"Rigged Hilbert spaces"

Morris Brooks

Contents

1 Einführung **2**
1.1 Die Notwendigkeit einer Hilbertraum Erweiterung 2

2 Stetige lineare Abbildungen zwischen Hilberträumen **2**
2.1 Kompakte Operatoren 2
2.2 Hilbert-Schmidt-Operatoren 3
2.3 Nukleare Operatoren 8

3 Direktes Integral von Hilberträumen **12**

4 Darstellung von selbstadjungierten Operatoren **17**
4.1 Zyklische Hilberträume 17
4.2 Selbstadjungierte Operatoren auf separablen Hilberträumen 21

5 Vollständigkeit in einem nuklearen Tripel **27**
5.1 Abzählbare Skalarprodukträume 27
5.2 Nukleare Räume 29
5.3 Punktauswerten in einem nuklearen Tripel 30
5.4 Verallgemeinerte Eigenvektoren 33

1 Einführung

1.1 Die Notwendigkeit einer Hilbertraum Erweiterung

Ein "rigged Hilbert space" oder in dieser Arbeit auch nukleares Tripel genannt, ist eine Erweiterung eines Hilbertraumes H zu einem Tripel (X, H, X'). Dabei ist X ein topologischer Vektorraum , sodass eine stetige Einbettung von X in H existiert. Des Weiteren soll das Bild dieser Einbettung dicht in H liegen, damit man mit Hilfe der Identifizierung von H mit H' auch H in X' einbetten kann. Anschaulich haben wir drei ineinander geschachtelte Räume.
Allgemein werden wir Hilberträume immer über dem Skalarkörper $\mathbb{C}$ betrachten. Des Weiteren benutzen wir die Konvention, dass Skalarprodukte $\langle .|. \rangle$ konjugiert-linear im ersten und linear im zweiten Argument sind.
Die hier vorgestellte Arbeit benutzt größtenteils die in [6] vorgestellten Definitionen und Konventionen. Weitere Literatur zu dem Thema findet man zum Beispiel unter [1] oder [7]. Zum Studium dieser Arbeit wird ein gewisses Grundwissen über Analysis und Funktionalanalysis vorausgesetzt-insbesondere im Zusammenhang mit Hilberträumen.
In der Quantenphysik identifiziert man physikalische Größen mit selbstadjungierten Operatoren. Der Erwartungswert einer solchen Messgröße A von einem physikalischen Zustand ψ ist gegeben durch die quadratische Form
$E_A(\psi) := \langle \psi | A\psi \rangle$, wobei $\langle .|. \rangle$ das Skalarprodukt auf H bezeichnet. Ein Axiom der Quantenmechanik (siehe [3] s. 65-66) postuliert, dass ein Zustand nach einer Messung der Größe A in einen Eigenzustand von A übergeht, wobei der dazugehörige Eigenwert mit dem gemessenem Ergebnis übereinstimmt.
Ausgehend von diesen Überlegungen ergeben sich zwei Probleme. Erstens muss A nicht auf ganz H definiert sein, weshalb man die physikalisch sinnvollen Zustände aus einer geeigneten Unterstruktur X wählen muss. Zweitens kann es sein, dass A überhaupt keine Eigenvektoren hat. Im Laufe dieser Arbeit werden wir erkennen, dass sich durch die Erweiterung von H zu einem nuklearen Tripel auch das Problem mit den Eigenvektoren in den Griff kriegen lässt. Die grundlegende Idee hierbei ist, dass wir unsere Untersuchungen auf verallgemeinerte Eigenvektoren ausweiten.

Definition 1.1. *Es sei $A : X \to X$ eine lineare Abbildung. Wir nennen $\xi \in X'$ einen verallgemeinerten Eigenvektor zum Eigenwert ω, falls*

$$\xi(Ax) = \omega \ \xi(x)$$

für alle x aus X gilt.

2 Stetige lineare Abbildungen zwischen Hilberträumen

2.1 Kompakte Operatoren

Wir werden uns des Öfteren auf die aus der Funktionalanalysis bekannte Polarzerlegung berufen.

Lemma 2.1 (Polarzerlegung). *Sind H_1, H_2 Hilberträume, und ist $T \in L_b(H_1, H_2)$, so ist $A := \sqrt{T^*T}$ ein positiver Operator und es existiert ein isometrischer Operator $U : \overline{range(A)} \to H_2$, sodass $T = U \circ A$.*

Definition 2.2. *Wir nennen einen Operator $T \in L_b(H_1, H_2)$ kompakt, falls jede beschränkte Menge auf eine präkompakte Menge abgebildet wird, oder äquivalent, falls die Menge $\overline{T(B_1(0))}$ kompakt ist. $B_1(0)$ bezeichnet dabei die Einheitskugel. Die Menge aller kompakten Operatoren nennen wir $K(H_1, H_2)$.*

Korollar 2.3. *Ist $T : H_1 \to H_2$ ein kompakter Operator, so existieren Orthonormalsysteme $\{v_k : k \in I\} \subset H_1$, $\{b_k : k \in I\} \subset H_2$ und $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k \in I$ mit $I = \{1, .., n\}$ oder $I = \mathbb{N}$, sodass*

$$T(x) = \sum_{k \in I} \lambda_k \langle v_k | x \rangle \, b_k \text{ für alle } x \in H_1.$$

Des Weiteren gilt $\lambda_k > 0$, $\lambda_m \geq \lambda_n$ für $k, n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ und $\lim_{k \to \infty} \lambda_k = 0$, falls I nicht endlich ist.

Beweis. Betrachten wir einen beliebigen kompakten Operator T, so können wir ihn gemäß 2.3 polar zerlegen. Mit $T = U \circ A$ ist auch $B := T^*T$ kompakt. Da B selbstadjungiert ist, folgt aus dem Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren die Existenz eines Orthonormalsystemes $\{v_k : k \in I\}$ und von reellen $\mu_k \neq 0$, $k \in I$, mit einer Indexmenge $I = \{1, .., n\}$ oder $I = \mathbb{N}$, sodass $B(x) = \sum_{k \in I} \mu_k \langle v_k | x \rangle \, v_k$. Weil B positiv ist, gilt $\mu_k > 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die μ_n so wählen, dass $\mu_m \geq \mu_n$ für $n \geq m$ ist. Wenn I nicht endlich ist, gilt außerdem $\lim_{k \to \infty} \mu_k = 0$. Für $\lambda_k := \sqrt{\mu_k}$ folgt

$$A(x) = \sqrt{B}(x) = \sum_{k \in I} \lambda_k \langle v_k | x \rangle \, v_k.$$

Der Operator T lässt sich dann schreiben als

$$T(x) = U\Big(\sum_{k \in I} \lambda_k \langle v_k | x \rangle \, v_k\Big) = \sum_{k \in I} \lambda_k \langle v_k | x \rangle \, U(v_k) = \sum_{k \in I} \lambda_k \langle v_k | x \rangle \, b_k,$$

wobei $b_k := U(v_k)$ auf Grund der Isometrie von U wieder ein Orthonormalsystem ist. Falls I nicht endlich ist, gilt auch $\lim_{k \to \infty} \lambda_k = 0$.

□

2.2 Hilbert-Schmidt-Operatoren

Definition 2.4. *Wir nennen einen kompakten Operator $T \in L_b(H_1, H_2)$ Hilbert-Schmidt-Operator, falls für die λ_k aus der Darstellung in Korollar 2.3 gilt $\sum_k \lambda_k^2 < +\infty$.*

Im Folgenden wird eine andere Herangehensweise zu Hilbert-Schmidt-Operatoren vorgestellt.

Lemma 2.5. *Seien $T \in L_b(H_1, H_2)$ und $\{f_k : k \in I\}$,$\{g_k : k \in I\}$ Orthonormalbasen von H_1. Dann gilt*

$$\sum_k \|T(g_k)\|^2 = \sum_k \|T(f_k)\|^2 \in [0, +\infty].$$

Insbesondere ist $\sum_k \|T(g_k)\|^2$ endlich, genau dann wenn es $\sum_k \|T(f_k)\|^2$ ist.

Beweis. Ist $\{h_j : j \in J\}$ eine beliebige Orthonormalbasis von H_2, so gilt

$$\begin{aligned}\sum_k \|T(f_k)\|^2 &= \sum_k \sum_j |\langle h_j | T(f_k) \rangle_{H_2}|^2 = \sum_j \sum_k |\langle T^* h_j | f_k \rangle_{H_1}|^2 = \sum_j \|T^* h_j\|^2 \\ &= \sum_j \sum_k |\langle T^* h_j | g_k \rangle_{H_1}|^2 = \sum_k \sum_j |\langle h_j | T(g_k) \rangle_{H_2}|^2 = \sum_k \|T(g_k)\|^2.\end{aligned}$$

Da alle Summanden positiv sind, dürfen wir die Summationsreihenfolge vertauschen. □

Wegen Lemma 2.5 macht folgende Definition Sinn.

Definition 2.6. *Es seien H_1, H_2 Hilberträume und $\{f_k : k \in I\}$ eine Orthonormalbasis von H_1. Dann definieren wir*

$$\mathcal{S}_2(H_1, H_2) := \{T \in L_b(H_1, H_2) : \sum_k \|T(f_k)\|^2 < +\infty\}.$$

Für alle $T \in \mathcal{S}_2(H_1, H_2)$ sei $\|T\|_2 := \sqrt{\sum_k \|T(f_k)\|^2}$.

Bemerkung 2.7. Wie man aus dem Beweis von Lemma 2.5 erkennt, ist $\sum_j \|T(f_j)\|^2 = \sum_j \|T^*(h_j)\|^2$, wobei $\{f_k : k \in I\}$ eine Orthonormalbasis von H_1 und $\{h_j : j \in J\}$ eine von H_2 ist. Damit gilt $T \in \mathcal{S}_2(H_1, H_2)$ genau dann, wenn $T^* \in \mathcal{S}_2(H_2, H_1)$.

Wir zeigen in Folge eine verallgemeinerte Version des Majorantenkriteriums.

Lemma 2.8. *Es sei J eine Menge, A ein Banachraum, B ein normierter Raum und $(a_j)_{j \in J}$, $(b_j)_{j \in J}$ Familien mit $a_j \in A$ beziehungsweise $b_j \in B$. Existiert $\sum_{j \in J} b_j$ und gilt für jede endliche Teilmenge $M \subset J$*

$$\| \sum_{j \in M} a_j \|_A \leq \| \sum_{j \in M} b_j \|_B$$

so existiert auch $\sum_{j \in J} a_j$ und es gilt $\| \sum_{j \in J} a_j \|_A \leq \| \sum_{j \in J} b_j \|_B$.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, dass $\sum_{j \in M} b_j$ gegen ein $b \in B$ über der gerichteten Menge der endlichen Teilmengen von J konvergiert. Für alle $\epsilon > 0$ existiert in Folge ein endliches $M \subset J$, sodass für alle endliche N mit $M \subset N$

$$\| \sum_{j \in N \setminus M} b_j \|_B = \| \sum_{j \in N} b_j - \sum_{j \in M} b_j \|_B < \epsilon$$

gilt. Für endliche $X, Y \supset M$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\|\sum_{j\in X} a_j - \sum_{j\in Y} a_j\|_A &\leq \|\sum_{j\in X\setminus M} a_j\|_A + \|\sum_{j\in Y\setminus M} a_j\|_A \\ &\leq \|\sum_{j\in X\setminus M} b_j\|_B + \|\sum_{j\in Y\setminus M} b_j\|_B < 2\cdot\epsilon.\end{aligned}$$

Damit ist $\sum_{j\in M} a_j$ ein Cauchy-Netz und wegen der Vollständigkeit von A existiert $\sum_{j\in J} a_j$. □

Satz 2.9. *Für Hilberträume H_1, H_2 sei $\{f_k : k \in I\}$ eine Orthonormalbasis von H_1, $\{g_k : k \in J\}$ eine solche von H_2 und bezeichne ξ das Zählmaß auf $I \times J$. Dann ist*

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{S}_2(H_1, H_2) & \to L^2(I\times J, \xi) \\ \qquad\qquad T & \mapsto (\langle g_j | T(f_i)\rangle)_{(i,j)\in I\times J}\end{cases}$$

ein isometrischer Isomorphismus, wenn man $\mathcal{S}_2(H_1, H_2)$ mit der $\|.\|_2$-Norm versieht. Des Weiteren gilt $\|T\|_{L_b(H_1,H_2)} \leq \|T\|_{\mathcal{S}_2(H_1,H_2)}$ für ein $T \in \mathcal{S}_2(H_1, H_2)$.

Beweis. Für ein $T \in \mathcal{S}_2(H_1, H_2)$ gilt

$$\|\Phi(T)\|_{L^2}^2 = \sum_i \sum_j |\langle g_j | T(f_i)\rangle|^2 = \sum_i \|T(f_i)\|^2 = \|T\|_2^2. \tag{1}$$

Die Abbildung Φ ist also eine isometrische und damit auch injektive Abbildung nach $L^2(I \times J, \xi)$. Bezüglich der Surjektivität sei zunächst bemerkt, dass wegen der Chauchy-Schwarz Ungleichung für $\phi \in L^2(I \times J, \xi)$ und einem endlichen $M \subset I \times J$

$$\begin{aligned}\|\sum_{(i,j)\in M} \phi(i,j)\langle f_i|x\rangle g_j\|^2 &= \sum_{j\in J} \|\sum_{i:(i,j)\in M} \phi(i,j)\langle f_i|x\rangle g_j\|^2 \\ &= \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i:(i,j)\in M} |\phi(i,j)\langle f_i|x\rangle|\Big)^2 \\ &\leq \sum_{j\in J}(\sum_{i:(i,j)\in M} |\phi(i,j)|^2)(\sum_{i:(i,j)\in M} |\langle f_i|x\rangle|^2) \\ &\leq \|x\|^2 \sum_{(i,j)\in M} |\phi(i,j)|^2 < +\infty\end{aligned}$$

gilt. Damit ist die Reihe $\sum_{(i,j)\in I\times J} \|x\|^2|\phi(i,j)|^2$ im Sinne des Lemmas 2.8 eine konvergente Majorante von $\sum_{(i,j)\in I\times J} \phi(i,j)\langle f_i|x\rangle g_j$. Es folgt, dass

$$T(x) := \sum_{(i,j)\in I\times J} \phi(i,j)\langle f_i|x\rangle g_j$$

wohldefiniert ist. Dabei gilt $\|T\|_{L_b(H_1,H_2)} \leq \|\phi\|_{L^2} < +\infty$, also $T \in L_b(H_1, H_2)$. Gemäß unserer Konstruktion gilt $\langle g_j | T(f_i) \rangle = \phi(i,j)$ und damit

$$\sum_i \|T(f_i)\|^2 = \sum_i \sum_j |\phi(i,j)|^2 = \|\phi\|_{L^2}^2 < +\infty.$$

Es folgt $T \in \mathcal{S}_2(H_1, H_2)$ und $\Phi(T) = \phi$. Wieder wegen (1) gilt $\|T\|_{L_b(H_1,H_2)} \leq \|\Phi(T)\|_{L^2} = \|T\|_{\mathcal{S}_2(H_1,H_2)}$.

□

Korollar 2.10. *$\mathcal{S}_2(H_1, H_2)$ ist ein Banachraum.*

Lemma 2.11. *Die Elemente aus $\mathcal{S}_2(H_1, H_2)$ sind kompakte Operatoren. Außerdem gilt*

$$\mathcal{S}_2(H_1, H_2) = \overline{\{T \in L_b(H_1, H_2) : dim(T(H_1)) < \infty\}}^{\|.\|_2}.$$

Beweis. Für ein $f \in L^2(I \times J, \xi \otimes \xi)$ können nur abzählbar viele Einträge ungleich Null sein. Die Menge $M := \{(i,j) \in I \times J : f_{(i,j)} \neq 0\}$ ist also abzählbar. Wir wählen eine aufsteigende Mengenfolge $M_N \subset I \times J$, $N \in \mathbb{N}$, bestehend aus endlichen Mengen mit $M = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} M_N$. Bezeichnen wir mit $\mathbb{1}_B$ die Indikator-Funktion einer Menge B, so folgt

$$f = \mathbb{1}_M f = \lim_{N \to \infty} \mathbb{1}_{M_N} f,$$

wobei die Konvergenz in $L^2(I \times J, \xi)$ bezüglich $\|.\|_2$ gilt. Ist Φ wie in Satz 2.9 und $f = \Phi(T)$ für ein $T \in \mathcal{S}_2(H_1, H_2)$, und setzen wir $T_N := \Phi^{-1}(\mathbb{1}_{M_N} \Phi(T))$, so erhalten wir $T = \lim_{N \to \infty} T_N$. Aus Satz 2.9 folgt, dass T_N auch bezüglich der Operator-Norm gegen T konvergiert. Wir können T_N folgendermaßen darstellen

$$T_N = \sum_{(i,j) \in I \times J} \Phi(T_N)(i,j) \langle f_i | x \rangle \, g_j = \sum_{(i,j) \in M_N} \Phi(T)(i,j) \langle f_i | x \rangle \, g_j.$$

Da M_N endlich ist, hat T_N endlichdimensionales Bild. Damit ist T als Grenzwert von Operatoren mit endlichdimensionalem Bild kompakt.
Wegen $\lim_{N \in \mathbb{N}} \|T - T_N\|_2 = 0$ gilt

$$\mathcal{S}_2(H_1, H_2) \subset \overline{\{T \in L_b(H_1, H_2) : dim(T(H_1)) < \infty\}}^{\|.\|_2}.$$

Wir betrachten einen Operator $T \in L_b(H_1, H_2)$ mit endlichdimensionalem Bild und wählen eine orthonormale Basis $\{g_1, .., g_n\} \subset H_2$ von $T(H_1)$. Es folgt

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle g_k | T(x) \rangle \, g_k = \sum_{k=1}^{n} \langle T^*(g_k) | x \rangle \, g_k.$$

Im nächsten Schritt wählen wir eine Orthonormalbasis $\{f_1, .., f_m\}$ von $span\{T^*(g_k) : k = 1..n\}$ und erweitern diese zu einer Orthonormalbasis F von H_1. Wir erhalten

$$\|T\|_2^2 = \sum_{f \in F} \|T(f)\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|T(f_k)\|^2 < +\infty.$$

Damit sind Operatoren mit endlichdimensionalem Bild auch in $\mathcal{S}_2(H_1, H_2)$. Da der Raum der Hilbert-Schmidt-Operatoren vollständig ist, gilt sogar

$$\overline{\{T \in L_b(H_1, H_2) : dim(T(H_1)) < \infty\}}^{\|.\|_2} \subset \mathcal{S}_2(H_1, H_2).$$

□

Satz 2.12. *Seien H_1, H_2 Hilberträume. Die Elemente aus $\mathcal{S}_2(H_1, H_2)$ sind genau die Hilbert-Schmidt-Operatoren zwischen H_1 und H_2.*

Beweis. Ist T ein Hilbert-Schmidt-Operator, so lässt er sich gemäß Korollar 2.3 schreiben als

$$T(x) = \sum_{k \in I} \lambda_k \langle v_k | x \rangle b_k,$$

wobei $\{v_k : k \in I\}, \{b_k : k \in I\}$ Orthonormalsysteme der jeweiligen Räume sind. Des Weiteren gilt $\sum_k \lambda_k^2 < +\infty$ mit $\lambda_k > 0$. Wir können $\{v_k : k \in I\}$ zu einer Orthonormalbasis E erweitern. Damit gilt

$$\sum_{v \in E} \|T(v)\|^2 = \sum_{j \in I} \|T(v_j)\|^2 = \sum_j \sum_k |\lambda_k \langle v_k | v_j \rangle|^2 = \sum_j \lambda_j^2 < +\infty;$$

also $T \in S_2(H_1, H_2)$. Gehen wir umgekehrt davon aus, dass $T \in \mathcal{S}_2(H_1, H_2)$ ist, so muss T nach Lemma 2.11 bereits kompakt sein. Wir können es also gemäß Korollar 2.3 schreiben als $T(x) = \sum_k \lambda_k \langle v_k | x \rangle b_k$. Wegen $\sum_j \lambda_j^2 = \sum_j \|T(v_j)\|^2 < +\infty$ ist T ein Hilbert-Schmidt-Operator.

□

Satz 2.13. *Es seien H_1, H_2, H_3 Hilberträume. Für Operatoren $B_1 \in L_b(H_2, H_3)$, $B_2 \in L_b(H_1, H_2)$, $S_1 \in \mathcal{S}_2(H_1, H_2)$ und $S_2 \in \mathcal{S}_2(H_2, H_3)$ gilt*

$$B_1 \circ S_1 \in \mathcal{S}_2(H_1, H_3) \text{ und } S_2 \circ B_2 \in \mathcal{S}_2(H_1, H_3).$$

Beweis. Aus

$$\sum_k \|B_1(S_1(f_k))\|^2 \leq \|B_1\| \sum_k \|S_1(f_k)\|^2 < +\infty$$

folgt $B_1 \circ S_1 \in \mathcal{S}_2(H_1, H_3)$.
Für $B_2 \in B(H_1, H_2)$ und $S_2 \in S_2(H_2, H_3)$ gilt gemäß Bemerkung 2.7 auch $B_2^* \in B(H_2, H_1)$ und $S_2^* \in S_2(H_3, H_2)$. Aus dem bereits bewiesenen folgt
$(S_2 \circ B_2)^* = B_2^* \circ S_2^* \in \mathcal{S}_2(H_3, H_1)$. Wieder wegen Bemerkung 2.7 ist damit auch

$$S_2 \circ B_2 = ((S_2 \circ B_2)^*)^* \in \mathcal{S}_2(H_1, H_3).$$

□

2.3 Nukleare Operatoren

Definition 2.14. *Es seien H_1, H_2 Hilberträume und $T : H_1 \to H_2$ ein kompakter Operator. Wir schreiben T wie in Korollar 2.3, und nennen T nuklear, falls $\sum_k \lambda_k < +\infty$.*

Lemma 2.15. *Nukleare Operatoren sind Hilbert-Schmidt-Operatoren.*

Beweis. Da aus $\sum_k \lambda_k < +\infty$ sofort $\sum_k \lambda_k^2 < +\infty$ folgt, ist jeder nukleare Operator auch ein Hilbert-Schmidt-Operator.

□

Lemma 2.16. *Ein beschränkter Operator ist genau dann nuklear, wenn er die Hintereinanderausführung von zwei Hilbert-Schmidt-Operatoren ist.*

Beweis. Ist T nuklear und sei $T = U \circ A$ die Polarzerlegung gemäß Lemma 2.1, so gilt für die Eigenwerte λ_k von A

$$\sum_k \lambda_k < +\infty.$$

Damit erhalten wir für die Eigenwerte μ_k von $\sqrt{A}$, dass $\sum_k \mu_k^2 = \sum_k \lambda_k < +\infty$. Also ist $\sqrt{A}$ und wegen Satz 2.13 auch $U \circ \sqrt{A}$ ein Hilbert-Schmidt-Operatoren. Schließlich gilt $T = (U \circ \sqrt{A}) \circ \sqrt{A}$.
Gilt umgekehrt $T = A \circ B$ mit $A \in \mathcal{S}_2(H_2, H_3)$ und $B \in \mathcal{S}_2(H_1, H_2)$, wobei $A = \sum_k \mu_k \langle w_k | . \rangle \, d_k$ und $T = \sum_k \lambda_k \langle v_k | . \rangle \, b_k$ die jeweiligen Darstellungen gemäß Korollar 2.3 sind, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_n \lambda_n &= \sum_n \langle b_n | AB(v_n) \rangle = \sum_n \sum_k \mu_k \langle w_k | B v_n \rangle \langle b_n | d_k \rangle \\
&= \sum_n \sum_k \langle w_k | B v_n \rangle \langle b_n | A w_k \rangle \leq \frac{1}{2} \sum_n \sum_k 2 \, | \langle w_k | B v_n \rangle | \, | \langle b_n | A w_k \rangle | \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{k,n} \Big(| \langle w_k | B v_n \rangle |^2 + | \langle b_n | A w_k \rangle |^2 \Big) = \frac{1}{2} (\|A\|_2 + \|B\|_2) < +\infty.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass man beim Summieren von positiven Summanden nicht auf die Reihenfolge achten muss. T ist also nuklear.

□

Definition 2.17. *Wir bezeichnen die Menge aller Orthonormalsysteme auf einem Hilbertraum H mit $\mathfrak{O}(H)$. Für Hilberträume H_1, H_2 und Operatoren $A \in L_b(H_1, H_2)$ definieren wir*

$$\|A\|_1 := \sup\{\sum_{k \in I} |\langle g_k|Af_k\rangle| : (g_k)_k \in \mathfrak{O}(H_2) \text{ und } (f_k)_k \in \mathfrak{O}(H_1)\}$$

und $\mathcal{S}_1(H_1, H_2) := \{A \in L_b(H_1, H_2) : \|A\|_1 < +\infty\}$.

Lemma 2.18. $\|.\|_1$ *ist eine Norm auf* $\mathcal{S}_1(H_1, H_2)$.

Beweis. Offensichtlich gilt $0 \leq \|.\|_1 < +\infty$ und $\|\lambda A\|_1 = |\lambda|\|A\|_1$.
Wir betrachten einen Operator, für den $\|A\|_1 = 0$ gilt. Für alle $f \in H_1 \setminus \{0\}$ und $g \in H_2 \setminus \{0\}$ sind $\{\frac{f}{\|f\|}\}$ und $\{\frac{g}{\|g\|}\}$ orthonormal Systeme. Es gilt also

$$\langle \frac{g}{\|g\|}|A(\frac{f}{\|f\|})\rangle \leq \|A\|_1 = 0,$$

woraus $\langle g|Af\rangle = 0$ für alle $f \in H_1$ und $g \in H_2$, und somit $A = 0$ folgt.
Die Dreiecksungleichung gilt wegen

$$\begin{aligned}\|A + B\|_1 &= \sup \sum_k |\langle g_k|Af_k\rangle + \langle g_k|Bf_k\rangle| \\ &\leq \sup \sum_k |\langle g_k|Af_k\rangle| + \sup \sum_k |\langle g_k|Bf_k\rangle| \leq \|A\|_1 + \|B\|_1.\end{aligned}$$

□

Lemma 2.19. *Für einen kompakten Operator $T = \sum_k \lambda_k \langle v_k|.\rangle b_k$ gilt $\sum_k \lambda_k = \|T\|_1$. Insbesondere ist jeder nuklearer Operator auch ein Element von $\mathcal{S}_1(H_1, H_2)$.*

Beweis. Man sieht sofort, dass $\sum_k \lambda_k = \sum_k |\langle b_k|Tv_k\rangle| \leq \|T\|_1$. Für die umgekehrte Ungleichung betrachte man für $(f_n)_n \in \mathfrak{O}(H_1)$ und $(g_n)_n \in \mathfrak{O}(H_2)$

$$\begin{aligned}\sum_n |\langle g_n|Tf_n\rangle| &\leq \sum_n \sum_k \lambda_k |\langle v_k|f_n\rangle \langle g_n|b_k\rangle| \\ &\leq \sum_k \lambda_k \frac{1}{2} \sum_n (|\langle v_k|f_n\rangle|^2 + |\langle g_n|b_k\rangle|^2) \leq \sum_k \lambda_k.\end{aligned}$$

Damit folgt $\|T\|_1 \leq \sum_k \lambda_k$.

□

Lemma 2.20. *Die Operatoren $T \in S_1(H_1, H_2)$ sind kompakt.*

Beweis. Es sei $T \in \mathcal{S}_1(H_1, H_2)$. Wir zeigen zunächst, dass A aus der Polarzerlegung $T = U \circ A$ ein diskretes Spektrum hat. Dies gilt sicher, wenn wir nachweisen können, dass für alle $\alpha > 0$ die Menge $\sigma(A) \cap [\alpha, +\infty)$ endlich ist.
Gibt es in der Menge $\sigma(A) \cap (\alpha, +\infty)$ zumindest k verschiedene Punkte $\lambda_1, .., \lambda_k$, so sind die Mengen $\Delta_i := (\lambda_i - \delta, \lambda_i + \delta)$ paarweise disjunkt, wenn nur δ klein genug ist. Wir wählen es auch derart, dass $\lambda_i - \delta > \alpha$. Nehmen wir nun an, dass $E(\lambda_i - \delta, \lambda_i + \delta) = 0$, so folgt

$$\begin{aligned} I =& E((\lambda_i - \delta, \lambda_i + \delta)^c) = \int_{\mathbb{R} \setminus (\lambda_i - \delta, \lambda_i + \delta)} \frac{t - \lambda_i}{t - \lambda_i} \, \mathrm{d}E(t) \\ &= (A - \lambda_i I) \int_{\mathbb{R} \setminus (\lambda_i - \delta, \lambda_i + \delta)} \frac{1}{t - \lambda_i} \, \mathrm{d}E(t) = \int_{\mathbb{R} \setminus (\lambda_i - \delta, \lambda_i + \delta)} \frac{1}{t - \lambda_i} \, \mathrm{d}E(t)(A - \lambda_i I). \end{aligned}$$

Damit ist $A - \lambda_i I$ invertierbar, was im Widerspruch zu $\lambda_i \in \sigma(A) \cap [\alpha, +\infty)$ steht.
Wir finden also für $i = 1, .., k$ ein normiertes f_i im Bild von $E(\lambda_i - \delta, \lambda_i + \delta)$. Wegen

$$A(\int_{(\lambda_i - \delta, \lambda_i + \delta)} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}E(t) f_i) = E(\lambda_i - \delta, \lambda_i + \delta) f_i = f_i,$$

liegen alle f_i im Bild von A. Wir definieren $g_i := U(f_i)$. Da auf Grund der Disjunktheit der Intervalle $(\lambda_i - \delta, \lambda_i + \delta)$ die f_i und infolge g_i ein Orthonormalsystem bilden, gilt

$$\|T\|_1 \geq \sum_{i=1}^{k} \langle g_i | T(f_i) \rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle f_i | A(f_i) \rangle \geq k\alpha.$$

Es folgt $k \leq \frac{\|T\|_1}{\alpha}$. Damit kann $\sigma(A) \cap (\alpha, +\infty)$ höchstens endlich sein. Insbesondere gilt $\sigma(A) = \{\lambda_k : k \in J\}$ mit einem höchstens abzählbaren J. Wir erhalten

$$A = \int_{\{\lambda_k : k \in J\}} t \, \mathrm{d}E = \sum_{k \in J} \lambda_k E(\{\lambda_k\}).$$

Können wir noch nachweisen, dass das Bild von $E(\{\lambda_k\})$ endliche Dimension hat, so ist A und damit auch T kompakt. Wir wählen ein orthonormal System $(f_k)_{k=1,..,n}$ von $ran(E(\{\lambda_m\}))$. Auch hier gilt wieder $f_k \in ran(A)$. Definieren wir $g_k := U(f_k)$, so folgt

$$n\lambda_m = \sum_{j=1}^{n} \langle f_j | A(f_j) \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle g_j | T(f_j) \rangle \leq \|T\|_1,$$

also $n \leq \frac{\|T_1\|}{\lambda_m}$. Die Menge $ran(E(\{\lambda_m\}))$ ist somit von endlicher Dimension.

□

Korollar 2.21. *Die Menge $\mathcal{S}_1(H_1, H_2)$ besteht genau aus den nuklearen Operatoren, die von H_1 nach H_2 abbilden. Dabei gilt $\|T\|_1 = \sum_k \lambda_k$.*

Beweis. Wie in Lemma 2.19 gezeigt wurde, stimmen für kompakte Operatoren T die Begriffe nuklearer Operator und $\mathcal{S}_1(H_1, H_2)$ überein, und es gilt $\|T\|_1 = \sum_k \lambda_k$. Da ein nuklearer Operator T per Definition kompakt ist, folgt $T \in \mathcal{S}_1(H_1, H_2)$. Umgekehrt haben wir in Lemma 2.20 gesehen, dass ein Operator $S \in \mathcal{S}_1(H_1, H_2)$ kompakt ist.

□

Bemerkung 2.22. Für Hilberträume H_1, H_2 gilt

$$\mathcal{S}_1(H_1, H_2) \subset \mathcal{S}_2(H_1, H_2) \subset K(H_1, H_2).$$

Lemma 2.23. *Es seien H_1, H_2 Hilberträume, $(T_j)_{j\in J}$ ein Netz in $\mathcal{S}_1(H_1, H_2)$ und $T \in \mathcal{S}_1(H_1, H_2)$ mit $T = \lim_j T_j$ bezüglich $\|.\|_1$. Unter diesen Voraussetzungen folgt $T = \lim_j T_j$ bezüglich $\|.\|_2$.*

Beweis. Sei also $T, T_j \in \mathcal{S}_1$ mit $\lim_j \|T - T_j\|_1 = 0$. Dann gibt es einen Index $j_0 \in J$, sodass $\|T - T_j\|_1 < 1$ für alle $j \geq j_0$. Schreiben wir $T - T_j = \sum_k \lambda_k \langle v_k|.\rangle\, b_k$ gemäß Korollar 2.3, so folgt $\lambda_k \leq \sum_n \lambda_n < 1$. Damit erhalten wir $\sum_k \lambda_k^2 \leq \sum_k \lambda_k = \|T - T_j\|_1$, beziehungsweise $\|T - T_j\|_2^2 \leq \|T - T_j\|_1$. Also konvergiert das Netz T_j auch bezüglich der Hilbert-Schmidt-Norm gegen T.

□

Satz 2.24. *$\mathcal{S}_1(H_1, H_2)$ ist vollständig, und es gilt*

$$\mathcal{S}_1(H_1, H_2) = \overline{\{T \in L_b(H_1, H_2) : dim(T) < \infty\}}^{\|.\|_1}.$$

Beweis. Ist T_j eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{S}_1(H_1, H_2), \|.\|_1)$, dann gilt $\lim_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \|T_j - T_i\|_1 = 0$. Nach Lemma 2.23 gilt dann auch $\lim_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \|T_j - T_i\|_2 = 0$. Soweit ist T_j eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{S}_2, \|.\|_2)$. In Satz 2.9 wurde gezeigt, dass $\|.\| \leq \|.\|_2$. Folglich konvergiert T_j bezüglich der Operatornorm gegen ein T. Damit gilt $|\langle g_k|Tf_k\rangle| = \lim_j |\langle g_k|T_j(f_k)\rangle|$. Betrachten wir nun zwei Orthonormalsysteme $(f_k)_{k\in J} \in \mathfrak{O}(H_1)$ und $(g_k)_{k\in J} \in \mathfrak{O}(H_2)$, so folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k\in J} |\langle g_k|(T - T_i)f_k\rangle| &= \sum_{k\in J} \liminf_{j\to\infty} |\langle g_k|(T_j - T_i)f_k\rangle| \\ &\leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{k\in J} |\langle g_k|(T_j - T_i)f_k\rangle| \underset{i\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

Für alle $\epsilon > 0$ existiert also ein Index $n((f_k)_{k\in J}, (g_k)_{k\in J})$, sodass für alle $i \geq n\big((f_k)_{k\in J}, (g_k)_{k\in J}\big)$ gilt $\sum_{k\in J} |\langle g_k|(T - T_i)f_k\rangle| < \frac{\epsilon}{2}$. Des Weiteren existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $i, j \geq n_0$ gilt $\|T_i - T_j\|_1 < \frac{\epsilon}{2}$. Definieren wir $m := \max\{n_0, n((f_k)_{k\in J}, (g_k)_{k\in J})\}$, so folgt für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}\sum_{k\in J} |\langle g_k|(T - T_n)f_k\rangle| &\leq \sum_{k\in J} |\langle g_k|(T - T_m)f_k\rangle| + \sum_{k\in J} |\langle g_k|(T_m - T_n)f_k\rangle| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \|T_n - T_m\|_1 < \epsilon.\end{aligned}$$

Da n_0 nicht von $(f_k)_{k\in J}, (g_k)_{k\in J}$ abhängt, folgt $\|T - T_n\|_1 \leq \epsilon$, womit die Vollständigkeit bewiesen ist. Wegen $T = \lim_N \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \langle v_k|.\rangle\, b_k$ gilt $\|T - T_N\|_1 = \sum_{k>N} \lambda_k$. Wir können also jeden nuklearen Operator durch eine Folge von Abbildungen mit endlichdimensionalem Bild approximieren.
Betrachten wir nun eine stetige Abbildung $T : H_1 \to V \subset H_2$, wobei V endlichdimensional ist. Weil sowohl die Identität $I_V : V \to V$ wie auch T endlichdimensionales Bild haben, sind sie beide Hilbert-Schmidt-Operatoren. Damit ist $T = I_V \circ T$ als Zusammensetzung von Hilbert-Schmidt-Operatoren gemäß Lemma 2.16 nuklear.

□

Satz 2.25. *Es seien H_1, H_2, H_3 Hilberträume. Für Operatoren $B_1 \in L_b(H_2, H_3)$, $B_2 \in L_b(H_1, H_2)$, $S_1 \in \mathcal{S}_1(H_1, H_2)$ und $S_2 \in \mathcal{S}_1(H_2, H_3)$ gilt:*

$$B_1 \circ S_1 \in \mathcal{S}_1(H_1, H_3) \text{ und } S_2 \circ B_2 \in \mathcal{S}_1(H_1, H_3).$$

Beweis. Wenn S_i ein nuklearer Operator ist, können wir ihn gemäß Lemma 2.16 in zwei Hilbert-Schmidt-Operatoren $S_i = T_i \circ R_i$ zerlegen. Da das Produkt von einem Hilbert-Schmidt-Operator und einem beschränkten Operator gemäß Satz 2.13 wieder Hilbert-Schmidt ist, sind für einen beschränkten Operator B_i die Ausdrücke $B_1 \circ S_1 = (B_1 \circ T_1) \circ R_1$ und $S_2 \circ B_2 = T_2 \circ (R_2 \circ B_2)$ wieder Produkte von Hilbert-Schmidt-Operatoren, und damit gemäß Lemma 2.16 nuklear.

□

3 Direktes Integral von Hilberträumen

Wir werden eine Methode kennenlernen, mit der man aus einer Familie von Hilberträumen einen neuen konstruieren kann. Wir bezeichnen hier mit H immer einen separablen Hilbertraum.

Bemerkung 3.1. Aus der Funktionalanalysis ist bekannt, dass ein separabler Hilbertraum eine abzählbare Orthonormalbasis hat.

Mit dem direkten Integral wollen wir eine Verallgemeinerung der orthogonalen Summe vorstellen, ähnlich wie das Integral bezüglich eines Maßes eine Verallgemeinerung einer Summe ist.

Definition 3.2. *Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $M(\mathbb{C})$ die Menge aller Borel-messbaren Funktionen $g : \Omega \to \mathbb{C}$. Wir nennen eine Funktion $f : \Omega \to H$ messbar, falls*

$$(\omega \mapsto \langle h|f(\omega)\rangle) \in M(\mathbb{C})$$

für alle $h \in H$ gilt. Wir bezeichnen mit $M(H)$ die Menge aller messbaren Funktionen $f : \Omega \to H$. Des Weiteren ist $L_1(\mu)$ die Menge der messbaren Funktionen $f \in M(\mathbb{C})$ mit $\int |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty$.

Lemma 3.3. *Für messbare Funktionen $f, g : \Omega \to H$ gilt*

$$(\omega \mapsto \langle f(\omega)|g(\omega)\rangle) \in M(\mathbb{C}) \text{ und } (\omega \mapsto \|f(w)\|^2) \in M(\mathbb{C}).$$

Beweis. Gemäß Bemerkung 3.1 existiert eine abzählbare Orthonormalbasis $\{e_j : j \in I\}$ mit $I \subset \mathbb{N}$. Die Funktion

$$\langle f(.)|g(.)\rangle = \sum_{j \in I} \langle f(.)|e_j\rangle \langle e_j|g(.)\rangle$$

ist als abzählbare und punktweise konvergente Summe der messbaren Funktionen $\langle f(.)|e_j\rangle \langle e_j|g(.)\rangle$ selbst messbar. Wegen $\|f(\omega)\|^2 = \langle f(.)|f(.)\rangle$, ist damit auch $\omega \mapsto \|f(w)\|^2$ messbar. □

Wegen Lemma 3.3 ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition 3.4. *Für einen Hilbertraum H und einen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ definieren wir*

$$\mathfrak{h} := \{f \in M(H) : \int \|f(\omega)\|^2 \, \mathrm{d}\mu < +\infty\}. \tag{2}$$

Lemma 3.5. *Für $f, g \in \mathfrak{h}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\langle f(.)|g(.)\rangle \in L^1(\mu) \text{ und } \alpha f + \beta g \in \mathfrak{h}.$$

Beweis. Es gilt $|\langle f(\omega)|g(\omega)\rangle| \leq \|f(\omega)\|\|g(\omega)\|$. Zusammen mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung und Lemma 3.3 erhalten wir

$$\int |\langle f(\omega)|g(\omega)\rangle| \, \mathrm{d}\mu \leq \int \|f(\omega)\|\|g(\omega)\| \, \mathrm{d}\mu \leq \Big(\int \|f(\omega)\|^2 \, \mathrm{d}\mu \int \|g(\omega)\|^2 \, \mathrm{d}\mu\Big)^{1/2} < +\infty.$$

Damit ist

$$\|\alpha f(\omega) + \beta g(\omega)\|^2 = |\beta|^2\|f(\omega)\|^2 + |\alpha|^2\|g(\omega)\|^2 + \overline{\alpha}\beta \langle f(\omega)|g(\omega)\rangle + \alpha\overline{\beta} \langle g(\omega)|f(\omega)\rangle$$

als Summe von Termen aus $L^1(\mu)$ ebenfalls ein Element aus $L^1(\mu)$. □

Definition 3.6. *Für $f, g \in \mathfrak{h}$ definieren wir*

$$N := \{h \in \mathfrak{h} : \int \|h\|^2 \mathrm{d}\mu = 0\}, \; f \sim g :\Leftrightarrow f - g \in N, \; [f] := \{g \in \mathfrak{h} : f \sim g\}$$
$$\text{und} \int \bigoplus H \, \mathrm{d}\mu := \{[f] : f \in \mathfrak{h}\} = \mathfrak{h}_{/\sim}.$$

Lemma 3.7. *Die Menge $\mathfrak{h}$ bildet einen Vektorraum und N einen Unterraum davon.*

Beweis. Aus Lemma 3.5 folgt für $f, g \in \mathfrak{h}$, dass $\alpha f + \beta g \in \mathfrak{h}$. Damit ist $\mathfrak{h}$ ein Untervektorraum von dem Raum aller Funktionen von Ω nach H.
Aus $f, g \in N$ folgt

$$\begin{aligned}
&\int \|\alpha f(\omega) + \beta g(\omega)\|^2 \, \mathrm{d}\mu = \int \langle \alpha f(\omega) + \beta g(\omega) | \alpha f(\omega) + \beta g(\omega) \rangle \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \int |\alpha|^2 \|f(\omega)\|^2 + |\beta|^2 \|g(\omega)\|^2 + \overline{\alpha}\beta \langle f(\omega) | g(\omega) \rangle + \alpha\overline{\beta} \langle g(\omega) | f(\omega) \rangle \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq 2|\alpha||\beta| \int |\langle f(\omega) | g(\omega) \rangle| \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq 2|\alpha||\beta| \left(\int \|f(\omega)\|^2 \, \mathrm{d}\mu \int \|g(\omega)\|^2 \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/2} = 0.
\end{aligned}$$

Zusammen mit $0 \in N$ und $N \subset \mathfrak{h}$ erhalten wir, dass N ein Unterraum von $\mathfrak{h}$ ist.
Also ist $\int \bigoplus H \, \mathrm{d}\mu$ ein Vektorraum. □

Lemma 3.8. *Die Definition*

$$\langle [f] | [g] \rangle := \int \langle f(\omega) | g(\omega) \rangle \, \mathrm{d}\mu$$

ist unabhängig vom gewählten Repräsentanten.

Beweis. Es sei $f \sim \tilde{f}$ und $g \sim \tilde{g}$. Wir können $\tilde{f}, \tilde{g}$ auch schreiben als $\tilde{f} = f + n_f$ und $\tilde{g} = g + n_g$ mit $n_f, n_g \in N$. Zunächst bemerken wir, dass für beliebige $h \in \mathfrak{h}$ und $n \in N$

$$\int |\langle h | n \rangle| \, \mathrm{d}\mu \leq (\int \|h\|^2 \, \mathrm{d}\mu \int \|n\|^2 \, \mathrm{d}\mu)^{1/2} = 0$$

gilt. Damit folgt

$$\int \langle \tilde{f}(\omega) | \tilde{g}(\omega) \rangle \, \mathrm{d}\mu = \int \Big(\langle f(\omega) | g(\omega) \rangle + \langle \tilde{f} | n_g \rangle + \langle n_f | g \rangle \Big) \, \mathrm{d}\mu = \int \langle f(\omega) | g(\omega) \rangle \, \mathrm{d}\mu.$$

□

Satz 3.9. *Der Skalarproduktraum* $\int \bigoplus H \, \mathrm{d}\mu$ *ist isomorph zu* $\bigoplus_{m=1}^{n} L^2(\Omega, \mu)$ *mit einem* $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *ist. Genauer gesagt ist*

$$\Phi : \begin{cases} \int \bigoplus H \, \mathrm{d}\mu & \to \bigoplus_{m=1}^{n} L^2(\Omega, \mu), \\ \qquad f & \mapsto \langle e_m | f(.) \rangle_{m=1}^{n}, \end{cases}$$

ein isometrischer Isomorphismus, wobei $(e_m)_{m=1}^{n}$ *eine Orthnormalbasis von* H *ist.*

Beweis. Für $f \in M(H)$ gilt

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &= \int \|f(\omega)\|^2 \, \mathrm{d}\mu = \int \sum_{m=1}^{n} |\langle e_m | f(\omega) \rangle|^2 \, \mathrm{d}\mu = \sum_{m=1}^{n} \int |\langle e_m | f(\omega) \rangle|^2 \, \mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{m=1}^{n} \| \langle e_m | f(.) \rangle \|^2.
\end{aligned}$$

Wir folgern daraus, dass Φ nach $\bigoplus_{m=1}^{n} L^2(\Omega,\mu)$ abbildet und isometrisch ist. Offensichtlich ist die Abbildung linear und injektiv.
Um die Surjektivität nachzuweisen, sei $(f_m)_{m=1}^{n} \in \bigoplus_{m=1}^{n} L^2(\Omega,\mu)$. Wir definieren die Abbildung

$$f : \begin{cases} \Omega \to H \\ \omega \mapsto \sum_{m=1}^{n} f_m(\omega) e_m. \end{cases}$$

Wegen

$$\|f\|^2 = \sum_{m=1}^{n} \| \langle e_m | f(.) \rangle \|^2 = \sum_{m=1}^{n} \|f_m\|^2 < +\infty$$

ist $f \in \int \bigoplus H \, \mathrm{d}\mu$ und es gilt $(f_m)_{m=1}^{n} = \Phi(f)$. □

Korollar 3.10. *$\int \bigoplus H \, \mathrm{d}\mu$ ist ein Hilbertraum.*

Bemerkung 3.11. Um eine kompakte Notation beizubehalten, werden wir statt $[f]$ nur f schreiben. Ob die Äquivalenzklasse oder ein Repräsentant gemeint ist erschließt sich aus dem Kontext.

Definition 3.12. *Ist $C \in \mathfrak{A}$, so können wir durch $(C, \mathfrak{A} \cap C, \mu|_{\mathfrak{A} \cap C})$ einen neuen Maßraum konstruieren. Das direkte Integral bezüglich diesem Maßraum bezeichnen wir mit*

$$\int_C \bigoplus H \, \mathrm{d}\mu.$$

Wir wollen nun den Begriff des direkten Integrales auf hilbertraumwertige Funktionen verallgemeinern.

Bemerkung 3.13. Wir bezeichnen mit $\mathbb{N}_\infty$ die Menge $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Definition 3.14. *Gegeben ist ein Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und eine Menge von separablen Hilberträumen $\mathfrak{H} := \{H_1, H_2, .., H_\infty\}$ mit $dim(H_n) = n \in \mathbb{N}_\infty$. Sei $H : \Omega \to \mathfrak{H}$ eine Funktion mit $X_n := \{\omega : H(\omega) = H_n\} \in \mathfrak{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Menge $\mathfrak{g}$ sei definiert als die Menge aller Funktionen $f : \Omega \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}_\infty} H_n$, für die gilt*

$$f|_{X_n} \in \int_{X_n} \bigoplus H_n \, \mathrm{d}\mu \text{ und } \sum_{n \in \mathbb{N}_\infty} \|f|_{X_n}\|^2 < +\infty.$$

Definition 3.15. *Für $f, g \in \mathfrak{g}$ definieren wir*

$$f \sim g :\Leftrightarrow [f|_{X_n}] = [g|_{X_n}] \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_\infty, \; [f] := \{g \in \mathfrak{g} : f \sim g\},$$
$$\text{und } \int \bigoplus H(\omega) \, \mathrm{d}\mu := \{[f] : f \in \mathfrak{g}\} = \mathfrak{g}_{/\sim}.$$

Lemma 3.16. *Für $f \sim \tilde{f}$, $g \sim \tilde{g}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt*

$$[\alpha f + \beta g] = [\alpha \tilde{f} + \beta \tilde{g}], \quad \sum_{j \in \mathbb{N}_\infty} |\langle [f|_{X_j}] | [g|_{X_j}] \rangle| < \infty$$
$$\textit{und} \sum_{j \in \mathbb{N}_\infty} \langle [f|_{X_j}] | [g|_{X_j}] \rangle = \sum_{j \in \mathbb{N}_\infty} \langle [\tilde{f}|_{X_j}] | [\tilde{g}|_{X_j}] \rangle .$$

Insbesondere wird $\int \bigoplus H(\omega)\, \mathrm{d}\mu$ zu einem Skalarproduktraum mit $\langle [f] | [g] \rangle := \sum_{j \in \mathbb{N}_\infty} \langle [f|_{X_j}] | [g|_{X_j}] \rangle$ und der üblichen Addition und Multiplikation auf den Nebenklassen.

Beweis. Es gilt zunächst auf Grund der Cauchy-Schwartz Ungleichung

$$\begin{aligned} |\langle [f] | [g] \rangle| &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}_\infty} |\langle [f|_{X_n}] | [g|_{X_n}] \rangle| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}_\infty} \|[f|_{X_n}]\| \, \|[g|_{X_n}]\| \\ &\leq \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}_\infty} \|[f|_{X_n}]\|^2 \sum_{n \in \mathbb{N}_\infty} \|[g|_{X_n}]\|^2} < +\infty. \end{aligned}$$

Per Definition gilt $[f|_{X_n}] = [\tilde{f}|_{X_n}]$ und $[g|_{X_n}] = [\tilde{g}|_{X_n}]$. Auf den einzelnen Räumen $\int_{X_n} \bigoplus H(\omega)\mathrm{d}\mu$ haben wir die Wohldefiniertheit dieser Operationen in Definition 3.8 bereits nachgewiesen. Es folgt

$$\begin{aligned} [(\alpha f + \beta g)|_{X_n}] &= [(\alpha \tilde{f} + \beta \tilde{g})|_{X_n}], \\ \langle [f|_{X_n}] | [g|_{X_n}] \rangle &= \langle [\tilde{f}|_{X_n}] | [\tilde{g}|_{X_n}] \rangle . \end{aligned}$$

Da die Gleichungen für alle $n \in \mathbb{N}_\infty$ gelten erhalten wir $[\alpha f + \beta g] = [\alpha \tilde{f} + \beta \tilde{g}]$ und

$$\langle [f] | [g] \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}_\infty} \langle [f|_{X_n}] | [g|_{X_n}] \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}_\infty} \langle [\tilde{f}|_{X_n}] | [\tilde{g}|_{X_n}] \rangle = \langle [\tilde{f}] | [\tilde{g}] \rangle .$$

□

Satz 3.17. *Der Skalarproduktraum $\int \bigoplus H(\omega)\mathrm{d}\mu$ ist Isomorph zu $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_\infty} (\int_{X_n} \bigoplus H(\omega)\mathrm{d}\mu)$. Genauer gesagt, ist die Abbildung*

$$\Psi : \begin{cases} \int \bigoplus H(\omega)\mathrm{d}\mu & \to \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_\infty} (\int_{X_n} \bigoplus H(\omega)\mathrm{d}\mu), \\ f & \mapsto (f|_{X_n})_{n \in \mathbb{N}_\infty}, \end{cases}$$

eine Bijektion, die mit der Addition, skalaren Multiplikation und $\langle . | . \rangle$ verträglich ist.

Beweis. Man lese direkt aus der Definition der Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{g}$ ab, dass die Abbildung Ψ nach $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_\infty} (\int_{X_n} \bigoplus H(\omega)\mathrm{d}\mu$ abbildet.

Gemäß der Definition des Skalarproduktes auf einer direkten Summe gilt $\langle \Psi(f) | \Psi(g) \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}_\infty} \langle f|_{X_n} | g|_{X_n} \rangle = \langle f | g \rangle$. Die Verträglichkeit mit der Addition und skalaren Multiplikation, folgt aus

$$\Psi(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g|_{X_n})_{n\in\mathbb{N}_\infty} = \alpha (f|_{X_n})_{n\in I} + \beta (g|_{X_n})_{n\in\mathbb{N}_\infty} = \alpha\Psi(f) + \beta\Psi(g).$$

Aus $\Psi([f]) = 0$ folgt für alle $n \in \mathbb{N}_\infty$, dass $[f|_{X_n}] = [0]$. Wir erhalten $f \sim 0$ und damit $[f] = [0]$. Zusammen mit der Linearität folgt daraus die Injektivität von Ψ.

Wir müssen noch die Surjektivität nachweisen.
Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_\infty} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_\infty}(\int_{X_n} \bigoplus H(\omega)\ \mathrm{d}\mu)$. Wir definieren $f(\omega) := f_n(\omega)$ für $\omega \in X_n$. Damit gilt $f|_{X_n} = f_n$. Zusammen mit
$f_n \in \int_{X_n} \bigoplus H(\omega)\ \mathrm{d}\mu$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}_\infty} \|f_n\|^2 < +\infty$ folgt $f \in \int \bigoplus H(\omega)\ \mathrm{d}\mu$ und $\Psi(f) = (f_n)_{n\in\mathbb{N}_\infty}$.

□

Korollar 3.18. $(\int \bigoplus H(\omega)\ \mathrm{d}\mu, \langle.|.\rangle)$ *ist ein Hilbertraum.*

4 Darstellung von selbstadjungierten Operatoren

Im Weiteren Verlauf dieser Arbeit sei A immer eine selbstadjungierte Abbildungen

$$A : Dom(A) \to H.$$

Das Ziel dieses Kapitel ist es, einen isometrischen Isomorphismus in ein direktes Integral $U : H \to \int H(\omega)\ \mathrm{d}\mu$ zu finden, sodass

$$U(A(f)) = [\omega \mapsto \omega U(f)(\omega)],$$

und $f \in Dom(A)$ genau dann wenn $\int \|wU(f)(\omega)\|^2\ \mathrm{d}\mu < \infty$. Unser Ziel ist es also, A als Multiplikationsoperator darzustellen.

4.1 Zyklische Hilberträume

Definition 4.1. *Es sei $E(.)$ ein Spektralmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A}, H)$. Für $g, h \in H$ definieren wir das komplexe Maß*

$$E_{g,h}(\Delta) := \langle E(\Delta)g|h\rangle\,.$$

Definition 4.2. *Für eine sigma-Algebra $\mathfrak{A}$ definieren wir T als die Menge aller Funktionen $t : \Omega \to \mathbb{C}$ der Bauart*

$$t = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{\Delta_j},$$

wobei gilt $\alpha_j \in \mathbb{C}$ und $\Delta_j \in \mathfrak{A}$.

Definition 4.3. *Es sei $E(.)$ ein Spektralmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A}, H)$. Wir nennen ein $f \in H$ zyklisch in Bezug auf E, falls*

$$H = cls\{E(\Delta)f : \Delta \in \mathfrak{A}\}.$$

Lemma 4.4. *Es sei E ein Spektralmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), H)$ und $f \in H$ zyklisch in Bezug auf E. Unter diesen Voraussetzungen existiert ein Maß μ, sodass es einen Isomorphismus*

$$U : H \to L^2(\mathbb{R}, \mu)$$

mit $U(E(\Delta)f) = \mathbb{1}_\Delta$ gibt.

Beweis. Es sei $f \in H$ wie in Definition 4.7 und $\mu := E_{f,f}$. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j E(\Delta_j) f\|_H^2 &= \langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j E(\Delta_j) f, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j E(\Delta_j) f \rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \overline{\alpha_j} \alpha_k \, \langle E(\Delta_j) f | E(\Delta_k) f \rangle = \sum_{j,k=1}^{n} \overline{\alpha_j} \alpha_k \, \langle E(\Delta_j \cap \Delta_k) f | f \rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \overline{\alpha_j} \alpha_k \, \mu(\Delta_j \cap \Delta_k) = \sum_{j,k}^{n} \overline{\alpha_j} \alpha_k \int \mathbb{1}_{\Delta_j \cap \Delta_k} \mathrm{d}\mu \\
&= \int \sum_{j,k=1}^{n} \overline{\alpha_j} \alpha_k \mathbb{1}_{\Delta_j} \mathbb{1}_{\Delta_k} \mathrm{d}\mu = \int |\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{\Delta_j}|^2 \mathrm{d}\mu \\
&= \|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{\Delta_j}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Für zwei Darstellungen $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j E(\Delta_j) f = \sum_{j=1}^{m} \tilde{\alpha}_j E(\tilde{\Delta}_j) f$ erhalten wir mit

$$\hat{\alpha}_i := \begin{cases} \alpha_i & \text{, für } 1 \le i \le n, \\ -\tilde{\alpha}_{i-n}, & \text{für } n+1 \le i \le n+m \end{cases}$$

$$\hat{\Delta}_i := \begin{cases} \Delta_i & \text{, für } 1 \le i \le n, \\ -\tilde{\Delta}_{i-n}, & \text{für } n+1 \le i \le n+m \end{cases}$$

folgende Gleichheit

$$\begin{aligned}
\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{\Delta_j} - \sum_{j=1}^{m} \tilde{\alpha}_j \mathbb{1}_{\tilde{\Delta}_j}\|_{L^2} &= \|\sum_{j=1}^{n+m} \hat{\alpha}_j \mathbb{1}_{\hat{\Delta}_j}\|_{L^2} = \|\sum_{j=1}^{n+m} \hat{\alpha}_j E(\hat{\Delta}_j) f\|_H \\
&= \|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j E(\Delta_j) f - \sum_{j=1}^{m} \tilde{\alpha}_j E(\tilde{\Delta}_j) f\|_H = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist die Abbildung

$$\tilde{U} : \begin{cases} span\{E(\Delta)f : \Delta \in \mathfrak{A}\} & \to L^2(\mathbb{R}, \mu) \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j E(\Delta_j) f & \mapsto \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{\Delta_j} \end{cases}$$

wohldefiniert. Wegen $\|\tilde{U}(\sum_{j=1}^n \alpha_j E(\Delta_j)f)\| = \| \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{\Delta_j} \| = \| \sum_{j=1}^n \alpha_j E(\Delta_j) f\|$ ist $\tilde{U}$ isometrisch. Für $\sum_{j=1}^n \alpha_j E(\Delta_j)f$, $\sum_{l=1}^m \tilde{\alpha}_l E(\tilde{\Delta}_l)f$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\hat{\alpha}_i := \begin{cases} \lambda \cdot \alpha_i & \text{, für } 1 \leq i \leq n, \\ \mu \cdot \tilde{\alpha}_{i-n}, & \text{für } n+1 \leq i \leq 2 \cdot n \end{cases}$$

$$\hat{\Delta}_i := \begin{cases} \Delta_i & \text{, für } 1 \leq i \leq n, \\ \tilde{\Delta}_{i-n}, & \text{für } n+1 \leq i \leq 2 \cdot n. \end{cases}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\lambda \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i E(\Delta_i) f + \mu \cdot \sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i E(\tilde{\Delta}_i) f) &= \tilde{U}(\sum_{i=1}^{n+m} \hat{\alpha}_i E(\hat{\Delta}_i) f) = \sum_{i=1}^{n+m} \hat{\alpha}_i \mathbb{1}_{\hat{\Delta}_i} \\ &= \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{\Delta_i} f + \mu \cdot \sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i \mathbb{1}_{\tilde{\Delta}_i} f \\ &= \lambda \cdot \tilde{U}(\sum_{i=1}^n \alpha_i E(\Delta_i) f) + \mu \cdot \tilde{U}(\sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i E(\tilde{\Delta}_i) f). \end{aligned}$$

Mit dieser Definition ist $\tilde{U}$ also eine isometrische lineare Abbildung mit Definitionsbereich $span\{E(\Delta)f : \Delta \in \mathfrak{A}\}$ und Bildbereich T. Diese können wir zu einer isometrischen Abbildung U auf ganz H fortsetzen. Da $span\{E(\Delta)f : \Delta \in \mathfrak{A}\}$ dicht in H und T dicht in $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ liegt, erhalten wir einen isometrischen Isomorphismus zwischen H und $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Dabei gilt $U(E(\Delta)f) = \tilde{U}(E(\Delta)f) = \mathbb{1}_\Delta$. □

Lemma 4.5. *Es sei U wie in Lemma 4.4. Für $g \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ gilt*

$$U^{-1}(\mathbb{1}_\Delta g) = E(\Delta) U^{-1}(g),$$

oder äquivalent $U(E(\Delta)h) = \mathbb{1}_\Delta U(h)$ für alle $h \in H$.

Beweis. Da sowohl $g \mapsto U^{-1}(\mathbb{1}_\Delta g)$ als auch $E(\Delta) \circ U^{-1}$ stetige ist, reicht es die Gleichung auf der dichten Teilmenge T nachzuweisen. Für ein $t = \sum_{j=1..n} \alpha_j \mathbb{1}_{\Delta_j}$ gilt

$$\begin{aligned} U^{-1}(\mathbb{1}_\Delta t) = U^{-1}\big(\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{\Delta_j \cap \Delta}\big) &= \sum_{j=1}^n \alpha_j E(\Delta) E(\Delta_j) f \\ &= E(\Delta)\big(\sum_{j=1}^n \alpha_j E(\Delta_j) f\big) = E(\Delta) U^{-1}(t). \end{aligned}$$

□

Nicht für jedes Spektralmaß E auf einem Hilbertraum H lässt sich ein zyklischer Vektor f finden. Allerdings können wir H immer als orthogonale Summe von zyklischen Unterräumen schreiben.

Definition 4.6. *Für $f \in H \setminus \{0\}$ definieren wir*

$$H_f := cls\{E(\Delta)f : \Delta \in \mathfrak{A}\}.$$

Eine Teilmenge $M \subset H \setminus \{0\}$ heißt zyklisch unabhängig, falls $H_f \perp H_g$ für alle Elemente $f, g \in M$, $f \neq g$ gilt.

Lemma 4.7. *Es gibt eine zyklisch unabhängige Menge M, sodass $H = \bigoplus_{f \in M} H_f$.*

Beweis. Das System aller zyklisch unabhängigen Teilmengen ist per Inklusion halbgeordnet. Betrachten wir eine Kette T in diesem System, so gilt für alle $M \in T$, dass $M \subset \bigcup_{N \in T} N =: S$. Um das Lemma von Zorn anwenden zu können müssen wir noch nachweisen, dass S zyklisch unabhängig ist.
Wählen wir f, g verschieden aus S, so gibt es $N_f, N_g \in T$ mit $f \in N_f$ und $g \in N_g$. Da eine Kette eine lineare Ordnung ist, gilt o.B.d.A. $N_f \subset N_g$. Beide Elemente stammen also aus einer zyklisch unabhängigen Menge. Weil sie verschieden gewählt sind, gilt $H_f \perp H_g$, womit S zyklisch unabhängig ist.
Nach dem Lemma von Zorn gibt es also ein maximales Element M. Da die H_f orthogonal auf einander stehen, können wir die direkte innere Summe $\tilde{H} := \bigoplus_{f \in M} H_f \subset H$ bilden. Da die direkte Summe von Hilberträumen wieder ein Hilbertraum ist, ist $\tilde{H}$ abgeschlossen. Damit gilt $H = \tilde{H} \oplus \tilde{H}^{\perp}$. Ist das orthogonale Komplement nicht der Nullraum, so gibt es ein $v \in H \setminus \{0\}$ welches orthogonal auf alle H_f mit $f \in M$ steht. Da die Räume H_f invariant unter $E(\Delta)$ bleiben, gilt für alle x aus einem H_f

$$\langle E(\Delta)v, x\rangle = \langle v, E(\Delta)x\rangle = 0.$$

Da die abgeschlossene lineare Hülle von Elemente dieser Bauart H_v ergeben, steht H_v orthogonal auf alle H_f mit $f \in M$. Damit ist aber $\tilde{M} := M \cup \{v\}$ ein echt größeres zyklisch unabhängiges System, was ein Widerspruch zur Maximalität von M ist. Es gilt also $\tilde{H}^{\perp} = \emptyset$ und damit $H = \tilde{H}$. □

Lemma 4.8. *Es sei M eine maximale zyklisch unabhängige Menge und $f \in M$. Bezeichnen wir mit $P_f : H \to H_f$ die orthogonale Projektion auf H_f, so gilt*

$$P_f E(\Delta) = E(\Delta)P_f.$$

Beweis. Aus Definition 4.6 erhalten wir, dass $E(\Delta)$ den Raum H_f invariant lässt. Es sei M eine maximale Menge von zyklisch unabhängigen Vektoren. Zunächst bemerken wir, dass $E(\Delta)P_g x \in H_g$ und damit $P_f E(\Delta)P_g x = 0$ für $f \neq g$ gilt. Es folgt

$$P_f E(\Delta)x = P_f E(\Delta) \sum_{g \in M} P_g x = \sum_{g \in M} P_f E(\Delta) P_g x = P_f E(\Delta) P_f x = E(\Delta) P_f x.$$

□

Bemerkung 4.9. Die adjungierte Abbildung von P_f ist

$$\iota_f : \begin{cases} H_f \to H, \\ x \mapsto x. \end{cases}$$

Aus Lemma 4.8 erhalten wir unmittelbar

Korollar 4.10. *Durch $E_f(\Delta) := E(\Delta)|_{H_f}$ für $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ wird ein Spektralmaß auf H_f definiert.*

Definition 4.11. *Den zu E_f gehörenden Isomorphismus aus Lemma 4.4 bezeichnen wir im Weiteren mit U_f und das entsprechende Maß mit μ_f.*

4.2 Selbstadjungierte Operatoren auf separablen Hilberträumen

Es wurde bereits gezeigt, dass jeder der Räume H_f Isomorph zu einem $L^2_{\mu_f}$ ist. Man beachte allerdings, dass die jeweiligen Maße μ_f in der Regel unterschiedlich sind. Es ist unser Ziel, eine Isometrie von H in ein direktes Integral zu finden, sodass der Operator A zum Multiplikationsoperator wird. Im Weiteren werden wir wieder annehmen, dass H separabel ist.

Lemma 4.12. *Eine maximale zyklisch unabhängige Menge M von H bezüglich einem Spektralmaß E ist abzählbar.*

Beweis. Wir wissen, dass M eine zyklisch unabhängige Menge ist, insbesondere bildet sie ein Orthonormalsystem. Es folgt, dass M höchstens abzählbar unendlich ist. □

Es sei im Weiteren immer E ein Spektralmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), H)$, und M eine dazugehörige maximale zyklisch unabhängige Menge.

Lemma 4.13. *Es existiert eine Menge $I := \{n \in \mathbb{N} : n < C\}$ mit $C \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, Maße μ_n und ein isometrischer Isomorphismus $\Psi : H \to \bigoplus_{n\in I} L^2(\mathbb{R}, \mu_n)$, sodass für alle $n \in I$ und $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$*

$$\Psi(E(\Delta)x)_n(\omega) = \mathbb{1}_\Delta(\omega) \cdot \Psi(x)_n(\omega)$$

gilt.

Beweis. Wir definieren

$$\Psi : \begin{cases} H & \to \bigoplus_{f\in M} L^2(\mathbb{R}, \mu_f) \\ x & \mapsto \big(U_f(P_f(x))\big)_{f\in M}. \end{cases}$$

Aus Lemma 4.8 folgt

$$\begin{aligned}\Psi(E(\Delta)x)_f &= U_f(P_f E(\Delta)x) = U_f(E(\Delta)P_f(x)) \\ &= (\omega \mapsto \mathbb{1}_\Delta(\omega) \cdot U_f(P_f(x))(\omega)) = (\omega \mapsto \mathbb{1}_\Delta(\omega) \cdot \Psi(x)_f(\omega)) \,.\end{aligned}$$

Die Linearität ist offensichtlich. Die Isometrie folgt aus

$$\|x\|^2 = \sum_{f\in M} \|P_f(x)\|^2 = \sum_{f\in M} \|U_f(P_f(x))\|^2 = \|\Psi(x)\|^2.$$

Damit ist gleichzeitig die Injektivität gezeigt. Für alle $(\phi_f)_{f\in M} \in L^2(\mathbb{R}, \mu_f)$ gilt

$$+\infty > \|(\phi_f)_{f\in M}\|^2 = \sum_f \|U_f^{-1}(\phi_f)\|^2.$$

Es gilt demnach $x := \sum_f U_f^{-1}(\phi_f) \in H$ und $(\phi_f)_{f\in M} = \Psi(x)$.
Da M höchstens abzählbar ist, erhalten wir das gewünschte Resultat, indem wir M nach I umindizieren.

□

Bemerkung 4.14. Wir können immer annehmen, dass die Elemente von M normiert sind, indem wir zu der ebenfalls maximalen zyklisch unabhängigen Menge $\{\frac{f}{\|f\|} : f \in M\}$ übergehen.

Lemma 4.15. *Es seien die Maße μ_n und die Menge I wie in 4.13. Dann existiert ein Maß μ mit $\mu(\mathbb{R}) \leq 1$ und nicht negative messbare Funktionen g_n, sodass für alle $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$*

$$\mu_n(A) = \int_A g_n(\omega)\ \mathrm{d}\mu(\omega).$$

Beweis. Wir definieren μ durch

$$\mu(A) := \sum_{n\in I} \frac{\mu_n(A)}{2^n} \text{ für alle } A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$

Wegen $\mu(\mathbb{R}) = \sum_{n\in I} \frac{\mu_n(\mathbb{R})}{2^n} = \sum_{n\in I} \frac{1}{2^n} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1$ ist μ endlich. Offenbar folgt aus $\mu(A) = 0$, dass $\mu_n(A) = 0$ für alle $n \in I$. All unsere Maße μ_n sind somit absolut stetig bezüglich μ, womit es nach dem Satz von Radon-Nikodym (siehe [5], Satz 11.19) nichtnegative messbare Funktionen g_n gibt mit $\mu_n(A) = \int_A g_n(\omega)\ \mathrm{d}\mu(\omega)$.

□

Lemma 4.16. *Es seien die Maße μ_n und die Menge I wie in Lemma 4.13. Das Maß μ und die Funktionen g_n seien wie in Lemma 4.15. Wir definieren*
$A_n := \{\omega : g_n(\omega) \neq 0\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Dann erhalten wir durch

$$F_n : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}, \mu_n) \to L^2(A_n, \mu|_{\mathfrak{B}(A_n)}) \\ \psi \mapsto \sqrt{g_n}\psi|_{A_n}, \end{cases}$$

einen isometrischen Isomorphismus. In Folge ist auch die Abbildung

$$F : \begin{cases} \bigoplus_{n\in I} L^2(\mathbb{R}, \mu_n) \to \bigoplus_{n\in I} L^2(A_n, \mu|_{\mathfrak{B}(A_n)}), \\ (x_n)_{n\in I} \mapsto (F_n(x_n))_{n\in I} \end{cases}$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Die Linearität ist offensichtlich. Die Isometrieeigenschaft folgt aus

$$\int_{A_n} |F_n(\psi)|^2 \, \mathrm{d}\mu = \int_{A_n} g_n|\psi|^2 \, \mathrm{d}\mu = \int g_n|\psi|^2 \, \mathrm{d}\mu = \int |\psi|^2 \, \mathrm{d}\mu_n.$$

Damit ist auch die Injektivität sichergestellt. Es bleibt noch die Surjektivität nachzuweisen. Dafür sei $\phi \in L^2\left(A_n, \mu|_{\mathfrak{B}(A_n)}\right)$. Wir definieren

$$\psi(\omega) := \begin{cases} \frac{\phi(\omega)}{\sqrt{g_n(\omega)}}, & \omega \in A_n, \\ 0, & \omega \in \mathbb{R} \setminus A_n. \end{cases}$$

Wegen $\int |\psi|^2 \, \mathrm{d}\mu_n = \int_{A_n} |\psi|^2 \, \mathrm{d}\mu_n = \int_{A_n} |\sqrt{g}\psi|^2 \, \mathrm{d}\mu = \int_{A_n} |\phi|^2 \, \mathrm{d}\mu < +\infty$, ist $\psi \in L^2(\mathbb{R}, \mu_n)$ und es gilt $F(\psi) = \phi$. $\square$

Definition 4.17. *Es sei die Menge I wie in Lemma 4.13 und die Funktionen g_n seien wie in Lemma 4.15 und die Mengen A_n wie in Lemma 4.16. Mit $I(\omega) := \{n \in I : g_n(\omega) \neq 0\}$ bezeichnen wir die Menge der relevanten Indizes an der Stelle ω und mit $k(\omega) := |I(\omega)|$ die Mächtigkeit dieser Menge. Des Weiteren sei $X_k := \{\omega : k(\omega) = k\} = \{\omega : \sum_{n \in I} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = k\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.*
Für alle $\omega \in \Omega$ definieren wir $n_\omega : dom(n_\omega) \to I(\omega)$ mit $dom(n_\omega) = \{n \in \mathbb{N} : n \leq k(\omega)\}$ rekursiv durch

$$n_\omega(1) := min(I(\omega)),$$
$$n_\omega(m+1) := min(I(\omega) \setminus \{n_\omega(1), .., n_\omega(m)\}).$$

Die Abbildung n_ω ist also eine Durchnummerierung von $I(\omega)$.

Lemma 4.18. *Es seien die Mengen A_l wie in Lemma 4.16. Die Inverse von n_ω ist dann gegeben durch*

$$m_\omega : \begin{cases} dom(m_\omega) = I(\omega) \to \{n \in \mathbb{N} : n \leq k(\omega)\}, \\ n \mapsto \sum_{l=1}^{n} \mathbb{1}_{A_l}(\omega), \end{cases}$$

zudem gilt $\{\omega : n \in dom(m_\omega),\, m_\omega(n) = m\} = \{\omega : m \in dom(n_\omega),\, n_\omega(m) = n\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ für alle $m \in \mathbb{N}, n \in I$.

Beweis. Weil n_ω offensichtlich injektiv ist, reicht es nachzuweisen, dass m_ω eine rechtsinverse Funktion ist. Wir weisen mit vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ nach, dass für $n \in I(\omega)$ gilt $n_\omega(m_\omega(n)) = n$. Für $n = 1$ und $n \in I(\omega)$ gilt $n_\omega(m_\omega(n)) = n_\omega(1) = min(I(\omega)) = 1$. Für den Induktionsschritt $n - 1 \mapsto n$ mit $n \in I(\omega)$ gibt es zwei Fälle. Im ersten Fall mit $n = min(I(\omega))$ gilt für $l < n$ immer $A_l(\omega) = 0$ und in Folge $m_\omega(n) = 1$ und $n_\omega(m_\omega(n)) = min(I(\omega)) = n$.
Im zweiten Fall definieren wir $n' := max(\{\tilde{n} < n : \tilde{n} \in I(\omega)\})$. Nach Konstruktion gilt $\mathbb{1}_{A_{\tilde{n}}}(\omega) = 0$ für $n' + 1 \leq \tilde{n} < n$ und $\mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1$. Es folgt $m_\omega(n) = m_\omega(n') + 1$ und zusammen mit der Induktionsvoraussetzung $n_\omega(m_\omega(n')) = n'$ folgt

$$n_\omega(m_\omega(n)) = n_\omega(m_\omega(n') + 1) = min(\{\tilde{n} > n' : \tilde{n} \in I(\omega)\}) = n.$$

Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\{\omega : m \in dom(n_\omega),\, n_\omega(m) = n\} &= \{\omega : n \in dom(m_\omega),\, m_\omega(n) = m\} \\
&= \{\omega : n \in I(\omega),\, \sum_{l=1}^{n} \mathbb{1}_{A_l}(\omega) = m\} \\
&= \{\omega : \omega \in A_n,\, \sum_{l=1}^{n} \mathbb{1}_{A_l}(\omega) = m\}.
\end{aligned}
$$

Weil die Mengen A_l messbar sind, sind es auch $\{\omega : n \in dom(m_\omega),\, m_\omega(n) = m\}$ und $\{\omega : m \in dom(n_\omega),\, n_\omega(m) = n\}$.

$\square$

Lemma 4.19. *Es sei* $\int \bigoplus H(\omega)\ \mathrm{d}\mu$ *das direkte Integral von*

$$
H(\omega) := \begin{cases} \mathbb{C}^n & , \textit{ für } k(\omega) = n \in \mathbb{N}, \\ l^2(\mathbb{N}), & \textit{für } k(\omega) = \infty. \end{cases}
$$

bezüglich dem Maßraum $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mu)$*. Die Abbildung*

$$
Q : \begin{cases} \bigoplus_{n \in I} L^2(A_n, \mu|_{\mathfrak{B}(A_n)}) & \to \int \bigoplus H(\omega)\ \mathrm{d}\mu, \\ (h_n)_{n \in I} & \mapsto \left[\omega \mapsto \left(h_{n_\omega(m)}(\omega)\right)_{m=1}^{k(\omega)}\right], \end{cases}
$$

ist dann ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Zunächst sei bemerkt, dass für $m \in \mathbb{N}$ und $m \leq k(\omega)$ gilt $m \in dom(n_\omega)$, und damit ist $h_{n_\omega(m)}$ in der Definition von Q sinnvoll. Es seien $h_n : A_n \to \mathbb{C}$ messbare Funktionen bezüglich $\mathfrak{B}(A_n)$ und die Mengen X_k wie in Definition 4.17. Wir wollen nachweisen, dass für $m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_\infty$ mit $m \leq k$ die Funktionen

$$
f_m : \begin{cases} X_k \to \mathbb{C} \\ \omega \to h_{n_\omega(m)}(\omega) \end{cases}
$$

messbar sind. Wir benutzen im Weiteren die Schreibweise $[F \in Y] := \{\omega : F(\omega) \in Y\}$. Es sei B eine Borel-Menge auf $\mathbb{C}$. Dann gilt

$$
[f_m \in B] = \bigcup_{n \in I} [h_n \in B] \cap \{\omega : m \in dom(n_\omega),\, n_\omega(m) = n\} \cap X_k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}).
$$

Mit $\tilde{h}_n$ bezeichnen wir die jeweilige mit Null auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzte Funktion. Es folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}_\infty} \int_{X_k} \| (f_m(\omega))_{m=1}^k \|^2 \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{k\in\mathbb{N}_\infty} \int_{X_k} \left(\sum_{m=1}^k |h_{n_\omega(m)}|^2 \right) \mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}_\infty} \int_{X_k} \left(\sum_{m=1}^k |\tilde{h}_{n_\omega(m)}|^2 + \sum_{n\in I\setminus I(\omega)} |\tilde{h}_n(\omega)|^2 \right) \mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}_\infty} \int_{X_k} \left(\sum_{n\in I} |\tilde{h}_n|^2 \right) \mathrm{d}\mu = \int \left(\sum_{n\in I} |\tilde{h}_n|^2 \right) \mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{n\in I} \int_{A_n} |h_n|^2 \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass für $(h_n)_{n\in I} \in \bigoplus_{n\in I} L^2(A_n, \mu|_{\mathfrak{B}(A_n)})$ gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_\infty} \int_{X_k} \| (f_m(\omega))_{m=1}^k \|^2 \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Somit bildet die Funktion Q in das direkte Integral ab. Außerdem ist diese Abbildung linear und isometrisch. Um die Surjektivität nachzuweisen sei $f \in \int \bigoplus H(\omega)\,\mathrm{d}\mu$. Wir definieren für $\omega \in A_n$ oder äquivalent für $n \in I(\omega) = dom(m_\omega)$

$$h_n(\omega) := \langle e_{m_\omega(n)} | f(\omega) \rangle \,,$$

wobei m_ω die Inverse von n_ω ist und $(e_m)_{m=1}^{k(\omega)}$ die kanonische Basis von $H(\omega)$. Für eine Borel-Menge B gilt

$$[h_n \in B] = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} [\langle e_m | f(\omega) \rangle \in B] \cap \{\omega : n \in dom(m_\omega),\, m_\omega(n) = m\} \in \mathfrak{B}(A_n).$$

So wie am Anfang des Beweises bilden wir aus den messbaren h_n die Funktionen

$$f_m(\omega) := h_{n_\omega(m)}(\omega) = \langle e_{m_\omega(n_\omega(m))} | f(\omega) \rangle = \langle e_m | f(\omega) \rangle$$

Wie bereits bewiesen wurde gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_\infty} \int_{X_k} \| (f_m(\omega))_{m=1}^k \|^2 \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in I} \int_{A_n} |h_n|^2 \,\mathrm{d}\mu$$

und in Folge

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in I} \int_{A_n} |h_n|^2 \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{k\in\mathbb{N}_\infty} \int_{X_k} \| (f_m(\omega))_{m=1}^k \|^2 \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}_\infty} \int_{X_k} \|f(\omega)\|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&= \|f\|^2_{\int \bigoplus H(\omega)\,\mathrm{d}\mu} < +\infty.
\end{aligned}$$

Es folgt $(h_n)_{n\in I} \in \bigoplus_{n\in I} L^2(A_n, \mu|_{\mathfrak{B}(A_n)})$ und

$$Q((h_n)_{n\in I}) = \left[\omega \mapsto (f_m(\omega))_{m=1}^{k(\omega)} \right] = f.$$

□

Korollar 4.20. *Es existiert ein isometrischer Isomorphismus Φ zwischen H und $\int \bigoplus H(\omega)\,\mathrm{d}\mu$, sodass für $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ gilt*

$$\Phi(E(\Delta)x)(\omega) = \mathbb{1}_\Delta(\omega)\Phi(x)(\omega) \ \mu\text{-fast überall.}$$

Beweis. Es sei Ψ aus Lemma 4.13, Q aus Lemma 4.19 und F aus Lemma 4.16. Wir definieren dann

$$\Phi := Q \circ F \circ \Psi.$$

Als Zusammensetzung von Isomorphismen Q, F und Ψ ist auch Φ einer. Schlussendlich gilt

$$\Phi(E(\Delta)x) = Q(F(\Psi(E(\Delta)x))) = Q\left(\left(\omega \mapsto \mathbb{1}_\Delta(\omega)\sqrt{g_n(\omega)}\Psi(x)_n(\omega)\right)_{n\in I}\right) =$$
$$= \left[\omega \mapsto \mathbb{1}_\Delta(\omega)\left(\sqrt{g_{n_\omega(m)}(\omega)}\Psi(x)_{n_\omega(m)}(\omega)\right)_{m=1}^{k(\omega)}\right] = \left[\omega \mapsto \mathbb{1}_\Delta(\omega)\Phi(x)(\omega)\right].$$

□

Definition 4.21. *Es sei E ein Spektralmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A}, H)$, wobei H ein Hilbertraum ist und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf Ω. Des Weiteren sei $\Phi : \Omega \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion und $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ eine Aufteilung, sodass Φ_1 und $\frac{1}{\Phi_2}$ beschränkt und messbar sind. Wir definieren dann das Integral von Φ bezüglich E als*

$$\int \Phi \ \mathrm{d}E := \int \Phi_1 \ \mathrm{d}E + (\int \frac{1}{\Phi_2} \ \mathrm{d}E)^{-1}.$$

Lemma 4.22. *Die Definition in 4.21 ist unabhängig von der Aufteilung $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.*

Die Beweise von Satz 4.23, Lemma 4.22 und Lemma 4.24 können umfangreich nachgelesen werden in [4] Satz 4.6.1 und Lemma 4.5.4.

Satz 4.23. *Sei $A : dom(A) \to H$ mit $Dom(A) \subset H$ eine selbstadjungierte Abbildung. Dann gibt es genau ein Spektralmaß E auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), H)$, sodass $E(\mathbb{R} \setminus \sigma(A)) = 0$ gilt und*

$$A = \int (t \mapsto t) \ \mathrm{d}E =: \int t \ \mathrm{d}E(t).$$

Des Weiteren gilt $g \in Dom(A)$, genau dann wenn $\int t^2 \ \mathrm{d}E_{g,g} < +\infty$.

Lemma 4.24. *Für ein $h \in Dom(A)$ und ein $g \in H$ gilt*

$$\langle g|Ah\rangle = \int \omega \ \mathrm{d}E_{g,h}.$$

Satz 4.25. *Es sei $A : Dom(A) \to H$ selbstadjungiert und E das dazugehörige Spektralmaß aus Satz 4.23. Für den Isomorphismus $\Phi : H \to \int \bigoplus H(\omega)\ \mathrm{d}\mu$ aus Korollar 4.20 gilt $x \in Dom(A)$, genau dann wenn*

$$\int \|\omega\Phi(h)(\omega)\|^2\ \mathrm{d}\mu(\omega) < +\infty.$$

Des Weiteren gilt für ein $h \in Dom(A)$

$$\Phi(Ah)(\omega) = \omega\Phi(h)(\omega)\ \mu\text{-fast überall.}$$

Beweis. Es gilt nach Korollar 4.20

$$\begin{aligned} E_{g,h}(\Delta) = \langle E(\Delta)g|h\rangle &= \int \langle \Phi(E(\Delta)g)(\omega)|\Phi(h)(\omega)\rangle\ \mathrm{d}\mu(\omega) \\ &= \int_\Delta \langle \Phi(g)(\omega)|\Phi(h)(\omega)\rangle\ \mathrm{d}\mu(\omega). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\int |\omega|^2\ \mathrm{d}E_{h,h}(\omega) = \int \|\Phi(h)(\omega)\omega\|^2\ \mathrm{d}\mu(\omega).$$

Die rechte Seite ist genau dann endlich, wenn es die linke Seite ist, was äquivalent zu $h \in Dom(A)$ ist. Es gilt für $h \in Dom(A)$

$$\begin{aligned} \langle \Phi(g)|\Phi(Ah)\rangle = \langle g|Ah\rangle = \int \omega\ \mathrm{d}E_{g,h} &= \int \omega \langle \Phi(g)(\omega)|\Phi(h)(\omega)\rangle\ \mathrm{d}\mu \\ &= \int \langle \Phi(g)(\omega)|\omega \cdot \Phi(h)(\omega)\rangle\ \mathrm{d}\mu = \langle \Phi(g)|\omega \mapsto \omega \cdot \Phi(h)(\omega)\rangle. \end{aligned}$$

Weil die Abbildungen $\langle \Phi(g)|.\rangle$ punktetrennend sind, folgt $\Phi(Ah) = (\omega \mapsto \omega \cdot \Phi(h)(\omega))$ als Elemente von $\int \bigoplus H(\omega)\ \mathrm{d}\mu$. □

5 Vollständigkeit in einem nuklearen Tripel

5.1 Abzählbare Skalarprodukträume

Definition 5.1. *Ein Vektorraum X mit einer Folge von Skalarprodukten $(\langle .|.\rangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf X heißt abzählbarer Skalarproduktraum, falls für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gilt, dass*

$$\langle x|x\rangle_n \geq \langle x|x\rangle_m \text{ für alle } x \in X.$$

Mit T_∞ bezeichnen wir die initiale Topologie bezüglich der Abbildungen

$$h_n : \begin{cases} X \to (X, T(n)) \\ x \mapsto x, \end{cases}$$

wobei $T(n)$ die von dem Skalarprodukt $\langle .|.\rangle_n$ induzierte Topologie auf X ist.

Bemerkung 5.2. Die hier vorgestellte Definitionen orientieren sich an [6], wobei wir bei unserer Definition eines abzählbaren Skalarproduktraumes sowohl die Vollständigkeit wie auch die paarweise Koordiniertheit der Normen weglassen.

Definition 5.3. *Es sei* (Y, d) *ein metrischer Raum. Das Tripel* $(Z, \tilde{d}, \iota)$ *mit einer Abbildung* $\iota : Y \to Z$ *heißt Vervollständigung von* (Y, d)*, falls*

- $(Z, \tilde{d})$ *vollständig ist,*
- ι *eine isometrische Einbettung ist*
- *und der Raum* $\iota(Y)$ *dicht in* Z *liegt.*

Bemerkung 5.4. Wie in [2] Proposition 3.1.8 beschrieben wird, kann jeder Skalarproduktraum zu einem Hilbertraum vervollständigt werden.
Es sei X_n eine Vervollständigung von X bezüglich dem Skalarprodukt $\langle.|.\rangle_n$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die Vervollständigung so wählen,
dass $X \subset X_n$ und

$$\iota_n : \begin{cases} X \to X_n, \\ x \mapsto x. \end{cases}$$

gilt

Lemma 5.5. *In einem abzählbaren Skalarproduktraum* X *existiert für alle* $n \geq m$ *eine eindeutige stetige Fortsetzung* $T_m^n : X_n \to X_m$ *der Abbildung*

$$T : \begin{cases} (X, \|.\|_n) \to (X_m, \|.\|_m) \\ x \mapsto x \end{cases},$$

wobei $\|x\|_n := \langle x|x\rangle_n$ *die entsprechenden Normen sind.*

Beweis. Aus Definition 5.1 folgt für alle $x \in X$

$$\|T(x)\|_m^2 = \|x\|_m^2 = \langle x|x\rangle_m \leq \langle x|x\rangle_n = \|x\|_n^2.$$

T ist also eine beschränkte lineare Abbildung von einer dichten Teilmenge von X_n in einen vollständigen metrischen Raum. Nach [2] Satz 1.1.1 lässt sich diese in eindeutiger Weise stetig zu einer Abbildung T_m^n fortsetzen. □

Bemerkung 5.6. Für $n, p, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq p \geq m$ ist die Abbildung $T_p^n \circ T_m^p : X_n \to X_m$ stetig und für alle $x \in X$ gilt $T_p^n \circ T_m^p(x) = x$. Weil die stetige Fortsetzung in Lemma 5.5 eindeutig ist, folgt

$$T_m^n = T_p^n \circ T_m^p.$$

5.2 Nukleare Räume

Definition 5.7. *Es sei $(X, (\langle .|. \rangle_n)_{n\in\mathbb{N}})$ ein abzählbarer Skalarproduktraum. Gemäß Lemma 5.5, existiert zu jedem $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ eine stetige Fortsetzung $T_m^n : X_n \to X_m$ der Identität*

$$I_X : (X, \|.\|_n) \to (X, \|.\|_m).$$

Wir sagen, dass $(X, (\langle .|. \rangle_n)_{n\in\mathbb{N}})$ nuklear ist, falls es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gibt, sodass $T_m^n : X_n \to X_m$ ein nuklearer Operator ist, vergleiche Kapitel 2.3.

Lemma 5.8. *Ein abzählbarer Skalarproduktraum $(X, (\langle .|. \rangle_n)_{n\in\mathbb{N}})$ ist bereits nuklear, falls es für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gibt, sodass T_m^n ein Hilbert-Schmidt-Operator ist.*

Beweis. Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $p \geq m$, sodass T_m^p ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. Nun gibt es auch ein $n \geq p$, sodass T_p^n ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. Damit ist $T_m^n = T_p^n \circ T_m^p$ als Zusammensetzung von zwei Hilbert-Schmidt-Operatoren gemäß Lemma 2.16 nuklear. □

Lemma 5.9. *Ein Unterraum Y eines nuklearen Raumes X ist wieder ein nuklearer Raum.*

Beweis. Weil die Räume $Y_n := \overline{Y}^{\|\cdot\|_n}$ vollständig sind und Y dicht enthält, sind sie eine Vervollständigung von Y. Bezeichnen wir mit $\iota : Y_n \to X_n$ die Einbettung von Y_n in X_n, so ist $T_n^n|_{Y_n} = T_m^n \circ \iota$ als Zusammensetzung von einer nuklearen und einer stetigen Abbildung gemäß Lemma 2.25 selbst nuklear. □

Definition 5.10. *Wir nennen (X, H, X') ein nukleares Tripel, falls gilt*

- *X ist ein nuklearer Raum bezüglich der Skalarprodukte $(\langle .|. \rangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
- *X' ist der Dualraum bezüglich der Topologie T_∞ aus Definition 5.1.*
- *Es existiert ein weiteres Skalarprodukt $\langle .|. \rangle$, sodass (H, ι) eine Vervollständigung von $(X, \langle .|. \rangle)$ ist mit $\iota(x) = x$. Des Weiteren existiere ein $M \in \mathbb{R}$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|\langle x|y \rangle| \leq M\|x\|_n\|y\|_n$ für alle $x, y \in X$.*

Bemerkung 5.11. Ähnlich wie in Bemerkung 5.2 orientieren wir uns hier an den in [6] vorgestellten Begriffen.

Im Weiteren sei (X, H, X') immer ein nukleares Tripel, mit der entsprechenden Topologie T_∞, dem Skalarprodukt $\langle .|. \rangle$ auf H und den Normen $\|.\|_n$ aus Definition 5.10.

Lemma 5.12. *X ist separabel bezüglich T_∞.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass $(X, \|.\|_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ separabel ist, also eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.
Aus den Voraussetzungen für einen nuklearen Raum folgt, dass es ein $m \geq n$ gibt, sodass die Abbildung $T_n^m : X_m \to X_n$ aus Lemma 5.5 nuklear, und insbesondere kompakt ist. Damit ist für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Menge $Y_N := X \cap T_n^m(B_N(0))$ als Teilmenge einer präkompakten Menge wieder präkompakt. Wir finden also für $\epsilon > 0$ eine endliche Menge an Punkten $x_1^{\epsilon,N}, .., x_{l(\epsilon,N)}^{\epsilon,N}$ mit

$$Y_N \subset \bigcup_{j=1}^{l(\epsilon,N)} B_\epsilon(x_j^{\epsilon,N}),$$

wobei $B_\epsilon(x)$ die offene Kugel mit Radius ϵ um x bezüglich der $\|.\|_n$-Norm ist. Für die abzählbare Menge $M_{n,N} := \{x_j^{\frac{1}{k},N} : k \in \mathbb{N}, j = 1, .., l(\frac{1}{k}, N)\}$ gilt $Y_N \subset \overline{M_{n,N}}$. Es folgt

$$X = T_n^m(X) = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} Y_N \subset \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \overline{M_{n,N}} \subset \overline{\bigcup_{N\in\mathbb{N}} M_{n,N}}.$$

Die Menge $M_n := \bigcup_{N\in\mathbb{N}} M_{n,N}$ ist daher dicht in X bezüglich der Norm $\|.\|_n$ und abzählbar.
Wir können nun zeigen, dass X auch bezüglich der initialen Topologie separabel ist.
Für alle $x \in X$ und $j \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x_j \in M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ mit $\|x - x_j\|_j \leq \frac{1}{j}$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$ folgt, dass für alle $j > j_0 := max(n, \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1)$ gilt

$$\|x - x_j\|_n \leq \|x - x_j\|_j \leq \frac{1}{j} \leq \epsilon.$$

Damit konvergiert x_j gegen x bezüglich jeder Norm $\|.\|_n$ und in Folge auch bezüglich der Topologie T_∞. Die Menge M ist also abzählbar und dicht in X bezüglich T_∞. □

5.3 Punktauswerten in einem nuklearen Tripel

Unmittelbar aus der Definition 5.10 folgt

Lemma 5.13. *Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ die Abbildung $I_X : (X, \langle.|.\rangle_n) \to (X, \langle.|.\rangle)$ linear und stetig ist. In Folge lässt sie sich zu einer linearen und stetigen Abbildung $T^n : X_n \to H$ fortsetzen.*

Lemma 5.14. *Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $T^n : X_n \to H$ nuklear ist für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.*

Beweis. Nach Lemma 5.13 gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $T^m : X_m \to H$ stetig ist. Da wir in einem nuklearen Raum sind, gibt es gemäß Definition 5.14 ein $n_0 \geq m$, sodass $T_m^{n_0} : X_{n_0} \to X_m$ nuklear ist. Insbesondere gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$, dass $T_m^n : X_n \to X_m$ nuklear ist. Damit ist gemäß Satz 2.16 auch die Abbildung $S := T^m \circ T_m^n$ nuklear. Für $x \in X$ gilt

$$S(x) = T^m(x) = x.$$

Damit ist S die stetige Fortsetzung der Identität $I_X : (X, \langle.|.\rangle_n) \to (X, \langle.|.\rangle)$. Es folgt $S = T^n$. Die Abbildung T^n ist also nuklear.

$\square$

Wir betrachten nun eine selbstadjunigerte Abbildung $A : Dom(A) \to H$, sodass $X \subset Dom(A)$ und $A|_X : (X, T_\infty) \to (X, T_\infty)$ eine lineare und stetige Selbstabbildung ist. Des Weiteren bezeichnen wir mit $\Phi : H \to \int \bigoplus H(\omega) \, \mathrm{d}\mu$ den zu A dazugehörigen isometrischen Isomorphismus aus Satz 4.25 mit $\Phi(Ax)(\omega) = \omega \cdot \Phi(x)(\omega)$ und $Dom(A) = \{x \in H : \int \|\omega \cdot \Phi(x)(\omega)\|^2 \, \mathrm{d}\mu(\omega) < \infty\}$. Außerdem sei $T^n : X_n \to H$ wie in Lemma 5.14.

Lemma 5.15. *Die Abbildung $T := \Phi \circ T^n : X_n \to \int \bigoplus H(\omega) \, \mathrm{d}\mu$ ist nuklear, für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$, wobei n_0 wie in Lemma 5.14 gewählt wird.*

Beweis. Die Zusammensetzung von einem stetigen und einem nuklearen Operator ist wieder nuklear.

$\square$

Im Weiteren sei $n \in \mathbb{N}$ fest, sodass die Abbildung $T := \Phi \circ T^n$ nuklear ist. Wir stellen $T(x) = \sum_k \lambda_k \langle v_k|x\rangle \, b_k$ gemäß Korollar 2.3 dar, wobei $\{v_k : k \in I\}$ ein Orthonormalsystem von X_n und $\{b_k : k \in I\}$ eines von $\int H(\omega) \, \mathrm{d}\mu(\omega)$ ist. Da T nuklear ist, gilt $\sum_k \lambda_k < +\infty$.

Definition 5.16. *Für jede Äquivalenzklasse $b_k \in \int H(\omega) \, \mathrm{d}\mu(\omega)$ wählen wir einen Repräsentanten h_k. Für alle ω mit $\sum_k \lambda_k \|h_k(\omega)\|_{H(\omega)} < +\infty$ sei die Abbildung $T_\omega : X_n \to H(\omega)$ definiert durch*

$$T_\omega(x) := \sum_k \lambda_k \langle v_k|x\rangle \, h_k(\omega).$$

Für alle anderen $\omega \in \Omega$ setzen wir $T_\omega := 0$.

Lemma 5.17. *Die Abbildung T_ω ist wohldefiniert, linear und beschränkt.*

Beweis. Für ein ω mit $\sum_k \lambda_k \|h_k(\omega)\|_{H(\omega)} = +\infty$ ist $T_\omega = 0$ und damit sowohl wohldefiniert wie auch beschränkt. Im Fall $\sum_k \lambda_k \|h_k(\omega)\|_{H(\omega)} < +\infty$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_k \|\lambda_k \langle v_k|x\rangle \, h_k(\omega)\|_{H(\omega)} &\leq \sum_k \lambda_k \|x\|_n \|v_k\|_n \|h_k(\omega)\|_{H(\omega)} \\ &= \|x\|_n \sum_k \lambda_k \|h_k(\omega)\|_{H(\omega)} < +\infty.\end{aligned}$$

T_ω ist also wohldefiniert. Offensichtlich ist T_ω auch linear. Wegen

$$\|T_\omega(x)\|_{H(\omega)} \leq \sum_k \|\lambda_k \langle v_k|x\rangle \, h_k(\omega)\|_{H(\omega)} \leq \|x\|_n \sum_k \lambda_k \|h_k(\omega)\|_{H(\omega)}$$

ist die Abbildung beschränkt.

$\square$

Lemma 5.18. *Es gilt* $\sum_k \lambda_k \|h_k(\omega)\|_{H(\omega)} < +\infty$ *für fast alle* $\omega \in \Omega$*. Damit gilt* $T_\omega = \sum_k \lambda_k \langle v_k|.\rangle\, h_k(\omega)$ *fast überall.*

Beweis. Aus

$$\sum_k \lambda_k \|h_k(\omega)\|_{H(\omega)} = \sum_k \sqrt{\lambda_k}\big(\sqrt{\lambda_k}\|h_k(\omega)\|_{H(\omega)}\big) \le \sqrt{\sum_k \lambda_k}\sqrt{\sum_k \lambda_k \|h_k(\omega)\|^2_{H(\omega)}},$$

folgt

$$\int \big(\sum_k \lambda_k \|h_k(\omega)\|_{H(\omega)}\big)^2 \,\mathrm{d}\mu(\omega) \le \sum_j \lambda_j \int \sum_k \lambda_k \|h_k(\omega)\|^2_{H(\omega)} \,\mathrm{d}\mu(\omega)$$
$$= \sum_j \lambda_j \sum_k \lambda_k \int \|h_k(\omega)\|^2_{H(\omega)} \,\mathrm{d}\mu(\omega) = \big(\sum_k \lambda_k\big)^2 < +\infty.$$

Weil der zu integrierende Ausdruck positiv ist, konnten wir hier die Reihenfolge von Summation und Integration vertauschen. Daraus folgt $\sum_k \lambda_k \|h_k(\omega)\|_{H(\omega)} < +\infty$ fast überall. Gemäß Definition 5.16 gilt daher $T_\omega = \sum_k \lambda_k \langle v_k|.\rangle\, h_k(\omega)$ fast überall.

□

Lemma 5.19. *Für* $x \in X_n$ *gilt* $T(x)(\omega) = T_\omega(x)$ *fast überall.*

Beweis. Es gilt

$$\lim_{N\to\infty} \int \|T(x)(\omega) - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \langle v_k|x\rangle\, b_k(\omega)\|^2_{H(\omega)} \,\mathrm{d}\mu(\omega) = 0,$$

woraus folgt, dass

$$\mu - \lim_{N\to\infty} \|T(x) - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \langle v_k|x\rangle\, b_k\|^2_{H(\omega)} = 0,$$

wobei $\mu - \lim$ Konvergenz im Maß bedeutet. Gemäß [5] Satz 7.88 folgt aus der Konvergenz im Maß, dass es natürliche Zahlen $N(1), N(2), ..$ gibt mit

$$\lim_{j\to\infty} \|T(x) - \sum_{k=1}^{N(j)} \lambda_k \langle v_k|x\rangle\, b_k\|^2_{H(\omega)} = 0 \ \mu\text{-fü}.$$

Es folgt also

$$T(x)(\omega) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{N(j)} \lambda_j \langle v_k|x\rangle\, b_k(\omega) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{N(j)} \lambda_j \langle v_k|x\rangle\, h_k(\omega) \ \mu\text{-fü}.$$

Wegen Lemma 5.18 gilt

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{N(j)} \lambda_j \langle v_k|x\rangle\, h_k(\omega) = T_\omega(x) \ \mu\text{-fü}.$$

Es folgt $T(x)(\omega) = T_\omega(x)$ fast überall.

$\square$

5.4 Verallgemeinerte Eigenvektoren

Wir haben vorausgesetzt, dass die Abbildung $A|_X : (X, T_\infty) \to (X, T_\infty)$ stetig ist. Somit existiert die konjugierte Abbildung $(A|_X)^\dagger : X' \to X'$. Unser Ziel ist es Eigenvektoren der Abbildung $(A|_X)^\dagger$ zu finden.

Definition 5.20. *Für alle $\xi \in H(\omega)$ definieren wir*

$$T_\omega^\xi : \begin{cases} X \to \mathbb{C}, \\ x \mapsto \langle \xi | T_\omega(\omega) \rangle . \end{cases}$$

Lemma 5.21. *Es gilt $T_\omega^\xi \in X'$.*

Beweis. Die Abbildung T_ω ist stetig bezüglich $(X_n, \langle . | . \rangle_n)$. Damit ist auch

$$F_\omega^\xi : \begin{cases} X_n \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \langle \xi | T_\omega(x) \rangle \end{cases}$$

stetig. Es gilt also $F_\omega^\xi \in X_n'$. Weil sowohl die Identität $I_X : (X, T_\infty) \to (X, \langle . | . \rangle_n)$ wie auch die Einbettung $\iota : (X, \langle . | . \rangle_n) \to X_n$ stetig ist, gilt

$$T_\omega^\xi = F_\omega^\xi \circ \iota \circ I_X \in X'.$$

$\square$

Korollar 5.22. *Für alle $h \in X$ gibt es eine μ-Nullmenge N_h, sodass für alle ω außerhalb von N_h gilt*

$$T_\omega^\xi(A|_X(h)) = \omega T_\omega^\xi(h).$$

Beweis. Für alle $x \in X$ erhalten wir

$$\Phi(x) = \Phi(T^n(x)) = T(x) = [\omega \mapsto T_\omega(x)],$$

wobei die letzte Gleichheit wegen Lemma 5.19 gilt. Zusammen mit $\Phi(A(x)) = [\omega \mapsto \omega\Phi(x)(\omega)]$ folgt

$$T_\omega(A|_X(x)) = \Phi(A|_X(x))(\omega) = \omega\Phi(x)(\omega) = \omega T_\omega(x) \text{ fast überall.}$$

$\square$

Korollar 5.23. *Es gibt eine Nullmenge N, sodass für alle ω außerhalb von N und $\xi \in H(\omega)$*

$$T_\omega^\xi \circ A|_X = \omega T_\omega^\xi$$

gilt. Bei den Abbildungen T_ω^ξ handelt es sich somit um verallgemeinerte Eigenvektoren, vergleiche Definition 1.1.

Beweis. Wir definieren die Nullmenge $N := \bigcup_{h \in M} N_h$, wobei M eine abzählbare dichte Teilmenge von X ist, und N_h wie in Korollar 5.22 gewählt wird. Für $\omega \in N^c$ und $h \in M$ gilt

$$T_\omega^\xi(Ah) = \omega T_\omega^\xi(h).$$

Für alle $x \in X$ existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$, sodass $x = \lim_{n \to \infty} x_n$.
Weil sowohl $T_\omega^\xi \circ A$ als auch ωT_ω^ξ stetig ist und die beiden Abbildungen auf einer dichten Teilmenge von X übereinstimmen, gilt $T_\omega^\xi \circ A = \omega T_\omega^\xi$. Wir haben damit für alle $\omega \in N^c$ einen verallgemeinerten Eigenvektor gefunden.

□

Korollar 5.24. *Es gilt*

$$(A|_X)^\dagger (T_\omega^\xi) = \omega T_\omega^\xi \textit{ fast überall.}$$

T_ω^ξ ist also fast überall ein echter Eigenvektor des konjugierten Operators.

Beweis. Wir haben in Korollar 5.23 gesehen, dass außerhalb einer Nullmenge N gilt $T_\omega^\xi(Ah) = \omega T_\omega^\xi(h)$. Es folgt

$$(A|_X)^\dagger (T_\omega^\xi)(h) = T_\omega^\xi(A|_X(h)) = \omega T_\omega^\xi(h) \text{ für alle } h \in X.$$

□

Gilt für alle $\omega \in \Omega$ und $\xi \in H(\omega)$ die Gleichung $T_\omega^\xi(x) = 0$, so folgt aus

$$T(x)(\omega) = T_\omega(x) = \sum_{j=1}^{n(\omega)} T_\omega^{e_j}(x)\ e_j \text{ fast überall,}$$

dass $T(x) = 0$, und damit $x = 0$ ist. In diesem Sinne bilden die T_ω^ξ einen vollständigen Satz an verallgemeinerten Eigenvektoren.

References

[1] R. de la Madrid. The role of the rigged hilbert space in quantum mechanics. *European journal of physics*, 2005.

[2] M. Kaltenbäck und M. Blümlinger H. Woracek. Funktionalanalysis. Skriptum.

[3] K. Held. Quantentheorie, 2016. Skriptum zur Vorlesung.

[4] M. Kaltenbäck. Funktionalanylsis 2, 2012. Skriptum.

[5] N. Kusolitsch. *Maß-und Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer, 2011.

[6] I. M. Gelfand und N.J. Wilenkin. *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)IV. Einige Anwendungen der harmonischen Analyse Gelfandsche Raumtripel.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1964.

[7] C. Winklmayr. Gelfand-tripel und der verallgemeinerte spektralsatz, 2015. Bachelorarbeit.