$ gilt:*

$$\forall A \in \mathcal{T}^c \ \forall x \notin A \ \exists C \in \mathcal{C} : A \subseteq C \land x \notin C \tag{1.2}$$

Analog zur Definition 1.1.2 ist $\mathcal{C} \subseteq P(X)$ genau dann eine abgeschlossene Basis einer Topologie auf X, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

i) $\bigcap\limits_{C\in\mathcal{C}} C = \emptyset$

ii) $\forall A, B \in \mathcal{C}\ \forall x \notin A \cup B\ \exists C \in \mathcal{C} : x \notin C \wedge A \cup B \subseteq C$

Mit $C(X)$ bzw. $C_b(X)$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen bzw. stetigen und beschränkten Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Für eine Funktion $f \in C_b(X)$ definieren wir $K_f := [\inf f, \sup f]$. Sei A eine beliebige Menge versehen mit einer Topologie, dann bezeichne $C(X, A)$ die Menge aller stetigen Funktionen f mit $f(X) \subseteq A$.
Topologien können *Trennungseigenschaften* aufweisen. Die Bezeichnungen dafür sind nicht universell, die für diese Arbeit verwendeten sind:

Definition 1.2.4 (Trennungseigenschaften)**.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, dann nennt man ihn:*

T2: $\forall x, y \in X\ \exists O_x, O_y \in \mathcal{T} : x \in O_x,\ y \in O_y,\ O_x \cap O_y = \emptyset$

T3: $\forall x \in X\ \forall A \in \mathcal{T}^c\ \exists O_x, O_A \in \mathcal{T} : x \in O_x,\ A \subseteq O_A,\ O_x \cap O_A = \emptyset$

T3½: $\forall x \in X,\ \forall A \in \mathcal{T}^c$ *mit* $x \notin A,\ \exists f \in C(X, [0, 1]) :$
$f(x) = 0 \wedge f(A) = \{1\}$

T4: $\forall A, B \in \mathcal{T}^c\ \exists O_A, O_B \in \mathcal{T} : A \subseteq O_A,\ B \subseteq O_B,\ O_A \cap O_B = \emptyset$

Ist $(X, \mathcal{T})$ T3 und T2, dann bezeichnen wir den Raum als regulär*, ist er T3½ und T2 bezeichnen wir ihn als* vollständig regulär *oder auch als* Tychonoff *und ist er T4 und T2 bezeichnen wir ihn als* normal*.*

Ist ein topologischer Raum z.B. T2, dann nennen wir ihn einen T2-Raum und sagen, dass er die T2 Eigenschaft besitzt, analog für die anderen Trennungseigenschaften. Es gilt:

$$(X, \mathcal{T}) \text{ ist normal} \Rightarrow (X, \mathcal{T}) \text{ ist ein Tychonoff-Raum} \Rightarrow (X, \mathcal{T}) \text{ ist regulär}$$

Ebenso vererben sich Tychonoff und regulär auf die Spurtopologie. Ein Raum, der die T2 Eigenschaft besitzt wird auch *Hausdorff* genannt.

Die für diese Arbeit wichtigste Eigenschaft eines topologischen Raumes ist die *Kompaktheit.*

Definition 1.2.5 (kompakt)**.** *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein topologischer Raum.* $A \subseteq X$ *heißt* kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von* A *eine endliche Teilüberdeckung besitzt. D.h.:*

$$(A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i \ \forall i \in I : O_i \in \mathcal{T}) \Rightarrow \exists J \subseteq I,\ J \text{ endlich} : A \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j \tag{1.3}$$

$(X, \mathcal{T})$ heißt kompakt, wenn X selbst kompakt ist.

Ist ein Raum Hausdorff und kompakt, dann besitzt er auch die Trennungseigenschaft T4 und ist daher normal, ebenso ist in einem kompakten T2-Raum die Abgeschlossenheit einer Teilmenge äquivalent zu ihrer Kompaktheit.

Dass nicht jeder topologischer Raum diese Eigenschaft besitzt, ist leicht erkennbar, wie die von uns später genauer behandelte diskrete Topologie auf $\mathbb{N}$ zeigt.

Beispiel 1.2.6. *Betrachten wir den topologischen Raum* $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$*. Da in diesem Raum jede Teilmenge von* $\mathbb{N}$ *offen ist, bildet* $\bigcup_{n=0}^{\infty} \{n\}$ *eine offene Überdeckung von* $\mathbb{N}$*, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Daher ist die diskrete Topologie auf* $\mathbb{N}$ *nicht kompakt.*

Definition 1.2.7 (Einbettung)**.** *Sei* $\iota : X \to Y$ *eine Abbildung zwischen zwei topologischen Räume* $(X, \mathcal{T})$ *und* $(Y, \mathcal{D})$*. Dann heißt* ι *eine* Einbettung*, wenn sie ein Homöomorphismus auf ihr Bild* $\iota(X)$ *ist.*

Bemerkung 1.2.8. *Äquivalent zu der Definition 1.2.7 ist, dass* ι *eine injektive und stetige Funktion ist, die alle offenen Mengen* O *in* $(X, \mathcal{T})$ *auf eine offene Menge* $\iota(O)$ *in der Spurtopologie des Bildes* $\iota(X)$ *abbildet.*

Definition 1.2.9 (Kompaktifizierung)**.** *Seien* $(X, \mathcal{T})$ *und* $(Y, \mathcal{D})$ *topologische Räume und* $\iota : X \to Y$ *eine Abbildung, dann nennt man* $(Y, \mathcal{D}, \iota)$ *eine Kompaktifizierung von* $(X, \mathcal{T})$*, wenn folgende Eigenschaften gelten:*

i) $(Y, \mathcal{D})$ *ist kompakt*

ii) ι *ist eine Einbettung*

iii) $\overline{\iota(X)} = Y$

Ist $(Y, \mathcal{D})$ *ein Hausdorff-Raum, dann wird* $(Y, \mathcal{D}, \iota)$ *eine* T2-Kompaktifizierung *von* $(X, \mathcal{T})$ *genannt. Wir nennen zwei Kompaktifizierungen* $(Y, \mathcal{D}, \iota_Y)$ *und* $(Z, \mathcal{S}, \iota_Z)$ *von* $(X, \mathcal{T})$ isomorph*, wenn ein Homöomorphismus* $\phi : Y \to Z$ *mit* $\phi \circ \iota_Y = \iota_Z$ *existiert.*

Bemerkung 1.2.10. *Ist $(K, \mathcal{T})$ ein kompakter T2-Raum, dann gilt:*

i) $(K, \mathcal{T}, id_K)$ ist eine T2-Kompaktifizierung von $(K, \mathcal{T})$.

ii) Je zwei T2-Kompaktifizierung von $(K, \mathcal{T})$ sind zueinander isomorph.

Beweis. i): Die Eigenschaften i) und iii) aus Definition 1.2.9 sind nach Voraussetzung für $(K, \mathcal{T}, id_K)$ gegeben. Ebenso ist offensichtlich, dass die identische Abbildung id_K von $(K, \mathcal{T})$ nach $(K, \mathcal{T})$ eine Einbettung ist.

ii): Sei $(Y, \mathcal{D}, \iota)$ eine beliebige T2-Kompaktifizierung von $(K, \mathcal{T})$. Die Menge $\iota(K)$ ist als Bild einer kompakten Menge ebenfalls kompakt und somit abgeschlossen in $(Y, \mathcal{D})$. Daher folgt aus

$$\iota(K) = \overline{\iota(K)} = Y, \tag{1.4}$$

dass ι ein Homöomorphismus von $(K, \mathcal{T})$ nach $(Y, \mathcal{D})$ ist. Die Umkehrabbildung ι^{-1} ist daher ebenfalls ein Homöomorphismus und erfüllt die Eigenschaft

$$\iota^{-1} \circ \iota = id_K. \tag{1.5}$$

Da $(Y, \mathcal{D}, \iota)$ beliebig war, ist jede T2-Kompaktifizierung von $(K, \mathcal{T})$ isomorph zu $(K, \mathcal{T}, id_K)$. Schließlich sind somit auch je zwei T2-Kompaktifizierung von $(K, \mathcal{T})$ zueinander isomorph.

□

Kapitel 2

Die Stone–Čech-Kompaktifizierung

2.1 Definition durch C(X, [0,1])

Anhand der sogenannten Alexandroff-Kompaktifizierung, auch als Einpunkt-Kompaktifizierung bezeichnet, ist ersichtlich, dass jeder nicht kompakte Raum eine Kompaktifizierung besitzt. Etwas anders sieht es aus, wenn anstatt der Existenz einer beliebigen Kompaktifizierung, die Existenz einer T2-Kompaktifizierung gefordert wird.

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum der eine T2-Kompaktifizierung $(Y, \mathcal{D}, \iota)$ besitzt. Das bedeutet, $(Y, \mathcal{D})$ ist sowohl T2 als auch kompakt, daher muss $(Y, \mathcal{D})$ auch normal (T2 + T4) sein. Als Unterraum eines normalen Raumes muss $\iota(X)$, versehen mit der Spurtopologie, zwar nicht wieder normal sein, jedoch vererbt sich das nächst schwächere Trennungsaxiom T3$\frac{1}{2}$ auf $\iota(X)$. Da ι laut Definition ein Homöomorphismus von X auf $\iota(X)$ ist, besitzt $(X, \mathcal{T})$ ebenfalls die Trennungsaxiome T2 und T3$\frac{1}{2}$. Ein Raum muss also zumindest vollständig regulär sein um eine T2-Kompaktifizierung zu besitzen.

Der folgende Satz wird zeigen, dass die Trennungsaxiome T2 und T3$\frac{1}{2}$ eines topologischen Raumes nicht nur notwendig für die Existenz einer T2-Kompaktifizierung, sondern sogar äquivalent dazu sind.

Satz 2.1.1. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) $(X, \mathcal{T})$ ist ein Tychonoff-Raum.

ii) Es existiert eine Indexmenge I und eine Einbettung $\iota : X \to [0,1]^I$, wobei $[0,1]^I$ mit der Produkttopologie $\mathcal{P}$ und das Einheitsintervall mit der euklidischen Topologie versehen ist.

iii) $(X, \mathcal{T})$ besitzt eine T2-Kompaktifizierung.

Beweis. ii) $\Rightarrow$ iii): Der Satz von Tychonoff besagt, dass die Produkttopologie kompakter Räume wieder kompakt ist. Da das Einheitsintervall versehen mit der euklidischen Topologie kompakt ist, ist es $[0,1]^I$ ebenfalls. Ebenso ist die Produkttopologie von Hausdorff-Räumen wieder ein Hausdorff-Raum. Daher ist $(\overline{\iota(X)}, \mathcal{P}, \iota)$ eine T2-Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$.

iii) $\Rightarrow$ i): Dies wurde bereits zu Beginn dieses Abschnittes gezeigt.

i) $\Rightarrow$ ii): Sei $\mathcal{F} := C(X, [0,1])$, also die Menge aller stetigen Funktionen von X nach $[0,1]$, so definieren wir darüber die Abbildung

$$\iota : X \to [0,1]^{\mathcal{F}} : \iota(x) := (f(x))_{f \in \mathcal{F}}. \tag{2.1}$$

Dabei sei $[0,1]^{\mathcal{F}}$ versehen mit der Produkttopologie $\mathcal{P}$ und $Y := \overline{\iota(X)}$ mit der Spurtopologie $\mathcal{S}$.
Zu zeigen bleibt, dass ι eine Einbettung ist. Sei π_f die Projektion von $[0,1]^{\mathcal{F}}$ auf die Komponente f, dann gilt $\pi_f \circ \iota = f$ und daher ist ι, aufgrund der universellen Eigenschaft der Produkttopologie, stetig.
Nehmen wir an es existieren $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und $\iota(x) = \iota(y)$. Nach Definition von ι bedeutet das $f(x) = f(y)$ für alle f aus $\mathcal{F}$. Da $(X, \mathcal{T})$ ein Tychonoff-Raum ist, existiert eine stetige Funktion f von X nach $[0,1]$ für die gilt $f(x) = 0 \neq 1 = f(y)$, dies ist ein Widerspruch zu der Annahme $\iota(x) = \iota(y)$, daher muss ι injektiv sein.
Zuletzt sei $O \in \mathcal{T}$ und $y \in \iota(O)$ beliebig. Zusätzlich sei $x \in O$ mit $\iota(x) = y$. Dann lässt sich x durch eine Funktion $f \in \mathcal{F}$ von der abgeschlossenen Menge $O^c \not\ni x$ trennen, d.h. es existiert eine Funkion $f \in \mathcal{F}$ mit $f(x) = 0$ und $f(O^c) = \{1\}$. Somit ist y in der, in $\mathcal{P}$ offenen, Menge $\pi_f^{-1}([0,1))$ enthalten. Daher auch in der in $\mathcal{S}$ offenen Menge $\pi_f^{-1}([0,1)) \cap \iota(X)$. Nach der Wahl von f ist

$$\iota^{-1}(\pi_f^{-1}([0,1)) \cap \iota(X)) \subseteq O \tag{2.2}$$

und daher

$$y \in \pi_f^{-1}([0,1)) \cap \iota(X) \subseteq \iota(O). \tag{2.3}$$

Damit ist $\iota(O)$ eine Umgebung von y. Da y beliebig war, ist $\iota(O)$ offen in $\mathcal{S}$ und ι eine Einbettung.

□

Definition 2.1.2 (Stone–Čech-Kompaktifizierung)**.** *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein vollständig regulärer Raum. Eine T2-Kompaktifizierung* $(\beta(X), \mathcal{T}_\beta, \iota_{\beta(X)})$ *von* $(X, \mathcal{T})$ *wird eine* Stone–Čech-Kompaktifizierung *von* $(X, \mathcal{T})$ *genannt, wenn sie die folgende Eigenschaft hat:*

$$\forall f \in C_b(X) : \exists \tilde{f} \in C(\beta(X), K_f) : \tilde{f} \circ \iota_{\beta(X)} = f \tag{2.4}$$

In Worten: Für jede stetige beschränkte Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ *existiert eine stetige Funktion* $\tilde{f} : \beta(X) \to \mathbb{R}$*, die* f *auf* $\beta(X)$ *fortsetzt.*

Proposition 2.1.3. *Die im Satz 2.1.1 konstruierte T2-Kompaktifizierung* $(Y, \mathcal{S}, \iota)$ *von* $(X, \mathcal{T})$ *ist eine Stone–Čech-Kompaktifizierung von* $(X, \mathcal{T})$*.*

Beweis. Sei f eine beliebige stetige und beschränkte Funktion, $f : X \to \mathbb{R}$, dann ist

$$g(x) := \frac{f(x) \ + \ \max|f(t)|}{2\max|f(t)|} \ \in \mathcal{F}. \tag{2.5}$$

Definieren wir $\tilde{f}$ als

$$\tilde{f}(x) := 2\max|f(t)| \cdot \pi_g|_Y(x) - \max|f(t)|, \tag{2.6}$$

dann ist $\tilde{f} \in C(Y, K_f)$ und erfüllt die Eigenschaft $\tilde{f} \circ \iota = f$. □

Der folgende Satz zeigt, dass die Stone–Čech-Kompaktifizierung eines vollständig regulären Raumes, bis auf Isomorphie, eindeutig ist.

Satz 2.1.4. *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein Tychonoff-Raum, dann sind je zwei Stone–Čech-Kompaktifizierungen von* $(X, \mathcal{T})$ *zueinander isomorph.*

Beweis. Sei $(Y, \mathcal{S}, \iota)$ die Stone–Čech-Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$ aus Satz 2.1.1, und $(Z, \mathcal{C}, \iota_Z)$ eine weitere Stone–Čech-Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$. Sei $\mathcal{F}$ definiert wie in Satz 2.1.1 und $f \in \mathcal{F}$, dann existiert nach Definition 2.1.2 ein $\tilde{f} \in C(Z, [0,1])$ mit $\tilde{f} \circ \iota_Z = f$. Ähnlich zur Definition von ι betrachten wir die Funktion

$$\phi : Z \to [0,1]^{\mathcal{F}} : \phi(z) := (\tilde{f}(z))_{f \in \mathcal{F}}. \tag{2.7}$$

Da der Raum $(Z, \mathcal{C})$ normal und damit vollständig regulär, ist, beweist man die Injektivität von ϕ analog zu der Injektivität von ι, aus Beweis von Satz 2.1.1. Die Stetigkeit von ϕ folgt aus $\pi_f \circ \phi = \tilde{f}$. Nach Definition von ϕ gilt $\phi \circ \iota_Z = \iota$, insbesondere auch $\phi(Z) \supseteq \iota(X)$. Wegen

$$\phi(Z) = \phi(\overline{\iota_Z(X)}) \subseteq \overline{\phi(\iota_Z(X))} = \overline{(\tilde{f}(\iota_Z(X)))}_{f \in \mathcal{F}} = \overline{(f(X))}_{f \in \mathcal{F}} = \overline{\iota(X)}, \tag{2.8}$$

erhalten wir $\overline{\phi(Z)} = \overline{\iota(X)}$. Da die Menge $\phi(Z)$ kompakt in $\mathcal{S}$ ist, ist sie auch abgeschlossen in $\mathcal{S}$ und daraus folgt, dass $\phi(Z) = \overline{\iota(X)} = Y$. Somit ist ϕ eine stetige und bijektive Funktion von Z nach Y. Da für jede stetige und bijektive Funktion zwischen zwei kompakten Räumen auch folgt, dass die Umkehrfunktion stetig ist, ist ϕ ein Homöomorphismus. Folglich ist jede Stone–Čech-Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$ isomorph zu der in Satz 2.1.1 definierten, und daher auch zu jeder anderen Stone–Čech-Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$. □

In der Definition 2.1.2 können wir anstelle von K_f auch einen beliebigen kompakten T2-Raum verwenden, wie wir im folgenden Lemma zeigen werden.

Lemma 2.1.5. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer Raum, $(\beta(X), \mathcal{T}_\beta, \iota_{\beta(X)})$ die Stone–Čech-Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$ und $(K, \mathcal{D})$ ein kompakter T2-Raum. Dann gilt:*

$$\forall f \in C(X, K) : \exists \tilde{f} \in C(\beta(X), K) : \tilde{f} \circ \iota_{\beta(X)} = f \tag{2.9}$$

Beweis. Sei $\mathcal{K}$ die Menge aller stetigen Funktionen von K nach $[0, 1]$. Nach Bemerkung 1.2.10 und Satz 2.1.4 ist $(K, \mathcal{D})$ homöomorph zu $(\beta(K), \mathcal{S})$, wobei $\beta(K) \subseteq [0, 1]^{\mathcal{K}}$ und $\mathcal{S}$ die in Satz 2.1.1 definierte Topologie ist. Diesen Homöomorphismus von K nach $\beta(K)$ bezeichnen wir mit ϕ. Wählen wir ein beliebiges $f \in C(X, K)$, dann gilt für alle $g \in \mathcal{K}$ und die zugehörige Projektion π_g von $[0, 1]^{\mathcal{K}}$ auf g, dass

$$r_g := \pi_g \circ \phi \circ f : X \to [0, 1] \tag{2.10}$$

eine stetige und beschränkte Funktion ist. Daher existiert eine stetige Funktion $\tilde{r}_g : \beta(X) \to [0, 1]$ mit $\tilde{r}_g \circ \iota_{\beta(X)} = r_g$. Die Funktion

$$(\tilde{r}_g)_{g \in \mathcal{K}} : \beta(X) \to [0, 1]^{\mathcal{K}} \tag{2.11}$$

ist stetig und erfüllt $(\tilde{r}_g)_{g \in \mathcal{K}}(\beta(X)) \subseteq \beta(K)$. Somit ist

$$\tilde{f} := \phi^{-1} \circ (\tilde{r}_g)_{g \in \mathcal{K}} : \beta(X) \to K \tag{2.12}$$

die gesuchte Funktion, da $\tilde{f} \in C(\beta(X), K)$ und es gilt

$$\tilde{f} \circ \iota_{\beta(X)} = \phi^{-1} \circ (\tilde{r}_g)_{g \in \mathcal{K}} \circ \iota_{\beta(X)} = \phi^{-1} \circ (r_g)_{g \in \mathcal{K}} = \phi^{-1} \circ (\pi_g \circ \phi \circ f)_{g \in \mathcal{K}} = f. \tag{2.13}$$

□

2.2 Definition durch Z-Ultrafilter

Eine andere Charakterisierung der Stone–Čech-Kompaktifizierung eines vollständig regulären topologischen Raumes erhält man mittels seiner Nullstellenmengen. Dieser Aufbau basiert auf dem Werk von Boto von Querenburg [2, Kapitel 15] und wird im nächsten Kapitel benötigt.

Definition 2.2.1 (Nullstellenmenge)**.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $f \in C(X)$, dann heißt $Z(f) := \{x \in X : f(x) = 0\}$ die* Nullstellenmengen *von f. Mengen der Gestalt $Z(f)$ werden* Z-Mengen *genannt, und die Menge aller Z-Mengen auf X bezeichnen wir mit $Z(X)$.*

Proposition 2.2.2. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Tychonoff-Raum, dann ist die Menge Z(X) eine abgeschlossene Basis von $(X, \mathcal{T})$.*

Beweis. Alle Mengen aus $Z(X)$ sind als Urbilder der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ einer stetigen Funktion f wieder abgeschlossen. Zudem seien $O \in \mathcal{T}$ und $x \in O$ beliebig. Da O^c abgeschlossen ist, existiert eine Funktion $f \in C(X)$ mit $f(O^c) = \{0\}$ und $f(x) = 1$. Daraus folgt, dass $x \notin f^{-1}(\{0\}) \supseteq O^c$. Außerdem ergibt der Schnitt über alle Mengen aus $Z(X)$ die leere Menge, da die leere Menge selbst eine Nullstellenmenge einer Funktion ist. Sie ist das Urbild von $\{0\}$ jeder konstanten Funktion $k \in C(X)$ mit $k(x) \not\equiv 0$. □

Ähnlich zur Definition eines Filters ist die des *Z-Filters*.

Definition 2.2.3 (Z-Filter)**.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $\mathcal{Z} \subseteq Z(X)$, heißt ein Z-Filter auf X, wenn folgende Eigenschaften gelten:*

i) $\emptyset \notin \mathcal{Z}, \quad X \in \mathcal{Z}$

ii) $\forall A, B \in \mathcal{Z} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{Z}$

iii) $\forall A \in \mathcal{Z}\ \forall B \in Z(X) : A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{Z}$

Einen maximalen Z-Filter nennen wir einen *Z-Ultrafilter*, das ist ein Z-Filter, der keine echte Teilmenge eines Z-Filters ist. Das Lemma von Zorn begründet, dass jeder Z-Filter in einem Z-Ultrafilter enthalten ist.

Bemerkung 2.2.4. *Für jeden Z-Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf X und für jede Z-Menge $M \in Z(X)$ mit $M \notin \mathcal{U}$ existiert eine Menge $Z \in \mathcal{U}$ die disjunkt von M ist. Ansonsten wäre*

$$\{N \in Z(X) : \exists Z_1, Z_2, ..., Z_n \in \mathcal{U} \cup \{M\},\ Z_1 \cap Z_2 \cap .... \cap Z_n \subseteq N\} \quad (2.14)$$

ein von $\mathcal{U}$ verschiedener Z-Filter der $\mathcal{U}$ umfasst.

Definition 2.2.5 (Z-Filter Konvergenz)**.** *Sei $\mathcal{Z}$ ein Z-Filter auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$. Wir sagen $\mathcal{Z}$ konvergiert gegen einen Punkt $x \in X$, wenn der von $\mathcal{Z}$ erzeugte Filter feiner als der Umgebungsfilter $\mathcal{F}(x)$ von x ist. Dh.:*

$$\mathcal{F}(x) \subseteq \{A \subseteq X : \exists Z \in \mathcal{Z} \text{ mit } Z \subseteq A\} \tag{2.15}$$

Lemma 2.2.6. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer Raum und $x \in X$. Die Menge $\{N \in \mathcal{F}(x) \cap Z(X)\}$ bildet eine Basis des Umgebungsfilters $\mathcal{F}(x)$ von x.*

Beweis. Sei $A \in \mathcal{F}(x)$ beliebig, dann existiert eine offene Menge O mit $x \in O \subseteq A$. Die abgeschlossene Menge $O^c \not\ni x$ und das Element x lassen sich durch eine Funktion $f \in C(X, [0,1])$ trennen, dh. $f(O^c) = \{0\}$ und $f(x) = 1$. Definieren wir nun die stetige Funktion

$$g(t) := f(t) - \max\{f(t); \frac{1}{2}\}. \tag{2.16}$$

Für die Nullstellenmenge von g gilt $Z(g) \cap O^c = \emptyset$ und somit

$$x \in f^{-1}((\frac{2}{3}, 1]) \subseteq f^{-1}([\frac{1}{2}, 1]) = Z(g) \subseteq O \subseteq A. \tag{2.17}$$

Die Menge $f^{-1}((\frac{2}{3}, 1])$ ist als Urbild einer offenen Menge selbst offen und daher eine Umgebung von x. Somit ist $Z(g) \in \mathcal{F}(x)$. Da A beliebig war, bilden alle Z-Mengen, die ebenfalls eine Umgebung von x sind, eine Basis des Umgebungsfilters.

□

Proposition 2.2.7. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Tychonoff-Raum, $\mathcal{U}$ ein Z-Ultrafilter und $f \in C_b(X)$. Die Menge $f(\mathcal{U}) := \{Z \in Z(K_f) : f^{-1}(Z) \in \mathcal{U}\}$ ist ein Z-Filter auf K_f, wobei K_f mit der Spurtopologie bzgl. der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$ versehen ist. Zusätzlich existiert ein eindeutiges $p \in K_f$ gegen das $f(\mathcal{U})$ konvergiert.*

Beweis. Das $f(\mathcal{U})$ ein Z-Filter ist, ist trivial. Da $f(\mathcal{U})$ aus abgeschlossenen Mengen besteht und die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, folgt aus der Kompaktheit von K_f, dass ein $p \in \mathbb{R}$ existiert mit $p \in \bigcap_{Z \in f(\mathcal{U})} Z$. Wählen wir nun ein beliebiges $V \in \mathcal{F}(p) \cap Z(K_f)$, wobei $\mathcal{F}(p)$ der Umgebungsfilter von p in K_f ist. Es existiert eine offene Menge O mit $p \in O \subseteq V$. Da $\mathbb{R}$, versehen mit der euklidischen Topologie, ein vollständig regulärer Raum ist, können wir eine stetige Funktion $g \in C(K_f, [0,1])$ wählen mit $g(O^c) = \{0\}$ und $g(p) = 1$. Für das Urbild von $\{0\}$ gilt daher $g^{-1}(\{0\})^c \subseteq O \subseteq V$ und somit $g^{-1}(\{0\}) \cup V = K_f \in f(\mathcal{U})$. Da $p \notin Z(g)$, kann $Z(g)$ nicht in

$f(\mathcal{U})$ enthalten sein. Nehmen wir an, dass V auch nicht in $f(\mathcal{U})$ enthalten wäre. Dadurch lässt sich folgender Widerspruch bilden: Definieren wir $A := f^{-1}(V), B := f^{-1}(Z(g))$ und $C := f^{-1}(K_f)$, dann erfüllen diese Mengen $A \notin \mathcal{U},\ B \notin \mathcal{U},\ C \in \mathcal{U}$ und $A \cup B = C$. Da $\mathcal{U}$ ein Z-Ultrafilter ist, sowie A und B Nullstellenmengen stetiger Funktionen, existieren nach Bemerkung 2.2.4 $Z_A, Z_B \in \mathcal{U}$ mit $Z_A \cap A = \emptyset = Z_B \cap B$. Daraus folgt der Widerspruch:

$$\emptyset = (Z_A \cap Z_B \cap A) \cup (Z_A \cap Z_B \cap B) = (Z_A \cap Z_B) \cap (A \cup B) = (Z_A \cap Z_B) \cap C \in \mathcal{U} \tag{2.18}$$

Folglich ist $V \in f(\mathcal{U})$. Da V beliebig war, ist jede Menge aus $\mathcal{F}(p)$, die auch eine Z-Menge in K_f ist, in $f(\mathcal{U})$ enthalten. Nach Lemma 2.2.6, da K_f ein kompakter Hausdorff-Raum und daher ein vollständig regulärer Raum ist, konvergiert $f(\mathcal{U})$ gegen p. Die Eindeutigkeit von p ergibt sich aus der Tatsache, dass durch die Konvergenz $f(\mathcal{U})$ gegen p und q mit $p \neq q$ ein Widerspruch zu der Hausdorff-Eigenschaft von K_f und einer Filter Eigenschaft entsteht, da zwei disjunkte offene Mengen aus $\mathcal{F}(p)$ bzw. $\mathcal{F}(q)$ existieren müssen.

□

Lemma 2.2.8. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer Raum und $x \in X$, dann ist $\mathcal{Z}(x) := \{Z \in Z(X) : x \in Z\}$ ein Z-Ultrafilter und hat die Eigenschaft $\bigcap\limits_{Z \in \mathcal{Z}(x)} Z = \{x\}$. Ebenso konvergiert $\mathcal{Z}(x)$ eindeutig gegen x.*

Beweis. Dass $\mathcal{Z}(x)$ die Eigenschaften aus Definition 2.2.3 besitzt und damit ein Z-Filter ist, ist offensichtlich. Sei $\mathcal{F}$ ein Z-Filter mit $\mathcal{Z}(x) \subseteq \mathcal{F}$. Nehmen wir an, es existiert ein $A \in \mathcal{F}$ mit $x \notin A$. Für diese Menge A gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f(x) = 0$, $f(A) = \{1\}$ und somit $f^{-1}(\{0\}) \cap A = \emptyset$. Jedoch ist $f^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{Z}(x)$, dies ist ein Widerspruch zu $\mathcal{Z}(x) \subseteq \mathcal{F}$, daher ist $\mathcal{Z}(x)$ ein Z-Ultrafilter.
Sei $x \neq y$ und $y \in \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}(x)} Z$, d.h.

$$\forall f \in C(X) : x \in Z(f) \Rightarrow y \in Z(f), \tag{2.19}$$

dies widerspricht der Annahme, dass $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer Raum ist und daher x und die abgeschlossene Menge $\{y\}$ durch eine stetige Funktion $f \in C(X)$ mit $f(x) = 0$ und $f(\{y\}) = \{1\}$ getrennt werden können. Die Konvergenz von $\mathcal{Z}(x)$ gegen x und dessen Eindeutigkeit folgt nun analog zum Beweis von Proposition 2.2.7.

□

Satz 2.2.9. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein Tychonoff-Raum und $\beta(X)$ die Menge aller Z-Ultrafilter auf X. Für eine Z-Menge Z sei $\tilde{Z} := \{\mathcal{Z} \in \beta(X) : Z \in \mathcal{Z}\}$, also die Menge aller Z-Ultrafilter die Z enthalten. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

i) $\mathcal{B} := \{\tilde{Z} : Z \in Z(X)\}$ *ist eine abgeschlossene Basis einer eindeutigen Topologie $\mathcal{S}$ auf $\beta(X)$,*

ii) $\iota_\beta : X \to \beta(X)$ *mit* $\iota_\beta(x) := \mathcal{Z}(x)$ *ist eine Einbettung von X nach $\beta(X)$,*

iii) $\iota_\beta(X)$ *ist dicht in $\beta(X)$,*

iv) $(\beta(X), \mathcal{S})$ *ist ein kompakter Hausdorff-Raum,*

v) $(\beta(X), \mathcal{S}, \iota_\beta)$ *ist die Stone-Čech-Kompaktifizierung von X.*

Beweis. i): Angenommen es existiert ein Z-Ultrafilter $\mathcal{U}$ mit $\bigcap_{A\in\mathcal{B}} A \ni \mathcal{U}$, dann würde für alle Z-Mengen Z aus $(X,\mathcal{T})$ gelten, dass $Z \in \mathcal{U}$. Dies widerspricht der Eigenschaft eines vollständig regulären Raumes, da der Schnitt aus zwei Mengen in $\mathcal{U}$ nicht leer sein darf, jedoch zwei Z-Mengen existieren, die disjunkt sind. Für zwei beliebige stetige Funktionen $f, g \in C(X)$ gilt stets $Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$. Daher ist mit $\tilde{N}$, $\tilde{Z} \in \mathcal{B}$ auch $\tilde{N} \cup \tilde{Z} = \widetilde{(N \cup Z)} \in \mathcal{B}$. Somit ist $\mathcal{B}$ eine abgeschlossene Basis einer eindeutigen Topologie auf $\beta(X)$.

ii): Die Injektivität von $\iota_\beta(X)$ folgt aus dem Lemma 2.2.8. Um zu zeigen, dass $\iota_\beta(X)$ ein Homöomorphismus von X auf sein Bild ist, betrachten wir was mit der abgeschlossenen Basis $Z(X)$ von $(X,\mathcal{T})$ unter ι_β geschieht. Sei $Z \in Z(X)$, dann ist $\iota_\beta(Z) = \tilde{Z} \cap \iota_\beta(X)$, also wird die abgeschlossene Basis $Z(X)$ auf die abgeschlossene Basis $\{\tilde{Z} \cap \iota_\beta(X) : Z \in Z(X)\}$ der Spurtopologie von $\iota_\beta(X)$ bzgl. $\mathcal{S}$ abgebildet. Daher ist ι_β ein Homöomorphismus von X nach $\iota_\beta(X)$.

iii): Für alle $Z \in Z(X)$ gilt nach Definition $\iota_\beta(Z) \subseteq \tilde{Z}$ und daraus ergibt sich $\overline{\iota_\beta(Z)} \subseteq \tilde{Z}$, da $\tilde{Z}$, ebenfalls nach Definition, abgeschlossen ist. Für eine beliebige Z-Menge N von X mit $\tilde{N} \supseteq \iota_\beta(Z)$ ist

$$\iota_\beta(N) = \tilde{N} \cap \iota_\beta(X) \supseteq \iota_\beta(Z) \Rightarrow N \supseteq Z \Rightarrow \tilde{N} \supseteq \tilde{Z}. \tag{2.20}$$

Daher lässt sich der Abschluss von $\iota_\beta(Z)$ in $\beta(X)$ schreiben als der Durchschnitt aller $\tilde{N}$, die $\iota_\beta(Z)$ enthalten. Daraus ergibt sich:

$$\bigcap_{\tilde{N}\supseteq\iota_\beta(Z)} \tilde{N} = \overline{\iota_\beta(Z)} \Rightarrow \overline{\iota_\beta(Z)} \supseteq \tilde{Z} \Rightarrow \overline{\iota_\beta(Z)} = \tilde{Z} \tag{2.21}$$

So ist $\overline{\iota_\beta(X)} = \tilde{X} = \beta(X)$.

iv): Wir wählen zwei beliebige Z-Ultrafilter $\mathcal{U} \neq \mathcal{D}$ aus $\beta(X)$ und aus diesen jeweils eine Z-Menge $A \in \mathcal{U}$ bzw. $B \in \mathcal{D}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Solche Mengen existieren nach Bemerkung 2.2.4. Zu diesen Mengen sind $a, b \in C(X)$ die jeweiligen Funktionen, die A und B als Nullstellenmenge besitzen, also $Z(a) = A$ und $Z(b) = B$. Die stetige Funktion $g \in C(X)$, definiert durch

$$g(x) := \frac{|a(x)|}{|a(x)| + |b(x)|}, \tag{2.22}$$

erzeugt die zwei Mengen

$$N := \{x \in X : g(x) \geq \frac{1}{2}\} \text{ und } Z := \{x \in X : g(x) \leq \frac{1}{2}\}. \tag{2.23}$$

Nach Definition von g, N und Z gilt für diese $g(A) = \{0\}$ und $g(B) = \{1\}$, daher ist

$$A \cap N = \emptyset \Rightarrow \mathcal{U} \notin \tilde{N}. \tag{2.24}$$

Die Mengen N und Z sind Z-Mengen auf X, da $h(x) := g(x) - \max\{g(x); \frac{1}{2}\}$ eine stetige Funktion erzeugt, für die $Z(h) = N$ gilt, analog für Z. Nach Definition ist $\tilde{N}$ abgeschlossen, somit ergibt $\beta(X)\backslash\tilde{N}$ eine offene Umgebung, die $\mathcal{U}$ enthält, analog ergibt sich das für $\beta(X)\backslash\tilde{Z}$ und $\mathcal{D}$. Mit $N \cup Z = X$ folgt aus $\tilde{N} \cup \tilde{Z} = \widetilde{(N \cup Z)} = \tilde{X} = \beta(X)$ die Disjunktheit dieser offenen Umgebungen und daher ist $(\beta(X), \mathcal{S})$ ein T2-Raum.
Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ mit endlicher Durchschnittseigenschaft und $\mathcal{Z} \subseteq Z(X)$ die dazu gehörige Menge mit

$$\forall F \in \mathcal{F}\ \exists Z \in \mathcal{Z} : F = \tilde{Z}. \tag{2.25}$$

Diese Menge $\mathcal{Z}$ besitzt ebenfalls die endliche Durchschnittseigenschaft, da für $F, G \in \mathcal{F}$ und $f, g \in C(X)$ mit $F = \widetilde{Z(f)}$ und $G = \widetilde{Z(g)}$ aus $Z(f) \cap Z(g) = Z(f^2 + g^2) \in Z(X)$ folgt

$$\emptyset \neq F \cap G = \widetilde{Z(f)} \cap \widetilde{Z(g)} = (\widetilde{Z(f) \cap Z(g)}) \tag{2.26}$$

und somit $Z(f) \cap Z(g) \in \mathcal{Z}$. Deshalb existiert, analog definiert wie in (2.14), ein Z-Filter und somit auch ein Z-Ultrafilter $\mathcal{U}$ mit $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{U}$. Daher ist $\mathcal{U} \in \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}} \tilde{Z} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$. Folglich ist $(\beta(X), \mathcal{S})$ kompakt.

v): Es bleibt zu zeigen, dass $(\beta(X), \mathcal{S}, \iota_\beta)$ die Eigenschaft (2.4) aus Definition 2.1.2 erfüllt. Für ein beliebiges $f \in C_b(X)$ definieren wir mit Hilfe von Proposition 2.2.7

$$\tilde{f} : \beta(X) \to \mathbb{R} \text{ mit } \tilde{f}(\mathcal{U}) := p, \tag{2.27}$$

wobei p das eindeutige Element aus K_f ist, gegen das $f(\mathcal{U})$ konvergiert. Diese Abbildung ist wohldefiniert und erfüllt nach Lemma 2.2.8 $\tilde{f} \circ \iota_\beta = f$.
Schlussendlich bleibt noch die Stetigkeit von $\tilde{f}$ zu zeigen. Wir wählen $\mathcal{U} \in \beta(X)$ mit $\tilde{f}(\mathcal{U}) = p$ und $L \in \mathcal{F}(p) \cap Z(K_f)$ beliebig. Es existiert eine offene Menge M mit $p \in M \subseteq L$. Für die abgeschlossene Menge $M^c \not\ni p$ existiert eine stetige Funktion $g \in C(K_f, [0,1])$ mit $g(M^c) = \{0\}$ und $g(p) = 1$ und daher ist

$$L^c \subseteq M^c \subseteq Z(g) \not\ni p. \tag{2.28}$$

Die Mengen $R := f^{-1}(Z(g))$ und $E := f^{-1}(L)$ sind Z-Mengen auf X. Daraus folgen die Implikationen:

$$L^c \subseteq Z(g) \Rightarrow L \cup Z(g) = K_f \Rightarrow \tilde{R} \cup \tilde{E} = (\widetilde{R \cup E}) = \tilde{X} = \beta(X) \tag{2.29}$$

Da alle Mengen von $f(\mathcal{U})$ das Element p enthalten, kann $Z(g)$ nicht in $f(\mathcal{U})$ enthalten sein. Aus der Definition von $f(\mathcal{U})$ folgt daher, dass R nicht in dem Z-Ultrafilter $\mathcal{U}$ enthalten ist. Das bedeutet $\mathcal{U} \notin \tilde{R}$ und daher $\mathcal{U} \in \beta(X)\backslash\tilde{R}$. Da $\beta(X)\backslash\tilde{R}$, nach Definition der Topologie $\mathcal{S}$ eine offene Menge ist, ist sie auch eine Umgebung von $\mathcal{U}$ in $\mathcal{S}$. Da $E \in Z(X)$, gilt nach (2.29)

$$\forall \mathcal{V} \in \beta(X)\backslash\tilde{R} : \mathcal{V} \in \tilde{E}. \tag{2.30}$$

Nun ist $\mathcal{V} \in \tilde{E}$ äquivalent zu $E \in \mathcal{V}$ und dann weiter zu $\tilde{f}(\mathcal{V}) \subseteq L$. Also erhalten wir

$$\tilde{f}(\beta(X)\backslash\tilde{R}) \subseteq L. \tag{2.31}$$

Damit ist $\beta(X)\backslash\tilde{R}$ eine offene Umgebung von $\mathcal{U}$ in $\mathcal{S}$, deren Bild unter $\tilde{f}$ ganz in L enthalten ist. Nach Lemma 2.2.6 bilden alle Umgebungen von p, die Z-Mengen sind, eine Umgebungsbasis, daraus folgt die Stetigkeit von $\tilde{f}$ bei p. Da p beliebig war, ist $\tilde{f}$ stetig.

□

Kapitel 3

Die Stone–Čech-Kompaktifizierung von $\mathbb{N}$

In diesem Kapitel widmen wir uns nun der Stone–Čech-Kompaktifizierung von $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$. Die in diesem Abschnitt formulierten Sätze und deren Beweise basieren großteils auf dem Werk von Russel C. Walker [3, Kapitel 3] und dem Skriptum von Karsten Evers [4, Kapitel 4].
Wir verwenden in der weiteren Arbeit die Abkürzung $\mathbb{N}$ für den Raum $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$. Des Weiteren, werden wir für die Stone–Čech-Kompaktifizierung von $\mathbb{N}$ die Bezeichnung $(\beta(\mathbb{N}), P(\mathbb{N})_\beta, \iota_{\beta(\mathbb{N})})$ verwenden und ebenso für den Raum $(\beta(\mathbb{N}), P(\mathbb{N})_\beta)$ die Abkürzung $\beta(\mathbb{N})$. Für die Menge $\beta(\mathbb{N}) \backslash \iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N})$ verwenden wir die Bezeichnung $\mathbb{N}^*$. Falls wir von dem Raum $\mathbb{N}^*$ reden, meinen wir $\mathbb{N}^*$ versehen mit der Spurtopologie bzgl. $\beta(\mathbb{N})$.

3.1 Grundvorstellung

Wie in Beispiel 1.2.6 bereits erwähnt, ist $\mathbb{N}$ nicht kompakt. Da in $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$ jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ offen ist, ist der Raum trivialerweise ein Hausdorff-Raum. Ebenso folgt aus der Offenheit jeder Menge, dass jede Funktion von $\mathbb{N}$ in einen beliebigen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ stetig ist. Daher ist $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$ auch vollständig regulär. Die Stone–Čech-Kompaktifizierung von $\mathbb{N}$ ist somit wohldefiniert und, bis auf Isomorphie, eindeutig. Da auf $\mathbb{N}$ alle Funktionen stetig sind, entspricht $C(\mathbb{N}, [0,1])$ allen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $[0,1]$, dh.

$$C(\mathbb{N}, [0,1]) = [0,1]^{\mathbb{N}}. \tag{3.1}$$

Die Menge $\beta(\mathbb{N})$ entspricht daher einer Teilmenge von $[0,1]^{[0,1]^{\mathbb{N}}}$. Ebenso sind alle Teilmengen von $\mathbb{N}$ Z-Mengen in $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$. Daher entspricht die Menge aller Z-Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ der Menge aller Ultrafilter auf $\mathbb{N}$. Deshalb können wir $\beta(\mathbb{N})$ auch als Teilmenge von $\mathcal{F}(\mathbb{N}) \subseteq P(P(\mathbb{N}))$ auffassen, wobei die Menge $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ alle Filter auf $\mathbb{N}$ enthält.
Die von uns im Kapitel 2 gemachten Beobachtungen zeigen uns, dass jedes Element von $\beta(\mathbb{N})$ mit einem eindeutigen Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ identifiziert werden kann. Dabei entspricht $n \in \mathbb{N}$ genau dem Ultrafilter, der in $\mathbb{N}$ gegen n konvergiert. Dieser Ultrafilter $\mathcal{Z}(n)$ besteht nach Lemma 2.2.8 aus allen Teilmengen von $\mathbb{N}$, die n enthalten.

Bemerkung 3.1.1. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $x \in X$ und $\mathcal{F}(x)$ der Umgebungsfilter von x. Für einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf X sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) $x \in \bigcap\limits_{Z \in \mathcal{U}} \overline{Z}$

ii) $\mathcal{U}$ konvergiert gegen x, dh. $\mathcal{F}(x) \subseteq \mathcal{U}$

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii): Sei $O \in \mathcal{F}(x)$ beliebig. Aus $x \in \overline{Z}$ folgt $O \cap Z \neq \emptyset$ für alle $Z \in \mathcal{U}$. Nach Bemerkung 2.2.4 gilt daher $O \in U$.
ii) $\Rightarrow$ i): Sei $Z \in \mathcal{U}$ beliebig. Aus $\mathcal{F}(x) \subseteq \mathcal{U}$ folgt $O \cap Z \neq \emptyset$ für alle $O \in \mathcal{F}(x)$. Somit gilt $x \in \overline{Z}$.

□

Da jedes Element aus $\iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N})$ einem konvergenten Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ entspricht, folgt nach Bemerkung 3.1.1, dass jedes Element aus der Menge $\mathbb{N}^*$ ein *freier* Ultrafilter im Sinne der folgenden Definition ist.

Definition 3.1.2. *Ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ heißt* frei, *wenn* $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{U}} A = \emptyset$.

Satz 3.1.3. *Ein Ultrafilter $\mathcal{U} \in \beta(\mathbb{N})$ besteht aus genau den Teilmengen von $\mathbb{N}$, die $\mathcal{U}$ im Abschluss in $\beta(\mathbb{N})$ enthalten, dh.*

$$\mathcal{U} = \{Z \subseteq \mathbb{N} : \overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(Z)} \ni \mathcal{U}\} \tag{3.2}$$

Beweis. Im Beweis von Satz 2.2.9 iii) haben wir in (2.21) gezeigt, dass für jede Z-Menge gilt

$$\overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(Z)} = \tilde{Z}. \tag{3.3}$$

Damit folgt aus der Äquivalenz

$$Z \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathcal{U} \in \tilde{Z} = \overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(Z)} \tag{3.4}$$

die Behauptung. $\square$

Proposition 3.1.4. *Jeder Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $\mathbb{N}$ lässt sich in $\beta(\mathbb{N})$ als Durchschnitt der Abschlüsse all seiner Elemente darstellen, dh.*

$$\bigcap_{Z \in \mathcal{U}} \overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(Z)} = \{\mathcal{U}\} \tag{3.5}$$

Beweis. $\mathcal{U} \in \bigcap_{Z \in \mathcal{U}} \overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(Z)}$ folgt aus Satz 3.1.3. Nehmen wir an es existiert ein weiterer Ultrafilter $\mathcal{Z} \in \bigcap_{Z \in \mathcal{U}} \overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(Z)}$. Daraus folgt mit Hilfe von Satz 3.1.3

$$\mathcal{U} = \{Z \subseteq \mathbb{N} : \overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(Z)} \ni \mathcal{U}\} \subseteq \{Z \subseteq \mathbb{N} : \overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(Z)} \ni \mathcal{Z}\} = \mathcal{Z} \tag{3.6}$$

und schließlich, da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, $\mathcal{U} = \mathcal{Z}$. $\square$

Folglich konvergiert der von $\iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathcal{U})$ erzeugte Ultrafilter in $\beta(\mathbb{N})$ gegen $\mathcal{U}$. Dies zeigt uns, dass durch die Kompaktifizierung $\beta(\mathbb{N})$ jedem Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ ein Grenzwert in $\beta(\mathbb{N})$ zugewiesen wird. Für die freien Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ sind die Grenzwerte Elemente aus $\mathbb{N}^*$.

3.2 Die Kardinalität von $\beta(\mathbb{N})$

Anhand der im Unterkapitel 3.1 gemachten Beobachtungen erkennen wir, dass $\beta(\mathbb{N})$ maximal die Kardinalität von $[0,1]^{[0,1]^{\mathbb{N}}}$ bzw. $P(P(\mathbb{N}))$ besitzen kann. Daher, ist

$$|\beta(\mathbb{N})| \leq |[0,1]^{[0,1]^{\mathbb{N}}}| = |P(P(\mathbb{N}))| = 2^{2^{\aleph_0}}. \tag{3.7}$$

Satz 3.2.1. *Die Kardinalität der Stone–Čech-Kompaktifizierung von $\mathbb{N}$ ist $2^{2^{\aleph_0}}$*

Beweis. Um eine untere Schranke für die Kardinalität von $\beta(\mathbb{N})$ zu finden betrachten wir die Menge $\prod_{L \subseteq \mathbb{N}} ([0,1])_L$, versehen mit der Produkttopologie bzgl. der euklidischen Topologie auf $[0,1]$. Dieser Raum ist nach dem Satz von Tychonoff kompakt. Zusätzlich besitzt er die dichte Teilmenge $\prod_{L \subseteq \mathbb{N}} (\mathbb{Q}|_{[0,1]})_L$, wobei $\mathbb{Q}|_{[0,1]}$ die Menge aller rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 darstellt. Wir wollen nun zeigen, dass diese dichte Menge eine dichte abzählbare Teilmenge enthält. Da $\mathbb{Q}|_{[0,1]}$ abzählbar ist, existiert für alle $L \subseteq \mathbb{N}$ eine stetige und surjektive Funktion g_L von $\mathbb{N}_L$ nach $(\mathbb{Q}|_{[0,1]})_L$. Damit ist die Abbildung

$$f : \mathbb{N}^{P(\mathbb{N})} \to \prod_{L \subseteq \mathbb{N}} (\mathbb{Q}|_{[0,1]})_L, \quad f((a_L)_{L\subseteq\mathbb{N}}) := (g_L(a_L))_{L\subseteq\mathbb{N}} \tag{3.8}$$

ebenfalls eine stetige und surjektive Funktion, wenn $\mathbb{N}^{P(\mathbb{N})}$ mit der Produkttopologie bzgl. der diskreten Topologie auf $\mathbb{N}$ versehen ist. Für $J \subseteq \mathbb{N}$ mit $|J| < \infty$ sei

$$F_J := \{(a_L)_{L\subseteq\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{P(\mathbb{N})} : a_M = a_S \ \text{ wenn } \ M \cap J = S \cap J\}. \tag{3.9}$$

Da J endlich ist, unterscheiden sich die Koordinaten eines Elementes von F_J nur an abzählbar vielen Stellen, daher ist F_J abzählbar. Die Menge

$$F := \bigcup_{J\subseteq\mathbb{N},|J|<\infty} F_J \tag{3.10}$$

ist somit eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen und daher selbst abzählbar. Sei nun $\mathcal{B}$ die Basis des topologischen Raumes $\mathbb{N}^{P(\mathbb{N})}$ mit

$$O \in \mathcal{B} \Leftrightarrow O = \prod_{L\subseteq\mathbb{N}} O_L \ \text{ mit } \ O_L \neq \mathbb{N} \ \text{ für endlich viele } \ L \subseteq \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

Wählen wir uns ein beliebiges $O \in \mathcal{B}$, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, o.B.d.A $n > 1$, sodass $O_{L_i} \neq \mathbb{N}$ für $i \in \{1, 2, ...n\}$ nur für die Koordinaten $L_1, L_2, ..., L_n \subseteq \mathbb{N}$ gilt. Somit ist

$$x := \begin{cases} a_L = 1, & L \notin \{L_1, ..., L_n\} \\ a_{L_i} \in O_{L_i}, & i \in \{1, 2, ...n\} \end{cases}$$

ein Element von O. Für $k, r \in \{1, 2, ...n\}$, $k \neq r$ und $L_k \cap L_r \neq \emptyset$ wählen wir aus $L_k \backslash L_r$, falls dies nicht möglich ist aus $L_r \backslash L_k$, jeweils genau ein Element $z_{k,r}$. All diese Elemente bilden eine endliche Menge J. Damit gilt für alle $k, r \in \{1, 2, ...n\}$ mit $k \neq r$:

$$L_k \cap J \neq L_r \cap J \tag{3.12}$$

Daher können die Elemente aus F_J an den Koordinaten $L_1, L_2, ..., L_n$ unterschiedliche Zahlen aufweisen, folglich ist $x \in F_J \subseteq F$. Somit haben wir gezeigt, dass $O \cap F \neq \emptyset$. Da $O \in \mathcal{B}$ beliebig war, folgt, dass F dicht in $\mathbb{N}^{P(\mathbb{N})}$ ist. Daraus ergibt sich

$$\prod_{L \subseteq \mathbb{N}} (\mathbb{Q}|_{[0,1]})_L = f(\mathbb{N}^{P(\mathbb{N})}) = f(\overline{F}) \subseteq \overline{f(F)}, \tag{3.13}$$

womit $f(F)$ eine abzählbare und in $\prod\limits_{L \subseteq \mathbb{N}} (\mathbb{Q}|_{[0,1]})_L$ dichte Teilmenge ist. Daher ist $f(F)$ auch dicht in $\prod\limits_{L \subseteq \mathbb{N}} ([0,1])_L$.
Folglich existiert eine stetige Funktion

$$h : \mathbb{N} \to \prod_{L \subseteq \mathbb{N}} ([0,1])_L, \tag{3.14}$$

mit $h(\mathbb{N}) = f(F)$. Diese Abbildung besitzt nach Bemerkung 2.1.5 eine stetige Fortsetzung $\tilde{h}$ auf $\beta(\mathbb{N})$, die $\tilde{h}(\beta(\mathbb{N})) \supseteq f(F)$ erfüllt. Da $\tilde{h}(\beta(\mathbb{N}))$ kompakt und damit abgeschlossen ist, folgt, dass

$$\tilde{h}(\beta(\mathbb{N}))) = \prod_{L \subseteq \mathbb{N}} ([0,1])_L, \tag{3.15}$$

und schließlich

$$|\beta(\mathbb{N})| \geq |\prod_{L \subseteq \mathbb{N}} ([0,1])_L| = |[0,1]^{P(\mathbb{N})}| = 2^{2^{\aleph_0}}. \tag{3.16}$$

□

Um genauere Aussagen über die offenen bzw. abgeschlossenen Teilmengen von $\beta(\mathbb{N})$ treffen zu können, benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.2.2. *Sei $E \subseteq \beta(\mathbb{N})$ eine abzählbare Menge und $f \in C_b(E)$. Dann existiert eine Fortsetzung $\tilde{f}$ auf $\beta(\mathbb{N})$, dh.:*

$$\exists \tilde{f} \in C_b(\beta(\mathbb{N})) : \tilde{f} \circ id_E = f \tag{3.17}$$

Beweis. In diesem Beweis verwenden wir den *Fortsetzungssatz von Tietze*. Dieser besagt, unter anderem, dass in einem normalen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ eine beschränkte und stetige Funktion, definiert auf einem abgeschlossenen Unterraum A von X, eine beschränkte und stetige Fortsetzung auf ganz X besitzt.
Der Raum $\beta(\mathbb{N})$ ist aufgrund seiner Kompaktheit zwar normal, jedoch muss E nicht abgeschlossen in $\beta(\mathbb{N})$ sein. Wir wollen den Fortsetzungssatz von

Tietze auf den Unterraum $Y := \iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N}) \cup E$, versehen mit der Spurtopologie, anwenden. Eine Funktion $g \in C_b(Y)$ besitzt aufgrund der Eigenschaft der Stone–Čech-Kompaktifizierung eine Fortsetzung auf $\beta(\mathbb{N})$.
Da $\iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N})$ homöomorph zu $\mathbb{N}$ ist, ist jede Teilmenge von $\iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N})$ offen in Y, deshalb ist E in Y abgeschlossen. Y ist, als Unterraum eines normalen Raumes, regulär und, als Vereinigung zweier abzählbarer Mengen, abzählbar. Wir wählen zwei beliebige abgeschlossene Teilmengen A und B von Y. Zu jedem Element a_n von A wählen wir eine offene Menge A_n, die a_n enthält und deren Abschluss disjunkt von B ist, dh.:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in A_n \wedge \overline{A_n} \cap B = \emptyset \tag{3.18}$$

Analog wählen wir offene Mengen B_n zu jedem Element von B. Somit ist $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine offene und abzählbare Überdeckung von A. Die Mengen

$$O_n := (\bigcup_{i=0}^{n} A_i)\backslash(\bigcup_{i=0}^{n} \overline{B_i}), \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.19}$$

sind offen und, da alle $\overline{B_n}$ disjunkt von A sind, ist die Vereinigung aller O_n eine offene Überdeckung von A. Analog definieren wir

$$U_n := (\bigcup_{i=0}^{n} B_i)\backslash(\bigcup_{i=0}^{n} \overline{A_i}), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.20}$$

Da nach Definition

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : \ O_n \cap U_m = \emptyset, \tag{3.21}$$

bilden $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} O_n$ bzw. $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} U_n$ zwei offene und zueinander disjunkte Umgebungen von A bzw. B. Somit ist Y normal. Nach dem Fortsetzungssatz von Tietze existiert für jede stetige und beschränkte Funktion $f \in C_b(E)$ eine stetige und beschränkte Fortsetzung $g \in C_b(Y)$, die f auf Y fortsetzt. Diese Funktion g lässt sich nun stetig auf ganz $\beta(\mathbb{N})$ fortsetzen.

$\square$

Dass die Menge $\iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N})$ in $\beta(\mathbb{N})$ nicht abgeschlossen ist, erkennen wir anhand der Kardinalität von $\beta(\mathbb{N})$. Des Weiteren lässt sich zeigen, dass $\beta(\mathbb{N})$ keine unendliche abzählbare und abgeschlossene Teilmenge besitzt.

Satz 3.2.3. *Sei $A \subseteq \beta(\mathbb{N})$ eine unendliche und abgeschlossene Menge. Dann besitzt A die Kardinalität $2^{2^{\aleph_0}}$.*

Beweis. Da A versehen mit der Spurtopologie ein unendlicher Hausdorff-Raum ist, besitzt er einen abzählbaren, unendlichen und diskreten Unterraum. Dh. A besitzt eine abzählbar unendliche Teilmenge E, die, versehen mit der Spurtopologie, die diskrete Topologie auf E bildet. Dieser diskrete Unterraum E ist offensichtlich homöomorph zu $\mathbb{N}$. Da A abgeschlossen in $\beta(\mathbb{N})$ ist, ist der Abschluss von E in $\beta(\mathbb{N})$ ganz in A enthalten.
Der Unterraum $\overline{E}$ von $\beta(\mathbb{N})$ versehen mit der Spurtopologie $\mathcal{T}$ ist ein kompakter T2-Raum und daher ist $(\overline{E}, \mathcal{T}, id_E)$ eine T2-Kompaktifizierung von E. Nach Lemma 3.2.2 existiert für jede Funktion $f \in C_b(E)$ eine Fortsetzung $\tilde{f}$ auf $\beta(\mathbb{N})$. Die Einschränkung $\tilde{f}|_{\overline{E}}$ erfüllt die Eigenschaft von Definition 2.1.2 für den Raum $\overline{E}$. Dh.:

$$\forall f \in C_b(E) : \tilde{f}|_{\overline{E}} \circ id_E = f \tag{3.22}$$

Nach Bemerkung 1.2.10 ist $\overline{E}$ homöomorph zu $\beta(E)$, wobei $\beta(E)$ die Menge versehen mit der Topologie der Stone–Čech-Kompaktifizierung von E ist. Schließlich erhalten wir aus

$$E \subseteq \overline{E} \subseteq A, \tag{3.23}$$

dass A den zu $\beta(\mathbb{N})$ homöomorphen Unterraum $\beta(E)$ enthält und daher die Kardinalität $2^{2^{\aleph_0}}$ besitzt.

□

Der Beweis von Satz 3.2.3 zeigt uns ebenfalls, dass jede unendliche und abgeschlossene Teilmenge von $\beta(\mathbb{N})$ eine zu $\beta(\mathbb{N})$ homöomorphe Teilmenge besitzt.

3.3 Eine abgeschloffene Basis von $\beta(\mathbb{N})$

Die Mengen $\emptyset$ und $\beta(\mathbb{N})$ sind nicht die einzigen offenen und abgeschlossenen Mengen in $\beta(\mathbb{N})$. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass $\beta(\mathbb{N})$ eine Basis aus abgeschloffenen Mengen besitzt.
Zuerst beweisen wir, dass der Abschluss jeder Teilmenge von $\mathbb{N}$ in $\beta(\mathbb{N})$ eine offene und abgeschlossene Menge ist.

Proposition 3.3.1. *Sei $O \subseteq \mathbb{N}$, dann ist $\overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O)}$ offen und abgeschlossen in $\beta(\mathbb{N})$.*

Beweis. Da O in $\mathbb{N}$ offen und abgeschlossen ist, ist die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_O$ ein Element aus $C_b(\mathbb{N}, \{0,1\})$, wobei $\{0,1\}$ mit der diskreten Topologie versehen ist. Dieser Raum ist offensichtlich kompakt, daher existiert eine Funktion $\widetilde{\mathbb{1}_O} \in C_b(\beta(\mathbb{N}), \{0,1\})$ mit $\widetilde{\mathbb{1}_O} \circ \iota_{\beta(\mathbb{N})} = \mathbb{1}_O$. Für den Abschluss von $\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O)$ bzw. $\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O^c)$ folgt aus der Stetigkeit von $\widetilde{\mathbb{1}_O}$

$$\widetilde{\mathbb{1}_O}(\overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O)}) \subseteq \overline{\widetilde{\mathbb{1}_O}(\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O))} = \overline{\{1\}} = \{1\} \tag{3.24}$$

bzw.

$$\widetilde{\mathbb{1}_O}(\overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O^c)}) \subseteq \overline{\widetilde{\mathbb{1}_O}(\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O^c))} = \overline{\{0\}} = \{0\}. \tag{3.25}$$

Da die Einbettung $\iota_{\beta(\mathbb{N})}$ eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf ihr Bild ist, erhalten wir aus

$$\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O) \cup \iota_{\beta(\mathbb{N})}(O^c) = \iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N}), \tag{3.26}$$

dass

$$\overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O)} \cup \overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O^c)} = \overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O) \cup \iota_{\beta(\mathbb{N})}(O^c)} = \overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N})} = \beta(\mathbb{N}). \tag{3.27}$$

Somit bilden $\overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O)}$ und $\overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O^c)}$ eine disjunkte Überdeckung von $\beta(\mathbb{N})$ und es gilt $\overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O)} = \widetilde{\mathbb{1}_O}^{-1}(\{1\})$. Daher ist $\overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O)}$, als Urbild der abgeschloffenen Menge $\{1\}$, selbst eine offene und abgeschlossene Menge in $\beta(\mathbb{N})$. □

Proposition 3.3.1 lässt sich noch erweitern, wie wir im folgenden Lemma zeigen.

Lemma 3.3.2. *Sei $A \subseteq \beta(\mathbb{N})$ eine offene und abgeschlossene Menge, dann existiert eine Menge $O \subseteq \mathbb{N}$ mit $\overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O)} = A$.*

Beweis. Wir unterscheiden zwei mögliche Fälle für eine abgeschloffene Menge A in $\beta(\mathbb{N})$.
Falls $A \subseteq \iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N})$, muss A wegen Satz 3.2.3 endlich sein. Daraus folgt aus der Hausdorff-Eigenschaft von $\beta(\mathbb{N})$ und der Menge $O := \iota_{\beta(\mathbb{N})}^{-1}(A)$, dass

$$\overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O)} = \iota_{\beta(\mathbb{N})}(O) = A. \tag{3.28}$$

Falls $A \not\subseteq \iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N})$ muss jedoch trotzdem $A \cap \iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N}) \neq \emptyset$ gelten, da $\iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N})$ dicht in $\beta(\mathbb{N})$ ist. Die Menge

$$B := A \backslash \overline{A \cap \iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N})} \tag{3.29}$$

ist daher eine offene Menge, die disjunkt von $\iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N})$ ist. Da $\iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N})$ dicht in $\beta(\mathbb{N})$ ist, folgt, dass B nur die leere Menge sein kann, daher muss

$$A \subseteq \overline{A \cap \iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N})} \tag{3.30}$$

gelten.
Schließlich folgern wir aus der Abgeschlossenheit von A, dass

$$\overline{A \cap \iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N})} \subseteq A \tag{3.31}$$

und somit gilt mit der Menge $O := \iota_{\beta(\mathbb{N})}^{-1}(A \cap \iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N}))$

$$\overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O)} = \overline{A \cap \iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N})} = A. \tag{3.32}$$

□

Satz 3.3.3. *$\beta(\mathbb{N})$ besitzt eine Basis aus abgeschloffenen Mengen.*

Beweis. Wir wählen $x, y \in \beta(\mathbb{N})$ mit $x \neq y$ beliebig. Die Elemente x bzw. y identifizieren wir in $\mathbb{N}$ mit dem zugehörigen Ultrafilter und schreiben dafür $\mathcal{Z}(x)$ bzw. $\mathcal{Z}(y)$. Aus dem Ultrafilter $\mathcal{Z}(x)$ wählen wir eine Teilmenge O von $\mathbb{N}$, die nicht in dem Ultrafilter $\mathcal{Z}(y)$ enthalten ist. Eine solche Menge existiert nach Bemerkung 2.2.4. Nach Proposition 3.3.1 ist $\overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O)}$ eine offene und abgeschlossene Umgebung von x mit $y \notin \overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(O)}$. Sei $\mathcal{C}_x$ die Menge aller offenen und abgeschlossenen Mengen in $\beta(\mathbb{N})$ die x enthalten, dann gilt

$$\bigcap_{A \in \mathcal{C}_x} A = \{x\}. \tag{3.33}$$

Sei U eine beliebige offene Umgebung von x, dann ist

$$\{U\} \cup \{\beta(\mathbb{N}) \backslash A : A \in \mathcal{C}_x\} \tag{3.34}$$

eine offene Überdeckung von $\beta(\mathbb{N})$. Aufgrund der Kompaktheit von $\beta(\mathbb{N})$ existieren ein $n \in \mathbb{N}$ und endlich viele $A_i \in \mathcal{C}_x$ mit

$$U \cup \bigcup_{i=1}^{n} \beta(\mathbb{N}) \backslash A_i = \beta(\mathbb{N}). \tag{3.35}$$

Daraus folgt

$$U^c \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset, \tag{3.36}$$

und schließlich

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \subseteq U. \tag{3.37}$$

Damit erhalten wir die abgeschloffene Umgebung $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ von x, welche selbst ganz in U enthalten ist. Da U und x beliebig waren, besitzt $\beta(\mathbb{N})$ eine Basis aus abgeschloffenen Mengen.

□

3.4 Der Raum $\mathbb{N}^*$

Die Menge $\mathbb{N}^*$ ist als Komplement der abzählbaren und offenen Menge $\iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N})$ abgeschlossen in $\beta(\mathbb{N})$ und besitzt die Kardinalität $2^{2^{\aleph_0}}$. Des Weiteren lässt sich zeigen, dass alle offenen Mengen in $\beta(\mathbb{N})$, die nicht ganz in $\iota_{\beta(\mathbb{N})}(\mathbb{N})$ enthalten sind, selbst auch die Kardinalität $2^{2^{\aleph_0}}$ besitzen.

Proposition 3.4.1. *Sei $O \subseteq \beta(\mathbb{N})$ offen mit $O \cap \mathbb{N}^* \neq \emptyset$. Dann besitzt O die Kardinalität $2^{2^{\aleph_0}}$.*

Beweis. Da $\beta(\mathbb{N})$ nach Satz 3.3.3 eine abgeschloffene Basis besitzt, lässt sich jede offene Menge in $\beta(\mathbb{N})$ als Vereinigung offener und abgeschlossener Mengen darstellen. Wegen $O \cap \mathbb{N}^* \neq \emptyset$ folgt daher, dass O eine offene und abgeschlossene Teilmenge A besitzt mit $A \cap \mathbb{N}^* \neq \emptyset$. Nach Lemma 3.3.2 existiert eine Menge $B \subseteq \mathbb{N}$ mit

$$\overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(B)} = A. \tag{3.38}$$

Nehmen wir an A sei endlich, dann folgt aus $\overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(B)} = \iota_{\beta(\mathbb{N})}(B)$ der Widerspruch

$$A \cap \mathbb{N}^* = \overline{\iota_{\beta(\mathbb{N})}(B)} \cap \mathbb{N}^* = \iota_{\beta(\mathbb{N})}(B) \cap \mathbb{N}^* = \emptyset. \tag{3.39}$$

Daher muss gelten $|A| = \infty$. Da A abgeschlossen ist, folgt aus Satz 3.2.3, dass A die Kardinalität $2^{2^{\aleph_0}}$ besitzt. Somit besitzt O, als Obermenge von A und Teilmenge von $\beta(\mathbb{N})$, ebenfalls die Kardinalität $2^{2^{\aleph_0}}$.

□

Bemerkung 3.4.2. *Im Jahr 1929 stellten die Mathematiker Alexandroff und Urysohn die Frage: Existiert ein kompakter T2-Raum, der keine isolierten Punkte besitzt und trotzdem kein Punkt dieses Raumes ein Grenzwert einer Folge aus unterschiedlichen Punkten ist?*

Um diese Frage zu beantworten, zeigen wir zuerst, dass $\mathbb{N}^*$ keine isolierten Punkte besitzt.

Lemma 3.4.3. *Der Raum $\mathbb{N}^*$ besitzt keine isolierten Punkte.*

Beweis. Nehmen wir an, es existiert ein Punkt $p \in \mathbb{N}^*$, sodass $\{p\}$ offen in $\mathbb{N}^*$ ist. Das bedeutet, es gibt eine in $\beta(\mathbb{N})$ offene Menge O mit $\{p\} = O \cap \mathbb{N}^*$. Diese Menge O besitzt nach Proposition 3.4.1 die Kardinalität $2^{2^{\aleph_0}}$ und muss daher $\mathbb{N}^*$ in mehr als einem Punkt schneiden. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, $\{p\}$ ist offen. □

Nun können wir die Frage aus Bemerkung 3.4.2 beantworten.

Satz 3.4.4. *Der Raum $\mathbb{N}^*$ erfüllt die Eigenschaften aus Bemerkung 3.4.2.*

Beweis. Die Menge $\mathbb{N}^*$, versehen mit der Spurtopologie, ist als abgeschlossener Unterraum von $\beta(\mathbb{N})$ ein kompakter T2-Raum. Nach Lemma 3.4.3 besitzt $\mathbb{N}^*$ keine isolierten Punkte. Nehmen wir an, es existiert ein Punkt $p \in \mathbb{N}^*$ und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}^*$ mit

$$\forall n \neq m : x_n \neq x_m \wedge (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to p. \tag{3.40}$$

Dann ist

$$A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{p\} \tag{3.41}$$

eine unendliche und abzählbare Menge. Sei $(O_i)_{i\in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von A in $\mathbb{N}^*$. Wir wählen aus dieser Überdeckung eine Menge O_{i_0} mit $p \in O_{i_0}$. Da O_{i_0} eine Umgebung von p ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ für das gilt:

$$\forall n \geq n_0 : x_n \in O_{i_0} \tag{3.42}$$

Das bedeutet, dass nur endlich viele Folgenglieder von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und damit nur endlich viele Elemente von A, nicht in O_{i_0} liegen. Daher existiert eine endliche Menge $J \subseteq I$ mit

$$A \subseteq O_{i_0} \cup \bigcup_{j\in J} O_j. \tag{3.43}$$

Die Menge A ist daher kompakt in $\mathbb{N}^*$. Daraus folgt, dass A kompakt und somit abgeschlossen in $\beta(\mathbb{N})$ ist. Dies führt jedoch zu einem Widerspruch zu Satz 3.2.3, da $\beta(\mathbb{N})$ keine unendliche, abzählbare und abgeschlossene Menge enthält.

□

Literaturverzeichnis

[1] Kaltenbäck, Michael: *Fundament Analysis*. Heldermann, 2014.

[2] Querenburg, Boto von: *Mengentheoretische Topologie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3. Auflage, 2001.

[3] Walker, Russel C.: *The Stone-Čech Compactification*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1974.

[4] Evers, Karsten: *Mengentheoretische Topologie*, Oktober 2009. `http://www.asc.tuwien.ac.at/~funkana/kaltenbaeck/topo_ws13/top.pdf`, [Zuletzt zugegriffen am 18.2.2019].