Approximative Lösungen von Operatorgleichungen

Niklas Angleitner

25. Juni 2012

Unzählige Problemstellungen sowohl physikalischer als auch rein mathematischer Natur führen auf Operatorgleichungen. Dabei liegen meist Banachräume $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ zugrunde, auf denen lineare und oftmals stetige Operatoren $T : X \longrightarrow Y$ definiert sind. Gesucht sind nun Lösungen $x \in X$ von Gleichungen des Typs $T(x) = f$, $T(x) = x$, $T(x) + f = x$ oder Ähnlichem. Funktionalanalytische Methoden liefern oft Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen, konkrete Verfahren zur Berechnung jedoch nicht. Grundsätzlich gibt es dafür zwei unterschiedliche Vorgangsweisen: Entweder man sucht nach approximativen Lösungen der exakten Gleichung, oder aber nach exakten Lösungen von approximativen Gleichungen. Das Ziel dieser Arbeit ist es, einen Einblick in beide Varianten zu geben.

Inhaltsverzeichnis

1 Iterationsverfahren **3**

1.1 Operatoren mit Spektralradius $\rho(T) < 1$ 3

1.2 Nicht-expansive Operatoren 5

1.3 Monotone Operatoren 9

2 Projektionsverfahren **11**

2.1 Injektive Operatoren 11

2.2 Operatoren mit invertierbarem $(\mathrm{id} - T)$ 18

0.0.1 Bemerkung.
Wir werden im Folgenden stets Vektorräume über einem Skalarkörper $\mathbb{K}$ betrachten. Sämtliche Resultate gelten sowohl für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, als auch für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1 Iterationsverfahren

1.1 Operatoren mit Spektralradius $\rho(T) < 1$

Wir beginnen mit der Definition von Kontraktionen.

1.1.1 Definition.
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Wir nennen $T : X \longrightarrow X$ eine *Kontraktion*, falls gilt:

$$\exists C \in (0,1) : \forall x, y \in X : \quad \|T(x) - T(y)\| \leq C \cdot \|x - y\| .$$

Der nun folgende Fixpunktsatz von Banach gilt allgemeiner sogar in vollständigen, metrischen Räumen. Wir möchten jedoch, ohne Beweis, nur den Spezialfall eines Banachraumes anführen.

1.1.2 Satz. (Fixpunktsatz von Banach)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $T : X \longrightarrow X$ eine Kontraktion. Dann besitzt die Gleichung $T(x) = x$ eine eindeutige Lösung, d.h.:

$$\exists! x^* \in X : \quad T(x^*) = x^*.$$

Sei weiters $x_0 \in X$ beliebig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (T^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\mapsto\infty} x^*.$$

1.1.3 Definition.
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Wir definieren

$$\mathcal{B}(X) := \left\{ T \in X^X \;\middle|\; T \text{ linear, stetig} \right\}$$

als die Menge aller linearen, stetigen Abbildungen von X nach X und

$$\operatorname{Inv}(X) := \{ T \in \mathcal{B}(X) \mid T \text{ bijektiv} \}$$

als die Teilmenge der bijektiven Operatoren. Für $T \in \mathcal{B}(X)$ definieren wir weiters

$$\sigma(T) := \{ \lambda \in \mathbb{K} \mid (T - \lambda \cdot \mathrm{id}) \notin \operatorname{Inv}(X) \}$$

als das *Spektrum* des Operators T und

$$\rho(T) := \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

als seinen *Spektralradius*.

Der folgende Satz liefert eine Methode zur Berechnung von approximativen Lösungen von Gleichungen des Typs $T(x) + f = x$.

1.1.4 Satz.
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $T \in \mathcal{B}(X)$ mit $\rho(T) < 1$ und weiters $f \in X$ beliebig. Dann besitzt die Gleichung $T(x) + f = x$ eine eindeutige Lösung, d.h.:

$$\exists! x^* \in X : \quad T(x^*) + f = x^*.$$

Sei weiters $x_0 \in X$ beliebig und $x_{n+1} := T(x_n) + f, \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\mapsto\infty} x^*.$$

Insbesondere ist die Lösung x^* der Grenzwert einer konvergenten Reihe:

$$x^* = \sum_{k=0}^{\infty} T^k(f).$$

Beweis.
Schritt 1: Eindeutige Existenz einer Lösung
Aus der Voraussetzung $\rho(T) < 1$ erhalten wir:

$$\max_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| = \rho(T) < 1,$$

insbesondere also $1 \notin \sigma(T)$. Laut Definition des Spektrums, Definition 1.1.3, ist der Operator $(T - \mathrm{id})$ bijektiv:

$$\forall f \in X : \exists! x^* \in X : \quad (T - \mathrm{id})(x^*) = -f.$$

Umstellen liefert nun die Behauptung. □

Schritt 2: $\|T^n\| \xrightarrow{n\mapsto\infty} 0$
Wie aus der Funktionalanalysis bekannt, gilt:

$$\rho(T) = \lim_{n\mapsto\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

Wegen $\rho(T) < 1$ können wir also ein $\epsilon > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ wählen, sodass gilt:

$$\forall n \geq n_0 : \quad \sqrt[n]{\|T^n\|} \leq 1 - \epsilon.$$

Beide Seiten mit n potenzieren liefert nun:

$$0 \leq \lim_{n\mapsto\infty} \|T^n\| \leq \lim_{n\mapsto\infty} (1-\epsilon)^n = 0.$$

□

Schritt 3: $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ konvergiert absolut bzgl. $\|\cdot\|$
Mit $\epsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ aus Schritt 2 folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} \|T^n\| + \sum_{n=n_0}^{\infty} (1-\epsilon)^n < \infty.$$

□

Schritt 4: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\mapsto\infty} x^*$
Die Linearität von T liefert eine explizite Darstellung des n-ten Folgenglieds von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad x_n = T^n(x_0) + \sum_{k=0}^{n-1} T^k(f).$$

Aus dieser Darstellung lässt sich die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X erkennen: Der Term vor der Summe konvergiert gegen 0:

$$\|T^n(x_0)\| \leq \|T^n\| \cdot \|x_0\| \xrightarrow{n\mapsto\infty} 0.$$

Die Konvergenz der Summe sieht man wie folgt ein: In Schritt 3 haben wir die Konvergenz der Folge $(\sum_{k=0}^{n} T^k)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich der Operatornorm $\|\cdot\|$ gezeigt:

$$\sum_{k=0}^{n} T^k \xrightarrow[\|\cdot\|]{n\mapsto\infty} \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Aus dieser gleichmäßigen Konvergenz folgt klarerweise die punktweise Konvergenz, insbesondere die an der Stelle f:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right)(f) \xrightarrow[\|\cdot\|]{n\mapsto\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k\right)(f) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k(f).$$

Durch Einsetzen erkennt man, dass das Element $\sum_{k=0}^{\infty} T^k(f) \in X$ eine Lösung der Gleichung $T(x)+f = x$ ist. Aus der Eindeutigkeit der Lösung dieser Gleichung, vgl. Schritt 1, folgt nun die Behauptung:

$$\lim_{n\mapsto\infty} x_n = \sum_{k=0}^{\infty} T^k(f) = x^*.$$

□

■

1.2 Nicht-expansive Operatoren

Wir erinnern an den Begriff der Totalbeschränktheit in metrischen Räumen:

1.2.1 Definition.
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir nennen eine Menge $M \subseteq X$ *totalbeschränkt*, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists x_1, \ldots, x_n \in M : \quad M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_\epsilon(x_i).$$

Dabei sei $U_r(x_0) := \{ x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$ die offene Kugel um x_0 mit Radius r.

1.2.2 Lemma.
Sei (X, d) ein vollständiger, metrischer Raum und $K \subseteq X$ beliebig. Dann gilt:

$$K \text{ kompakt} \quad \Leftrightarrow \quad K \text{ totalbeschränkt und abgeschlossen.}$$

Beweis.
Wir verwenden die folgende, sogar in allgemeinen metrischen Räumen gültige, Charakterisierung von kompakten Mengen:

$$K \text{ kompakt} \quad \Leftrightarrow \quad K \text{ totalbeschränkt und } (K, d|_{K\times K}) \text{ ist vollständiger, metrischer Raum.}$$

Damit reicht es also, die folgende Äquivalenz für beliebige Teilmengen $K \subseteq X$ zu zeigen:

$$K \text{ abgeschlossen} \quad \Leftrightarrow \quad (K, d|_{K\times K}) \text{ ist vollständiger, metrischer Raum.}$$

$\underline{\Rightarrow:}$ Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K. Damit ist sie insbesondere auch eine Cauchy-Folge im vollständigen, metrischen Raum X und somit konvergent gegen ein $x \in X$. Wegen der vorausgesetzten

Abgeschlossenheit von K gilt aber sogar $x \in K$.
$\underline{\Leftarrow:}$ Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ eine in X konvergente Folge. Damit ist sie insbesondere eine Cauchy-Folge in K und wegen der vorausgesetzten Vollständigkeit von $(K, d|_{K\times K})$ konvergent gegen ein $x \in K$.

$\blacksquare$

1.2.3 Lemma. **(Lemma von Mazur)**
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $M \subseteq X$. Dann gilt:

$$\overline{M} \text{ kompakt} \quad \Rightarrow \quad \overline{\operatorname{conv}(M)} \text{ kompakt.}$$

Beweis.
Schritt 1: $\quad \forall A \subseteq X : \quad (A \text{ totalbeschränkt}) \Rightarrow (\overline{A} \text{ totalbeschränkt})$
Seien $\epsilon > 0$ und $x_1, \ldots, x_n \in A$ mit $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)$. Dann gilt sicherlich:

$$\overline{A} \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^n U_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)} = \bigcup_{i=1}^n \overline{U_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)} \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_\epsilon(x_i).$$

$\square$

Schritt 2: $\quad \forall x_1, \ldots, x_n \in X : \quad \operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ kompakt
Die Menge $\{\, \alpha \in [0,1]^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.
Für feste $x_1, \ldots, x_n \in X$ ist die folgende Abbildung stetig:

$$\begin{cases} \{\, \alpha \in [0,1]^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\} & \longrightarrow & X \\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_i \end{cases}.$$

Somit ist $\operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \{\, \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_i \mid \alpha \in [0,1]^n, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\}$ als stetiges Bild einer kompakten Menge wieder kompakt. $\square$

Schritt 3: $\quad \forall A \subseteq X : \quad (A \text{ totalbeschränkt}) \Rightarrow (\operatorname{conv}(A) \text{ totalbeschränkt})$
Seien $\epsilon > 0$ und $x_1, \ldots, x_n \in A$ mit $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i) \subseteq U$, wobei $U := \bigcup \big\{\, U_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \,\big|\, x \in \operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_n\}) \big\}$.
Die Menge U ist konvex, weil:

$$\begin{aligned} \forall a, b \in U : \quad & \exists x, y \in \operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_n\}) : \quad \|a - x\| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \|b - y\| < \frac{\epsilon}{2} \\ \Rightarrow \forall t \in [0,1] : \quad & \|(t \cdot a + (1-t) \cdot b) - (t \cdot x + (1-t) \cdot y)\| \leq t \cdot \|a - x\| + (1-t) \cdot \|b - y\| < \frac{\epsilon}{2} \\ \Rightarrow \forall t \in [0,1] : \quad & (t \cdot a + (1-t) \cdot b) \in U. \end{aligned}$$

Aus $\operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_n\}) \subseteq U$ und der Kompaktheit von $\operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ folgt:

$$\exists \tilde{x}_i, \ldots, \tilde{x}_m \in \operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_n\}) \subseteq \operatorname{conv}(A) : \quad \operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_n\}) \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_{\frac{\epsilon}{2}}(\tilde{x}_i).$$

Gesamt erhalten wir also:

$$\begin{aligned} \operatorname{conv}(A) &\subseteq \operatorname{conv}(U) = U \\ &= \bigcup \big\{\, x + U_{\frac{\epsilon}{2}}(0) \,\big|\, x \in \operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_n\}) \big\} \\ &\subseteq \bigcup \big\{\, U_{\frac{\epsilon}{2}}(\tilde{x}_i) + U_{\frac{\epsilon}{2}}(0) \,\big|\, i \in \{1, \ldots, m\} \big\} \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^m U_\epsilon(\tilde{x}_i). \end{aligned}$$

$\square$

Schritt 4: $(\overline{M}$ kompakt$) \quad \Rightarrow \quad (\overline{\mathrm{conv}(M)}$ kompakt$)$

$$\begin{array}{llllll} & \overline{M} \text{ kompakt} & \Rightarrow & \overline{M} \text{ totalbeschränkt} & \Rightarrow & M \text{ totalbeschränkt} \\ \Rightarrow & \mathrm{conv}(M) \text{ totalbeschränkt} & \Rightarrow & \overline{\mathrm{conv}(M)} \text{ totalbeschränkt} & \Rightarrow & \overline{\mathrm{conv}(M)} \text{ kompakt} \end{array}$$

□

■

1.2.4 Satz. (Fixpunktsatz von Schauder)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $M \subseteq X$ eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge und $T : M \longrightarrow M$ stetig mit kompaktem $\overline{T(M)}$. Dann besitzt die Gleichung $T(x) = x$ eine Lösung, d.h.:

$$\exists x^* \in X : \quad T(x^*) = x^*.$$

Der Beweis des Fixpunktsatzes von Schauder soll an dieser Stelle entfallen. Wir verweisen auf die Litertur.

1.2.5 Definition.
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Wir nennen X *strikt konvex*, falls gilt:

$$\forall x, y \in X : \quad \left(x \neq y, \|x\| = \|y\| \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{1}{2} \cdot (x + y) \right\| < \|x\| \right).$$

1.2.6 Definition.
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Wir nennen $T : X \longrightarrow X$ *nicht-expansiv*, falls gilt:

$$\forall x, y \in X : \quad \|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\| .$$

1.2.7 Satz.
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein strikt konvexer Banachraum, $M \subseteq X$ eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge und $T : M \longrightarrow M$ nicht-expansiv mit kompaktem $\overline{T(M)}$. Dann besitzt die Gleichung $T(x) = x$ eine Lösung, d.h.:

$$\exists x^* \in M : \quad T(x^*) = x^*.$$

Sei weiters $x_0 \in M$ beliebig und $x_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot (T(x_n) + x_n), \forall n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine Lösung der obigen Gleichung, d.h.:

$$T(\lim_{n \mapsto \infty} x_n) = \lim_{n \mapsto \infty} x_n.$$

Beweis.
Schritt 1: Existenz einer Lösung
T ist laut Voraussetzung nicht-expansiv und somit gleichmäßig stetig. Der Fixpunktsatz von Schauder, Satz 1.2.4, liefert somit die Existenz einer Lösung $x^* \in M$ der Gleichung $T(x) = x$. □

Schritt 2: Wohldefiniertheit der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$
Wir definieren, basierend auf T, einen weiteren Operator:

$$U : \begin{cases} M & \longrightarrow & M \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2} \cdot (T(x) + x) \end{cases} .$$

Aufgrund der Konvexität von M ist dieser Operator wohldefiniert und es gilt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (U^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$. Die Wohldefiniertheit von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist somit klar.
Wir werden später im Beweis verwenden, dass U die nicht-Expansivität von T erbt:

$$\|U(x) - U(y)\| \leq \frac{1}{2} \cdot \big(\|T(x) - T(y)\| + \|x - y\| \big) \leq \|x - y\| .$$

$\square$

Schritt 3: Kompaktheit von $M_0 := \overline{\operatorname{conv}(T(M) \cup \{x_0\})}$

In allgemeinen topologischen Räumen $(X, \mathcal{T})$ gilt: Einpunktige Mengen sind kompakt. Die Vereinigung endlich vieler, kompakter Mengen ist wieder kompakt. Für beliebige Teilmengen $A, B \subseteq X$ gilt: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. In Hausdorff-Räumen sind einpunktige Mengen außerdem auch abgeschlossen.
Wegen der angenommenen Kompaktheit von $\overline{T(M)}$ ist auch $\overline{T(M) \cup \{x_0\}} = \overline{T(M)} \cup \overline{\{x_0\}} = \overline{T(M)} \cup \{x_0\}$ kompakt. Mit dem Lemma von Mazur, Lemma 1.2.3, folgt die Kompaktheit von M_0. $\square$

Schritt 4: $\{\, x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq M_0$

Wegen der vorausgesetzten Konvexität und Abgeschlossenheit von M gilt: $M_0 = \overline{\operatorname{conv}(T(M) \cup \{x_0\})} \subseteq \overline{\operatorname{conv}(M \cup \{x_0\})} = M$.
Wir zeigen die stärkere Inklusion $\{\, x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \operatorname{conv}(T(M) \cup \{x_0\})$ mittels vollständiger Induktion nach n:
Die Fälle $n = 0$ und $n = 1$ sind unmittelbar nachzuprüfen.
Gilt $x_n \in \operatorname{conv}(T(M) \cup \{x_0\})$, so gilt sicher auch: $T(x_n) \in T(\operatorname{conv}(T(M) \cup \{x_0\})) \subseteq T(M_0) \subseteq T(M) \subseteq \operatorname{conv}(T(M) \cup \{x_0\})$. Als Konvexkombination zweier Elemente einer konvexen Menge liegt also auch $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (T(x_n) + x_n)$ in $\operatorname{conv}(T(M) \cup \{x_0\})$. $\square$

Schritt 5: $T(\lim_{n\mapsto\infty} x_{k(n)}) = \lim_{n\mapsto\infty} x_{k(n)}$ für eine Teilfolge $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$

In allgemeinen metrischen Räumen (X, d) gilt für jede (im topologischen Sinne) kompakte Menge $K \subseteq X$: Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ besitzt eine gegen ein $x \in K$ konvergente Teilfolge.
Wegen Schritt 3 und Schritt 4 besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also eine Teilfolge $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $\tilde{x} \in M_0$ konvergiert. Wir führen nun einen Widerspruchsbeweis:
Ann.: $\tilde{x}$ ist keine Lösung von $T(x) = x$.
Sei $x^* \in M$ eine Lösung von $T(x) = x$ und U der Operator aus Schritt 2. Dann gilt:

$$\|x^* - U(\tilde{x})\| = \frac{1}{2} \cdot \|(x^* - \tilde{x}) + (T(x^*) - T(\tilde{x}))\| \overset{(*)}{<} \|x^* - \tilde{x}\| .$$

Die Ungleichung $(*)$ sieht man durch folgende Fallunterscheidung ein:
Fall 1: $\|x^* - \tilde{x}\| = \|T(x^*) - T(\tilde{x})\|$: Wegen $T(\tilde{x}) \neq \tilde{x}$, $T(x^*) = x^*$ und der strikten Konvexität von $(X, \|\cdot\|)$ folgt unmittelbar die Behauptung.
Fall 2: $\|x^* - \tilde{x}\| \neq \|T(x^*) - T(\tilde{x})\|$: Wegen $\|T(x^*) - T(\tilde{x})\| \leq \|x^* - \tilde{x}\|$ gilt sogar die strikte Ungleichung $\|T(x^*) - T(\tilde{x})\| < \|x^* - \tilde{x}\|$. Mit dieser und der Dreiecksungleichung von $\|\cdot\|$ folgt also auch in diesem Fall die behauptete Ungleichung.
Wir können also $\delta > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so wählen, dass gilt:

$$0 < 2 \cdot \delta = \|x^* - \tilde{x}\| - \|x^* - U(\tilde{x})\| \quad \text{und} \quad \left\|\tilde{x} - x_{k(n_0)}\right\| < \delta.$$

Unter Verwendung von $U(x^*) = x^*$ und den soeben gezeigten Ungleichungen sehen wir also:

$$\begin{aligned}
\forall m \in \mathbb{N}^\times : \qquad \left\|x^* - x_{k(n_0)+m}\right\| &= \left\|U^{m-1}(x^*) - U^{m-1}(x_{k(n_0)+1})\right\| \\
&\leq \left\|x^* - x_{k(n_0)+1}\right\| \\
&\leq \|x^* - U(\tilde{x})\| + \left\|U(\tilde{x}) - U(x_{k(n_0)})\right\| \\
&< (\|x^* - \tilde{x}\| - 2 \cdot \delta) + \delta \\
&= \|x^* - \tilde{x}\| - \delta.
\end{aligned}$$

Dies stellt nun aber einen Widerspruch zu $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\mapsto\infty} \tilde{x}$ dar, weil:

$$\forall m \in \mathbb{N}^\times : \qquad 0 < \delta < \|x^* - \tilde{x}\| - \left\|x^* - x_{k(n_0)+m}\right\| \leq \left\|\tilde{x} - x_{k(n_0)+m}\right\| .$$

Wir haben also gezeigt:

$$T(\lim_{n\mapsto\infty} x_{k(n)}) = T(\tilde{x}) = \tilde{x} = \lim_{n\mapsto\infty} x_{k(n)}.$$

$\square$

Schritt 6: $T(\lim_{n\mapsto\infty} x_n) = \lim_{n\mapsto\infty} x_n$

Aus Schritt 5 erhalten wir: $U(\tilde{x}) = \frac{1}{2}\cdot(T(\tilde{x})+\tilde{x}) = \tilde{x}$. Damit können wir die Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\tilde{x}$ zeigen:
Sei $\epsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\left\|x_{k(n_0)} - \tilde{x}\right\| < \epsilon$. Dann gilt:

$$\forall m \in \mathbb{N}^{\times}: \qquad \left\|x_{k(n_0)+m} - \tilde{x}\right\| = \left\|U^m(x_{k(n_0)}) - U^m(\tilde{x})\right\| \leq \left\|x_{k(n_0)} - \tilde{x}\right\| < \epsilon.$$

Wir haben also gezeigt:

$$T(\lim_{n\mapsto\infty} x_n) = T(\tilde{x}) = \tilde{x} = \lim_{n\mapsto\infty} x_n.$$

$\square$

$\blacksquare$

1.3 Monotone Operatoren

Wir möchten das Konzept von Kegeln in metrischen Räumen in Erinnerung rufen.

1.3.1 Definition.
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Wir nennen eine Menge $K \subseteq X$ einen *Kegel*, falls gilt:

- K abgeschlossen, konvex
- $\forall \lambda \geq 0: \quad \lambda \cdot K \subseteq K$
- $K \cap -K = \{0\}$

1.3.2 Lemma.
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $K \subseteq X$ ein Kegel. Dann definiert

$$\forall x, y \in X: \quad x \leq y :\Leftrightarrow (y - x) \in K$$

eine Halbordnung auf X. Es gilt außerdem:

- $\forall x_0 \in X: \quad \{x \in X \mid x_0 \leq x\} = x_0 + K$
- $\forall x, y \in X: \forall \lambda \geq 0: \quad (x \leq y) \Rightarrow (\lambda \cdot x \leq \lambda \cdot y)$
- $\forall x, y \in X: \quad (x \leq y) \Rightarrow (-x \geq -y)$
- $\forall x, y, z \in X: \quad (x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z)$
- $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ konvergent: $\quad (\forall n \in \mathbb{N}: x_n \leq y_n) \Rightarrow (\lim_{n\mapsto\infty} x_n \leq \lim_{n\mapsto\infty} y_n)$

Beweis.
Schritt 1: $(\leq)$ definiert Halbordnung
Reflexivität: Sei $x \in X$. Dann gilt $(x - x) = 0 \in K$, also $x \leq x$.
Transitivität: Seien $x, y, z \in X$ mit $x \leq y \leq z$, dann liegt $(z - x) = 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot ((z - y) + (y - x)))$ als

nicht-negativ Vielfaches einer Konvexkombination von Vektoren aus K wieder in K.
Antisymmetrie: Seien $x, y \in X$ mit $x \leq y, y \leq x$. Dann gilt $(x - y) \in K \cap -K = \{0\}$, also $x = y$. $\square$

Schritt 2: Rechenregeln

Wir zeigen nur die letzte Eigenschaft, der Rest ist elementar nachzurechnen.
Sei also $x_n \leq y_n, \forall n \in N$. Damit liegt die Folge $(y_n - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K. Aufgrund der Abgeschlossenheit von K haben wir also auch $(\lim_{n\mapsto\infty} y_n) - (\lim_{n\mapsto\infty} x_n) = \lim_{n\mapsto\infty}(y_n - x_n) \in K$. $\square$

$\blacksquare$

1.3.3 Definition.
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $K \subseteq X$ ein Kegel und $(\leq)$ die Halbordnung aus Lemma 1.3.2.

- Für beliebige $a, b \in X$ definieren wir das *konische Segment* als $\langle a, b\rangle := \{\, x \in X \mid a \leq x \leq b\} = (a + K) \cap (b - K)$.
- Wir nennen eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ *(bzgl. $(\leq)$) monoton steigend*, falls gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}$ und *(bzgl. $(\leq)$) monoton fallend*, falls gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n+1}$.
- Wir nennen eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ *(bzgl. $(\leq)$) nach oben beschränkt*, falls gilt: $\exists s \in X : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq s$ und *(bzgl. $(\leq)$) nach unten beschränkt*, falls gilt: $\exists s \in X : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq s$
- Der Kegel K heißt *regulär*, falls jede bzgl. $(\leq)$ monoton steigende und nach oben beschränkte Folge konvergiert. (In diesem Fall konvergiert auch jede bzgl. $(\leq)$ monoton fallende und nach unten beschränkte Folge.)
- Ein Operator $T : X \longrightarrow X$ heißt *(bzgl. $(\leq)$) monoton*, falls gilt:
$\forall x, y \in X : (x \leq y) \Rightarrow (T(x) \leq T(y))$.

1.3.4 Satz.
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $K \subseteq X$ ein regulärer Kegel mit induzierter Ordnungsrelation $(\leq)$. Sei weiters $T : X \longrightarrow X$ stetig und bzgl. $(\leq)$ monoton. Existieren $x_0, y_0 \in X$ mit $x_0 \leq y_0, x_0 \leq T(x_0)$ und $T(y_0) \leq y_0$, dann besitzt die Gleichung $T(x) = x$ eine Lösung, d.h.:

$$\exists x^* \in \langle x_0, y_0\rangle : \quad T(x^*) = x^*.$$

Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (T^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (T^n(y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren jeweils gegen eine Lösung der obigen Gleichung, d.h.:

$$T(\lim_{n\mapsto\infty} x_n) = \lim_{n\mapsto\infty} x_n \quad \text{und} \quad T(\lim_{n\mapsto\infty} y_n) = \lim_{n\mapsto\infty} y_n.$$

Beweis.

Schritt 1: $T(\langle x_0, y_0\rangle) \subseteq \langle x_0, y_0\rangle$

Sei $z \in \langle x_0, y_0\rangle$, dann gilt $x_0 \leq z \leq y_0$ und wegen der vorausgesetzten Monotonie von T auch $x_0 \leq T(x_0) \leq T(z) \leq T(y_0) \leq y_0$. Das bedeutet $T(z) \in \langle x_0, y_0\rangle$. $\square$

Schritt 2: Abgeschlossenheit von $\langle x_0, y_0\rangle$

In topologischen Vektorräumen, zu denen normierte Räume gehören, ist für jedes $c \in X$ die zugehörige Translation $(X \longrightarrow X : x \longmapsto x + c)$ ein Homöomorphismus. Ebenso ist die Spiegelung um den Ursprung $(X \longrightarrow X : x \longmapsto -x)$ ein Homöomorphismus. Insbesondere sind die Bilder von abgeschlossenen Mengen unter diesen Abbildung wieder abgeschlossen.
Aus diesem Grund ist $\langle x_0, y_0\rangle = (x_0 + K) \cap (y_0 - K)$ als Durchschnitt abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen. $\square$

Schritt 3: $T(\lim_{n\mapsto\infty} x_n) = \lim_{n\mapsto\infty} x_n$ und $T(\lim_{n\mapsto\infty} y_n) = \lim_{n\mapsto\infty} y_n$

Wir zeigen nur die linke Gleichheit, die rechte folgt analog.
Wegen $x_0 \leq T(x_0)$ und der Monotonie von T folgt induktiv $x_n \leq x_{n+1}$. Aus Schritt 1 ist ersichtlich, dass y_0 eine obere Schranke von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Die vorausgesetzte Regularität von K liefert somit die Konvergenz dieser Folge. Wegen Schritt 1 gilt $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \langle x_0, y_0\rangle$ und wegen der Abgeschlossenheit dieses konischen Segments liegt der Grenzwert ebenfalls in $\langle x_0, y_0\rangle$. Schließlich folgt aus der Stetigkeit von T:

$$T(\lim_{n\mapsto\infty} x_n) = \lim_{n\mapsto\infty} T(x_n) = \lim_{n\mapsto\infty} x_{n+1} = \lim_{n\mapsto\infty} x_n.$$

□

■

Die Anwendbarkeit von Satz 1.3.4 hängt davon ab, ob man tatsächlich die Existenz der Elemente $x_0, y_0 \in X$ nachweisen kann. Wir geben nun Voraussetzungen an, unter denen dies auf jeden Fall möglich ist.

1.3.5 Lemma.
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $K \subseteq X$ ein regulärer Kegel mit induzierter Ordnungsrelation $(\leq)$, sowie $f \in K\backslash\{0\}$ beliebig. Sei weiters $T : X \longrightarrow X$ stetig, bzgl. $(\leq)$ monoton und mit $T(0) \in K$. Existiert ein Operator $U \in \mathcal{B}(X)$ mit $U(K) \subseteq K$ und $\rho(U) < 1$, der T auf K majorisiert, d.h.: $\forall x \in K : T(x) \leq U(x)$, dann gilt:

$$\exists x_0, y_0 \in X : \quad x_0 \leq y_0, x_0 \leq T(x_0) \text{ und } T(y_0) \leq y_0.$$

Insbesondere konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (T^n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Lösung der Gleichung $T(x) = x$.

Beweis.
Schritt 1: Definition von x_0 und y_0
Wir setzen $x_0 := 0$ und y_0 auf die, laut Satz 1.1.4 eindeutig existierende, Lösung $y^* \in X$ der Gleichung $U(y) + f = y$. □

Schritt 2: Ungleichungen
$x_0 \leq y_0$: Wieder wegen Satz 1.1.4 gilt $y_0 = y^* = \sum_{k=0}^{\infty} U^k(f)$. Wegen $f, U(f) \in K$ folgt induktiv $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} U^k(f) \in K$. Aus der Abgeschlossenheit von K schließen wir daraus auf $y_0 \in K$. Aufgrund von $x_0 = 0$ bedeutet dies aber genau $x_0 \leq y_0$.
$x_0 \leq T(x_0)$: Klar, wegen $T(x_0) \in K$.
$T(y_0) \leq y_0$: Wegen $f \in K$ folgt $0 \leq f$ und aufgrund von Lemma 1.3.2 erhalten wir $U(y_0) = U(y_0) + 0 \leq U(y_0) + f$. Gesamt folgt:

$$T(y_0) \leq U(y_0) \leq U(y_0) + f = y_0.$$

□

■

2 Projektionsverfahren

2.1 Injektive Operatoren

2.1.1 Lemma.
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^+$ nichtleer, $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ stetig und streng monoton fallend mit $\sup(A) < \infty$. Dann gilt $f(\sup(A)) = \inf(f(A))$ und insbesondere $\inf(f(A)) > 0$.

Beweis.
Fall 1: $|A| < |\mathbb{N}|$: $f(\sup(A)) = f(\max(A)) = \min(f(A)) = \inf(f(A))$

Fall 2: $|A| \geq |\mathbb{N}|$: Sei $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ streng monoton steigend mit $\lim_{n\mapsto\infty} a_n = \sup(A)$. Dann ist $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend, nach unten beschränkt und somit konvergent. Es gilt:

$$f(\sup(A)) = f(\lim_{n\mapsto\infty} a_n) = \lim_{n\mapsto\infty} f(a_n) = \inf(f(A)).$$

Es verbleibt $\lim_{n\mapsto\infty} f(a_n) = \inf(f(A))$ zu zeigen:
„$\leq$“: Sei $y \in f(A)$. Dann gibt es ein $x \in A$ mit $f(x) = y$. Ist $x \neq \sup(A)$, dann gilt für ein hinreichend großes $n_0 \in \mathbb{N}$ sicherlich $x < a_{n_0}$ und daher auch $\lim_{n\mapsto\infty} f(a_n) < f(a_{n_0}) < f(x)$. Im Falle $x = \sup(A)$ gilt sogar $\lim_{n\mapsto\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\mapsto\infty} a_n) = f(\sup(A)) = f(x)$. Auf beiden Seiten Suprema bilden liefert nun die Behauptung.
„$\geq$“: Aus $f(a_n) \geq \inf(f(A)), \forall n \in \mathbb{N}$, folgt mittels beidseitiger Grenzwertbildung sofort die Behauptung.

■

2.1.2 Definition.
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und der Abstand eines Punktes $x \in X$ zu einem Unterraum $U \leq X$ gegeben durch:

$$\forall x \in X : \forall U \leq X : \quad \operatorname{dist}(x, U) := \inf_{u\in U} \|x - u\|.$$

Eine Folge von Unterräumen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *eigentlich dicht in* X, falls gilt:

$$\forall x \in X : \quad \operatorname{dist}(x, U_n) \xrightarrow{n\mapsto\infty} 0.$$

Wir erinnern an den Begriff der (Orthogonal-)Projektion:

2.1.3 Definition.
Sei X ein Vektorraum und $U \leq X$ ein Unterraum. Eine lineare Abbildung $P : X \longrightarrow X$ mit $P \circ P = P$ und $\operatorname{ran}P = U$ heißt *Projektion auf* U.
Sei H ein Vektorraum mir Skalarprodukt und $U \leq H$ ein Unterraum. Eine lineare Abbildung $P : H \longrightarrow H$ mit $P \circ P = P$, $\operatorname{ran}P = U$ und $\operatorname{ran}P \perp \ker P$ heißt *Orthogonalprojektion auf* U.

2.1.4 Bemerkung.
Ist $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $U \leq H$ ein abgeschlossener Unterraum, so gibt es *genau* eine Orthogonalprojektion auf U.

2.1.5 Satz. (Galerkin-Verfahren)
Seien $(X, \|\cdot\|)$ und $(Y, \|\cdot\|)$ Banachräume, T ein injektiver, linearer Operator mit Definitionsbereich $\operatorname{dom}(T) \leq X$ und Wertebereich $\operatorname{ran}(T) \leq Y$. Seien weiters $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Unterräumen mit $X_n \leq \operatorname{dom}(T) \leq X$ und $Y_n \leq Y$, sodass alle $T(X_n)$ und alle Y_n abgeschlossen sind, sowie $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(Y)^{\mathbb{N}}$ eine Folge von gleichmäßig beschränkten Projektionen auf die Unterräume Y_n, d.h. $\operatorname{ran}P_n = Y_n$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| < \infty$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- Die Gleichung $P_n(T(x) - f) = 0$ hat für beliebiges $f \in Y$ und $n \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Lösung in X_n, d.h.:

  $$\forall f \in Y : \forall n \in \mathbb{N} : \exists! x_n^* \in X_n : \qquad P_n(T(x_n^*) - f) = 0$$

  und es gilt:

  $$\lim_{n\mapsto\infty} \|T(x_n^*) - f\| = 0.$$

- Die Folge $(T(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eigentlich dicht in Y, die Einschränkungen $\tilde{P_n} := P_n|_{T(X_n)} : T(X_n) \longrightarrow Y_n$ der Projektionen P_n sind bijektiv und es gilt:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{\substack{y\in T(X_n)\\ \|y\|=1}} \|P_n(y)\| > 0.$$

Beweis.
Wir beginnen mit der Richtung "$\Downarrow$".

Schritt 1: $(T(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eigentlich dicht in Y

Sei $f \in Y$ beliebig, dann folgt aus der Injektivität von T und der vorausgesetzten Existenz der x_n^* für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{dist}(f, T(X_n)) = \inf_{y\in T(X_n)} \|y - f\| = \inf_{x\in X_n} \|T(x) - f\| \leq \|T(x_n^*) - f\| \xrightarrow{n\mapsto\infty} 0.$$

$\square$

Schritt 2: Bijektivität aller $\tilde{P_n} : T(X_n) \longrightarrow Y_n$

Aus der Injektivität von T, der Linearität der P_n und der vorausgesetzten, eindeutigen Lösbarkeit der Gleichung $P_n(T(x) - f) = 0$ in X_n folgt:

$$\begin{aligned}
& \forall f \in Y : \forall n \in \mathbb{N} : \exists! x_n^* \in X_n : && P_n(T(x_n^*) - f) = 0 \\
\Rightarrow\quad & \forall n \in \mathbb{N} : \forall f \in Y_n : \exists! y \in T(X_n) : && P_n(y - f) = 0 \\
\Rightarrow\quad & \forall n \in \mathbb{N} : \forall f \in Y_n : \exists! y \in T(X_n) : && \tilde{P_n}(y) = P_n(y) = P_n(f) = f.
\end{aligned}$$

Das ist aber genau die Definition der Bijektivität aller $\tilde{P_n}$. $\square$

Schritt 3: Linearität, Stetigkeit und gleichmäßige Beschränktheit aller $(\tilde{P_n})^{-1} \circ P_n : Y \longrightarrow T(X_n)$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist P_n linear und wegen $\|P_n\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| < \infty$ stetig. Aufgrund der vorausgesetzten Abgeschlossenheit sind alle $(T(X_n), \|\cdot\|)$ und $(Y_n, \|\cdot\|)$ Banachräume. Alle $\tilde{P_n} : T(X_n) \longrightarrow Y_n$ sind linear, stetig und bijektiv. Laut dem Satz von der offenen Abbildung sind damit auch die Umkehrfunktionen $(\tilde{P_n})^{-1} : Y_n \longrightarrow T(X_n)$ linear und stetig. Als Zusammensetzung linearer, stetiger Abbildungen sind also alle $(\tilde{P_n})^{-1} \circ P_n$ linear und stetig.
Die gleichmäßige Beschränktheit sieht man wie folgt ein:
Für beliebiges $f \in Y$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung $P_n(T(x) - f) = 0$ gegeben durch

$$x_n^* = (T^{-1} \circ (\tilde{P_n})^{-1} \circ P_n)(f) \in X_n.$$

Laut Voraussetzung konvergiert die Folge dieser $T(x_n^*)$ gegen f:

$$((\tilde{P_n})^{-1} \circ P_n)(f) = T(x_n^*) \xrightarrow{n\mapsto\infty} f.$$

Als punktweise konvergente Folge ist $\left\{ (\tilde{P_n})^{-1} \circ P_n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ insbesondere eine punktweise beschränkte Operatorfamilie. Aus dem Satz von Banach-Steinhaus folgt nun die behauptete, gleichmäßige Beschränktheit:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| (\tilde{P_n})^{-1} \circ P_n \right\| < \infty.$$

$\square$

Schritt 4: Gleichmäßige Beschränktheit aller $(\tilde{P_n})^{-1}$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| (\tilde{P_n})^{-1} \right\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{y\in Y_n\\ \|y\|=1}} \left\| (\tilde{P_n})^{-1}(y) \right\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{y\in Y_n\\ \|y\|=1}} \left\| (\tilde{P_n})^{-1}(P_n(y)) \right\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| (\tilde{P_n})^{-1} \circ P_n \right\| < \infty$$

$\square$

Schritt 5: $\inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{y\in T(X_n),\|y\|=1} \|P_n(y)\| > 0$

Für alle $y \in T(X_n)$ mit $\|y\| = 1$ gilt:

$$1 = \|y\| = \left\|((\tilde{P}_n)^{-1} \circ \tilde{P}_n)(y)\right\| = \left\|((\tilde{P}_n)^{-1} \circ P_n)(y)\right\| \leq \left\|(\tilde{P}_n)^{-1}\right\| \cdot \|P_n(y)\| .$$

Insbesondere gilt also $\|P_n(y)\| \neq 0$ und wir erhalten mit Schritt 4:

$$0 < \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{y\in T(X_n)\\ \|y\|=1}} \|P_n(y)\|^{-1} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{y\in T(X_n)\\ \|y\|=1}} \left\|(\tilde{P}_n)^{-1}\right\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|(\tilde{P}_n)^{-1}\right\| < \infty.$$

Wenden wir nun Lemma 2.1.1 zwei mal auf die Funktion $(\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ : x \longmapsto \frac{1}{x})$ an, so erhalten wir:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{\substack{y\in T(X_n)\\ \|y\|=1}} \|P_n(y)\| = \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{y\in T(X_n)\\ \|y\|=1}} \|P_n(y)\|^{-1} \right)^{-1} > 0.$$

□

Wir kommen nun zur Rückrichtung “⇑“.

Schritt 6: Gleichmäßige Beschränktheit aller $(\tilde{P}_n)^{-1} \circ P_n : Y \longrightarrow T(X_n)$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\left\|(\tilde{P}_n)^{-1}\right\| &= \sup_{z\in Y_n\setminus\{0\}} \frac{\left\|(\tilde{P}_n)^{-1}(z)\right\|}{\|z\|} = \sup_{y\in T(X_n)\setminus\{0\}} \left(\frac{\left\|\tilde{P}_n(y)\right\|}{\|y\|} \right)^{-1} = \\
&= \sup_{y\in T(X_n)\setminus\{0\}} \left(\frac{\left\|\tilde{P}_n(\frac{y}{\|y\|})\right\|}{\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\|} \right)^{-1} = \sup_{\substack{y\in T(X_n)\setminus\{0\}\\ \|y\|=1}} \left(\frac{\left\|\tilde{P}_n(y)\right\|}{\|y\|} \right)^{-1} = \sup_{\substack{y\in T(X_n)\\ \|y\|=1}} \|P_n(y)\|^{-1}
\end{aligned}$$

Mittels der vorausgesetzten Positivität der iterierten Infima und Anwendung von Lemma 2.1.1 sehen wir die gleichmäßige Beschränktheit aller $(\tilde{P}_n)^{-1}$:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|(\tilde{P}_n)^{-1}\right\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{y\in T(X_n)\\ \|y\|=1}} \|P_n(y)\|^{-1} = \left(\inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{\substack{y\in T(X_n)\\ \|y\|=1}} \|P_n(y)\| \right)^{-1} < \infty.$$

Daraus folgt nun unmittelbar die Behauptung:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|(\tilde{P}_n)^{-1} \circ P_n\right\| \leq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|(\tilde{P}_n)^{-1}\right\| \right) \cdot \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| \right) < \infty.$$

□

Schritt 7: Eindeutige Existenz einer Lösung

Seien sowohl $f \in Y$ als auch $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Die Abbildung $P_n \circ T = \tilde{P}_n \circ T : X_n \longrightarrow Y_n$ ist als Zusammensetzung bijektiver Abbildungen selbst bijektiv. Wegen $P_n(f) \in Y_n$ haben wir also:

$$\begin{aligned}
& \exists! x_n^* \in X_n : \quad (P_n \circ T)(x_n^*) = P_n(f) \\
\Rightarrow \quad & \exists! x_n^* \in X_n : \quad P_n(T(x_n^*) - f) = 0.
\end{aligned}$$

□

Schritt 8: $\lim_{n\mapsto\infty} \|T(x_n^*) - f\| = 0$

Wir wählen für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $f_n \in T(X_n)$ mit:

$$\|f - f_n\| \leq \inf_{f_n\in T(X_n)} \|f - f_n\| + \frac{1}{n} = \operatorname{dist}(f, T(X_n)) + \frac{1}{n}.$$

Dann gilt klarerweise $((\tilde{P}_n)^{-1} \circ P_n)(f_n) = ((\tilde{P}_n)^{-1} \circ \tilde{P}_n)(f_n) = f_n$. Aus Schritt 7 haben wir die Gleichheit $T(x_n^*) = ((\tilde{P}_n)^{-1} \circ P_n)(f)$. Setzen wir dies alles zusammen, so erhalten wir für ein passendes $C < \infty$:

$$\begin{aligned}
\|T(x_n^*) - f\| &= \left\|((\tilde{P}_n)^{-1} \circ P_n)(f - f_n) - (f - f_n)\right\| \\
&\leq \left\|((\tilde{P}_n)^{-1} \circ P_n) - \mathrm{id}_Y\right\| \cdot \|f - f_n\| \\
&\leq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|(\tilde{P}_n)^{-1} \circ P_n\right\| + 1\right) \cdot \|f - f_n\| \\
&\leq C \cdot \left(\mathrm{dist}(f, T(X_n)) + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\mapsto\infty} 0.
\end{aligned}$$

□

■

Möchte man Satz 2.1.5 anwenden, so muss man insbesondere die Bijektivität der Einschränkungen der Projektionen nachprüfen. Da dies unter Umständen schwierig sein kann, möchten wir im Folgenden eine Charakterisierung dieser Eigenschaft angeben:

2.1.6 Lemma.
Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum mit induzierter Norm $\|\cdot\|$, $H_1, H_2 \leq H$ abgeschlossene Unterräume und $P_1 : H \longrightarrow H$, $P_2 : H \longrightarrow H$ die Orthogonalprojektionen auf H_1 bzw. H_2. Dann gilt:

$$\left(\tilde{P}_2 := P_2|_{H_1} : H_1 \longrightarrow H_2 \text{ bijektiv}\right) \Leftrightarrow \left(\|P_1 - P_2\| < 1\right).$$

Beweis.
Wir beginnen mit der Richtung "⇒".

Schritt 1: $0 < \inf_{x\in H_1, \|x\|=1} \left\|\tilde{P}_2(x)\right\| < \infty$

$\tilde{P}_2$ ist laut Voraussetzung bijektiv und wegen $\left\|\tilde{P}_2\right\| \leq \|P_2\| \leq 1 < \infty$ auch stetig. Aus dem Satz von der offenen Abbildung folgt, dass die Inverse $(\tilde{P}_2)^{-1}$ ebenfalls stetig ist. Wir haben $0 < \left\|(\tilde{P}_2)^{-1}\right\| < \infty$ und somit $\left\|(\tilde{P}_2)^{-1}\right\|^{-1} \in \mathbb{R}^+$. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 2.1.1 und:

$$\left\|(\tilde{P}_2)^{-1}\right\|^{-1} = \left(\sup_{y\in H_2\setminus\{0\}} \frac{\left\|(\tilde{P}_2)^{-1}(y)\right\|}{\|y\|}\right)^{-1} = \left(\sup_{x\in H_1\setminus\{0\}} \left(\frac{\left\|\tilde{P}_2(x)\right\|}{\|x\|}\right)^{-1}\right)^{-1} = \inf_{\substack{x\in H_1\\ \|x\|=1}} \left\|\tilde{P}_2(x)\right\|.$$

□

Schritt 2: $\tilde{P}_1 := P_1|_{H_2} : H_2 \longrightarrow H_1$ bijektiv mit stetiger Inverser $(\tilde{P}_1)^{-1}$

Aus der Abgeschlossenheit von H_1 und H_2 folgt, dass $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilberträume sind. Die laut Schritt 1 stetige Abbildung $\tilde{P}_2 : H_1 \longrightarrow H_2$ besitzt also einen eindeutigen, adjungiertern Operator $(\tilde{P}_2)^* : H_2 \longrightarrow H_1$. Wir zeigen nun $(\tilde{P}_2)^* = \tilde{P}_1$:
Wegen $\left\|\tilde{P}_1\right\| \leq \|P_1\| \leq 1 < \infty$ ist $\tilde{P}_1$ stetig. Außerdem erfüllt $\tilde{P}_1$ die für den adjungierten Operator charakteristische Eigenschaft

$$\forall x \in H_1 : \forall y \in H_2 : \quad \left\langle \tilde{P}_2 x, y\right\rangle = \left\langle x, \tilde{P}_1 y\right\rangle.$$

Das folgt aus:

$$\begin{aligned}
\forall x \in H_1 : \forall y \in H_2 : \quad \left\langle \tilde{P}_2 x, y\right\rangle &= \langle P_2 x, y\rangle = \left\langle x, \tilde{P}_2 y\right\rangle = \langle x, y\rangle \\
\left\langle x, \tilde{P}_1 y\right\rangle &= \langle x, P_1 y\rangle = \langle P_1 x, y\rangle = \langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

Die Bijektivität von $\tilde{P}_1$ sieht man nun wie folgt ein:

$$\begin{aligned}
&\ker\tilde{P}_1 = \ker(\tilde{P}_2{}^*) = (\mathrm{ran}\tilde{P}_2)^\perp = (H_2)^\perp = \{0\} \\
&\mathrm{ran}\tilde{P}_1 = \overline{\mathrm{ran}\tilde{P}_1} = \overline{\mathrm{ran}(\tilde{P}_2)^*} = (\mathrm{ran}(\tilde{P}_2)^*)^{\perp\perp} = (\ker\tilde{P}_2)^\perp = \{0\}^\perp = H_1.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass $\tilde{P}_1$ als Einschränkung der Orthogonalprojektion P_1 selbst eine Orthogonalprojektion ist und dass das Bild $\mathrm{ran}P$ jeder Orthogonalprojektion P stets abgeschlossen ist.
Der adjungierte Operator $(\tilde{P}_2)^*$ ist somit ebenfalls bijektiv und weiters auch stetig: $\left\|(\tilde{P}_2)^*\right\| = \left\|\tilde{P}_2\right\| < \infty$.
Wieder mit dem Satz von der offenen Abbiludung folgt die Stetigkeit von $((\tilde{P}_2)^*)^{-1} = (\tilde{P}_1)^{-1}$. □

Schritt 3: $\quad 0 < \inf_{x\in H_2, \|x\|=1} \left\|\tilde{P}_1(x)\right\| < \infty$

Wir haben gerade die Voraussetzungen von Schritt 1 für den Operator $\tilde{P}_1$ gezeigt. Die Behauptung folgt also vollkommen analog zu Schritt 1. □

Schritt 4: $\quad \sup_{x\in H_1, \|x\|=1} \|(\mathrm{id} - P_2)(x)\| < 1$

Es gilt:

$$\forall x \in H_1\backslash\{0\} : \quad \left\|\tilde{P}_2(x)\right\| = \left\|\tilde{P}_2\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \cdot \|x\| \geq \left(\inf_{\substack{y\in H_1\\ \|y\|=1}} \left\|\tilde{P}_2(y)\right\|\right) \cdot \|x\| .$$

In Verbindung mit dem Satz von Pythagoras zeigt dies:

$$\forall x \in H_1 : \quad \left\|(\mathrm{id} - \tilde{P}_2)(x)\right\|^2 = \|x\|^2 - \left\|\tilde{P}_2(x)\right\|^2 \leq \left[1 - \left(\inf_{\substack{y\in H_1\\ \|y\|=1}} \left\|\tilde{P}_2(y)\right\|\right)^2\right] \cdot \|x\|^2 .$$

Wurzelziehen und Suprema bilden auf beiden Seiten dieser Ungleichung liefert nun:

$$\sup_{\substack{x\in H_1\\ \|x\|=1}} \|(\mathrm{id} - P_2)(x)\| \leq \sqrt{1 - \left(\inf_{\substack{x\in H_1\\ \|x\|=1}} \left\|\tilde{P}_2(x)\right\|\right)^2} < 1.$$

□

Schritt 5: $\quad \sup_{x\in H_2, \|x\|=1} \|(\mathrm{id} - P_1)(x)\| < 1$

Analog zu Schritt 4 und unter Verwendung der in Schritt 3 gezeigten Ungleichung. □

Schritt 6: $\quad \|P_1 - P_2\| \leq \max\left\{\sup_{x\in H_1, \|x\|=1} \|(\mathrm{id} - P_2)(x)\|, \sup_{x\in H_2, \|x\|=1} \|(\mathrm{id} - P_1)(x)\|\right\}$

Die Abbildungen P_1 und $(\mathrm{id} - P_2)$ sind Orthogonalprojektionen und als solche selbstadjungiert. Daher gilt:

$$\|P_1 \circ (\mathrm{id} - P_2)\| = \|(P_1 \circ (\mathrm{id} - P_2))^*\| = \|(\mathrm{id} - P_2)^* \circ (P_1)^*\| = \|(\mathrm{id} - P_2) \circ P_1\| .$$

Die Tatsache $\forall x \in H : (\mathrm{id} - P_2)(x) \perp P_2(x)$ und der Satz von Pythagoras liefern nun:

$$\begin{aligned}
\forall x \in H : \quad \|(P_1 - P_2)(x)\|^2 &= \|(P_1 \circ (\mathrm{id} - P_2) \circ (\mathrm{id} - P_2) - (\mathrm{id} - P_1) \circ P_2 \circ P_2)(x)\|^2 \\
&\leq \|P_1 \circ (\mathrm{id} - P_2)\|^2 \cdot \|(\mathrm{id} - P_2)(x)\|^2 + \|(\mathrm{id} - P_1) \circ P_2\|^2 \cdot \|P_2(x)\|^2 \\
&\leq \max\{\|P_1 \circ (\mathrm{id} - P_2)\|^2, \|(\mathrm{id} - P_1) \circ P_2\|^2\} \cdot \|x\|^2 \\
&= \max\{\|(\mathrm{id} - P_2) \circ P_1\|^2, \|(\mathrm{id} - P_1) \circ P_2\|^2\} \cdot \|x\|^2 .
\end{aligned}$$

Außerdem gilt aufgrund der Definition der Operatornorm:

$$\|(\mathrm{id} - P_2) \circ P_1\| = \sup_{\substack{x\in H\\ \|x\|\leq 1}} \|((\mathrm{id} - P_2) \circ P_1)(x)\| \leq \sup_{\substack{y\in H_1\\ \|y\|\leq 1}} \|(\mathrm{id} - P_2)(y)\| = \sup_{\substack{x\in H_1\\ \|x\|=1}} \|(\mathrm{id} - P_2)(x)\|$$

und analog auch:

$$\|(\mathrm{id} - P_1) \circ P_2\| \leq \sup_{\substack{x\in H_2\\ \|x\|=1}} \|(\mathrm{id} - P_1)(x)\| .$$

Setzen wir nun alles zusammen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\|P_1 - P_2\| &\leq \max\{\|(\mathrm{id} - P_2) \circ P_1\|, \|(\mathrm{id} - P_1) \circ P_2\|\} \\ &\leq \max\{\sup_{\substack{x\in H_1\\ \|x\|=1}} \|(\mathrm{id} - P_2)(x)\|, \sup_{\substack{x\in H_2\\ \|x\|=1}} \|(\mathrm{id} - P_1)(x)\|\} \\ &< \max\{1,1\} = 1.\end{aligned}$$

□

Wir kommen nun zur Rückrichtung "$\Leftarrow$".

<u>Schritt 7: $(\mathrm{id} + P_1 - P_2)(H) = H$</u>

Sei $y \in H$ beliebig. Wir definieren einen Operator:

$$U : \begin{cases} H & \longrightarrow & H \\ x & \longmapsto & -(P_1 - P_2)(x) + y \end{cases}.$$

Wegen der vorausgesetzten Ungleichung $\|P_1 - P_2\| < 1$ ist U eine Kontraktion (vgl. Definition 1.1.1):

$$\begin{aligned}\forall x, \tilde{x} \in H: \quad \|U(x) - U(\tilde{x})\| &= \|(-(P_1 - P_2)(x) + y) - (-(P_1 - P_2)(\tilde{x}) + y)\| \\ &= \|(P_1 - P_2)(x - \tilde{x})\| \\ &\leq \|P_1 - P_2\| \cdot \|x - \tilde{x}\|.\end{aligned}$$

Laut dem Fixpunktsatz von Banach, Satz 1.1.2, hat U also einen (sogar eindeutigen) Fixpunkt:

$$\exists x \in H : -(P_1 - P_2)(x) + y = U(x) = x.$$

Umstellen liefert nun die Behauptung:

$$\forall y \in H : \exists x \in H : \quad (\mathrm{id} + P_1 - P_2)(x) = y.$$

□

<u>Schritt 8: $\tilde{P}_2 : H_1 \longrightarrow H_2$ bijektiv</u>

Anwenden von P_2 auf die in Schritt 7 gezeigte Gleichheit liefert:

$$P_2(H) = P_2 \circ (\mathrm{id} + P_1 - P_2)(H) = (P_2 \circ P_1)(H).$$

Daraus folgt nun schon die Surjektivität von $\tilde{P}_2$:

$$\tilde{P}_2(H_1) = (P_2 \circ P_1)(H) = P_2(H) = H_2.$$

Um die Injektivität zu zeigen, wird folgende Ungleichung nützlich sein:

$$\left\|\mathrm{id}_{H_1} - \tilde{P}_2\right\| \leq \|\mathrm{id}_{H_1} - P_1|_{H_1}\| + \left\|P_1|_{H_1} - \tilde{P}_2\right\| \leq 0 + \|P_1 - P_2\| < 1.$$

Wir führen nun einen Widerspruchsbeweis:
<u>Ann.:</u> $\ker \tilde{P}_2 \neq \{0\}$. Dann können wir ein $x \in (\ker \tilde{P}_2)\backslash\{0\} \subseteq H_1$ wählen. Es folgt der Widerspruch:

$$\|x\| = \left\|(\mathrm{id}_{H_1} - \tilde{P}_2)(x)\right\| \leq \left\|\mathrm{id}_{H_1} - \tilde{P}_2\right\| \cdot \|x\| < \|x\|.$$

□

■

2.1.7 Korollar.
Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, T ein injektiver, linearer Operator mit Definitionsbereich $\mathrm{dom}(T) \leq X$ und Wertebereich $\mathrm{ran}(T) \leq Y$, sowie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{dom}(T)^{\mathbb{N}}$ eine

Folge von linear unabhängigen Vektoren. Wir setzen $X_n := \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Ist die Folge der Unterräume $(T(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eigentlich dicht in Y, so besitzt die Gleichung $T(x) = f$ für jedes $f \in Y$ eine beliebig gute Lösung $x_n^* \in X_n$, d.h.:

$$\forall f \in Y : \forall \epsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \exists x_n^* \in X_n : \qquad \|T(x_n^*) - f\| < \epsilon.$$

Die Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ dieser Lösung $x_n^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_i$ erhält man als eindeutige Lösung eines geeigneten linearen Gleichungssystems.

Beweis.
Schritt 1: Existenz einer Lösung
Wir verwenden Satz 2.1.5:
Sei $Y_n := T(X_n), \forall n \in \mathbb{N}$. Wenden wir das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf die wegen der Injektivität von T linear unabhängigen Vektoren $\{T(x_1), \dots, T(x_n)\}$ an, so erhalten wir eine Orthonormalbasis $\{y_1, \dots, y_n\}$ von Y_n. Die Unterräume Y_n sind endlich-dimensional und somit abgeschlossen. Wir können also die zugehörigen Orthogonalprojektionen betrachten: $P_n : Y \longrightarrow Y$. Diese sind klarerweise gleichmäßig beschränkt:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| \leq 1 < \infty.$$

Die Einschränkungen dieser Projektionen $\tilde{P_n} := P_n|_{T(X_n)} : T(X_n) \longrightarrow Y_n$ erfüllen $\tilde{P_n} = \text{id}_{Y_n}$ und sind somit bijektiv. Für die iterierten Infima gilt:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{\substack{y\in T(X_n) \\ \|y\|=1}} \|P_n(y)\| = \inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{\substack{y\in T(X_n) \\ \|y\|=1}} \|y\| = 1 > 0.$$

Sei nun $f \in Y$ beliebig und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen Satz 2.1.5 gilt:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \exists! x_n^* \in X_n : \qquad P_n(T(x_n^*) - f) = 0 \quad \text{und} \quad \|T(x_n^*) - f\| < \epsilon.$$

□

Schritt 2: Berechnung der Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$
Setzen wir für x_n^* eine Linearkombination $x_n^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_i$ mit $(\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n$ an, so erhalten wir mit Hilfe der Fourier-Koeffizienten-Darstellung bezüglich der Orthonormalbasis $\{y_1, \dots, y_n\}$:

$$0 = P_n(T(x_n^*) - f) = P_n(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot T(x_i) - f) = \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \langle T(x_i), y_j\rangle\right) \cdot y_j\right] - \left[\sum_{j=1}^n \langle f, y_j\rangle \cdot y_j\right].$$

Die Eindeutigkeit der Koeffizienten in einer Linearkombination von Basisvektoren liefert nun ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$$\begin{pmatrix} \langle T(x_1), y_1\rangle & \langle T(x_2), y_1\rangle & \dots & \langle T(x_n), y_1\rangle \\ \langle T(x_1), y_2\rangle & \langle T(x_2), y_2\rangle & \dots & \langle T(x_n), y_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle T(x_1), y_n\rangle & \langle T(x_2), y_n\rangle & \dots & \langle T(x_n), y_n\rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, y_1\rangle \\ \langle f, y_2\rangle \\ \vdots \\ \langle f, y_n\rangle \end{pmatrix}.$$

Aufgrund der eindeutigen Existenz von x_n^* ist dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar. □

■

2.2 Operatoren mit invertierbarem (id $- T$)

2.2.1 Lemma.
Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $A, B \in \mathcal{B}(X)$ mit $A \in \mathrm{Inv}(X)$ und $\|A^{-1}\| \cdot \|B\| < 1$. Dann ist auch der Operator $(A + B) \in \mathcal{B}(X)$ bijektiv.

Beweis.
$\mathcal{B}(X)$ ist eine Banachalgebra mit Eins. Wir erinnern an den Begriff der Neumann'schen Reihe aus der Funktionalanalysis:

$$\forall C \in \mathcal{B}(X) \text{ mit } \|C\| < 1: \quad (\mathrm{id} - C) \in \mathrm{Inv}(X) \quad \text{ und } \quad (\mathrm{id} - C)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} C^n.$$

Mit $C := A^{-1} \circ (-B) \in \mathcal{B}(X)$ und $\|C\| = \|A^{-1} \circ (-B)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|B\| < 1$ erhalten wir also die Invertierbarkeit von $A + B$:

$$(\mathrm{id} - C)^{-1} \circ A^{-1} = (A \circ (\mathrm{id} - C))^{-1} = (A + B)^{-1}.$$

■

2.2.2 Satz.
Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $T \in \mathcal{B}(X)$ ein linearer, stetiger Operator mit $(\mathrm{id} - T) \in \mathrm{Inv}(X)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $X_n \leq X$ ein abgeschlossener Unterraum und $P_n : X \longrightarrow X$ eine Projektion auf X_n. Gilt nun $\|(\mathrm{id} - P_n) \circ T\| \xrightarrow{n \mapsto \infty} 0$, dann besitzt die Gleichung $P_n(T(x) + f - x) = 0$ für hinreichend großes $n \geq n_0$ und beliebiges $f \in X$ eine eindeutige Lösung $x_n^* \in X_n$, d.h.:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \forall f \in X : \exists! x_n^* \in X_n : \quad P_n(T(x_n^*) + f - x_n^*) = 0.$$

Außerdem sind unter diesen Voraussetzungen die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- $\|(\mathrm{id} - P_n)(f)\| \xrightarrow{n \mapsto \infty} 0$
- Die Folge der Lösungen $(x_n^*)_{n \geq n_0}$ konvergiert gegen die eindeutige Lösung $x^* \in X$ der Gleichung
  $T(x) + f = x$, d.h.:

$$\exists! x^* \in X : \quad (x_n^*)_{n \geq n_0} \xrightarrow{n \mapsto \infty} x^* \quad \text{und} \quad T(x^*) + f = x^*.$$

Beweis.
Schritt 1: Eindeutige Lösbarkeit der Gleichung $P_n(T(x) + f - x) = 0$

Aus dem Satz von der offenen Abbildung folgt $\|(\mathrm{id} - T)^{-1}\| < \infty$. Wegen der Voraussetzung $\|(\mathrm{id} - P_n) \circ T\| \xrightarrow{n \mapsto \infty} 0$ gilt für alle hinreichend großen $n \geq n_0$:

$$\|(\mathrm{id} - T)^{-1}\| \cdot \|(\mathrm{id} - P_n) \circ T\| < 1.$$

Wenden wir also Lemma 2.2.1 an, so erhalten wir die Bijektivität und Stetigkeit von:

$$(\mathrm{id} - T) + ((\mathrm{id} - P_n) \circ T) = \mathrm{id} - P_n \circ T : X \longrightarrow X.$$

Für beliebiges $f \in X$ gilt daher:

$$\exists! x_n^* \in X : \quad (\mathrm{id} - P_n \circ T)(x_n^*) = P_n(f).$$

Daraus folgt nun $P_n(T(x_n^*) + f) = x_n^*$, also $x_n^* \in \mathrm{ran}(P_n)$ und somit $P_n(x_n^*) = x_n^*$. Klarerweise vererbt sich die Eindeutigkeit von x_n^* in ganz X auf jene in X_n. Wir haben also gezeigt:

$$\exists! x_n^* \in X_n : \quad P_n(T(x_n^*) + f - x_n^*) = 0.$$

$\square$

Schritt 2: Eindeutige Lösbarkeit der Gleichung $T(x) + f = x$
Laut Voraussetzung ist $(\mathrm{id} - T)$ bijektiv, somit hat die Gleichung $(\mathrm{id} - T)(x) = f$ eine eindeutige Lösung $x^* \in X$:

$$\exists! x^* \in X : \quad (\mathrm{id} - T)(x^*) = f.$$

$\square$

Schritt 3: $(\mathrm{id} - P_n \circ T)(x^* - x_n^*) = (\mathrm{id} - P_n)(x^*)$
Für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$P_n \circ (\mathrm{id} - T)(x^* - x_n^*) = P_n \circ (\mathrm{id} - T)(x^*) - P_n \circ (\mathrm{id} - T)(x_n^*) = P_n(f) - P_n(f) = 0.$$

Zusammen mit $P_n(x_n^*) = x_n^*$ liefert das die Behauptung:

$$(\mathrm{id} - P_n \circ T)(x^* - x_n^*) = ((\mathrm{id} - P_n) + P_n \circ (\mathrm{id} - T))(x^* - x_n^*) = (\mathrm{id} - P_n)(x^*).$$

$\square$

Schritt 4: „$\Downarrow$“
Wie wir in Schritt 1 gesehen haben, ist der Operator $(\mathrm{id} - P_n \circ T)$ stetig: $\|\mathrm{id} - P_n \circ T\| < \infty$. Aus dem Satz von der offenen Abbildung folgt also auch die Stetigkeit der Inversen: $\left\|(\mathrm{id} - P_n \circ T)^{-1}\right\| < \infty$.
Wegen $x^* = T(x^*) + f$ und der in Schritt 3 gezeigten Gleichheit gilt:

$$\begin{aligned} \|x^* - x_n^*\| &= \left\|(\mathrm{id} - P_n \circ T)^{-1} \circ (\mathrm{id} - P_n)(T(x^*) + f)\right\| \\ &\leq \left\|(\mathrm{id} - P_n \circ T)^{-1}\right\| \cdot \Big(\|(\mathrm{id} - P_n) \circ T\| \cdot \|x^*\| + \|(\mathrm{id} - P_n)(f)\| \Big) \xrightarrow{n \mapsto \infty} 0. \end{aligned}$$

$\square$

Schritt 5: „$\Uparrow$“
Wieder mit Hilfe der in Schritt 3 gezeigten Gleichheit und $\|\mathrm{id} - P_n \circ T\| < \infty$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \|(\mathrm{id} - P_n)(f)\| &= \|(\mathrm{id} - P_n) \circ (\mathrm{id} - T)(x^*)\| \\ &\leq \|(\mathrm{id} - P_n)(x^*)\| + \|(\mathrm{id} - P_n) \circ T\| \cdot \|x^*\| \\ &\leq \|\mathrm{id} - P_n \circ T\| \cdot \|x^* - x_n^*\| + \|(\mathrm{id} - P_n) \circ T\| \cdot \|x^*\| \xrightarrow{n \mapsto \infty} 0. \end{aligned}$$

$\square$

$\blacksquare$

Das folgende Lemma wird im Beweis von Lemma 2.2.4 hilfreich sein.

2.2.3 Lemma.
Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $S_n \in \mathcal{B}(X), \forall n \in \mathbb{N}$, lineare und stetige Operatoren. Dann folgt aus der starken Operator-Konvergenz schon die kompakte Konvergenz, d.h.:

$$\Big(\forall x \in X : \quad \|S_n(x)\| \xrightarrow{n \mapsto \infty} 0\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(\forall K \subseteq X \text{ kompakt} : \quad \sup_{x \in K} \|S_n(x)\| \xrightarrow{n \mapsto \infty} 0\Big).$$

Beweis.
Schritt 1: Gleichmäßige Beschränktheit aller S_n
Aus der Konvergenz einer reell-wertigen Folge, folgt schon ihre Beschränktheit. Wir haben also:

$$\forall x \in X : \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n(x)\| < \infty.$$

Der Satz von Banach-Steinhaus liefert nun die gleichmäßige Beschränktheit aller S_n:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\| < \infty.$$

$\square$

Schritt 2: Kompakte Konvergenz von $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0

Sei also $K \subseteq X$ kompakt. X ist ein metrischer Raum, daher ist K insbesondere folgenkompakt. Es hat also jede Folge aus K eine in K konvergente Teilfolge. Wir führen nun einen indirekten Beweis.
Ann.: $(\sup_{x\in K} \|S_n(x)\|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen 0
Dann gibt es aber eine Teilfolge und ein $\epsilon > 0$ mit:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad \left(\sup_{x\in K} \left\|S_{n(k)}(x)\right\|\right) \geq \epsilon.$$

Die Kompaktheit von K und Stetigkeit aller Abbildungen $(K \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \left\|S_{n(k)}(x)\right\|)_{k\in\mathbb{N}}$ impliziert nun:

$$\exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} : \forall k \in \mathbb{N} : \quad \left\|S_{n(k)}(x_k)\right\| = \left(\sup_{x\in K} \left\|S_{n(k)}(x)\right\|\right).$$

Aus der Folgenkompaktheit von K, angewandt auf die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, folgt die Existenz einer in K konvergenten Teilfolge, $x_{k(l)} \xrightarrow{l\mapsto\infty} x^*$ für ein $x^* \in K$, mit der Eigenschaft:

$$\forall l \in \mathbb{N} : \quad \left\|S_{n(k(l))}(x_{k(l)})\right\| \geq \epsilon.$$

Damit erhalten wir aber den folgenden Widerspruch:

$$\begin{aligned} 0 < \epsilon &\leq \left\|S_{n(k(l))}(x_{k(l)})\right\| \\ &\leq \left\|S_{n(k(l))}(x_{k(l)} - x^*)\right\| + \left\|S_{n(k(l))}(x^*)\right\| \\ &\leq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n\|\right) \cdot \left\|x_{k(l)} - x^*\right\| + \left\|S_{n(k(l))}(x^*)\right\| \xrightarrow{l\mapsto\infty} 0. \end{aligned}$$

$\square$

$\blacksquare$

Um Satz 2.2.2 anwenden zu können, muss insbesondere $\|(\mathrm{id} - P_n) \circ T\| \xrightarrow{n\mapsto\infty} 0$ erfüllt sein. Wir geben nun Voraussetzungen, unter denen dies der Fall ist.

2.2.4 Lemma.
Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $T \in \mathcal{B}(X)$ ein linearer, stetiger Operator. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $X_n \leq X$ ein abgeschlossener Unterraum und $P_n : X \longrightarrow X$ eine Projektion auf X_n. Dann ist jede der folgenden Bedingungen hinreichend für $\|(\mathrm{id} - P_n) \circ T\| \xrightarrow{n\mapsto\infty} 0$:

(i) Für alle hinreichend großen $n \geq n_0$ gilt $\|P_n\| < \infty$ und:

$$\exists C_n > 0 : \quad \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\mathrm{dist}(T(x), X_n)}{\|x\|} \leq C_n < \infty.$$

Die Konstanten $(C_n)_{n\geq n_0}$ erfüllen $C_n \cdot \|P_n\| \xrightarrow{n\mapsto\infty} 0$

(ii) T ist kompakter Operator, für alle hinreichend großen $n \geq n_0$ gilt $\|P_n\| < \infty$ und:

$$\forall x \in X : \quad \|(\mathrm{id} - P_n)(x)\| \xrightarrow{n\mapsto\infty} 0.$$

Beweis.
Schritt 1: ad (i)

Sei $n \geq n_0$. Für alle $X_n \neq \{0\}$ gilt sicherlich:

$$\|P_n\| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|P_n(x)\|}{\|x\|} \geq \sup_{x\in X_n\setminus\{0\}} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

Wir erhalten also für beliebige $y \in X$:

$$\begin{aligned}
\|(\mathrm{id} - P_n)(y)\| &= \inf_{x_n \in X_n} \|(\mathrm{id} - P_n)(y) - x_n + x_n\| \\
&\leq \inf_{x_n \in X_n} \Big(\|y - x_n\| + \|P_n(y - x_n)\| \Big) \\
&\leq (1 + \|P_n\|) \cdot \mathrm{dist}(y, X_n) \\
&\leq 2 \cdot \|P_n\| \cdot \mathrm{dist}(y, X_n).
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun schon die behauptete Konvergenz:

$$\begin{aligned}
\|(\mathrm{id} - P_n) \circ T\| &= \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|((\mathrm{id} - P_n) \circ T)(x)\|}{\|x\|} \\
&\leq 2 \cdot \|P_n\| \cdot \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\mathrm{dist}(T(x), X_n)}{\|x\|} \\
&\leq 2 \cdot \|P_n\| \cdot C_n \xrightarrow{n \mapsto \infty} 0.
\end{aligned}$$

□

Schritt 2: ad (ii)
Sei $n \geq n_0$. Dann gilt klarerweise $\|\mathrm{id} - P_n\| \leq 1 + \|P_n\| < \infty$ und daher wegen der Voraussetzung $(\forall x \in X : \|(\mathrm{id} - P_n)(x)\| \xrightarrow{n \mapsto \infty} 0)$ und Lemma 2.2.3 auch:

$$\forall K \subseteq X \text{ kompakt}: \quad \sup_{x \in K} \|(\mathrm{id} - P_n)(x)\| \xrightarrow{n \mapsto \infty} 0.$$

Die Kompaktheit von T bedeutet gerade, dass $\overline{T(K_1(0))}$ in X kompakt ist. Dabei bezeichne $K_1(0) := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel um die Null. Wir haben also:

$$\|(\mathrm{id} - P_n) \circ T\| = \sup_{x \in K_1(0)} \|((\mathrm{id} - P_n) \circ T)(x)\| \leq \sup_{y \in \overline{T(K_1(0))}} \|(\mathrm{id} - P_n)(y)\| \xrightarrow{n \mapsto \infty} 0.$$

□

■

Literatur

[KVZ+72] M. A. Krasnosel′skiĭ, G. M. Vaĭnikko, P. P. Zabreĭko, Ya. B. Rutitskii, and V. Ya. Stetsenko. *Approximate solution of operator equations*. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1972. Translated from the Russian by D. Louvish.