BACHELORARBEIT

Darstellung eines hyponormalen Operators mithilfe der Hilberttransformation

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.
Michael Kaltenbäck

durch

Sebastian Bittner
Matrikelnummer: 11776808

Wien, am 16.11.2020

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 16.11.2020

Name des Autors

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ein normaler Operator S auf einem Hilbertraum kann bekanntlich durch die Gleichung $S^*S - SS^* = 0$ charakterisiert werden. Für hyponormale Operatoren wird diese Bedingung etwas abgeschwächt, $S^*S - SS^*$ muss nur ein positiver Operator sein. Eine noch etwas allgemeinere Klasse sind seminormale Operatoren, die dadurch charakterisiert sind, dass $S^*S - SS^*$ oder $SS^* - S^*S$ positiv ist. 1970 stellte C. R. Putnam fest, dass das Spektrum jedes nichtnormalen seminormalen Operators positives Lebesguemaß besitzt. Das führte dazu, dass im folgenden Jahrzehnt vermehrt an seminormalen Operatoren geforscht wurde und einige weitere tiefliegende Resultate von verschiedenen Autoren gefunden wurden. Ein solches Resultat wird in dieser Arbeit speziell aufgearbeitet.
Das Ziel dieser Arbeit ist es, einen hyponormalen Operator S auf einem Hilbertraum in einer bestimmten Weise darzustellen. Dabei wird der ursprüngliche Raum H des Operators in zwei Räume $H_1 \oplus H_2$ aufgeteilt und $S|_{H_1}$ und $S|_{H_2}$ werden jeweils auf einem sogenannten direkten Integralraum dargestellt. Das ist ein Hilbertraum, dessen Elemente wiederum Hilbertraum-wertige Funktionen sind. Für die Darstellung von $S|_{H_1}$ wird dabei die Hiberttransformation zuhilfe genommen.
Die auf diese Art gewonnene Darstellung bietet eine Grundlage für weitere Resultate über seminormale Operatoren, etwa den bereits erwähnten Satz von Putnam.
Die Darstellung eines hyponormalen Operators baut auf der Diagonalisierung von selbstadjungierten Operatoren auf, einer Darstellung eines solchen Operators als Multiplikationsoperator auf einem direkten Integralraum. In dieser Arbeit ist ein Satz zu finden, der für selbstadjungierte Operatoren auf einem separablen Hilbertraum die Existenz einer solchen Darstellung garantiert.
Die Arbeit beginnt mit einigen relevanten Grundresultaten aus Analysis und Funktionalanalysis und einer Einführung der Hilberttransformation. Anschließend werden direkte Hilberträume eingeführt und der Satz der Diagonalisierung von selbstadjungierten Operatoren, Satz 3.2.1, bewiesen. Der Beweis richtet sich nach [Hal13] und wurde so angepasst, dass der vorkommende Integralraum ein paar zusätzliche Eigenschaften erfüllt. Anschließend werden zerlegbare Operatoren eingeführt und ein Satz, der eine Charakterisierung von zerlegbaren Operatoren beschreibt, wurde an den Kontext dieser Arbeit angepasst. Danach folgt ein kurzer Abschnitt über den Operatorlift. Schließlich werden seminormale Operatoren eingeführt und all diese Resultate verwendet, um den Satz über die Darstellung eines hyponormalen Operators, Satz 4.2.1, zu beweisen.
Für diese Arbeit werden grundsätzliche Kenntnisse der Funktionalanalysis vorausgesetzt, insbesondere über beschränkte Operatoren auf Hilberträumen. Es werden ohne Verweis Notation und Resultate aus [WKB19] verwendet.
In dieser Arbeit bezeichnet H immer einen Hilbertraum über dem Skalarkörper $\mathbb{C}$ mit dem Skalarprodukt $(.,.)$, das im linken Argument linear und im rechten semilinear ist.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden einige für diese Arbeit wesentliche Resultate aus der Analysis und Funktionalanalysis gebracht.

2.1 Reduzierende Operatoren

Seien H, H_1, H_2, H', H_1' und H_2' Hilberträume mit $H = H_1 \oplus H_2$ und $H' = H_1' \oplus H_2'$. Jeden beschränkten linearen Operator $T : H \to H'$ kann man dann in eindeutiger Weise in Blockmatrix-Form

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$

mit den beschränkten Operatoren $T_{11} : H_1 \to H_1'$, $T_{12} : H_2 \to H_1'$, $T_{21} : H_1 \to H_2'$, $T_{22} : H_2 \to H_2'$ schreiben. Das bedeutet, dass wenn man ein $x \in H$ gemäß der Zerlegung $H = H_1 \oplus H_2$ als $x = x_1 + x_2$ schriebt, dann $Tx = \underbrace{T_{11}x_1 + T_{12}x_2}_{\in H_1'} + \underbrace{T_{21}x_1 + T_{22}x_2}_{\in H_2'}$. Hat der Operator T die Matrixform

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix},$$

gilt also $T_{12} = T_{21} = 0$, so schreiben wir $T = T_{11} \oplus T_{22}$.

2.1.1 Definition. Sei T ein beschränkter linearer Operator auf H. Einen Unterraum $H_1 \leq H$ bezeichnet man als T-*invariant*, falls $T(H_1) \subseteq H_1$. Ist zusätzlich H_1 abgeschlossen und ist auch $H_1^\perp$ T-invariant, so bezeichnet man H_1 als T-*reduzierend*.
Das bedeutet, dass T die Matrixform

$$T = \begin{pmatrix} T|_{H_1} & 0 \\ 0 & T|_{H_1^\perp} \end{pmatrix}$$

hat, also $T = T|_{H_1} \oplus T|_{H_1^\perp}$.

2.1.2 Lemma. Ein T-invarianter, abgeschlossener Unterraum $H_1 \leq H$ ist genau dann T-reduzierend, wenn er T^*-invariant ist. Ist in diesem Fall T zusätzlich bijektiv, so ist H_1 auch T^{-1}-reduzierend. Insbesondere ist für ein selbstadjungiertes T ein T-invarianter und abgeschlossener Unterraum automatisch T-reduzierend.

Beweis. Sei H_1 T-reduzierend. Für $x \in H_1, y \in H_1^\perp$ gilt $(T^*x, y) = (x, Ty) = 0$, also $T^*x \perp H_1^\perp$ und damit $T^*x \in H_1$.

Ist andererseits H_1 unter T^* invariant, so gilt nach derselben Rechnung, dass $H_1^\perp$ T-invariant, und damit H_1 T-reduzierend ist.
Schließlich sei H_1 T-reduzierend und T bijektiv. Zu $y \in H_1$ gibt es $x_1 \in H_1$ und $x_2 \in H_1^\perp$ mit $T(x_1 + x_2) = y$. Da H_1 den Operator T reduziert, gilt $Tx_1 \in H_1$ und $Tx_2 \in H_1^\perp$, womit $Tx_2 = 0$. Insgesamt gilt $T^{-1}y = x_1 \in H_1$, also ist H_1 unter T^{-1} invariant. Genauso sieht man, dass $H_1^\perp$ unter T^{-1} invariant ist.

2.2 Unendliche orthogonale Summen

2.2.1 Definition. Sei $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Hilberträumen. Dann bezeichnet

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$$

die Menge aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die

- $x_n \in H_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und
- $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{H_n}^2 < \infty$

erfüllen. Zudem setzen wir für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$

$$((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y_n)_{H_n}.$$

Aus $\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n + \beta_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2} + \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |\beta_n|^2}$ für Folgen $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}$ schließen wir darauf, dass $\bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$ ein Vektorraum und $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| := \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2}$ eine Norm darauf ist. Man zeigt elementar, dass $\|.\|$ vollständig ist. Wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung angewendet auf $(.,.)_{H_n}$ und $(.,.)_{\ell^2(\mathbb{C})}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y_n)_{H_n}$ absolut konvergent. Man zeigt auch leicht, dass $(.,.)$ ein Skalarprodukt abgibt, das $\|.\|$ als Norm induziert. Insbesondere ist $\bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$ ein Hilbertraum.
Sind $H_n, n \in \mathbb{N}$, paarweise orthogonale, abgeschlossene Unterräume eines Hilbertraums H, so ist durch $(x_1, x_2, ...) \mapsto x_1 + x_2 + ...$ ein isometrischer Isomorphismus von $\bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$ auf $cls\{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\}$ definiert. In weiterer Folge werden diese beiden Räume miteinander identifiziert.

2.3 Differenzieren und Integrieren

In diesem Abschnitt werden ein paar Resultate zum Differenzieren und Integrieren von vektorraumwertigen Funktionen erläutert. Der Beweis von Lemma 2.3.3 richtet sich nach [Anoa].

2.3.1 Lemma. Sei $G \subseteq \mathbb{R}$ offen und $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra. Sind $f, g : G \to \mathcal{A}$ differenzierbar an einem Punkt $t \in G$, dann ist es auch $f \cdot g$, wobei

$$(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t).$$

Beweis. Wegen der Differenzierbarkeit ist g am Punkt t stetig und damit gilt $\lim_{h\to 0} g(t+h) = g(t)$. Es folgt

$$\begin{aligned}(fg)'(t) = & \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)g(t+h) - f(t)g(t)}{h} \\ = & \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)g(t+h) - f(t)g(t+h) + f(t)g(t+h) - f(t)g(t)}{h} \\ = & \lim_{h\to 0} \frac{(f(t+h) - f(t))g(t+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(t)(g(t+h) - g(t))}{h} = f'(t)g(t) + f(t)g'(t).\end{aligned}$$

□

2.3.2 Lemma. Ist $f : [a, b] \to H$ (Riemann-) integrierbar und $y \in H$, dann ist es auch $(f(.), y)_H$ und es gilt

$$\left(\int_a^b f(t)\ dt, y\right) = \int_a^b (f(t), y)\ dt.$$

Ist f differenzierbar an einem Punkt $t \in [a, b]$, dann ist es auch $(f(.), y)_H$ und es gilt

$$(f'(t), y) = \frac{d}{dt}(f(t), y).$$

Beweis.

$$\left(\int_a^b f(t)\ dt, y\right)_H = \left(\lim_{\mathcal{R}\in\Re} \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} (\xi_j - \xi_{j-1}) f(\alpha_j), y\right)_H =$$

$$\lim_{\mathcal{R}\in\Re} \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} (\xi_j - \xi_{j-1})(f(\alpha_j), y)_H = \int_a^b (f(t), y)_H\ dt.$$

Dabei bezeichnet $\Re$ die Menge aller Riemann-Zerlegungen von $[a, b]$, $\xi_0, ..., \xi_{n(\mathcal{R})}$ die Stützstellen und $\alpha_1, ..., \alpha_{n(\mathcal{R})}$ die Zwischenstellen der jeweiligen Riemann-Zerlegung.
Die zweite Aussage gilt wegen

$$(f'(t), y) = \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, y\right) = \lim_{h\to 0} \frac{(f(t+h), y) - (f(t), y)}{h} = \frac{d}{dt}(f(t), y).$$

□

Als letztes möchten wir noch ein Resultat bringen, das eine Art Analogon zum Satz der monotonen Konvergenz für positive Operatoren ist. Dabei bezeichnet man einen Operator $T \in L_b(H)$ als positiv, falls $(Tx, x) \geq 0$ für alle $x \in H$. Das ist bekanntlich äquivalent zu der Tatsache, dass T selbstadjungiert ist und $\sigma(T) \subseteq [0, +\infty)$ gilt.

2.3.3 Lemma. Sei $A : \mathbb{R} \to L_b(H)$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung $A' : \mathbb{R} \to L_b(H)$ und $\|A(t)\| \leq C, t \in \mathbb{R}$. Ist $A'(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ein positiver Operator, dann existieren die Limiten

$$\lim_{t\to+\infty} A(t) \quad \text{und} \quad \lim_{t\to-\infty} A(t)$$

in $L_b(H)$ im Sinne der starken Operatortopologie.

Beweis. Für $s \in \mathbb{R}^+$ und $a \in H$ gilt wegen Lemma 2.3.2

$$0 \leq \int_0^s (A'(t)a, a)\ dt = \int_0^s \frac{d}{dt}(A(t)a, a)\ dt = (A(s) - A(0)a, a) \leq 2C \cdot \|a\|^2.$$

Wegen $(A'(t)a, a) \geq 0$ existiert daher das folgende uneigentliche Riemann-Integral und es gilt

$$\int_0^{+\infty} (A'(t)a, a)\ dt \leq 2C \cdot \|a\|^2.$$

Nach der Polarformel, angewandt auf die Sesquilinearform $(A'(t)., .)$, gilt für alle $x, y \in H$

$$\begin{aligned}\left|\int_{s_1}^{s_2} (A'(t)x, y)\ dt\right| &= \left|\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\int_{s_1}^{s_2} i^k(A'(t)x + i^k y, x + i^k y)\ dt\right| \\ &\leq \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\left|\int_{s_1}^{s_2} (A'(t)x + i^k y, x + i^k y)\ dt\right| \xrightarrow{s_1, s_2 \to +\infty} 0,\end{aligned}$$

womit auch $\int_0^{+\infty}(A'(t)x, y)\ dt$ existiert. Man erkennt auf elementare Weise, dass $\int_0^{+\infty}(A'(t)., .)\ dt$ eine Sesquilinearform auf H darstellt, die wegen

$$\left|\int_0^s (A'(t)x, y)\ dt\right| = |(A(s) - A(0)x, y)| \leq 2C\|x\|\|y\|, \qquad x, y \in H, s \in \mathbb{R}$$

beschränkt ist. Nach dem Satz von Lax-Milgram gibt es ein $T \in L_b(H)$ mit $\|T\| \leq 2C$ derart, dass

$$(Tx, y) = \int_0^{+\infty} (A'(t)x, y)\ dt, \qquad x, y \in H.$$

Für $s \geq 0$ ist auch der Operator

$$R(s) := T - \int_0^s A'(t)\ dt = T + A(0) - A(s)$$

wegen $(R(s)a, a) = \int_s^{+\infty}(A'(t)a, a)\ dt,\ a \in H$ positiv. In Folge existiert eine eindeutige positive Quadratwurzel von $R(s)$; siehe [WKB19, Beispiel 7.2.7]. Diese bezeichnen wir mit $\sqrt{R(s)}$. Aus $\|R(s)\| \leq 4C$ folgt $\|\sqrt{R(s)}\| \leq \sqrt{4C}$ und somit für $x \in H$

$$\|(T + A(0) - A(s))x\|^2 = \|R(s)x\|^2 \leq \|\sqrt{R(s)}\|^2\|\sqrt{R(s)}x\|^2 \leq 4C(R(s)x, x) \xrightarrow{s \to +\infty} 0.$$

$A(s)$ konvergiert also für $s \to +\infty$ gegen $A(0) + T$ im Sinne der starkten Operatortopologie. Wendet man diese Überlegungen auf $(t \mapsto -A(-t))$ an, so erhält man die Existenz von $\lim_{t \to -\infty} A(t)$.

2.4 Die Hilberttransformierte auf $L^2(\mathbb{R})$

Die Definition der Hilberttransformierten richtet sich nach [Cla79, Seite 11].

2.4.1 Definition. Für eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \lambda)$ ist die *Hilberttransformierte* Q definiert durch

$$Qf(x) := \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-x}\, dt := \frac{1}{\pi i} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{[|t-x|>\epsilon]} \frac{f(t)}{t-x}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Es ist keinesfalls trivial, dass dieser Limes fast überall existiert, und dass die resultierende Funktion wieder quadratisch integrierbar ist. In der Tat gelten folgende Aussagen. Für einen Beweis wird auf [Duo01, Theorem 3.3] verwiesen.

2.4.2 Satz. Die in (2.1) definierten Limiten existieren für λ-fast alle x und Qf stimmt für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $F^* M_{sgn} F f$ überein, wobei M_{sgn} den Multiplikationsoperator mit $sgn(t)$ und F die Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R})$ bezeichnet.

$Q = F^* M_{sgn} F$ ist als Zusammensetzung von unitären Operatoren wieder ein solcher. Wir erhalten

2.4.3 Korollar. Die Hilberttransformation ist ein unitärer linearer Operator auf $L^2(\mathbb{R})$.

2.4.4 Bemerkung. In der Literatur, etwa in [Duo01], ist die Hilberttransformierte manchmal mit dem Faktor $\frac{1}{\pi}$ statt $\frac{1}{i\pi}$ definiert.

2.5 Symbole und Friedrichs-Gamma-Operatoren

Dieser Abschnitt richtet sich nach [Cla79, Section 2.1].

2.5.1 Definition. Sei A ein fester selbstadjungierter, beschränkter Operator auf H. Dann sind die *Symbole* $S_A^{\pm}(T)$ des Operators $T \in L_b(H)$ bzgl. A definiert durch

$$S_A^{\pm}(T) := \lim_{t \to \pm\infty} e^{itA} T e^{-itA}, \tag{2.2}$$

falls diese Grenzwerte in $L_b(H)$ im Sinne der starken Operatortopologie existieren.
Die *Friedrichs-Γ-Operatoren* von T bzgl. A sind definiert durch

$$\Gamma_A^{\pm}(T) := \pm \int_0^{\pm\infty} e^{itA} T e^{-itA}\, dt := \lim_{s \to \pm\infty} \pm \int_0^{\pm s} e^{itA} T e^{-itA}\, dt, \tag{2.3}$$

falls diese Limiten in $L_b(H)$ im Sinne der starken Operatortopologie existieren. Es sei angemerkt, dass in (2.2) und (2.3) jeweils zwei Operatoren definiert werden, einer für + und einer für -.

2.5.2 Proposition. Seien $A, T \in L_b(H)$.

(i) Falls $S_A^{\pm}(T)$ existiert, dann gilt $AS_A^{\pm}(T) = S_A^{\pm}(T)A$.

(ii) Existieren $S_A^{\pm}(T)$ und $S_A^{\pm}(T^*)$, so gilt $S_A^{\pm}(T^*) = [S_A^{\pm}(T)]^*$. Insbesondere ist für selbstadjungiertes T auch $S_A^{\pm}(T)$ selbstadjungiert.

Beweis.

(i) Für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in H$ gilt

$$e^{i\lambda A}[e^{itA}Te^{-itA}]x = [e^{i(t+\lambda)A}Te^{-i(t+\lambda)}]e^{i\lambda A}x.$$

Nimmt man auf beiden Seiten den Limes gegen $\pm\infty$, so erhält man $e^{i\lambda A}S_A^{\pm}(T)x = S_A^{\pm}(T)e^{i\lambda A}x$. Differenziert man auf beiden Seiten nach λ, so folgt $iAe^{i\lambda A}S_A^{\pm}(T)x = S_A^{\pm}(T)iAe^{i\lambda A}x$. Für $\lambda = 0$ erhalten wir schließlich $AS_A^{\pm}(T) = S_A^{\pm}(T)A$.

(ii) Für $x, y \in H$ gilt

$$\begin{aligned}(S_A^{\pm}(T^*)x, y) &= (\lim_{t\to\pm\infty} e^{itA}T^*e^{-itA}x, y) = \lim_{t\to\pm\infty}((e^{itA}Te^{-itA})^*x, y) \\ &= \lim_{t\to\pm\infty}(x, e^{itA}Te^{-itA}y) = (x, S_A^{\pm}(T)y),\end{aligned}$$

womit $[S_A^{\pm}(T)]^* = S_A^{\pm}(T^*)$. Für selbstadjungiertes T folgt dann $[S_A^{\pm}(T)]^* = S_A^{\pm}(T^*)$ $= S_A^{\pm}(T)$.

□

Der folgende Satz garantiert unter bestimmten Bedingungen die Existenz der Grenzwerte aus Definition 2.5.1.

2.5.3 Satz. Seien X, Y und D beschränkte selbstadjungierte Operatoren auf H, für die

$$i(XY - YX) = D^2$$

gilt. Dann existieren $S_X^{\pm}(Y)$ und $\Gamma_X^{\pm}(D^2)$, wobei

$$Y = S_X^{\pm}(Y) \mp \Gamma_X^{\pm}(D^2).$$

Beweis. Mithilfte der Produktregel für Banachalgebren aus Lemma 2.3.1 erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{itX}Ye^{-itX}) &= (e^{itX}iXYe^{-itX}) + (e^{itX}Y(-iX)e^{-itX}) \\ &= e^{itX}i(XY - YX)e^{-itX} = e^{itX}D^2e^{-itX} = (De^{itX})^*De^{itX}.\end{aligned}$$

Der Operator auf der rechten Seite ist offensichtlich positiv und die Norm von $e^{itX}Ye^{-itX}$ ist durch $\|Y\|$ beschränkt. Somit existiert gemäß Satz 2.3.3

$$\lim_{t\to\pm\infty} e^{itX}Ye^{-itX} = S_X^{\pm}(Y).$$

Nach dem Hauptsatz für Differential- und Integralrechnung gilt für $s \in \mathbb{R}$

$$e^{isX}Ye^{-isX} - Y = \int_0^s e^{itX}D^2e^{-itX}\, dt.$$

Bildet man auf beiden Seiten den Limes gegen $\pm\infty$, so erhält man die Existenz von $\Gamma_X^{\pm}(D^2)$, wobei $S_X^{\pm}(Y) = Y \pm \Gamma_X^{\pm}(D^2)$. □

3 Hilbertraum-wertige L^2- und direkte Integralräume

Wir wollen eine gewisse Klasse von Hilberträumen kennen lernen, deren Elemente Hilbertraum-wertige Funktionen sind. Wir werden im späteren Verlauf sehen, dass diese Räume uns dabei helfen, einen auf einem separablen Hilbertraum definierten selbstadjungierten Operator darzustellen.

3.1 Definition

Definitionen 3.1.2 und 3.1.3 orientieren sich an [Sch18, Abschnitt 10.1], Definition 3.1.7 an [Hal13, Definition 7.18]. Der Beweis von Satz 3.1.9 ist angelehnt an [Anob] und [Kus11, Satz 13.16].

3.1.1 Bemerkung. Ein Hilbertraum H ist genau dann separabel, wenn er eine höchstens abzählbare Orthonomalbasis besitzt.

3.1.2 Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Ist für ein $f : \Omega \to H$ die Abbildung $(f(.), a)_H$ für alle $a \in H$ messbar bzgl. $\mathcal{A}$ und der Borel-Sigmaalgebra auf $\mathbb{C}$, so bezeichnet man f als *schwach messbar*.

Ist H separabel, so ist für schwach messbare $f, g : \Omega \to H$ auch $t \mapsto (f(t), g(t))_H$ messbar. Ist nämlich $(\psi_i)_{i \in I}$ eine abzählbare Orthonormalbasis von H, so sind $f_i(.) := (f(.), \psi_i)$ und $g_i(.) := (g(.), \psi_i)$ messbar für alle i und damit ist auch $(f(.), g(.))_H = \sum_{i \in I} f(.)_i \overline{\hat{g}(.)_i}$ als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen messbar. Wählt man $f = g$, so ist auch $\|f(.)\|^2 = (f(.), f(.))$ messbar.

3.1.3 Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und H ein separabler Hilbertraum. Dann ist $L^2(\Omega, \mu, H)$ definiert als die Menge der Funktionen $f : \Omega \to H$ mit

- f ist schwach messbar,
- $\int_\Omega \|f(t)\|_H^2 \, d\mu(t) < +\infty$.

Wir definieren auf diesem Raum

$$(f, g) := \int_\Omega (f(t), g(t))_H \, d\mu(t). \tag{3.1}$$

Wir werden sehen, dass $(.,.)$ ein Skalarprodukt ist. Wie üblich identifizieren wir zwei Funktionen aus $L^2(\Omega, \mu, H)$, wenn sie μ-fast überall übereinstimmen.

Wie wir oben gesehen haben, ist $(f(.), g(.))_H$ messbar. Da außerdem

$$\begin{aligned}\int_\Omega |(f(t), g(t))_H| \, d\mu(t) &\leq \int_\Omega \|f(t)\|_H \|g(t)\|_H \, d\mu(t) \\ &\leq \sqrt{\int_\Omega \|f(t)\|_H^2 \, d\mu(t)} \sqrt{\int_\Omega \|g(t)\|_H^2 d\mu(t)} < +\infty,\end{aligned}$$

ist der Ausdruck in (3.1) wohldefiniert.
Durch elementares Nachrechnen erhält man

3.1.4 Lemma. $L^2(\Omega, \mu, H)$ ist ein Vektorraum und (3.1) ist ein Skalarprodukt darauf.

3.1.5 Bemerkung. Die vom Skalarprodukt induzierte Norm ist durch

$$\|f\| = \sqrt{\int_\Omega \|f(t)\|_H^2 \, d\mu(t)} = \| \|f(.)\|_H \|_{L^2(\Omega,\mu,\mathbb{R})}$$

gegeben.

3.1.6 Lemma. Für einen σ-endlichen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und einen separablen Hilbertraum H ist eine Funktion $f : \Omega \to H$ genau dann schwach messbar, wenn $t \mapsto (f(t), g(t))_H$ messbar ist für alle $g \in L^2(\Omega, \mu, H)$.

Beweis. Dass aus der schwachen Messbarkeit von f die von $t \mapsto (f(t), g(t))$ folgt, haben wir bereits vor Definition 3.1.3 gesehen. Für die Umkehrung sei $(C_N)_{N\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Mengen in $\mathcal{A}$ mit $\mu(C_N) < +\infty$, $N \in \mathbb{N}$, und $\bigcup_N C_N = \Omega$. Für $x \in H$ liegt $\mathbb{1}_{C_N}(.)x$ in $L^2(\Omega, \mu, H)$ und damit ist $(f(.), x) = \lim_{N\to\infty}(f(.), \mathbb{1}_{C_N}(.)x)$ messbar.

3.1.7 Definition. Sei H ein separabler Hilbertraum, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $((H(t))_{t\in\Omega}$ eine Familie von abgeschlossenen Unterräumen von H. Dann ist

$$\int_\Omega \oplus H(t) \, d\mu(t) \tag{3.2}$$

definiert als die Menge der $f \in L^2(\Omega, \mu, H)$ derart, dass $f(t) \in H(t)$ $\mu - f\ddot{u}$. Wir bezeichnen (3.2) als *direkten Integralraum.*

Klarerweise ist (3.2) ein Unterraum von $L^2(\Omega, \mu, H)$.

3.1.8 Bemerkung. Sei $\{0\} =: H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq ... \leq H_\infty := H$ eine Folge von abgeschlossenen Unterräumen von H mit $\dim H_k = k$ für $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} H_n} = H$. Sei weiters $n : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit $\{t \in \Omega : n(t) = k\} \in \mathcal{A}$. Betrachte nun den direkten Integralraum

$$\int_\Omega \oplus H(t) \, d\mu(t)$$

mit $H(t) := H_{n(t)}$. In der Literatur, etwa in [Cla79], wird oft gefordert, dass ein Integralraum von dieser Bauart ist.

3.1.9 Satz. Der Vektorraum $L^2(\Omega, \mu, H)$ zusammen mit dem Skalarprodukt (3.1) ist ein Hilbertraum und ein wie in (3.2) definierter Raum ist ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\Omega, \mu, H)$.

Beweis. Dass $L^2(\Omega,\mu,H)$ ein Raum mit innerem Produkt ist, haben wir bereits in Lemma 3.1.4 gesehen. Es bleibt nur die Vollständigkeit von $L^2(\Omega,\mu,H)$ bzw. $\int_\Omega \oplus H(t)\ d\mu(t)$ zu zeigen. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in einem dieser Räume. Wähle eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ derart, dass $\|f_i - f_j\| < 2^{-k}$ für $i,j \geq n_k$. Für jedes $t \in \Omega$ ist $(\sum_{k=1}^N \|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\|)^2$ monoton wachsend in N und konvergiert daher für $N \to \infty$ gegen $F_t \in [0,+\infty]$. Wegen

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\sum_{k=1}^N \|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\|_H)^2\ d\mu(t) &= \left\| \sum_{k=1}^N \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_H \right\|^2_{L^2(\Omega,\mu,\mathbb{R})} \\ &\leq (\sum_{k=1}^N \|\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_H\|_{L^2(\Omega,\mu,\mathbb{R})})^2 \\ &= (\sum_{k=1}^N \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|)^2 \leq ((\sum_{k=1}^N 2^{-k}))^2 \leq 1\end{aligned}$$

gilt $F_t < +\infty$ für fast alle t, da andernfalls nach dem Satz der monotonen Konvergenz

$$\lim_{N\to\infty} \int_\Omega (\sum_{k=1}^N \|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\|_H)^2\ d\mu(t) = \int_\Omega F_t\ d\mu(t) = +\infty.$$

Folglich konvergiert $\sum_{k=1}^\infty (f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t))$ für fast alle t absolut. Also existiert $f_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^\infty (f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(t) =: f(t)$ fast überall. Da $f_{n_k}(t)$ für $k \in \mathbb{N}$ in H bzw. $H(t)$ liegt, gilt das auch für $f(t)$.
Sei nun $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\|f_n - f_{n_k}\| \leq \epsilon$ für $n_k, n \geq N$, wodurch auch $\liminf_{k\to\infty} \|f_n - f_{n_k}\| \leq \epsilon$ für $n \geq N$. Nach dem Lemma von Fatou (siehe [Kus11, Folgerung 9.32]) folgt

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|f_n(t) - f(t)\|_H^2\ dt &= \int_\Omega \liminf_{k\to\infty} \|f_n(t) - f_{n_k}(t)\|_H^2\ dt \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \|f_{n_k}(t) - f_n(t)\|_H^2\ dt = \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_n\|^2 \leq \epsilon^2,\end{aligned}$$

weshalb $\lim_{n\to\mathbb{N}} \|f_n - f\| = 0$. Insgesamt sind sowohl $L^2(\Omega,\mu,H)$ als auch $\int_\Omega \oplus H(t)\ d\mu(t)$ Hilberträume, womit letzterer ein abgeschlossener Unterraum ist.

3.1.10 Bemerkung. Ist $(\Omega_1,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum, $\Omega_2 \in \mathcal{A}$ und $\{t \in \Omega_1 : H(t) \neq \{0\}\} \setminus \Omega_2$ eine μ-Nullmenge, dann sind

$$\int_{\Omega_1} H(t)\ d\mu(t) \text{ und } \int_{\Omega_2} H(t)\ d\mu(t)$$

isometrisch isomorph vermöge der unitären Abbildung $f \mapsto f|_{\Omega_2}$.

3.2 Diagonalisierung von selbstadjungierten Operatoren

Wir wollen in diesem Abschnitt einen beliebigen selbstadjungierten Operator auf einem separablen Hilbertraum durch einen Multiplikationsoperator auf einem direkten Integralraum darstellen. Der Abschnitt richtet sich nach [Hal13, Kapitel 8.2].

3.2.1 Satz. Sei $A \in L_b(H)$ ein selbstadjungierter Operator auf einem separablen Hilbertraum H. Dann existiert ein endliches Borelmaß μ auf $\sigma(A)$, ein direkter Integralraum

$$\tilde{H} := \int_{\sigma(A)} \oplus H(t)\; d\mu(t),$$

der die zusätzlichen Bedingungen aus Bemerkung 3.1.8 erfüllt und eine unitäre Abbildung $U : H \to \tilde{H}$ derart, dass

$$UAU^* = \Lambda,$$

wobei

$$\Lambda := \begin{cases} \tilde{H} & \to \quad \tilde{H}, \\ h & \mapsto \quad (t \mapsto th(t)). \end{cases} \tag{3.3}$$

Für den Beweis dieses Satzes brauchen wir einige Hilfsresultate.

3.2.2 Bemerkung. Setzen wir für ein Spektralmaß E auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$, $E_{g,h}(\Delta) := (E(\Delta)g, h)$ für $g, h \in H$, so ist $E_{g,h}$ ein komplexes Maß auf $\mathcal{A}$, das für $g = h$ sogar nichtnegativ ist.

3.2.3 Lemma. Sei $A \in L_b(H)$ selbstadjungiert und R ein A-reduzierender Unterraum von H. Seien E^A und $E^{A|_R}$ die Spektralmaße zu A bzw. $A|_R$. Dann gilt $\sigma(A|_R) \subseteq \sigma(A)$. Außerdem gilt für eine beliebige Borelmenge $\Delta \subseteq \sigma(A|_R)$, dass $E^{A|_R}(\Delta) = P_R E^A(\Delta)|_R$, wobei P_R die orthogonale Projektion auf R bezeichnet.

Beweis. Wir zeigen $\rho(A|_R) \supseteq \rho(A)$. Für $\lambda \in \rho(A)$ ist der lineare Operator $(A-\lambda I)$ bijektiv. R ist $(A - \lambda I)$-reduzierend und damit wegen Lemma 2.1.2 auch $(A - \lambda I)^{-1}$-reduzierend. Folglich sind folgende Ausdrücke wohldefiniert und es gilt für alle $x \in R$

$$(A - \lambda I)|_R (A - \lambda I)^{-1}|_R x = (A - \lambda I)(A - \lambda I)^{-1} x = x,$$
$$(A - \lambda I)^{-1}|_R (A - \lambda I)|_R x = (A - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I) x = x,$$

also $\lambda \in \rho(A|_R)$.
Für den zweiten Teil definieren wir das R-wertige Spektralmaß

$$\tilde{E}(\Delta) := P_R E^A(\Delta)|_R.$$

auf $\sigma(A)$. Die Spektralmaßeigenschaften folgen leicht aus der Tatsache, dass P_R mit A und folglich auch mit allen $E^A(\Delta)$ kommutiert. Für $g, h \in R$ gilt $\tilde{E}_{g,h}(\Delta) = (P_R E^A(\Delta)g, h) = (E^A(\Delta)P_R g, h) = E^A_{g,h}(\Delta)$, und damit

$$\int_{\sigma(A)} t\; d\tilde{E}_{g,h} = \int_{\sigma(A)} t\; dE^A_{g,h} = (Ag, h) = (A|_R g, h) = \int_{\sigma(A|_R)} t\; dE^{A|_R}_{g,h},$$

weshalb

$$\int_{\sigma(A)} t\; d\tilde{E} = A|_R = \int_{\sigma(A|_R)} t\; dE^{A|_R}.$$

Nach [WKB19, Bemerkung 7.2.4] gibt es genau ein Spektralmaß auf $\mathbb{R}$ mit $A|_R = \int_{\mathbb{R}} t \cdot \mathbb{1}_K(t)\, dE(t)$ für ein kompaktes $K \subseteq \mathbb{R}$ mit $E(\mathbb{R} \setminus K) = 0$. Also gilt $\tilde{E} = E^{A|_R}$.

3.2.4 Lemma. Sei H separabel und $A \in L_b(H)$ selbstadjungiert. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und eine Zerlegung $H = \bigoplus_{i=1}^N R_i$ derart, dass für alle $i \in \mathbb{N}, i \leq N$, der abgeschlossene Unterraum R_i den Operator A reduziert und $A|_{R_i}$ einen zyklischen Vektor ψ_i besitzt, also $cls\{\psi_i, A\psi_i, A^2\psi_i, ...\} = R_i$ gilt.

Beweis. Sei $\{\phi_j : j \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von H. Wir definieren R_i beginnend mit

$$R_1 := cls\{\phi_1, A\phi_1, A^2\phi_1, ...\}$$

induktiv. Dieser Raum ist offensichtlich A-invariant und wegen $A = A^*$ sogar A-reduzierend. Zudem ist $\psi_1 := \phi_1$ ein zyklischer Vektor für $A|_{R_1}$.
Für $i+1$ sei angenommen, dass $H_1, ..., H_i$ bereits definiert sind. Im Falle $\bigoplus_{j=1}^i R_j = H$ ist $\bigoplus_{j=1}^i R_j$ bereits die gewünschte Zerlegung und wir setzen $N := i$. Ist das nicht der Fall, so wähle das kleinste k mit $\phi_k \notin \bigoplus_{j=1}^i R_j$, das aufgrund der Dichtheit der $\phi_j's$ existieren muss. Seien $v_{i+1} \in \bigoplus_{j=1}^i R_j$ und $\psi_{i+1} \in (\bigoplus_{j=1}^i R_j)^\perp$ mit $\phi_k = v_{i+1} + \psi_{i+1}$ und setze

$$R_{i+1} := cls\{\psi_{i+1}, A\psi_{i+1}, A^2\psi_{i+1}, ...\}.$$

Dieser Unterraum ist wieder A-reduzierend und ψ_{i+1} ist ein zyklischer Vektor von $A|_{R_{i+1}}$. Da $\bigoplus_{j=1}^i R_j$ den Operator A reduziert, tut dies auch dessen orthogonales Komplement, also gilt $R_{i+1} \subseteq (\bigoplus_{j=1}^i R_j)^\perp$. Außerdem gilt $\phi_k = v_{i+1} + \psi_{i+1} \in \bigoplus_{j=1}^{i+1} R_j$.
Ist $\bigoplus_{j=1}^i R_j = H$ für kein $i \in \mathbb{N}$ erfüllt, so setzen wir $N := \infty$. $\bigoplus_{j=1}^N R_j$ enthält dann ganz $\{\phi_j : j \in \mathbb{N}\}$ und ist wegen seiner Abgeschlossenheit gleich H. Nach Konstruktion ist jeder R_i A-reduzierend und $A|_{R_i}$ besitzt einen zyklischen Vektor. □

3.2.5 Lemma. Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum mit σ-endlichen Maßen ν und μ, sei ν absolut stetig bzgl. μ und ρ die Dichte von ν bzgl. μ; vgl. Satz von Radon-Nikodym, [Kus11, Satz 11.19]. Mit $M := \rho^{-1}((0, +\infty))$ ist

$$U := \begin{cases} L^2(\Omega, \nu) & \to & L^2(M, \mu), \\ f & \mapsto & (\sqrt{\rho} f)|_M, \end{cases}$$

eine unitäre Abbildung.

Beweis. U ist klarerweise linear. Wegen

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega,\nu)} = \int_\Omega |f|^2 \, d\nu = \int_M |f|^2 \rho \, d\mu = \|(\sqrt{\rho} f)|_M\|^2_{L^2(M,\mu)}$$

ist U isometrisch. Für $f, g \in L^2(\Omega, \nu)$ mit $f = g$ ν−fü gilt deshalb auch $0 = \|f-g\|^2_{L^2(\Omega,\nu)} = \|U(f-g)\|^2_{L^2(M,\mu)}$, womit U wohldefiniert ist. Die Abbildung

$$(\tilde{U} f)(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\rho(t)}} \cdot f(t), & \text{falls } t \in M, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

von $L^2(M,\mu)$ nach $L^2(\Omega,\nu)$ ist wohldefiniert, da $\rho > 0$ auf M und $\|\tilde{U}(f-g)\|^2 = \int_M \frac{1}{\rho(t)} \cdot |(f(t)-g(t))|^2 \, d\nu(t) = \|f-g\|$ für $f,g \in L^2(M,\mu)$. Wegen $U\tilde{U} = I$ und $(\tilde{U}Uf)|_M = f|_M$ für $f \in L^2(\Omega,\nu)$ und da $\Omega \setminus M$ eine ν-Nullmenge ist, stellt $\tilde{U}$ die Inverse von U dar. U ist also unitär.

Beweis. (von Satz 3.2.1). Seien $(R_j,\psi_j)_{j=1}^N$ wie in Lemma 3.2.4 und $A_j := A|_{R_j}$. Für $j \in \mathbb{N}, j \leq N$, ist A_j ein selbstadjungierter Operator auf R_j mit dem zyklischen Vektor ψ_j. Durch Normieren können wir ψ_j so wählen, dass $\|\psi_j\| = 1$. Laut [WKB19, Kor. 7.2.10] gibt es daher eine unitäre Abbildung

$$U_j : R_j \to L^2(\sigma(A_j),\mu_j)$$

mit

$$(U_j A_j U_j^* h)(t) = th(t), \qquad h \in L^2(\sigma(A_j),\mu_j).$$

Dabei ist E_j das Spektralmaß zu A_j auf $\sigma(A_j)$ und $\mu_j := (E_j)_{\psi_j,\psi_j}$.
Auf $\sigma(A)$ definieren wir das nichtnegative Borelmaß μ durch

$$\mu(\Delta) := \sum_j \frac{\mu_j(\Delta \cap \sigma(A_j))}{2^j}.$$

Wegen Lemma 3.2.3 gilt $\mu(\sigma(A)) = \sum_j \frac{\mu_j(\sigma(A_j))}{2^j} = \sum_j \frac{(\psi_j,\psi_j)}{2^j} = 1$. Wir wollen $L^2(\sigma(A_j),\mu_j)$ unitär auf den Raum $L^2(M_j,\mu)$ mit einem bestimmten M_j abbilden. Für alle j ist μ_j klarerweise absolut stetig bzgl. $\mu|_{\sigma(A_j)}$ mit einer Dichte ρ_j. Wir können daher Lemma 3.2.5 auf μ_j und $\mu|_{\sigma(A_j)}$ anwenden und erhalten ein $M_j \subseteq \sigma(A_j)$ und den unitären Operator

$$T_j := \begin{cases} L^2(\sigma(A_j),\mu_j) & \to \quad L^2(M_j,\mu), \\ \quad f & \mapsto \quad (\sqrt{\rho_j} f)|_{M_j}. \end{cases}$$

Wir definieren $\tilde{U}_j : R_j \to L^2(M_j,\mu)$ als

$$\tilde{U}_j := T_j \circ U_j.$$

Diese Abbildung ist als Zusammensetzung unitärer Abbildungen unitär. Es gilt auch

$$\tilde{U}_j A_j \tilde{U}_j^* h(t) = T_j U_j A_j U_j^* T_j^* h(t) = \sqrt{\rho_j(t)} \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho_j(t)}} h(t) = th(t)$$

für $h \in L^2(M_j,\mu)$, $t \in M_j$. Identifizieren wir H mit $\bigoplus_{j=1}^N R_j$, so entspricht $(f_j)_{j=1}^N \mapsto (A_j f_j)_{j=1}^N$ dem Operator A auf diesem Raum. Wir definieren

$$\tilde{U} := \begin{cases} \bigoplus_{j=1}^N R_j & \to \quad \bigoplus_{j=1}^N L^2(M_j,\mu), \\ (f_1, f_2, \ldots) & \mapsto \quad (\tilde{U}_1 f_1, \tilde{U}_2 f_2, \ldots). \end{cases}$$

Da alle $\tilde{U}_j's$ unitär sind, ist es auch $\tilde{U}$, wobei

$$(\tilde{U} A \tilde{U}^*)(f_j)_{j=1}^N = (\tilde{U}_j A_j \tilde{U}_j^* f_j)_{j=1}^N = ((t \mapsto t f_j(t))_{j=1}^N. \tag{3.4}$$

Schließlich wollen wir $\bigoplus_{j=1}^N L^2(M_j,\mu)$ mit einem direkten Integralraum identifizieren. Dazu sei $H_\infty := \ell^2(\mathbb{N})$ und $H_n := \{(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell^2(\mathbb{N}) : 0 = a_{n+1} = a_{n+2} = ...\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Klarerweise gilt $dim\ H_n = n$ für alle n und $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n} = H_\infty$. Für $t \in \sigma(A)$ sei $S_t := \{j \in \mathbb{N} : j \le N, t \in M_j\}$ und $n(t) := |S_t|$, wobei hier mit $|.|$ die Mächtigkeit der Menge gemeint ist. Wegen $n^{-1}(\{m\}) = \bigcup_{I\subseteq\mathbb{N},|I|=m}(\bigcap_{j\in I} M_j \cap \bigcap_{j\in I^c} M_j^c)$ für $m \in \mathbb{N}_0$ und $n^{-1}(\{\infty\}) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}}\bigcup_{j=i}^\infty M_j$ sind diese Mengen Borelmengen und

$$\tilde{H} := \int_{\sigma(A)} \oplus H(t)\ d\mu(t)$$

mit $H(t) := H_{n(t)}$ erfüllt die Bedingungen aus Bemerkung 3.1.8.
Für $t \in \sigma(A)$ und $j \in \mathbb{N}, j \le n(t)$ sei $i_t(j)$ die j-niedrigste Zahl in S_t. i_t stellt also eine monotone Bijektion von $\{1, ..., n(t)\}$ auf S_t dar.
Betrachte die Abbildung

$$\Psi := \left\{ \begin{array}{ccc} \bigoplus_{j=1}^N L^2(M_j,\mu) & \to & \tilde{H}, \\ (f_1, f_2, ...) & \mapsto & (t \mapsto (f_{i_t(j)}(t))_{j=1}^{n(t)}), \end{array} \right.$$

wobei auf der rechten Seite im Fall von $n(t) < \infty$ der Raum $\mathbb{C}^{n(t)}$ kanonisch mit dem Raum $H_{n(t)}$ identifiziert wird. Eine Folge von Funktionen wird also auf eine entsprechende folgenwertige Funktion abgebildet. Ψ bildet auch tatsächlich nach $\tilde{H}$ hinein ab, denn

$$\begin{aligned} I_{j,k} &:= \{t : j \le n(t), i_t(j) = k\} \\ &= \bigcup_{I\subseteq\{1,...,k-1\},|I|=j-1} \left(M_k \cap \left(\bigcap_{j\in I} M_j \right) \cap \left(\bigcap_{j\in\{1,...,k-1\}\setminus I} M_j^c \right) \right) \end{aligned}$$

ist für alle $j, k \in \mathbb{N}$ eine Borelmenge. Folglich ist

$$(\Psi f)(.)_j = (t \mapsto \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{I_{j,k}}(t) \cdot f_k(t))$$

als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen messbar für alle j. Für beliebiges $a \in \ell^2(\mathbb{N})$ ist damit $((\Psi f)(t), a)_{\ell^2} = \sum_{k=1}^{n(t)} (\Psi f)(t)_k a_k$ als Funktion von t messbar, womit Ψf schwach messbar ist.
Wegen des Satzes der monotonen Konvergenz gilt

$$\begin{aligned} \|(t \mapsto (f_{i_t(j)}(t))_{j=1}^{n(t)})\|^2 &= \int_{\sigma(A)} \sum_{j=1}^{n(t)} |f_{i_t(j)}(t)|^2\ d\mu(t) \\ &= \int_{\sigma(A)} \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{M_k}(t)|f_k(t)|^2\ d\mu(t) = \sum_{k=1}^N \int_{M_k} |f_k(t)|^2\ d\mu(t), \end{aligned}$$

also ist die Abbildung isometrisch.
Die Inverse von Ψ ist für $h \in \tilde{H}, j \in \{1, ..., N\}$ und $t \in M_j$ durch

$$(\tilde{\Psi} h)_j(t) := h(t)_{i_t^{-1}(j)}$$

gegeben. Wegen $h(t)_{i_t^{-1}(j)} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{I_{k,j}}(t) \cdot h(t)_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{I_{k,j}}(t) \cdot (h(t), e_k)_{\ell^2(\mathbb{R})}$ ist $(\tilde{\Psi}h)_j$ messbar, wobei $e_k := (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...) \in \ell^2(\mathbb{C})$ mit dem Einser an Stelle k. Aufgrund von

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\Psi}h\|^2 &= \sum_{j=1}^{N} \int_{M_j} |h(t)_{i_t^{-1}(j)}|^2 \, d\mu(t) \\
&= \int_{\sigma(A)} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{M_j}(t) \cdot |h(t)_{i_t^{-1}(j)}|^2 \, d\mu(t) = \int_{M_j} \|h(t)\|_{\ell^2}^2 \, d\mu(t) = \|h\|^2
\end{aligned}$$

bildet $\tilde{\Psi}$ nach $\bigoplus_{j=1}^{N} L^2(M_j, \mu)$ hinein ab. Aus

$$(\tilde{\Psi}\Psi f)_j(t) = (\tilde{\Psi}(t \mapsto (f_{i_t(k)}(t))_{k=1}^{n(t)}))_j(t) = (f_{i_t(k)}(t)_{k=1}^{n(t)})_{i_t^{-1}(j)} = f_{i_t(i_t^{-1}(j))}(t) = f_j(t)$$

und

$$\Psi\tilde{\Psi}h = \Psi((t \mapsto h(t)_{i_t^{-1}(j)}))_{j=1}^{N} = (t \mapsto (h(t)_{i_t^{-1}(i_t(k))})_{k=1}^{n(t)}) = (t \mapsto (h(t)_j)_{j=1}^{n(t)}) = h.$$

erhalten wir $\tilde{\Psi} = \Psi^{-1}$.
Schließlich setzen wir $\tilde{U}$ und Ψ zusammen und definieren $U := \Psi \circ \tilde{U}$. U ist klarerweise eine unitäre Abbildung von H auf $\tilde{H}$. Unter Verwendung von (3.4) erhalten wir für $h \in \tilde{H}$

$$\begin{aligned}
(UAU^*h) &= \Psi\tilde{U}A\tilde{U}^*\Psi^*h = \Psi\tilde{U}A\tilde{U}^*(t \to h(t)_{i_t^{-1}(j)})_{j=1}^{N} \\
&= \Psi((t \mapsto th(t)_{i_t^{-1}(j)})_{j=1}^{N} = (t \mapsto (th(t)_{i_t^{-1}(i_t(j))})_{j=1}^{n(t)}) = \Lambda h.
\end{aligned}$$

3.3 Zerlegbare Operatoren

Wir wollen uns eine besondere Art von Operatoren auf direkten Integralräumen ansehen. Definition 3.3.2 ist gemäß [Cla79, Section 2.2] verfasst.

3.3.1 Generalvoraussetzung. In diesem Abschnitt bezeichnet H einen separablen Hilbertraum, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ einen σ-endlichen Maßraum und

$$\tilde{H} := \int_{\Omega} \oplus H(t) \, d\mu(t)$$

einen direkten Integralraum mit $H(t) \leq H, t \in \Omega$.
Wir betrachten eine Familie $(B(t))_{t\in\Omega}$ von Operatoren $B(t) \in L_b(H(t))$, wobei $(t \mapsto B(t)h(t))$ schwach messbar für alle $h \in \tilde{H}$ ist und $C := \operatorname{esssup}_{t\in\Omega}\|B(t)\| < +\infty$ gilt. Wir definieren auf $\tilde{H}$ die Abbildung $Bh(t) := B(t)h(t)$. Wegen

$$\int_{\Omega} \|B(t)h(t)\|_H^2 \, d\mu(t) \leq C^2 \int_{\Omega} \|h(t)\|_H^2 \, d\mu(t) < +\infty \tag{3.5}$$

bildet sie in $\tilde{H}$ hinein ab. Die Abbildung ist klarerweise linear und wegen (3.5) ein beschränkter Operator mit $\|B\| \leq C$. Operatoren dieser Bauart motivieren folgende Definition.

3.3.2 Definition. Ein beschränkter Operator B auf $\tilde{H}$ heißt *zerlegbar* (engl. *decomposable*), wenn es eine Familie $(B(t))_{t\in\Omega}$ mit $B(t) \in L_b(H(t))$, $t \in \Omega$, gibt, die obige

Bedingungen und $Bh(t) = B(t)h(t)\ \mu - f\ddot{u}$ für alle $h \in \tilde{H}$ erfüllt. Wir schreiben

$$B = \int_\Omega \oplus B(t)\ d\mu(t)$$

für diesen Sachverhalt.

3.3.3 Bemerkung. Erfüllt $\tilde{H}$ die zusätzlichen Eigenschaften aus Bemerkung 3.1.8, so gilt für $g \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $x \in H$ die Gleichung

$$(P_{H(t)}g(t), x) = (g(t), P_{H(t)}x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} (g(t), \mathbb{1}_{[n(t)=k]}(t) P_{H_k} x),$$

wobei $P_{H(t)} \in L_b(H)$ die orthogonale Projektion auf $H(t)$ bezeichnet. Wegen $\{t : n(t) = k\} \in \mathcal{A}$ für alle k ist damit der Ausdruck $P_{H(t)}g(t)$ als Funktion von t schwach messbar. Gemäß dem Absatz vor Definition 3.3.2 ist $\int_\Omega \oplus P_{H(t)}\ d\mu(t) \in L_b(L^2(\Omega, \mu, H))$ wohldefiniert und wegen $(\int_\Omega \oplus P_{H(t)}\ d\mu(t))^2 h(t) = P_{H(t)}^2 h(t) = P_{H(t)} h(t)$ und

$$\begin{aligned} (\left[\int_\Omega \oplus P_{H(t)}\ d\mu(t)\right] g, h) &= \int_\Omega (P_{H(t)}g(t), h(t))\ d\mu(t) \\ &= \int_\Omega (g(t), P_{H(t)}h(t))\ d\mu(t) = (g, \left[\int_\Omega \oplus P_{H(t)}\ d\mu(t)\right] h) \end{aligned}$$

für $g, h \in L^2(\Omega, \mu, H)$ sogar eine orthogonale Projektion. Schließlich gilt für $h \in L^2(\Omega, \mu, H)$

$$h \in \tilde{H} \Leftrightarrow h(t) \in H(t)\ \mu - f\ddot{u} \Leftrightarrow P_{H(t)}h(t) = h(t)\ \mu - f\ddot{u} \Leftrightarrow h \in ran\ \left[\int_\Omega \oplus P_{H(t)}\ d\mu(t)\right],$$

also ist diese Projektion genau die orthogonale Projektion auf $\tilde{H}$.

3.3.4 Proposition. Erfülle $\tilde{H}$ die zusätzlichen Eigenschaften aus Bemerkung 3.1.8 und seien

$$A = \int_\Omega \oplus A(t)\ d\mu(t) \quad \text{und} \quad B = \int_\Omega \oplus B(t)\ d\mu(t)$$

zerlegbare Operatoren auf $\tilde{H}$. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) Ist $(\tilde{B}(t))_{t\in\Omega}$ mit $\tilde{B}(t) \in L_b(H(t))$ eine weitere Familie, die $B = \int_\Omega \oplus \tilde{B}(t)\ d\mu(t)$ erfüllt, so gilt $B(t) = \tilde{B}(t)\ \mu - f\ddot{u}$.

(ii) $AB = \int_\Omega \oplus A(t)B(t)\ d\mu(t)$.

(iii) $B^* = \int_\Omega \oplus B(t)^*\ d\mu(t)$.

Beweis. Sei $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H derart, dass $\phi_1, ..., \phi_n$ eine Orthonormalbasis von H_n ist und $C_N \in \mathcal{A}$ für jedes $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\mu(C_N) < +\infty$ und $\bigcup_N C_N = \Omega$. Mit der Notation aus Bemerkung 3.1.8 sind die Funktionen

$$h_{i,N}(t) := \mathbb{1}_{[i \le n(t)] \cap C_N}(t) \cdot \phi_i \tag{3.6}$$

für $i, N \in \mathbb{N}$ in $\tilde{H}$, da sie außerhalb einer Menge mit endlichem Maß verschwinden und da $\{t \in \Omega : n(t) = k\} \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, wobei $\mathcal{A}$ die σ-Algebra aus Generalvoraussetzung 3.3.1 bezeichnet.

(i) Für alle $i, N \in \mathbb{N}$ gibt es eine Nullmenge $\mathcal{N}_{i,N}$ derart, dass

$$B(t)h_{i,N}(t) = Bh_{i,N}(t) = \tilde{B}(t)h_{i,N}(t), \qquad t \in \Omega \setminus \mathcal{N}_{i,N}.$$

Für ein $t \in \Omega \setminus \mathcal{N}$ mit $\mathcal{N} := \bigcup_{i,N} \mathcal{N}_{i,N}$ gilt also

$$B(t)\phi_i = B(t)h_{i,N}(t) = \tilde{B}(t)h_{i,N}(t) = \tilde{B}(t)\phi_i,$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $\phi_i \in H(t)$, wenn man N entsprechend wählt. Da alle diese ϕ_i eine Orthonormalbasis von $H(t)$ bilden, müssen $B(t)$ und $\tilde{B}(t)$ übereinstimmen.

(ii) Klarerweise gilt $A(t)B(t) \in L_b(H(t))$ und

$$\operatorname{esssup}_{t\in\Omega}\|A(t)B(t)\| \leq \operatorname{esssup}_{t\in\Omega}\|A(t)\| \cdot \operatorname{esssup}_{t\in\Omega}\|B(t)\| < +\infty.$$

Für $h \in \tilde{H}$ gilt

$$Bh(t) = B(t)h(t) \quad \text{und} \quad ABh(t) = A(t)(Bh)(t)$$

für μ-fast alle t und damit

$$ABh(t) = A(t)Bh(t) = A(t)B(t)h(t).$$

(iii) Sei $P_{\tilde{H}} \in L_b(L^2(\Omega, \mu, H))$ die orthogonale Projektion auf $\tilde{H}$. Für $t \in \Omega$ sei $P_{H(t)} \in L_b(H)$ die orthogonale Projektion auf $H(t)$. Da B nach $\tilde{H}$ hinein abbildet, wegen Bemerkung 3.3.3 und wegen (ii) ist $BP_{\tilde{H}}g(t) = B(t)P_{H(t)}g(t)$ für $g \in L^2(\Omega, \mu, H)$ als Funktion von t schwach messbar, was die Messbarkeit von $(B(t)^*h(t), g(t)) = (B(t)^*h(t), P_{H(t)}g(t)) = (h(t), B(t)P_{H(t)}g(t))$ für alle $h \in L^2(\Omega, \mu, H)$ zur Folge hat. Mit Lemma 3.1.6 erhalten wir die schwache Messbarkeit von $B^*(t)h(t)$. Damit ist $\tilde{B} := \int_\Omega \oplus B(t)^* \, d\mu(t)$ wohldefiniert und es gilt

$$(B^*h, g) = (h, Bg) = \int_\Omega (h(t), B(t)g(t)) \, d\mu(t) = \int_\Omega (B(t)^*h(t), g(t)) \, d\mu(t) = (\tilde{B}h, g),$$

also $B^* = \tilde{B}$.

3.3.5 Lemma. Erfülle $\tilde{H}$ die zusätzlichen Bedingungen aus Bemerkung 3.1.8 und sei $P : \tilde{H} \to \tilde{H}$ eine zerlegbare orthogonale Projektion, also

$$P = \int_\Omega \oplus P(t) \, d\mu(t).$$

Dann ist $P(t)$ eine orthogonale Projektion für μ-fast alle t auf einen Raum $Z(t)$. Dabei gilt

$$ran\ P = \int_\Omega \oplus Z(t) \, d\mu(t) =: Z.$$

Ist weiters

$$B = \int_\Omega \oplus B(t) \, d\mu(t)$$

ein zerlegbarer Operator auf $\tilde{H}$, der gegenüber Z invariant ist, so ist $B(t)$ $Z(t)$-invariant $\mu - f\ddot{u}$ und es gilt $B|_Z = \int_\Omega \oplus B(t)|_{Z(t)}\, d\mu(t)$.

Beweis. Laut Proposition 3.3.4, (ii) und (iii) gilt $P = PP = \int_\Omega \oplus P(t)P(t)\, d\mu(t)$ und $P = P^* = \int_\Omega \oplus P(t)^*\, d\mu(t)$. Nach Proposition 3.3.4, (i) folgt $P(t) = P^*(t) = P(t)P(t)$ $\mu - f\ddot{u}$. Dabei gilt

$$h \in Z \Leftrightarrow h(t) \in Z(t)\ \mu - f\ddot{u} \Leftrightarrow Ph(t) = P(t)h(t) = h(t)\ \mu - f\ddot{u} \Leftrightarrow h \in ran\ P,$$

also $Z = ran\ P$.
Die Z-Invarianz von B ist zur Gleichheit $BP = PBP$ äquivalent. Nach Proposition 3.3.4, (i) und (ii) bedeutet diese, dass $B(t)P(t) = P(t)B(t)P(t)$ für μ-fast alle t. Folglich gilt $(B(t))(Z(t)) = (B(t))(ran\ P(t)) \subseteq Z(t)$ für fast alle t. Klarerweise gilt auch $\operatorname{esssup}_{t\in\Omega}\|B(t)|_{Z(t)}\| < +\infty$ und

$$B|_Z h(t) = B(t)h(t) = B(t)|_{Z(t)}h(t)$$

für $h \in Z$ und μ-fast alle t.

□

3.3.6 Bemerkung. Für $f \in L^\infty(\Omega,\mu)$ ist

$$M_f h(t) := f(t)h(t)$$

ein beschränkter Operator auf $\tilde{H}$ mit $\|M_f\| \leq \|f\|_{L^\infty}$.
Das nächste Resultat zeigt, dass sich zerlegbare Operatoren auf einfache Weise mithilfe dieser Multiplikationsoperatoren charakterisieren lassen. Für einen Beweis wird auf [Tak79, Theorem 7.10] verwiesen.

3.3.7 Satz. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$ $(p \geq 1)$ offen oder abgeschlossen und $\mathcal{A}$ die σ-Algebra der Borelmengen auf Ω. Ein beschränkter Operator auf $L^2(\Omega,\mu,H)$ ist genau dann zerlegbar, wenn er für alle $f \in L^\infty(\Omega,\mu)$ mit dem Multiplikationsoperator M_f aus Bemerkung 3.3.6 kommutiert.
Das Resultat kann auf einfache Weise auf manche direkte Integralräume erweitert werden.

3.3.8 Korollar. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$ $(p \geq 1)$ offen oder abgeschlossen und $\mathcal{A}$ die σ-Algebra der Borelmengen auf Ω. Ist $P = \int_\Omega \oplus P(t)\, d\mu(t) \in L_b(L^2(\Omega,\mu,H))$ eine zerlegbare orthogonale Projektion, so ist ein beschränkter Operator auf $ran\ P$ genau dann zerlegbar, wenn er für alle $f \in L^\infty(\Omega,\mu)$ mit dem Multiplikationsoperator $M_f \in L_b(ran\ P)$ kommutiert.

Beweis. Laut Lemma 3.3.5 ist $ran\ P$ ein direkter Integralraum, womit $M_f \in L_b(ran\ P)$ wohldefiniert ist.
Jeder zerlegbare Operator kommutiert klarerweise mit allen Multiplikationsoperatoren. Sei also $B \in L_b(ran\ P)$ ein Operator, der mit allen M_f kommutiert. Da P zerlegbar ist, gilt $BPM_f h = BM_f Ph = M_f BPh$ für $f \in L^\infty(\Omega,\mu)$ und $h \in L^2(\Omega,\mu,H)$. Nach Satz 3.3.8 ist $BP \in L_b(L^2(\Omega,\mu,H))$ zerlegbar, also

$$BP = \int_\Omega \oplus \tilde{B}(t)\, d\mu(t).$$

Da BP ran P-invariant ist, ist $\tilde{B}(t)$ laut Lemma 3.3.5 ran $P(t)$-invariant. Folglich gilt $B(t) := \tilde{B}(t)|_{ran\ P(t)} \in L_b(H(t))$ sowie

$$B = BP|_{ran\ P} = \int_\Omega \oplus B(t)\ d\mu(t).$$

□

Dieses Resultat kann für eine beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen noch verbessert werden.

3.3.9 Korollar. Sei die beschränkte Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ offen oder abgeschlossen und $\mathcal{A}$ die σ-Algebra der Borelmengen auf Ω. Ist $P = \int_\Omega \oplus P(t)\ d\mu(t) \in L_b(L^2(\Omega, \mu, H))$ eine zerlegbare orthogonale Projektion, so ist ein beschränkter Operator auf ran P genau dann zerlegbar, wenn er mit dem durch $\Lambda h(t) := th(t)$ definierten Operator kommutiert.

Beweis. Wähle C so groß, dass $\Omega \subseteq [-C, C]$. Wegen

$$\|\Lambda h\|^2 = \int_\Omega \|th(t)\|_H^2\ d\mu(t) \le C^2 \int_\Omega \|h(t)\|_H^2\ d\mu(t) = C^2\|h\|^2$$

und

$$(\Lambda g, h) = \int_\Omega t \cdot (g(t), h(t))\ d\mu(t) = (g, \Lambda h)$$

ist Λ beschränkt und selbstadjungiert. Wir definieren die Abbildung $E : \mathcal{A} \to L_b(ran\ P)$ durch

$$E(\Delta)h(t) := \mathbb{1}_\Delta(t)h(t).$$

Offenbar ist E ein Spektralmaß. Wir zeigen, dass dieses Spektralmaß mit jenem von Λ übereinstimmt. Dazu sei zuerst angemerkt, dass $E_{g,h}(\Delta) = \int_\Delta (g(t), h(t))\ d\mu(t)$ und daher $E_{g,h}$ bezüglich μ die Dichte $(g(.), h(.))$ hat. Sei $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$. Für $g, h \in ran\ P$ gilt

$$\int_\Omega f\ dE_{g,h} = \int_\Omega f(t)(g(t), h(t))\ d\mu(t) = (M_f g, h) \tag{3.7}$$

und damit

$$\int_\Omega f\ dE = M_f.$$

Da Ω beschränkt ist, gilt $(t \mapsto t) \in L^\infty(\Omega, \mu)$ und daher $\int_\Omega (t \mapsto t)\ dE = M_{(t\mapsto t)} = \Lambda$, womit E das Spektralmaß zu Λ ist.
Sei schließlich B ein beschränkter Operator auf ran P. Ist B zerlegbar, so kommutiert er klarerweise mit Λ. Kommutiert B andererseits mit Λ, so kommutiert er auch mit allen $\int_\Omega f\ dE = M_f,\ f \in L^\infty(\Omega, \mu)$. Nach Korollar 3.3.8 ist der Operator daher zerlegbar.

3.4 Operatorlift

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, zu einem beliebigen, auf einem $\mathbb{C}$-wertigen L^2-Raum definierten beschränkten Operator ein Analogon auf einem hilbertraumwertigen L^2-Raum zu definieren. Die Definition dieses sogenannten Operatorlifts richtet sich nach [Cla79, Seite 49].

3.4.1 Definition. Sei $\phi : G \to \mathbb{C}$ mit einer beliebigen Menge G, H ein Hilbertraum und $\psi \in H$. Dann setzen wir

$$\phi \otimes \psi := \begin{cases} G & \to & H, \\ x & \mapsto & \phi(x) \cdot \psi. \end{cases}$$

Dieser Ausdruck ist klarerweise linear in ϕ und in ψ. Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\phi \in L^2(\Omega, \mu)$, dann ist $\phi \otimes \psi$ wegen $(\phi \otimes \psi, x)_H = \phi(.) \cdot (\psi, x)$ schwach messbar. Wegen $\|\phi \otimes \psi\| = \|\|\phi(.)\psi\|_H\|_{L^2(\Omega,\mu)} = \|\phi\| \cdot \|\psi\|$ ist diese Funktion außerdem in $L^2(\Omega, \mu, H)$ und $(\phi, \psi) \mapsto \psi \otimes \psi$ ist als Abbildung von $L^2(\Omega, \mu) \times H$ nach $L^2(\Omega, \mu, H)$ stetig. Für $\phi_1, \phi_2 \in L^2(\Omega, \mu)$ und $\psi_1, \psi_2 \in H$ gilt $(\phi_1 \otimes \psi_1, \phi_2 \otimes \psi_2) = (\phi_1, \phi_2) \cdot (\psi_1, \psi_2)$.

3.4.2 Lemma. Sei H ein separabler Hilbertraum mit abzählbarer Orthonormalbasis $(\psi_j)_{j\in J}$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(\phi_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\Omega, \mu)$. Dann ist $(\phi_i \otimes \psi_j)_{i\in I, j\in J}$ eine ONB von $L^2(\Omega, \mu, H)$.

Beweis. Dass $(\phi_i \otimes \psi_j)_{i\in I,j\in J}$ ein Orthonormalsystem ist, kann auf elementare Weise nachgewiesen werden. Um die Vollständigkeit zu zeigen, sei $f \in \{\phi_i \otimes \psi_j : i \in I, j \in J\}^\perp \subseteq L^2(\mathbb{R}, H)$. Für festes j gilt

$$0 = \int_\Omega (f(t), \phi_i(t)\psi_j)\ dt = \int_\Omega \overline{\phi_i(t)}(f(t), \psi_j)\ d\mu(t), \qquad i \in I.$$

Wegen

$$\int_\Omega |(f(t), \psi_j)|^2\ d\mu(t) \le \int_\Omega \|f(t)\|^2 \|\psi_j\|^2\ d\mu(t) < +\infty$$

liegt $(t \mapsto (f(t), \psi_j))$ in $L^2(\Omega, \mu)$. Also steht diese Funktion orthogonal auf alle Vektoren einer ONB von $L^2(\Omega, \mu)$, wodurch $(f(t), \psi_j) = 0$ für alle $t \in \Omega \setminus N_j$ mit $N_j \in \mathcal{A}$, $\mu(N_j) = 0$. Für $N := \bigcup_{j\in J} N_j$ erhalten wir

$$0 = (f(t), \psi_j), \qquad t \in \Omega \setminus N,\ j \in J.$$

Da die ψ_j's eine ONB in H bilden, gilt $f(t) = 0,\ t \in \Omega \setminus N$, also $f = 0\ \lambda - f\ddot{u}$. $\square$

3.4.3 Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum derart, dass $L^2(\Omega, \mu)$ separabel ist und H ein separabler Hilbertraum. Sei $(\phi_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalbasis von $L^2(\Omega, \mu)$ und $(\psi_j)_{j\in J}$ eine von H. Dann ist der *Operatorlift* $\hat{T}$ eines Operators $T \in L_b(L^2(\Omega, \mu))$ für ein $h = \sum_{i,j} \xi_{i,j}\phi_i \otimes \psi_j \in L^2(\Omega, \mu, H)$ mit $(\xi_{i,j})_{i\in I,j\in J} \in \ell^2(I \times J)$ definiert als

$$\hat{T}(\sum_{i,j} \xi_{i,j}\phi_i \otimes \psi_j) := \sum_{i,j} \xi_{i,j}(T\phi_i) \otimes \psi_j. \tag{3.8}$$

3.4.4 Proposition. Mit der Notation aus Definition 3.4.3 gelten die folgenden Aussagen.

(i) Der Operatorlift ist wohldefiniert, die Doppelsumme in (3.8) ist also unbedingt konvergent und der Ausdruck in (3.8) ist unabhängig von den gewählten Orthonormalbasen. $\hat{T}$ ist ein beschränkter Operator auf $L^2(\Omega, \mu, H)$ mit $\|\hat{T}\| \leq \|T\|$.

(ii) Für $A, B \in L_b(L^2(\Omega, \mu))$ gilt

$$\hat{A}\hat{B} = \widehat{AB}. \tag{3.9}$$

(iii) Ist T bijektiv, so ist es auch $\hat{T}$ und es gilt $(\hat{T})^{-1} = \widehat{T^{-1}}$.

(iv) Ist T isometrisch, so auch $\hat{T}$.

(v) Ist $T = M_f \in L_b(L^2(\Omega, \mu))$ der Multiplikationsoperator mit einer Funktion $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$, so ist $\hat{T}$ der Multiplikationsoperator mit ebendieser Funktion auf $L^2(\Omega, \mu, H)$.

(vi) Sei $\Omega := \mathbb{R}$, $\mu := \lambda$ und T_s der Translationsoperator um $s \in \mathbb{R}$, $T_s h(t) := h(t-s)$. Dann ist $\hat{T}_s$ der entsprechende Translationsoperator auf $L^2(\mathbb{R}, \lambda, H)$.

Beweis.

(i) Sei $\mathcal{E}(I \times J)$ die Menge der endlichen Teilmengen von $I \times J$ gerichtet durch $A \preceq B \Leftrightarrow A \subseteq B$. Für $M \in \mathcal{E}(I \times J)$ und $(\xi_{i,j})_{i \in I, j \in J} \in \ell^2(I \times J)$ gilt wegen des Satzes von Pythagoras

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{(i,j)\in M} \xi_{i,j} T(\phi_i) \otimes \psi_j \Big\|^2 &= \int_\Omega \Big\| \sum_{(i,j)\in M} \xi_{i,j} T(\phi_i)(t) \cdot \psi_j \Big\|_H^2 \, d\mu(t) \\
&= \int_\Omega \sum_j \Big\| \Big(\sum_{i:(i,j)\in M} \xi_{i,j} T(\phi_i)(t) \Big) \cdot \psi_j \Big\|_H^2 \, d\mu(t) \\
&= \int_\Omega \sum_j \Big| \sum_{i:(i,j)\in M} \xi_{i,j} T(\phi_i)(t) \Big|^2 \cdot \|\psi_j\|_H^2 \, d\mu(t) \\
&= \int_\Omega \sum_j \Big| T\Big(\sum_{i:(i,j)\in M} \xi_{i,j} \phi_i \Big)(t) \Big|^2 \, d\mu(t) \\
&= \sum_j \Big\| T\Big(\sum_{i:(i,j)\in M} \xi_{i,j} \phi_i \Big) \Big\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 \\
&\leq \|T\|^2 \cdot \sum_j \Big\| \sum_{i:(i,j)\in M} \xi_{i,j} \phi_i \Big\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 \\
&= \|T\|^2 \cdot \sum_{(i,j)\in M} |\xi_{i,j}|^2 = \|T\|^2 \cdot \Big\| \sum_{(i,j)\in M} \xi_{i,j} \phi_i \otimes \psi_j \Big\|^2.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Da $\sum_{i,j} |\xi_{i,j}|^2$ unbedingt konvergiert, gibt es für $\epsilon > 0$ ein $M_0 \in \mathcal{E}(I \times J)$ derart, dass $\sum_{(i,j)\in M} |\xi_{i,j}|^2 < \epsilon$ für alle $M \in \mathcal{E}$ mit $M \cap M_0 = \emptyset$. Für $M_1, M_2 \supseteq M_0$ gilt also mit

$$\eta_{i,j} := \begin{cases} \xi_{i,j}, & \text{falls } (i,j) \in M_1 \setminus M_2, \\ -\xi_{i,j}, & \text{falls } (i,j) \in M_2 \setminus M_1, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$\Big\| \sum_{(i,j)\in M_1} \xi_{i,j} T(\phi_i)\otimes\psi_j - \sum_{(i,j)\in M_2} \xi_{i,j} T(\phi_i)\otimes\psi_j \Big\|^2 = \Big\| \sum_{(i,j)\in I\times J} \eta_{i,j} T(\phi_i)\otimes\psi_j \Big\|^2$$
$$\leq \|T\|^2 \cdot \Big(\sum_{(i,j)\in (M_1\setminus M_2)\cup(M_2\setminus M_1)} |\xi_{i,j}|^2 \Big) < \|T\|^2\epsilon^2,$$

womit $(\sum_{(i,j)\in M} \xi_{i,j} T(\phi_i)\otimes\psi_j)_{M\in\mathcal{E}(I\times J)}$ ein Cauchy-Netz und infolge konvergent ist.

Die Linearität von $\hat{T}$ ist offensichtlich. Nimmt man in (3.10) auf beiden Seiten $\lim_{M\in\mathcal{E}(I\times J)}$, so sieht man, dass $\hat{T}$ beschränkt ist mit $\|\hat{T}\| \leq \|T\|$.

Für die Eindeutigkeit sei $(\tilde{\phi}_i)_{i\in I}$ eine weitere ONB von $L^2(\Omega,\mu)$ und $(\tilde{\psi}_j)_{j\in J}$ eine von H, und seien $a_{i,k} := (\tilde{\phi}_i, \phi_k)$ und $b_{j,k} := (\tilde{\psi}_j, \psi_k)$, womit $\tilde{\phi}_i = \sum_k a_{i,k}\phi_k$ und $\tilde{\psi}_j = \sum_k b_{j,k}\psi_k$. Gilt weiters für $i\in I, j\in J$, $\tilde{\psi}_j\otimes\tilde{\phi}_i = \sum_{k,l}\xi_{k,l}\psi_k\otimes\phi_l$, so folgt

$$\tilde{\phi}_i\otimes\tilde{\psi}_j = (\sum_k a_{i,k}\phi_k)\otimes(\sum_\ell b_{j,\ell}\psi_\ell) = \sum_{k,\ell} a_{i,k}b_{j,\ell}\phi_\ell\otimes\psi_k,$$

also $\xi_{k,l} = a_{i,k}b_{j,\ell}, k\in I, \ell\in J$, und

$$\begin{aligned}(T\tilde{\phi}_i)\otimes\tilde{\psi}_j &= T(\sum_k a_{ik}\tilde{\phi}_k)\otimes(\sum_\ell b_{j\ell}\tilde{\psi}_\ell)\\ &= \sum_{k,\ell}(a_{ik}T(\phi_k))\otimes(b_{j\ell}\psi_\ell)\\ &= \sum_{k,\ell}\xi_{ij}T(\phi_k)\otimes\psi_k.\end{aligned}$$

Man sieht also, dass $\hat{T}(\tilde{\phi}_i\otimes\tilde{\psi}_j)$ unabhängig davon ist, mit welcher Orthonormalbasis man $\hat{T}$ definiert. Aufgrund von Linearität und Stetigkeit überträgt sich diese Tatsache auf ganz $L^2(\Omega,\mu,H)$.

(ii) Für $i\in I, j\in J$, gilt mit $a_k := (B(\phi_i),\phi_k), k\in I$

$$\begin{aligned}\widehat{AB}(\phi_i\otimes\psi_k) &= AB(\phi_i)\otimes\psi_k = A(\sum_k a_k\phi_k)\otimes\psi_k = \sum_k a_k(A(\phi_k)\otimes\psi_k)\\ &= \hat{A}\sum_k a_k\phi_k\otimes\psi_k = \hat{A}(B(\phi_i)\otimes\psi_k) = \hat{A}\hat{B}(\phi_i\otimes\psi_k).\end{aligned}$$

Somit stimmen $\widehat{AB}$ und $\hat{A}\hat{B}$ auf einer ONB überein, womit sie aufgrund von Linearität und Stetigkeit überall übereinstimmen; siehe (i).

(iii) Aus (ii) folgt $\hat{T}\widehat{T^{-1}} = \widehat{TT^{-1}} = \widehat{I_{L^2(\Omega,\mu)}} = I_{L^2(\Omega,\mu,H)}$ und $\widehat{T^{-1}}\hat{T} = \widehat{T^{-1}T} = I_{L^2(\Omega,\mu,H)}$.

(iv) Für $(i_1,j_1),(i_2,j_2)\in I\times J$, $(i_1,j_1)\neq(i_2,j_2)$ gilt

$$(T(\phi_{i_1})\otimes\psi_{j_1}, T(\phi_{i_2})\otimes\psi_{j_2}) = (T(\phi_{i_1}),T(\phi_{i_2}))\cdot(\psi_{j_1},\psi_{j_2}) = (\phi_{i_1},\phi_{i_2})\cdot(\psi_{j_1},\psi_{j_2}) = 0,$$

womit diese Ausdrücke orthogonal zueinander sind. Daher folgt für $(\xi_{i,j})_{(i,j)\in I\times J} \in \ell^2(I \times J)$

$$\begin{aligned}\|\hat{T}(\sum_{i,j} \xi_{i,j}\phi_i \otimes \psi_j)\|^2 = \ \|\sum_{i,j} \xi_{i,j}T(\phi_i) \otimes \psi_j\|^2 &= \sum_{i,j} |\xi_{i,j}|^2 \|T(\phi_i) \otimes \psi_j\|^2 \\ &= \sum_{i,j} |\xi_{i,j}|^2 = \|\sum_{i,j} \xi_{i,j}\phi_i \otimes \psi_j\|^2.\end{aligned}$$

(v) Für $i \in I, j \in J$, gilt

$$\hat{M}_f(\phi_i \otimes \psi_j) = (t \mapsto f(t)\phi_i(t)\psi_k) = (t \mapsto f(t)(\phi_i \otimes \psi_j)(t)).$$

Analog zum Beweis von (ii) stimmen $\widehat{M_f}$ und der Multiplikationsoperator mit f auf $L^2(\Omega, \mu, H)$ überein.

(vi) Für $i \in I, j \in J$, gilt

$$\hat{T}_s(\phi_i \otimes \psi_j) = (t \mapsto \phi_i(t-s)\psi_k) = (t \mapsto (\phi_i \otimes \psi_j)(t-s)).$$

Analog zum Beweis von (ii) und (v) stimmen $\widehat{T_s}$ und der Translationsoperator um s auf $L^2(\mathbb{R}, \lambda, H)$ überein.

□

Wir wollen diesen Operatorlift auf die Fourier- und die Hilberttransformation anwenden. Aufgrund von Proposition 3.4.4 stellt sich heraus, dass für diese ähnliche Eigenschaften wie im skalaren Fall gelten.

3.4.5 Korollar. Für die Fouriertransformation F und die Hilberttransformation Q auf $L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$T_s\hat{F} = \hat{F}M_s, \tag{3.11}$$
$$\hat{F}^* M_{sgn}\hat{F} = \hat{Q}. \tag{3.12}$$

mit $M_s h(t) := e^{ist}h(t)$, $M_{sgn}h(t) := sgn(t)h(t)$, $T_s h(t) := h(t-s)$, $h \in L^2(\mathbb{R}, H)$.

Beweis. Die Gleichungen folgen unmittelbar aus Proposition 3.4.4, (ii), (v) und (vi) und Satz 2.4.2.

4 Seminormale Operatoren

Alle Resultate dieses Kapitels richten sich nach [Cla79].

4.1 Hyponormale und Cohyponormale Operatoren

4.1.1 Definition. Für $X, Y \in L_b(H)$ ist der *Kommutator* von X und Y definiert als

$$[X, Y] := XY - YX.$$

$[X^*, X]$ nennt man den *Selbstkommutator* von X.

4.1.2 Definition. Sei H ein Hilbertraum. Ein Operator S auf einem Hilbertraum heißt *hyponormal*, falls der Selbstkommutator $[S^*, S]$ ein positiver Operator ist. Ist $-[S^*, S]$ positiv, so bezeichnet man S als *cohyponormal*. Ist ein Operator hyponormal oder cohyponormal, so bezeichnet man ihn als *seminormal*.

4.1.3 Bemerkung. Wegen $[S, S^*] = -[S^*, S]$ ist die Menge der Adjungierten der hyponormalen Operatoren genau die Menge der cohyponormalen Operatoren.

Insbesondere im Zusammenhang mit seminormalen Operatoren erweist es sich als nützlich, einen Operator $S \in L_b(H)$ in Real- und Imaginärteil aufzuteilen. Diese sind durch $\Re(S) := \frac{1}{2}(S + S^*)$ bzw. $\Im(S) := \frac{1}{2i}(S - S^*)$ definiert. Dabei sind $\Re(S)$ und $\Im(S)$ selbstadjungiert und es gilt $S = \Re(S) + i\Im(S)$.

4.1.4 Proposition. Sei A ein beschränkter Operator auf H und $x, y \in \mathbb{R}$. Setzen wir $z := x + iy, X := \Re(A), Y := \Im(A)$, dann gelten folgende Gleichungen.

$$(A - zI)^*(A - zI) = (X - xI)^2 + (Y - yI)^2 + i[X, Y], \tag{4.1}$$

$$(A - zI)(A - zI)^* = (X - xI)^2 + (Y - yI)^2 - i[X, Y], \tag{4.2}$$

$$[(A - zI)^*, (A - zI)] = 2i[X, Y]. \tag{4.3}$$

Beweis. Die erste Gleichung gilt wegen

$$\begin{aligned}(A^* - \bar{z}I)(A - zI) &= (X - xI - iY + iyI)(X - xI + i(Y - yI)) \\ &= (X - xI)^2 - iY(X - xI) + iy(X - xI) \\ &\quad + \ (X - xI)iY - (X - xI)iy + (Y - yI)^2 \\ &= (X - xI)^2 + (Y - yI)^2 + i(X - xI)Y - iY(X - xI) \\ &= (X - xI)^2 + (Y - yI)^2 + i[X, Y].\end{aligned}$$

Die anderen Aussagen verifiziert man auf ähnliche Weise. □

Zusammen mit Satz 2.5.3 erhält man daraus das folgende Korollar.

4.1.5 Korollar. Sei S ein hyponormaler Operator auf H und $D := \sqrt{\frac{1}{2}[S^*, S]}$. Ist $S = X + iY$ die Zerlegung von S in Real- und Imaginärteil, so existieren $S_X^{\pm}(Y)$ und $\Gamma_X^{\pm}(D^2)$ im Sinne von Definition 2.5.1 und es gilt

$$S = X + i[S_X^{\pm}(Y) \mp \Gamma_X^{\pm}(D^2)].$$

Beweis. Nach (4.3) gilt $2D^2 = 2i[X, Y]$. Die Operatoren X, Y, D erfüllen also die Voraussetzungen aus Satz 2.5.3, weshalb $Y = S_X^{\pm}(Y) \mp \Gamma_X^{\pm}(D^2)$. □

Zum Abschluss dieses Abschnitts werden wir sehen, dass man von einem seminormalen Operator immer einen "maximalen" normalen Teil abspalten kann.

4.1.6 Definition. Ein seminormaler Operator S auf H heißt *rein*, falls der einzige Unterraum R von H, der S reduziert und auf dem S normal ist, der Nullraum ist.

4.1.7 Satz. Sei S ein seminormaler Operator auf H. Mit

$$\mathcal{M} := \{R \leq H : R \text{ abgeschlossen}, \ R \text{ reduziert } S, \ ran\ [S^*, S] \subseteq R\}$$

ist

$$H_1 := \bigcap_{R \in \mathcal{M}} R$$

der kleinste Unterraum, der S reduziert und $ran\ [S^*, S]$ enthält. Mit $H_2 := H_1^{\perp}$ ist dabei $S|_{H_1}$ ein reiner seminormaler Operator auf H_1 und $S|_{H_2}$ ein normaler Operator auf H_2.

Beweis. Zunächst sei bemerkt, dass $\mathcal{M} \neq \emptyset$, da $H \in \mathcal{M}$. H_1 ist als Durchschnitt abgeschlossener Unterräume abgeschlossen. Für $x \in H_1$ und $R \in \mathcal{M}$ gilt $Sx, S^*x \in R$, da R S-reduzierend ist, also $Sx, S^*x \in H_1$. Folglich ist H_1 S-reduzierend; siehe Lemma 2.1.2. Klarerweise gilt auch $H_1 \supseteq ran\ [S^*, S]$, womit H_1 der kleinste Unterraum mit diesen Eigenschaften ist.
Sei zunächst S hyponormal, also $[S^*, S]$ positiv. Für ein $f \in H_2$ gilt wegen $[S^*, S]f \in H_1$

$$(\sqrt{[S^*, S]}f, \sqrt{[S^*, S]}f) = (S^*S - SS^*f, f) = ([S^*, S]f, f) = 0,$$

woraus $[S^*, S]|_{H_2} = \sqrt{[S^*, S]}^2|_{H_2} = 0$ und damit $(S^*S)|_{H_2} = (SS^*)|_{H_2}$ folgt. Insbesondere ist $S|_{H_2}$ normal. Hier bezeichnet $\sqrt{[S^*, S]}$ wieder die eindeutige positive Quadratwurzel des positiven Operators $[S^*, S]$.
Für die Reinheit von $S|_{H_1}$ sei $L \subseteq H_1$ ein beliebiger S-reduzierender Unterraum von H_1, auf dem S normal ist. Für $f \in L$ gilt

$$0 = ([S^*, S]f, f) = (\sqrt{[S^*, S]}f, \sqrt{[S^*, S]}f),$$

womit $[S^*, S]f = \sqrt{[S^*, S]}^2 f = 0$. Für ein beliebiges $g \in H$ gilt $([S^*, S]g, f) = (g, [S^*, S]f) = 0$, weshalb $L \perp ran\ [S^*, S]$. Weil auch $H_2 \perp ran\ [S^*, S]$, bildet $L' := (L \oplus H_2)^{\perp}$ einen S-reduzierenden Unterraum, der $ran\ [S^*, S]$ enthält. Es folgt $L' \in \mathcal{M}$ und damit $H_1 \subseteq L'$, womit nur $L = \{0\}$ gelten kann. Also ist $S|_{H_1}$ ein reiner hyponormaler Operator.
Für cohyponormales S ist S^* hyponormal und man kann nach dem ersten Teil des Beweises H in H_1 und H_2 zerlegen. Nachdem ein Operator T genau dann normal ist, wenn T^* normal ist, gelten auch die geforderten Bedingungen an $S|_{H_1}$ und $S|_{H_2}$. □

4.2 Darstellung eines hyponormalen Operators

Sei $S = X+iY$ ein hyponormaler Operator auf dem separablen Hilbertraum H mit $\Re S = X$ und $\Im S = Y$. Gemäß Korollar 4.1.5 existieren $S_X^{\pm}(Y)$ und $\Gamma_X^{\pm}(D^2)$ und es gilt

$$S = X + i[S_X^{\pm}(Y) \mp \Gamma_X^{\pm}(D^2)],$$

wobei $D := \sqrt{\frac{1}{2}[S^*, S]} = \sqrt{i[X,Y]}$.
Das Ziel dieses Abschnitts ist es, eine konkretere Darstellung für diese Operatoren zu bekommen. Wir werden das in drei Schritten bewerkstelligen und setzen zunächst

$$R := \overline{ran\ D}.$$

Abhängig von diesem Unterraum wollen wir H in

$$H_1 := cls\{\bigcup_{k=0}^{\infty} X^k R\}$$

und $H_2 := H_1^{\perp}$ aufteilen. Offenbar ist H_1 abgeschlossen, X-invariant und wegen $X = X^*$ sogar X-reduzierend. Dementsprechend setzen wir $X_1 := X|_{H_1}$ und $X_2 := X|_{H_2}$.

Schritt 1: Die Darstellung von X_1. Wir wollen diesen Operator auf einem direkten Integralraum $Z_1 \leq L^2(\Omega, \lambda, R)$ mit einem kompakten Intervall $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ darstellen.
Dazu definieren wir den Operator $J : H \to L^2(\mathbb{R}, R)$ durch

$$(Jf)(t) := De^{-itX} f, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Wir zeigen, dass dieser Operator beschränkt ist, wobei $ker\ J = H_2$. Nach Korollar 4.1.5 existiert

$$\Gamma_X(D^2) := \Gamma_X^+(D^2) + \Gamma_X^-(D^2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} D^2 e^{-itX} dt$$

als beschränkter Operator, wobei dieses uneigentliche Integral im Sinne der starken Operatortopologie zu verstehen ist. Für ein f in H gilt wegen $(e^{-itX})^* = e^{itX}$ und $D^* = D$

$$\begin{aligned}\|Jf\|^2_{L^2(\mathbb{R},R)} &= \int_{-\infty}^{\infty} (De^{-itX} f, De^{-itX} f)_H\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itX} D^2 e^{-itX} f, f)_H\ dt = (\Gamma_X(D^2) f, f)_H \leq \|\Gamma_X(D^2)\| \|f\|_H^2.\end{aligned}$$

J ist also ein beschränkter Operator.
Ein Vektor $f \in H$ liegt genau dann in $ker\ J$, wenn

$$De^{-itX} f = 0 \qquad \lambda - f\ddot{u}.$$

Da $(t \mapsto De^{-itX} f)$ stetig ist, ist $f \in ker\ J$ äquivalent zu

$$0 = (De^{-itX} f, g) = (f, e^{itX} Dg), \qquad t \in \mathbb{R},\ g \in H.$$

Da H_1 auch e^{itX}-invariant ist, gilt $e^{itX}Dg \in H_1$. Also folgt aus $f \in H_2 = H_1^{\perp}$, dass $(f, e^{itX}Dg) = 0$, $g \in H$. Gilt andererseits diese Gleichung für ein $f \in H$ und alle $g \in H$, so folgt durch n-maliges Ableiten $0 = \frac{d^n}{dt^n}(f, e^{itX}Dg) = (f, (iX)^n e^{itX}Dg)$. Für $t = 0$ erhalten wir $0 = -i^n(f, (iX)^n Dg) = (f, X^n Dg)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $f \perp X^n R$, $n \in \mathbb{N}$, und folglich $f \perp cls\{\bigcup_{i=0}^{\infty} X^i R\} = H_1$. Insgesamt haben wir $ker\ J = H_2$ gezeigt.
Für den Translationsoperator $T_s \in L_b(L^2(\mathbb{R}, R))$ mit $s \in \mathbb{R}$,

$$(T_s h)(t) := h(t-s), \qquad t \in \mathbb{R},$$

gilt

$$(Je^{isX}f)(t) = De^{-itX}e^{isX}f = De^{-i(t-s)X}f = (Jf)(t-s) = (T_s Jf)(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

also

$$Je^{isX} = T_s J. \tag{4.4}$$

Wir sehen, dass $T_s(ran\ J) \subseteq ran\ J$, und folglich $T_s(\overline{ran\ J}) \subseteq \overline{T_s(ran\ J)} \subseteq \overline{ran\ J}$.
Sei $J = WK$ die polare Faktorisierung von J gemäß [Kal, Satz 1.5.15], mit positivem Operator $K = \sqrt{J^*J} \in L_b(H)$ und der partiellen Isometrie $W : H \to L^2(\mathbb{R}, R)$, wobei $ker\ W = (ran\ K)^{\perp}$ und $ran\ K = \overline{ran\ J}$. Wegen $(ran\ K)^{\perp} = ker\ K = ker\ J = H_2$ folgt $\overline{ran\ K} = (ker\ K)^{\perp} = H_1$, also ist $W|_{H_1}$ ein isometrischer Operator mit $ran\ W|_{H_1} = \overline{ran\ J}$ und $W|_{H_2} = 0$. Aus (4.4) erhalten wir

$$J^*Je^{isX} = J^*T_sJ = J^*T_{-s}^*J = (T_{-s}J)^*J = (Je^{-isX})^*J = e^{isX}J^*J. \tag{4.5}$$

e^{isX} kommutiert also mit J^*J und folglich auch mit K; siehe [WKB19, Satz 7.2.1.]. Daher gilt

$$We^{isX}f = We^{isX}Kg = WKe^{isX}g = T_sWKg = T_sWf, \qquad f = Kg \in ran\ K, s \in \mathbb{R}.$$

Da $ran\ K$ dicht in H_1 liegt, erhalten wir

$$(We^{isX})|_{H_1} = (T_sW)|_{H_1}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Sei $\hat{F}$ der Operatorlift der Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}, R)$ und $V := \hat{F}^*W : H \to L^2(\mathbb{R}, R)$. Da $\hat{F}$ wegen Proposition 3.4.4, (iii) und (iv) unitär ist, bildet V den Raum H_1 isometrisch auf einen bestimmten Unterraum Z_1 von $L^2(\mathbb{R}, R)$ ab, womit $V_1 := V|_{H_1 \to Z_1}$ unitär ist.
In Korollar 3.4.5 haben wir gesehen, dass $T_s\hat{F} = \hat{F}M_s$, wobei $M_s \in L_b(L^2(\mathbb{R}, R))$ definiert ist als $M_sh(t) := e^{ist}h(t)$. Es gilt also

$$(Ve^{isX})|_{H_1} = (\hat{F}^*We^{isX})|_{H_1} = (\hat{F}^*T_sW)|_{H_1} = (M_s\hat{F}^*W)|_{H_1} = (M_sV)|_{H_1}. \tag{4.6}$$

Wegen dieser Gleichung ist Z_1 für jedes s M_s-invariant und damit auch $M_s^* = M_{-s}$-invariant.

Für $f \in H_1$ hat die Funktion $(s \mapsto Ve^{isX}f = M_sVf)$ die Ableitung iVX_1f an der Stelle $s = 0$. Unter Verwendung von Lemma 2.3.2 gilt für $g \in L^2(\mathbb{R}, R)$

$$\begin{aligned}(\frac{d}{ds}M_sVf, g) &= \int_{\mathbb{R}} (\frac{d}{ds}e^{ist}Vf(t), g(t))_H \; d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{ds}e^{ist}(Vf(t), g(t))_H \; d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} ite^{ist}(Vf(t), g(t))_H \; d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} (itM_sVf(t), g(t))_H \; d\lambda(t).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Mit $F(t) := \frac{d}{ds}e^{ist}Vf(t) - itM_sVf(t)$ und

$$G(t) := \begin{cases} \frac{F(t)}{\|F(t)\|} \cdot e^{-t^2}, & \text{falls } F(t) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

gilt $G \in L^2(\mathbb{R}, R)$ und wir erhalten

$$0 = \int_{\mathbb{R}} (F(t), G(t)) \; d\lambda(t) = \int_{[F \neq 0]} \|F(t)\| \cdot e^{-t^2} \; d\lambda(t).$$

Infolge gilt $F = 0$ und daher $(t \mapsto itM_sVf(t)) = \frac{d}{ds}e^{ist}Vf(t)$. Insbesondere stimmt die Ableitung an der Stelle $s = 0$ mit $(t \mapsto itVf) \in Z_1$ überein. Definiert man für ein $h \in L^2(\mathbb{R}, R)$ mit $(t \mapsto th(t)) \in L^2(\mathbb{R}, R)$ wie üblich Λ durch

$$\Lambda h(t) := th(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

so existiert ΛVf und es gilt $VX_1f = \Lambda Vf$. Daraus folgt $V_1X_1V_1^* = \Lambda|_{Z_1} =: \Lambda_1$ und damit insbesondere, dass Z_1 ein Λ-reduzierender Unterraum ist, auf dem Λ einen beschränkten, überall definierten Operator darstellt.
Schließlich zeigen wir noch, dass alle $h \in Z_1$ außerhalb einer beschränkten Menge verschwinden. Wir setzen dazu $\Omega := [-2\|\Lambda_1\|_{L_b(Z_1)}, 2\|\Lambda_1\|_{L_b(Z_1)}]$ und zeigen

$$\|h \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\Omega}\| = 0 \tag{4.8}$$

für alle $h \in Z_1$. Dazu sei angenommen, dass $\|h \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\Omega}\| > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\Lambda_1^n h \in Z_1$ und

$$\begin{aligned}\|\Lambda_1^n h\|^2 &\geq \int_{\mathbb{R}\setminus\Omega} (|t^n| \|h(t)\|_H)^2 \; d\lambda(t) \\ &\geq (2\|\Lambda_1\|)^{2n} \int_{\mathbb{R}\setminus\Omega} \|h(t)\|_H^2 \; d\lambda(t) = \left(2^n \|\Lambda_1\|^n \|h \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\Omega}\|\right)^2.\end{aligned}$$

Mit hinreichend großem n gilt $2^n\|h \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\Omega}\| > \|h\|$ und folglich $\|\Lambda_1^n h\| \geq 2^n\|\Lambda_1\|^n\|h \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\Omega}\| > \|\Lambda_1\|^n\|h\|$, was zu $\|\Lambda_1^n h\| \leq \|\Lambda_1\|^n\|h\|$ im Widerspruch steht.
Wegen (4.8) gilt also $h = 0 \;\lambda - f\ddot{u}$ auf $\mathbb{R} \setminus \Omega$. Z_1 kann somit auf kanonische Art als Unterraum von $L^2(\Omega, \lambda, R)$ betrachtet werden. Bezeichnet P_{Z_1} die orthogonale Projektion auf Z_1 in $L^2(\Omega, \lambda, R)$, so kommutiert in weiterer Folge $\Lambda|_{L^2(\Omega,\lambda,R)}$ mit P_{Z_1}. Nach Korollar 3.3.9 gilt

$$P_{Z_1} = \int_{\Omega} \oplus P_{Z_1}(t) \; d\lambda(t) \tag{4.9}$$

und gemäß Lemma 3.3.5 ist $P_{Z_1}(t)$ für λ-fast alle t die orthogonale Projektion auf einen Raum $Z_1(t)$, wobei

$$Z_1 = \int_\Omega \oplus Z_1(t)\; d\lambda(t). \tag{4.10}$$

Zusammenfassend ist also X_1 unitär äquivalent zu Λ_1 auf dem Raum Z_1, der eine Darstellung wie in (4.10) besitzt.

Schritt 2: Die Darstellung von $\Gamma_X^\pm(D^2)$ auf Z_1. Aufgrund von

$$(\Gamma_X^\pm(D^2)f, f) = (\pm\int_0^{\pm\infty} e^{itX}D^2e^{-itX}f\; dt, f) = \pm\int_0^{\pm\infty} (e^{itX}D^2e^{-itX}f, f)\; dt \geq 0$$

für alle $f \in H$ ist $\Gamma_X^\pm(D^2)$ positiv und infolge selbstadjungiert. Wegen $e^{itX}D^2e^{-itX}g \in e^{itX}ran\ D \subseteq e^{itX}H_1 \subseteq H_1$ reduziert H_1 den Operator $\Gamma_X^\pm(D^2)$; siehe Lemma 2.1.2. Außerdem verschwindet er auf H_2, da für ein $g \in H_2$

$$(\sqrt{\Gamma_X^\pm(D^2)}g, \sqrt{\Gamma_X^\pm(D^2)}g) = (\Gamma_X^\pm(D^2)g, g) = \pm\int_0^{\pm\infty} (e^{itX}D^2e^{-itX}g, g)\; dt = 0, \tag{4.11}$$

weshalb $\Gamma_X^\pm(D^2)g = \sqrt{\Gamma_X^\pm(D^2)}^2 g = 0$.
Für ein $h \in L^2(\mathbb{R}, R)$ gilt

$$J^*h = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX}Dh(t)\; dt, \tag{4.12}$$

falls dieses uneigentliche Riemann-Integral existiert, denn für ein $g \in H$ gilt dann

$$\begin{aligned}(\int_{-\infty}^{\infty} e^{itX}Dh(t)\; dt, g)_H &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itX}Dh(t), g)_H\; dt \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (h(t), (Jg)(t))_H\; dt &= (h, Jg)_{L^2(\mathbb{R},R)} = (J^*h, g)_H.\end{aligned}$$

Für $h \in ran\ J$ existiert das Integral in (4.12), da für $f \in H$ mit $Jf = h$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itX}Dh(t)\; dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX}DDe^{-itX}f\; dt = \Gamma_X(D^2)f. \tag{4.13}$$

Kombinieren wir (4.12) und (4.13), so erhalten wir $J^*J = \Gamma_X(D^2)$. Bezeichnen wir mit M_+ bzw. M_- den Multiplikationsoperator mit der charakteristischen Funktion zu $\mathbb{R}_+$ bzw. $\mathbb{R}_-$, so gilt auch

$$J^*M_\pm J = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_\pm}(t)e^{itX}DDe^{-itX}dt = \int_{\mathbb{R}_\pm} e^{itX}D^2e^{-itX}\; dt = \Gamma_X^\pm(D^2).$$

Es sei bemerkt, dass diese Gleichung von rechts nach links gelesen werden sollte, da die Existenz des Integrals im zweiten Term die Darstellung von J^* wie in (4.12) garantiert.

Wegen $ran\ V = Z_1$ gilt $P_{Z_1}V = V$. Wir erinnern uns, dass $J = WK = \hat{F}\hat{F}^*WK = \hat{F}VK$ und folgern daraus

$$\begin{aligned} V_1[\Gamma_X^{\pm}(D^2)]|_{H_1}V_1^* &= V_1(J^*M_{\pm}J)|_{H_1}V_1^* \\ &= V_1K|_{H_1}V_1^*(P_{Z_1}\hat{F}^*M_{\pm}\hat{F})|_{Z_1}V_1K|_{H_1}V_1^* = B(P_{Z_1}P_{\pm})|_{Z_1}B, \end{aligned} \tag{4.14}$$

wobei $B := V_1K|_{H_1}V_1^* \in L_b(Z_1)$ und $P_{\pm} := (\hat{F}^*M_{\pm}\hat{F})$.
Wegen Gleichung (4.6) und weil e^{isX} gemäß (4.5) mit K kommutiert, gilt

$$\begin{aligned} BM_s|_{Z_1} &= V_1K|_{H_1}((M_{-s})|_{Z_1}V_1)^* = V_1K|_{H_1}(V_1(e^{-isX})|_{H_1})^* \\ &= V_1K|_{H_1}e^{isX}|_{H_1}V_1^* = V_1e^{isX}|_{H_1}K|_{H_1}V_1^* = M_s|_{Z_1}V_1K|_{H_1}V_1^* = M_s|_{Z_1}B. \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass - wie bereits bemerkt - e^{isX} den Raum H_1 und M_s Z_1 reduziert. Ähnlich wie in (4.7) sieht man, dass für $f \in Z_1$ die Ableitung von $(t \mapsto M_t f)$ an der Stelle $t = 0$ gleich Λf ist, womit B auch mit Λ_1 kommutiert. Nach Korollar 3.3.9 ist B infolge zerlegbar in

$$B = \int_{\Omega} \oplus B(t)\ d\lambda(t). \tag{4.15}$$

Ist M_{sgn} der Multiplikationsoperator mit $sgn(t)$ auf $L^2(\mathbb{R}, R)$, so folgt $P_+ - P_- = \hat{F}^*(M_+ - M_-)\hat{F} = \hat{F}^*M_{sgn}\hat{F}$. Laut Korollar 3.4.5 gilt $\hat{F}^*M_{sgn}\hat{F} = \hat{Q}$, wobei $\hat{Q}$ den Operatorlift der Hilberttransformation bezeichnet.
Also erhalten wir $P_+ - P_- = \hat{Q}$ und wegen $P_+ + P_- = I_{L^2(\mathbb{R},R)}$ auch $P_{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm \hat{Q})$. Zusammen mit (4.9), (4.14) und (4.15) folgt für den Operator

$$\Gamma_1^{\pm} := V_1[\Gamma_X^{\pm}(D^2)]|_{H_1}V_1^* = BP_{Z_1}\frac{1}{2}(I \pm \hat{Q})B = \frac{1}{2}[B^2 \pm BP_{Z_1}\hat{Q}B]$$

die Formel

$$\Gamma_1^{\pm}f(x) = \frac{1}{2}[B^2(x)f(x) \pm \frac{B(x)P_{Z_1}(x)}{\pi i}\int_G \frac{B(t)f(t)}{t-x}dt], \qquad f \in Z_1, \tag{4.16}$$

wobei hier das Integral rein formal zu verstehen ist, also $\frac{1}{i\pi}\int_G \frac{h(t)}{t-x}\ dt := (\hat{Q}h)(x)$.

Schritt 3: Darstellung von $S_X^{\pm}(Y)$ und X_2. Sei der Operator $X_2 := X|_{H_2}$ gemäß Satz 3.2.1 diagonalisiert auf dem Raum

$$Z_2 := \int_{\sigma(X_2)} \oplus Z_2(t)\ d\mu(t). \tag{4.17}$$

Weiters bezeichne Λ_2 den Operator Λ aus Satz 3.2.1 auf dem Raum in (4.17) und $V_2 : H_2 \to Z_2$ den zugehörigen unitären Operator, also

$$V_2X_2 = \Lambda_2V_2.$$

Wir bilden den Produktraum von Z_1 und Z_2,

$$Z_0 := Z_1 \oplus Z_2. \tag{4.18}$$

Der durch

$$V_0 := V_1 \oplus V_2 \tag{4.19}$$

definierte Operator von $H = H_1 \oplus H_2$ nach Z_0 ist dann unitär.
Der Operator $\Lambda_0 := V_0 X V_0^*$ hat damit die Matrixform

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

und die Operatoren $\Gamma_0^\pm := V_0 \Gamma_X^\pm(D^2) V_0^*$ auf Z_0 haben nach (4.11) die Form

$$\Gamma_0^\pm = \begin{pmatrix} \Gamma_1^\pm & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

Als letztes betrachten wir noch den Operator $S_X^\pm(Y)$ und definieren $A_0^\pm := V_0 S_X^\pm(Y) V_0^*$, wobei

$$A_0^\pm = \begin{pmatrix} A_1^\pm & A_{12}^\pm \\ A_{21}^\pm & A_2^\pm \end{pmatrix}$$

die Matrixdarstellung von A_0 bzgl. (4.18) ist. Aus Korollar 4.1.5 und (4.21) schließen wir auf

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_1^+ & A_{12}^+ \\ A_{21}^+ & A_2^+ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Gamma_1^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= V_0(S_X^+(Y) - \Gamma_X^+(D^2))V_0^* = V_0 Y V_0^* \\ &= V_0(S_X^-(Y) + \Gamma_X^-(D^2))V_0^* = \begin{pmatrix} A_1^- & A_{12}^- \\ A_{21}^- & A_2^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_1^- & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit auf $A_{12} := A_{12}^+ = A_{12}^-$, $A_{21} := A_{21}^+ = A_{21}^-$, sowie $A_2 := A_2^+ = A_2^-$. Aufgrund von Proposition 2.5.2, (ii) ist $A_0^\pm$ selbstadjungiert, weshalb $A_{21} = A_{12}^*$ gelten muss. Also erhalten wir

$$A_0^\pm = \begin{pmatrix} A_1^\pm & A_{12} \\ A_{12}^* & A_2 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Außerdem kommutieren laut Proposition 2.5.2, (i) die Operatoren $S_X^\pm(Y)$ und X, womit $A_0^\pm \Lambda_0 = V_0 S_X^\pm(Y) X V_0^* = V_0 X S_X^\pm(Y) V_0^* = \Lambda_0 A_0^\pm$ gilt. Daraus folgt

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 A_1^\pm & \Lambda_1 A_{12} \\ \Lambda_2 A_{12}^* & \Lambda_2 A_2 \end{pmatrix} = \Lambda_0 \begin{pmatrix} A_1^\pm & A_{12} \\ A_{12}^* & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^\pm & A_{12} \\ A_{12}^* & A_2 \end{pmatrix} \Lambda_0 = \begin{pmatrix} A_1^\pm \Lambda_1 & A_{12}\Lambda_2 \\ A_{12}^* \Lambda_1 & A_2 \Lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Die Operatoren $A_1^\pm, A_2$ kommutieren also mit Λ_1 bzw. Λ_2 und sind daher wegen Korollar 3.3.8 und Bemerkung 3.3.3 zerlegbar. Zudem gilt $A_{12}\Lambda_2 = \Lambda_1 A_{12}$.
Insgesamt erhalten wir

$$V_0 S V_0^* = V_0(X + i[S_X^\pm(Y) \mp \Gamma_X^\pm(D^2)])V_0^* = \Lambda_0 + i[A_0^\pm \mp \Gamma_0^\pm].$$

Die Resultate aus diesem Abschnitt werden in dem folgenden Satz zusammengefasst.

4.2.1 Satz. Sei $S = X + iY$ ein hyponormaler Operator auf einem separablen Hilbertraum H. Wir setzen $D := \sqrt{i[X,Y]}$, $R := \overline{ran\ D}$, $H_1 := cls\{\bigcup_{k=0}^{\infty} X^k R\}$, $H_2 := H_1^{\perp}$, $X_1 := X_{H_1}$, $X_2 := X_{H_2}$. Dann gibt es eine beschränkte Borelmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ und direkte Integralräume

$$Z_1 = \int_{\Omega} \oplus Z_1(t)\ d\lambda(t) \text{ und } \ Z_2 = \int_{\sigma(X_2)} \oplus Z_2(t)\ d\mu(t) \tag{4.23}$$

mit $Z_1(t), Z_2(t) \leq R$ und einem Borelmaß μ. Außerdem existieren unitäre Abbildungen $V_1 : H_1 \to Z_1$, $V_2 : H_2 \to Z_2$ derart, dass mit der Definition $V_0 := V_1 \oplus V_2$

$$V_0 S V_0^* = \Lambda_0 + i[A_0^{\pm} \mp \Gamma_0^{\pm}], \tag{4.24}$$

wobei Λ_0 die Form (4.20), $\Gamma_0^{\pm}$ die Form (4.21) und $A_0^{\pm}$ die Form (4.22) hat. In diesen Darstellungen sind Λ_1 und Λ_2 die Multiplikation mit $(t \mapsto t)$ auf den jeweiligen Räumen und $\Gamma_1^{\pm}$ hat eine Darstellung wie in (4.16).

Literaturverzeichnis

[Anoa] Anonym. Stackexchange frage. https://math.stackexchange.com/questions/1403808/given-self-adjoint-monotonic-increasing-sequence-in-lh-such-that-t-n. Zuletzt zugegriffen am 1.6.2020 um 11:30 Uhr.

[Anob] Anonym. Stackexchange frage. https://math.stackexchange.com/questions/2902083/showing-that-the-space-l2-omega-rightarrow-h-of-square-integrable-hilbert. Zuletzt zugegriffen am 1.6.2020 um 11:30 Uhr.

[Cla79] Kevin Clancey. Seminormal operators, 1979.

[Duo01] Javier Duoandikoetxea. *Fourier Analysis*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2001.

[Hal13] Brian C. Hall. *Quantum Theory for mathematicians*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2013.

[Kal] Michael Kaltenbäck. Funktionalanalysis 2. URL: https://www.asc.tuwien.ac.at/~funkana/skripten/main.pdf. Skriptum, WS 2019 Version: 1.6.2020 um 12:10 Uhr.

[Kus11] Norbert Kusolitsch. *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie*. De Gruyter Lehrbuch Series. Springer, Berlin, 2011.

[Sch18] Ben Schweizer. *Partielle Differentialgleichungen : Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer, Berlin, Heidelbert, 2018.

[Tak79] Masamichi Takesaki. *Theory of operator algebras I*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[WKB19] Harald Woracek, Michael Kaltenbäck, and Martin Blümlinger. Funktionalanalysis, 2019. Skriptum SS 2019.