Spektrale Vielfachheit normaler Operatoren

Felix Dellinger

17. November 2016

Vorwort

Ziel dieser Arbeit ist es, eine Normalform normaler Operatoren auf separablen Hilberträumen zu entwickeln. Mit dieser erhält man eine Aussage darüber, wann zwei normale Operatoren unitär äquivalent sind. Das wesentliche Resultat ist der Satz der unitären Äquivalenz 4.2.2.
Voraussetzungen zum Verständnis dieser Arbeit, welche ohne weitere Kommentare verwendet werden, ist der Stoff der Vorlesung Funktionalanalysis 1, [2]. Wir verwenden auch einige Resultate aus der Vorlesung Funktionalanalysis 2 [5], die in Kapitel 1.1.3 und 1.1.4 großteils ohne Beweis zusammengefasst werden.
Kapitel 2 bis 4 behandeln den Stoff aus [4] Kapitel 9.6, 9.7, 9.8 und 9.10. Auch wenn der Titel dieser Arbeit spektrale Vielfachheit lautet, werde wir uns erst in Kapitel 4 damit beschäftigen. Die Kapitel 2 und 3 bauen die Vorkenntnisse auf, die wir für Kapitel 4 brauchen, sind aber nicht darauf beschränkt. Sie beinhalten einige sehr schöne Resultate, von denen manche mit dem finalen Satz gar nicht in Verbindung stehen. So zum Beispiel der Satz des Doppelzentralisators (Double Commutant Theorem), die Charakterisierung von von-Neumann Algebren, oder den Funktionalkalkül, den wir in Kapitel 3 studieren werden.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorbereitende Resultate

1.1 Reduzierende Unterräume

Definition 1.1.1 Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Ein abgeschlossener Unterraum $U \subseteq \mathcal{H}$ heißt reduzierender Unterraum des Operators A, wenn Operatoren A_1 auf U und A_2 auf $U^\perp$ existieren, für die gilt: $A = A_1 \oplus A_2$.

Bemerkung 1.1.2 Für einen beschränkten Operatoren A sind das all jene invarianten abgeschlossenen Unterräume M, deren orthogonales Komplement $M^\perp$ auch invariant ist. In diesem Fall lässt sich der Operator A einfach als Summe seiner Einschränkungen schreiben $A = A|_M \oplus A|_{M^\perp}$.

Proposition 1.1.3 Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Ist $U \subseteq \mathcal{H}$ ein invarianter Unterraum der Operatoren A und A^*, so ist U auch ein reduzierender Unterraum dieser Operatoren.

Beweis. Sei $x \in U^\perp$. Dann gilt $0 = \big(x, y\big) = \big(x, A^*y\big) = \big(Ax, y\big)$ für alle $y \in U$. Folglich ist $U^\perp$ auch invariant unter A und somit ist U ein reduzierender Unterraum. Vertauscht man die Rollen von A und A^*, erhält man, dass $U^\perp$ auch invariant unter A^* ist, also ist U für beide Operatoren ein reduzierender Unterraum. $\square$

Proposition 1.1.4 Sei U ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$ und P die orthogonale Projektion auf U, dann ist U ein reduzierender Unterraum für A, genau dann wenn $PA = AP$.

Beweis. Angenommen $PA = AP$, dann ist $AU = APU = PAU \subseteq U$ und da P orthogonal ist auch $AU^\perp = A(I-P)U^\perp = (I-P)AU^\perp \subseteq U^\perp$. Somit ist U nach Bemerkung 1.1.2 reduzierend für A. Sei nun U reduzierend. Da U also auch invariant unter A ist, gilt $PAx = Ax = APx$ für alle $x \in U$. Ebenso gilt für alle $x \in U^\perp$ $0 = APx = PAx$, da auch $U^\perp$ invariant unter A ist. $\square$

1.2 Topologien auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$

Definition 1.2.1 Sei X ein Vektorraum und Y ein punktetrennender Unterraum des algebraischen Dualraumes X^*. Als schwache Topologie $\sigma(X,Y)$ auf X bezüglich Y bezeichnen wir die initiale Topologie, die von Y auf X erzeugt wird. Wenn wir einfach nur von der schwachen Topologie auf X reden, so ist damit stets die schwache Topologie bezüglich des topologischen Dualraumes X' gemeint, i.Z. $\sigma(X,X')$.

Definition 1.2.2 Seien X_1 und X_2 normierte Vektorräume. Auf dem Raum $\mathfrak{B}(X_1,X_2)$ bezeichnen wir mit *Starke Operatortopologie* die Initiale Topologie bezüglich der Familie von Abbildungen $\iota_x \circ \|\cdot\|_{X_2}$. Hierbei ist $\iota_x : f \mapsto f(x)$ die Punktauswertung. Für die starke Operatortopologie schreiben wir $\mathcal{T}_\sigma$.
Mit *schwacher Operatortopologie* i.Z. $\mathcal{T}_\omega$ bezeichnen wir die initiale Topologie bezüglich der Familie von Abbildungen der Form $A \mapsto \big(Af,g\big),\ f \in X_1$ und $g \in X_2$.

Definition 1.2.3 Sei X ein Vektorraum, X' sein topologischer Dualraum und $\iota : X \to X'',\ x \mapsto \iota_x$. Mit der Schwachsterntopologie bezeichnen wir die schwache Topologie auf X' bezüglich $\iota(X)$ i.Z. $\omega^* = \sigma(X',\iota(X))$.

Lemma 1.2.4 Sei X ein lokalkonvexer Vektorraum und A eine konvexe Teilmenge von X, dann ist der topologische Abschluss $\overline{A}$ gleich dem schwachen Abschluss $\overline{A}^w$.

Beweis. Sei $\mathcal{T}$ die Topologie auf X und ω die schwache Topologie auf X. Aus $\omega \subseteq \mathcal{T}$ folgt $\overline{A} \subseteq \overline{A}^\omega$. Sei nun $x \in X \backslash \overline{A}$. Nach dem Satz von Hahn-Banach [2] existiert ein Funktional f im Dualraum X', sodass

$$\mathrm{Re} f(a) \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \mathrm{Re} f(x) \quad \forall a \in \overline{A},$$

wobei γ_1 und γ_2 reelle Zahlen sind. Daraus ergibt sich $\overline{A} \subseteq B := \{y \in X : f(x) \leq \gamma_1\}$. Da B das Urbild der stetigen Funktion f ist, ist B schwach abgeschlossen. Es folgt $\overline{A}^\omega \subseteq B$

und deshalb $x \notin \overline{A}^{\omega}$. Damit ist die Gleichheit der Mengen gezeigt. $\square$

Proposition 1.2.5 Die abgeschlossene Einheitskugel $K_1(\mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ von $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ist kompakt in der schwachen Operatortopologie $\mathcal{T}_\omega$.

Beweis. Für jedes h aus der Einheitskugel $K_1(\mathcal{H})$, sei X_h eine Kopie von $\mathcal{H}$, die mit der schwachen Topologie ω ausgestattet ist. Wir definieren den Raum $X = \Pi\{X_h : \|h\| \leq 1\}$ und versehen ihn mit der Produkttopologie. Unser Ziel ist jetzt, einen Homöomorphismus zwischen einer kompakten Teilmenge von X und $U_1(\mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ zu konstruieren.
Dazu sei die Funktion $\tau : U_1(\mathfrak{B}(\mathcal{H})) \to X$ definiert durch $\tau(A)_h = Ah$ für alle $A \in U_1(\mathfrak{B}(\mathcal{H}))$. Wir müssen nun zeigen dass τ ein Homöomorphismus auf sein Bild ist und $\tau(U_1(\mathfrak{B}(\mathcal{H})))$ kompakt ist.
Dass τ injektiv ist, ist offensichtlich. Es bleibt also noch zu zeigen, dass τ stetig und offen ist. Eine Folge von Operatoren $A_n \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ $\mathcal{T}_\omega$-konvergiert gegen $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, genau dann, wenn gilt $\big(A_n h, g\big) \to \big(Ah, g\big)$ für alle $h, g \in \mathcal{H}$. Das ist aber gleichbedeutend dazu, dass für alle Projektionen p_h von $X \to X_h$ das Bild $p_h(A_n)$ schwach gegen $p_h(A)$ konvergiert. Die Bilder von τ konvergieren also genau dann, wenn die Argumente konvergieren. Somit ist τ in beide Richtungen stetig, also ein Homöomorphismus.
Nun kommen wir zur Kompaktheit des Bildes. Nach dem Satz von Tychonoff [2] ist eine Teilmenge von X genau dann kompakt, wenn sie komponentenweise kompakt ist. Wir betrachten also die Menge $\{Ah : A \in U_1(\mathfrak{B}(\mathcal{H}))\}$. Nach dem Satz von Hahn-Banach [2], existiert für jedes $f \in \mathcal{H}$ mit $\|f\| \leq 1$ ein $A \in U_1(\mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ mit $Af = h$. Folglich gilt $\{Ah : A \in U_1(\mathfrak{B}(\mathcal{H}))\} = U_1(\mathcal{H})$. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu [2] ist $K_1(\mathcal{H}')$ ω^*-kompakt. Da $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum ist, existiert eine bijektive Isometrie zwischen $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$. Folglich ist auch $U_1(\mathcal{H})$ $\mathcal{T}_\omega$-kompakt, da wir $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{H}'$ und $\sigma(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ mit $\sigma(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ identifizieren können. $\square$

Definition 1.2.6 Sei $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, dann sei $\|\mathscr{A}\|$ definiert als $\sup\{\|A\| : A \in \mathscr{A}\}$.

Proposition 1.2.7 Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, dann sind die schwache und die starke Operatortopologie auf beschränkten Teilmengen $\mathscr{A}$ von $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ metrisierbar.

Beweis. Sei $\{h_n\}$ eine Orthonormalbasis. Wir definieren auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ die Metriken

$$d_s(A,B) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \|(A-B)h_n\|$$
$$d_w(A,B) = \sum_{n,m} 2^{-(n+m)} \big|\big((A-B)h_n, h_m\big)\big|$$

Zuerst überlegen wir, dass d_w und d_s Metriken sind. Offensichtlich gilt $d_x(A,A) = 0$ und $d_x(A,B) \geq 0$ für $x \in \{s,w\}$. Die Dreiecksungleichung überträgt sich direkt von der Dreiecksungleichung der Norm $\|\cdot\|$ beziehungsweise des Betrags $|\cdot|$. Es bleibt nur die Frage, ob aus $d_x(A,B) = 0$ schon $A = B$ folgt für $x \in \{s,w\}$. Sei dazu $f \in \mathcal{H}$ und $d_x(A,B) = 0$. Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein Element $\tilde{f} = \sum_{n=1}^{N} c_n h_n$ mit $c_n \in \mathbb{C}$ und $\|f - \tilde{f}\| < \epsilon$. Folglich ist $\|(A-B)f\| \leq \|(A-B)\tilde{f}\| + \|(A-B)(f-\tilde{f})\|$. Der zweite Term lässt sich mit der Operatornorm abschätzen $\|(A-B)(f-\tilde{f})\| \leq \|A-B\|\epsilon$. Der erste Term ist sicher 0, wenn $d_s(A,B) = 0$ ist. Für den Fall, dass $d_w(A,B) = 0$ gilt, konstruieren wir zu gegebenem $\tilde{\epsilon} > 0$ ein $g := \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \tilde{c_n} h_n$ mit $\|(A-B)\tilde{f} - g\| < \tilde{\epsilon}$ und $\tilde{c_n} \in \mathbb{C}$. Damit können wir $\|(A-B)\tilde{f}\|^2$ abschätzen durch

$$\big((A-B)\tilde{f}, (A-B)\tilde{f}\big) = \big((A-B)\tilde{f}, (A-B)\tilde{f} - g\big) + \underbrace{\big((A-B)\tilde{f}, g\big)}_{=0} \leq \tilde{\epsilon}\|(A-B)\tilde{f}\|.$$

Da sowohl ϵ als auch $\tilde{\epsilon}$ beliebig waren, muss bereits $(A-B)f = 0$ gelten. Das gilt für alle $f \in \mathcal{H}$ und somit ist $A = B$.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass diese Metriken auch tatsächlich die starke beziehungsweise die schwache Operatortopologie induzieren.

Als erstes zeigen wir, dass aus der Konvergenz in der starken Operatortopologie $\mathcal{T}_\sigma$ in Zeichen $A_k \overset{\mathcal{T}_\sigma}{\to} A$ die Konvergenz in der Metrik d_s in Zeichen $A_k \overset{d_s}{\to} A$ folgt. Angenommen es gilt $A_k \overset{\mathcal{T}_\sigma}{\to} A$, dann gilt insbesondere $\|(A_k - A)f\| \to 0$ für alle $f \in \mathcal{H}$. Da die Summe $\Sigma_{n=1}^{\infty} \|(A_k - A)h_n\|$ durch $2\|\mathscr{A}\|$ beschränkt ist und jeder einzelne Summand gegen Null konvergiert, konvergiert die ganze Summe gegen Null und damit auch $d_s(A_k, A)$. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{T}_s$ feiner ist, als die von der Metrik d_s induzierte Topologie $\mathcal{T}_{d_s}$. Für die andere Inklusion sei O ein Element aus der Nullumgebungsbasis der starken Operatortopologie , also $O = \{A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) : \|Af_k\| < \epsilon_k \quad k = 1,\dots,n\}$ mit $f_1,\dots,f_n \in \mathcal{H}$ und $\epsilon_1,\dots,\epsilon_n \in \mathbb{R}^+$. Zu gegebenem $A \in O$ wähle $\epsilon_{\min} = \min\{\epsilon_k - \|Af_k\| \;\; k = 1,\dots,n\}$. Für jedes f_k existiert ein $\tilde{f_k} = \Sigma_{i=1}^{N_k} h_i c_{k_i}$ mit $\|f_k - \tilde{f_k}\| < \epsilon_{\min}/(4\|\mathscr{A}\|)$. Wir setzen $c_{\max} = \max\{|c_{k_i} 2^i|,\; k_i = 1,\dots,N_k; k = 1,\dots,n\}$. Für jeden Operator B mit $d_s(A,B) <$

$\epsilon_{\min}/(2c_{\max})$ gilt

$$\|Bf_k\| \leq \|Af_k\| + \|(B-A)f_k\| \leq \|(B-A)\|\|f_k - \tilde{f}_k\| + \|(B-A)\tilde{f}_k\| + \|Af_k\|.$$

Der Term $\|(B-A)\|\|f_k - \tilde{f}_k\|$ lässt sich mit $\epsilon_{\min}/2$ abschätzen. Das Gleiche gilt für den Term $\|(B-A)\tilde{f}_k\|$, da

$$\begin{aligned}\|(B-A)\tilde{f}_k\| = \|(B-A)\sum_{i=1}^{N_k} h_i c_{k_i}\| \leq \sum_{i=1}^{N_k} \|(B-A)h_i c_{\max} 2^{-i}\| \\ \leq c_{\max} \sum_{i=1}^{N_k} \|(B-A)h_i 2^{-i}\| = c_{\max} d_s(A,B) < \epsilon_{\min}/2.\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir $\|Bf_k\| < \epsilon_{\min} + \|Af_k\| < \epsilon_k$ für alle $k \in \{1,\dots,n\}$. Folglich ist die $\frac{\epsilon_{\min}}{2c_{\max}}$-Kugel um A ganz in O enthalten, weswegen sich O als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{T}_{d_s}$ darstellen lässt. Es gilt also auch $\mathcal{T}_\sigma \subseteq \mathcal{T}_{d_s}$.

Für die schwache Operatortopologie $\mathcal{T}_w$ gehen wir analog vor. Konvergiert die Folge A_k in der schwachen Operatortopologie gegen A in Zeichen $A_k \overset{\mathcal{T}_w}{\to} A$, so gilt $\big((A - A_k)h_n, h_m\big) \to 0$. Da sich die Reihe $\sum_{n,m} 2^{-(n+m)}|\big((A-A_k)h_n, h_m\big)|$ majorisieren lässt mit $\sum_{n,m} 2^{-(n+m)}|\big((A-A_k)h_n,h_m\big)| \leq \sum_{n,m} 2^{-(n+m)}\|2\mathscr{A}\|\|h_n\|\|h_m\| = 2\|\mathscr{A}\|$ und jeder Summand gegen Null konvergiert, konvergiert die ganze Reihe gegen Null. Folglich ist $\mathcal{T}_w$ feiner, als die von der Metrik d_w induzierte Topologie $\mathcal{T}_{d_w}$.
Sei O ein Element aus der Nullumgebungsbasis der schwachen Operatortopologie, also $O = \{A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) : |\big(Af_k, g_n\big)| < \epsilon_{kn} \quad k = 1,\dots,K \ n = 1,\dots,N\}$ mit $f_k, g_n \in \mathcal{H}$ und $\epsilon_{kn} \in \mathbb{R}^+$. Zu gegebenem $A \in O$ wähle $\epsilon_{\min} = \min\{\epsilon_{kn} - |\big(Af_k, g_n\big)|, \ k = 1,\dots,K \ n = 1,\dots,N\}$. Sei $gf_{\max} = \max(\{\|f_k\|, k = 1,\dots,K\} \cup \{\|g_n\|, n = 1,\dots,N\})$. Zu jedem f_k und g_n wählen wir $\tilde{f}_k = \Sigma_{i=1}^{N_k} h_i c_{k_i}$ und $\tilde{g_n} = \Sigma_{i=1}^{\tilde{N}_n} h_i d_{n_i}$ mit $\|f_k - \tilde{f}_k\|, \|g_n - \tilde{g_n}\| < \min(\epsilon_{\min}/(8\|\mathscr{A}\| gf_{\max}), 1)$. Wir setzen $c_{\max} = \max\{|c_{k_i} 2^i d_{n_j} 2^j| \ k_i = 1,\dots,N_k; k = 1,\dots,K \ j = 1,\dots,\tilde{N}_n \ n = 1,\dots,N\}$. Für jeden Operator B mit $d_w(A,B) < \epsilon_{\min}/(2c_{\max})$ gilt

$$\begin{aligned}&|\big(Bf_k, g_n\big)| \leq |\big((B-A)f_k, g_n\big)| + |\big(Af_k, g_n\big)| \leq \\ &|\big((B-A)(f_k - \tilde{f}_k), g_n - \tilde{g_n}\big)| + |\big((B-A)\tilde{f}_k, g_n - \tilde{g_n}\big)| + |\big((B-A)f_k - \tilde{f}_k, \tilde{g_n}\big)| + \\ &+ |\big((B-A)\tilde{f}_k, \tilde{g_n}\big)| + |\big(Af_k, g_n\big)|\end{aligned}$$

Der Term $|\big((B-A)(f_k - \tilde{f}_k), g_n - \tilde{g_n}\big)|$ lässt sich abschätzen mit $\|A-B\|\|f_k - \tilde{f}_k\|\|g_n - \tilde{g_n}\| \leq \epsilon_{\min}/4$. Das Gleiche gilt für die Terme $|\big((B-A)\tilde{f}_k, g_n - \tilde{g_n}\big)|$ und $|\big((B-A)f_k - \tilde{f}_k, \tilde{g_n}\big)|$

aufgrund der Wahl von $\tilde{f_k}$ und $\tilde{g_n}$. Für den Term $|\big((B-A)\tilde{f_k},\tilde{g_n}\big)|$ verwenden wir

$$|\big((B-A)\tilde{f_k},\tilde{g_n}\big)| \leq \sum_{i,j}^{N_k,\tilde{N}_n} |c_{k_i}d_{n_j}||\big((B-A)\tilde{h_i},\tilde{h_j}\big)| \leq \sum_{i,j}^{N_k,\tilde{N}_n} c_{\max}2^{-i-j}|\big((B-A)\tilde{h_i},\tilde{h_j}\big)| =$$

$$= c_{\max}d_w(A,B) < \epsilon_{\min}/2.$$

Insgesamt erhalten wir analog zur Metrik d_s, dass $|\big(Bf_k,g_n\big)| < \epsilon_{\min} + \big(Af_k,g_n\big)| < \epsilon_{kn}$ für alle $k \in \{1,\ldots,K\}$ und $n \in \{1,\ldots,N\}$. Folglich ist die $\frac{\epsilon_{\min}}{c_{\max}}$-Kugel um A ganz in O enthalten und es folgt analog zur starken Operatortopologie $\mathcal{T}_\omega \subseteq \mathcal{T}_{d_w}$.

□

Bemerkung 1.2.8 Man könnte auch den Fall betrachten, dass X ein separabler Vektorraum ist und für eine Orthonormalbasis $\{x_n\}$, sowie $f,g \in X'$ die Metrik $d_s(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\|(f-g)x_n\|$ definieren. Mit einem analogen Beweis ergibt sich dann das folgende Resultat.

Korollar 1.2.9 Sei X ein separabler Vektorraum, dann ist die ω^*-Topologie auf beschränkten Teilmengen des Dualraumes X' metrisierbar.

Lemma 1.2.10 Zu jeder komplexwertigen beschränkten messbaren Funktion ψ auf einer kompakten Menge Ω, gibt es eine Folge von Polynomen $p_n(z,\overline{z})$, sodass $\int_\Omega p_n d\nu \to \int_\Omega \psi d\nu$ für alle regulären Borelmaße ν.

Beweis. Der Satz von Stone-Weierstraß liefert uns, dass die Polynome $\|\cdot\|_\infty$-dicht in den stetigen Funktionen aus Ω sind. Es reicht also zu zeigen, dass wir für jede beschränkte Funktion eine Folge stetiger Funktionen finden, die die gewünschte Konvergenzeigenschaft erfüllt.
Die stetigen Funktionen liegen dicht in $L^1(\Omega,\lambda)$, wobei λ das Lebesguemaß ist. Zuerst überlegen wir uns, dass jedes reguläre Borelmaß absolut stetig bezüglich des Lebesguemaß ist. Das gilt, weil für jedes reguläre Borelmaß $\mu(\Delta) = \sup(\mu(O) : O \subseteq \Delta \,\wedge\, O$ offen) und $\lambda(O) > 0$, wenn O offen ist. Wenn also $\lambda(\Delta) = 0$, dann enthält Δ keine offenen Mengen, weswegen $\mu(\Delta)$ das Supremum der leeren Menge wird, also der kleinste Wert, den $\mu(\cdot)$ annehmen kann. Folglich existiert für jedes μ die $L^1(\lambda)$ Funktion $\frac{d\mu}{d\lambda}$ nach dem Satz von Radon-Nikodým A.1.
Konvergiert also die Folge $f_n \overset{L^1(\lambda)}{\to} f$, dann $\int |f_n - f|d\lambda \to 0$ und folglich auch $\int |f_n - f|\frac{d\mu}{d\lambda}d\lambda = \int |f_n - f|d\mu \to 0$. □

Proposition 1.2.11 Sei L ein lineares Funktional auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

a) L ist stetig in der starken Operatortopologie.
b) L ist stetig in der schwachen Operatortopologie.
c) Es gibt Vektoren $g_1, \ldots, g_n, h_1 \ldots, h_n \in \mathcal{H}$, so dass $L(A) = \Sigma_{k=1}^n \big(Ag_k, h_k\big)$ für alle $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Beweis. Aus c) folgt offensichtlich b), da sich L als Linearkombination aus den Funktionen schreiben lässt, die die schwache Operatortopologie initial erzeugen. Da die starke Operatortopologie feiner als die schwache Operatortopologie ist, folgt aus b) schon a). Es bleibt also nur zu zeigen, dass aus a) auch c) folgt.
Sei nun L stetig in der starken Operatortopologie. Dann existiert eine Umgebung $O = L^{-1}\big(U_1(0)\big)$, deren Bild beschränkt ist. Die Umgebung O enthält eine Menge der Form $\{A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) : \|Af_k\| < \epsilon_k, k = 1, \ldots, n\}$ mit $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}$ und $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \mathbb{R}^+$. Sei nun $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, dann ist $A \cdot \frac{\min(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)}{\max(\|Af_1,\ldots,Af_n\|)}$ in der Umgebung O. Folglich ist $|LA| < \frac{1}{\min(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)} \max(\|Af_1\|, \ldots, \|Af_n\|)$.
Definiert man nun die Seminorm p auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ mit $p(B) = \sqrt{\Sigma_{k=1}^n \|Bg_k\|^2}$, wobei $g_k := \frac{1}{\min(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)} f_k$, so gilt $|LA| \le p(A)$ für alle A in $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Sei weiters der Unterraum $\mathfrak{K} := \overline{\{Ag_1 \oplus \cdots \oplus Ag_n : \ A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})\}}$. Da aus $Ag_1 \oplus \cdots \oplus Ag_n = 0 \to p(A) = 0 \to L(A) = 0$ ist mit $F(Ag_1 \oplus \cdots \oplus Ag_n) := L(A)$ ein Funktional auf einer dichten Teilmenge von $\mathfrak{K}$ wohldefiniert. Nach dem Satz von Hahn-Banach [2] kann man F zu $\tilde{F}$ auf $\mathcal{H}^{(n)}$ so fortsetzen, dass $\tilde{F}(A) \le p(A)$. Da $\mathcal{H}^{(n)}$ aber ein Hilbertraum ist, existieren $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{H}$, sodass

$$F(f_1 \oplus \cdots \oplus f_n) = \big(f_1 \oplus \cdots \oplus f_n, h_1 \oplus \cdots \oplus h_n\big) = \Sigma_{k=1}^n \big(f_k, h_k\big)$$

Damit gilt aber auch $L(A) = \Sigma_{k=1}^n \big(Ag_k, h_k\big)$, womit aus Punkt a) Punkt c) gefolgert wurde. □

Korollar 1.2.12 Sei $\mathscr{S}$ eine konvexe Teilmenge von $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, dann gilt $\overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\sigma} = \overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\omega}$.

Beweis. Da die starke Operatortopologie feiner als die schwache Operatortopologie ist, gilt $\overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\sigma} \subseteq \overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\omega}$. Angenommen es existiert ein $A \in \overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\omega} \backslash \overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\sigma}$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert ein lineares Funktional F, das stetig in der starken Operatortopologie ist, $\overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\sigma}$ auf 0 abbildet und A auf 1. Da nach Proposition 1.2.11 F aber auch stetig bezüglich der schwachen Operatortopologie ist, muss auch $F(\overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\omega}) = 0$ gelten. Das ist aber ein Widerspruch zu $F(A) = 1$, folglich ist $\overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\sigma} = \overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\omega}$. □

1.3 Gelfandtheorie

Mit Hilfe der Gelfandtheorie lässt sich ein $\mathcal{C}^*$-Homomorphismus von den stetigen Funktionen auf dem Spektrum des Operators $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ nach $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ konstruieren. Hier werden einige Resultate aufgelistet, die wir im Späteren brauchen werden. Dieses ganze Kapitel basiert auf der Funktionalanalysis 2 Vorlesung von Professor Harald Woracek.

Definition 1.3.1 Eine Algebra $\mathscr{A}$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, der eine Multiplikation trägt, die assoziativ und bilinear ist.

- Ist die Multiplikation kommutativ, so nennt man $\mathscr{A}$ eine kommutative Algebra.
- Ist $\mathscr{A}$ mit einer Norm versehen, die $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ erfüllt, so heißt $\mathscr{A}$ eine normierte Algebra.
- Ist $\mathscr{A}$ vollständig bezüglich der Norm, so spricht man von einer Banachalgebra.

Definition 1.3.2 Sei $\mathscr{A}$ eine Algebra, dann heißt die Abbildung $^* : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ Involution, wenn sie konjugiert linear ist und

$$(ab)^* = b^*a^* \quad (a^*)^* = a$$

erfüllt.

Definition 1.3.3 Eine Banachalgebra mit einer Involution, die $\|aa^*\| = \|a\|^2$ erfüllt, heißt $\mathcal{C}^*$-Algebra.

Definition 1.3.4 Sei $\mathscr{A}$ eine Algebra und $A \in \mathscr{A}$. Wir definieren

- $G(\mathscr{A}) := \{B \in \mathscr{A} : B \text{ ist invertierbar in } \mathscr{A}\}$
- die Resolventenmenge $\rho_{\mathscr{A}}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \in G(\mathscr{A})\}$
- das Spektrum $\sigma_{\mathscr{A}}(A) := \mathbb{C} \backslash \rho_{\mathscr{A}}(A)$
- den Spektralradius $r_{\mathscr{A}}(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathscr{A}}(A)\}$.

Der Index bei Resolventenmenge, Spektrum und Spektralradius wird weggelassen, wenn klar ist, um welche Algebra es sich handelt.

Definition 1.3.5 Sei $\mathscr{A}$ eine Algebra. Ein lineares Funktional ϕ auf $\mathscr{A}$ heißt multiplikativ, wenn es $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)\ \forall a, b \in \mathscr{A}$ erfüllt. Die Menge aller multiplikativen, linearen Funktionale ungleich dem Nullfunktional auf $\mathscr{A}$ bezeichnet man als den Gelfandraum von $\mathscr{A}$, in Kurzschreibweise $\Delta(\mathscr{A})$.
Der Gelfandraum wird stets mit der ω^*-Topologie versehen, also der Topologie, die von den Seminormen $f \mapsto \|f(a)\|,\ a \in \mathscr{A}$ erzeugt wird.

Lemma 1.3.6 Der Gelfandraum ist kompakt.

Beweis. Da $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ eine punktweise Eigenschaft ist und sich infolgedessen bei ω^*-Konvergenz überträgt, ist $\Delta(\mathscr{A})$ abgeschlossen. Die Kompaktheit folgt direkt aus dem Satz von Banach-Alaoglu B.1. $\square$

Lemma 1.3.7 Sei $\mathscr{A}$ eine Algebra mit Einselement e und ϕ ein lineares Funktional auf $\mathscr{A}$, dann gilt

- $\phi \in \Delta(\mathscr{A}) \iff \phi(e) = 1\ \wedge\ \phi(a^2) = \phi(a)^2$
- $\phi \in \Delta(\mathscr{A}) \ \Rightarrow\ \phi(e) = 1\ \wedge\ \phi(a) \neq 0$ für $a \neq 0 \ \Rightarrow\ \phi(a) \in \sigma_{\mathscr{A}}(a), a \in \mathscr{A}$.

Korollar 1.3.8 Sei $\mathscr{A}$ eine Banachalgebra mit 1 und $\phi \in \Delta(\mathscr{A})$, dann gilt $|\phi(a)| \leq r_{\mathscr{A}}(a) \leq \|a\|$ und $\|\phi\| = 1$.

Satz 1.3.9 Sei $\mathscr{A}$ eine Banachalgebra mit 1 und ϕ ein lineares Funktional aus $\mathscr{A}$. Ist $\phi(a) \in \sigma_{\mathscr{A}}(a)$ für alle $a \in \mathscr{A}$, so folgt $\phi \in \Delta(A)$.

Definition 1.3.10 Sei $\mathscr{A}$ eine Banachalgebra mit 1 und bezeichne ι die kanonische Einbettung von der Algebra $\mathscr{A}$ in ihren Bidualraum, also $\iota(a)f = f(a)$. Dann heißt die Abbildung

$$\Gamma_{\mathscr{A}} : \begin{cases} \mathscr{A} & \rightarrow & C(\Delta(\mathscr{A})) \\ a & \mapsto & (\iota a)\big|_{\Delta(\mathscr{A})} \end{cases}$$

Gelfandtransformation von $\mathscr{A}$.

Satz 1.3.11 Die Gelfandtransformation hat folgende Eigenschaften

a) $\Gamma_{\mathscr{A}}$ ist ein kontraktiver Algebren-Homomorphismus.
b) $\Gamma_{\mathscr{A}}(\mathscr{A})$ ist nirgends verschwindend und punktetrennend.
c) Es gilt $(\Gamma_{\mathscr{A}} a)(\Delta(\mathscr{A})) \subseteq \sigma_{\mathscr{A}}(a)$, insbesondere ist $\|\Gamma_{\mathscr{A}} a\|_\infty \leq r_{\mathscr{A}}(a)$
d) Ist $\Gamma_{\mathscr{A}}$ isometrisch, so folgt $\|a^2\| = \|a\|^2,\ a \in \mathscr{A}$.
e) Ist $\Gamma_{\mathscr{A}}$ injektiv, so ist $\mathscr{A}$ kommutativ.

Im Falle einer kommutativen Banachalgebra lässt sich dir vorige Aussage noch ergänzen. Es gilt der folgende Satz.

Satz 1.3.12 Sei $\mathscr{A}$ eine kommutative Banachalgebra mit 1, dann gilt für die Gelfandtransformation $\Gamma_{\mathscr{A}}$:

a) $(\Gamma_{\mathscr{A}} a)(\Delta(\mathscr{A})) = \sigma_{\mathscr{A}}(a)$, insbesondere ist $\|\Gamma_{\mathscr{A}} a\|_\infty = r_{\mathscr{A}}(a)$
b) Aus $\|x^2\| = \|x\|^2, x \in \mathscr{A}$ folgt, dass $\Gamma_{\mathscr{A}}$ isometrisch ist.
c) $\Gamma_{\mathscr{A}}$ ist genau dann injektiv, wenn $\mathscr{A}$ halbeinfach ist, also wenn der Schnitt über alle maximalen Ideale von $\mathscr{A}$ der Nullraum ist.

Satz 1.3.13 Sei $\mathscr{A}$ eine Banachalgebra mit 1, dann ist $\Gamma_{\mathscr{A}}$ genau dann ein isometrischer Algebren-Isomorphismus, wenn es eine Involution * gibt, die $\mathscr{A}$ zu einer C^*-Algebra macht.

Lemma 1.3.14 Ist $\mathscr{A}$ eine C^*-Algebra, so ist die Gelfandtransformation von $\mathscr{A}$ mit der Involution verträglich.

1.4 Spektraltheorie

In diesem Kapitel sind die wesentlichen Resultate zur Spektraltheorie aus der Vorlesung Funktionalanalysis 1 zusammengetragen. Die Beweise hierzu finden sich alle in [2].

Satz 1.4.1 (Spektralabbildungssatz) Sei $\mathscr{A}$ eine Algebra mit Einselement und $p \in \mathbb{C}[z]$. Dann gilt für $A \in \mathscr{A}$

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)),$$

wobei $p(\sigma(A)) = \{p(z) : z \in \sigma(A)\}$.

Satz 1.4.2 Sei $\mathscr{A}$ eine Banachalgebra mit 1 und $A \in \mathscr{A}$, dann gilt

$$r(A) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Definition 1.4.3 Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, Ω eine Menge und $\mathcal{A}$ eine Σ-Algebra auf dieser. So heißt die Funktion E von $\mathcal{A}$ nach $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ Spektralmaß von $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathcal{H}\rangle$, genau dann wenn

a) $E(\Delta)$ eine orthogonale Projektion für jedes $\Delta \in \mathcal{A}$ ist,
b) $E(\emptyset) = 0$ und $E(\Omega) = I$,
c) $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$ für $\Delta_1,\ \Delta_2$ aus $\mathcal{A}$,
d) und für paarweise disjunkte $\Delta_n \in \mathcal{A}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$E(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}}\Delta_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(\Delta_n)$$

im Sinne der starken Operatortopologie.

Lemma 1.4.4 Ist E ein Spektralmaß von $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathcal{H}\rangle$, so ist für alle $g, h \in \mathcal{H}$ die Funktion

$$E_{g,h} : \begin{cases} \mathcal{A} & \to & \mathbb{C} \\ \Delta & \mapsto & \big(E(\Delta)g, h\big) \end{cases}$$

ein komplexes Maß. Für die Variation dieses Maßes gilt $|E_{g,h}|(\Delta) \leq \|E(\Delta)g\| \cdot \|E(\Delta)g\|$.

Lemma 1.4.5 Sei E ein Spektralmaß und $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$, dann existiert ein eindeutiger Operator $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, sodass

$$\big(Ag, h\big) = \int_\Omega \phi dE_{g,h}.$$

Diesen Operator bezeichnen wir als das integral von ϕ bezüglich E also $A =: \int_\Omega \phi dE$.

Satz 1.4.6 Sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathcal{H}\rangle$, dann ist die Abbildung

$$\Phi_E : \begin{cases} B(\Omega, \mathcal{A}) & \to & \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \\ \phi & \mapsto & \int \phi dE \end{cases}$$

ein *-Homomorphismus mit folgenden Eigenschaften:

a) $\Phi_E(\chi_\Delta) = E(\Delta)$
b) $\|\Phi_E\| = 1$
c) Jeder Operator im Bild von Φ_E ist normal.
d) Kommutiert ein Operator B mit allen Operatoren $E(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}$, so kommutiert er mit allen Operatoren aus dem Bild von Φ_E.
e) $\sigma(\Phi_E(\phi)) \subseteq \overline{\phi(\Omega)}$, wobei für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\overline{\phi(\Omega)}$ gilt

$$(\Phi_E(\phi) - \lambda I)^{-1} = \Phi_E(\frac{1}{\phi - \lambda})$$

f) Für $f \in \mathcal{H}$ gilt $\|\Phi_E(\phi)f\|^2 = \int_\Omega |\phi|^2 dE_{f,f}$ für alle $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$.
g) Konvergiert die Folge beschränkter Funktionen $\phi_n \in B(\Omega, \mathcal{A})$ punktweise gegen eine Funktion $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$, so konvergiert die Folge der Operatoren $\Phi_E(\phi_n)$ in der starken Operatortopologie gegen $\Phi_E(\phi)$.
h) Konvergiert eine Funktionenfolge ϕ_n in $B(\Omega, \mathcal{A})$ sogar gleichmäßig gegen eine Funktion ϕ, so ist $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ und die zugehörige Operatorfolge $\Phi_E(\phi_n)$ konvergiert gegen $\Phi_E(\phi)$ in der Operatornorm.

Zu diesem Satz gilt auch die Umkehrung.

Satz 1.4.7 Sei Ω ein kompakter Hausdorfraum, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{A}$ die Sigmaalgebra aller Borelmengen und $\Phi : C(\Omega) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ein beschränkter C^*-Homomorphismus. Dann existiert genau ein Spektralmaß E für $\langle\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{H}\rangle$, sodass

$$\Phi(\phi) = \int \phi dE, \quad \phi \in C(\Omega)$$

und für alle $g, h \in \mathcal{H}$ das komplexe Maß $E_{g,h}$ regulär ist. Zusätzlich hat dieses Spektralmaß die Eigenschaft, dass ein Operator B genau dann mit dem Bild von Φ kommutiert, wenn er mit allen $E(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}$ kommutiert.

Lemma 1.4.8 Sei A ein normaler Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Wir bezeichnen mit $C^*(A)$, die von A erzeugte abgeschlossene C^*-Algebra, sprich $C^*(A) = \overline{\text{span}\{A^i(A^*)^j : i, j \in \mathbb{N}\}}$. Die Abbildung

$$\psi : \begin{cases} \Delta(C^*(A)) & \to & \sigma(A)_{C^*(A)} \\ \phi & \mapsto & \phi(A) \end{cases}$$

ist ein Homöomorphismus und die Abbildung

$$\tilde{\psi}\ :\begin{cases} C(\sigma(A)_{C^*(A)}) & \rightarrow & C(\Delta(C^*(A))) \\ f & \mapsto & f\circ\psi \end{cases}$$

ein isometrischer *-Algebren-Isomorphismus.

Proposition 1.4.9 Sei $\mathscr{A}$ eine C^*-Algebra mit 1 und $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}$ eine C^*-Unteralgebra von $\mathscr{A}$ mit 1, so gilt $G(\mathscr{B})=G(\mathscr{A})\cap\mathscr{B}$ und $\rho_{\mathscr{B}}(x)=\rho_{\mathscr{A}}(A)$ sowie $\sigma_{\mathscr{A}}(A)=\sigma_{\mathscr{B}}(A)$ für alle $A\in\mathscr{B}$.

Kombiniert man den *-Algebren-Isomorphismus $\tilde{\psi}$ aus Lemma 1.4.8 mit der Gelfandtransformation $\Gamma_{C^*(A)}$ aus Definition 1.3.10 und Proposition 1.4.9 so erhält man das folgende Korollar.

Korollar 1.4.10 Die Abbildung $\Gamma_{C^*(A)}^{-1}\circ\tilde{\psi}$ ist ein isometrischer *-Algebren Isomorphismus von $C(\sigma(A))$ nach $C^*(A)$.

Dieses Korollar kombiniert mit Satz 1.4.7 führt zum folgenden Satz.

Satz 1.4.11 (Spektralsatz) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Für jeden normalen Operator $A\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ existiert ein eindeutiges Spektralmaß E auf $\sigma(A)$ mit

$$A=\int_{\sigma(A)} zdE.$$

Für jeden weiteren Operator $B\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ gilt $(BA=AB\wedge BA^*=A^*B)$ genau dann wenn $BE(\Delta)=E(\Delta)B$ für jede Borelmenge $\Delta\subseteq\sigma(A)$.

Eine wichtige Konsequenz, die sich mit der Spektraltheorie beweisen lässt und die wir an mehreren Stellen verwenden, ist der Satz von Fuglede-Putnam. Bewiesen wurde der Satz in [5].

Satz 1.4.12 (Satz von Fuglede-Putnam) Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Hilberträume und $N\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, sowie $M\in\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ normale Operatoren. Gilt für den Operator $B\in\mathfrak{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ $NB=BM$, so gilt auch $N^*B=BM^*$.

Korollar 1.4.13 Sei $N\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ein normaler Operator mit $N=\int zdE(z)$. Gilt für den Operator $B\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ $BN=NB$, so gilt auch schon $BE(\Delta)=E(\Delta)B$ für alle $\Delta\subseteq\mathscr{B}(\sigma(N))$. Das bedeutet insbesondere $B\phi(N)=\phi(N)B$ für alle $\phi\in\mathfrak{Bm}(\sigma(N))$.

Beweis. Nach dem Satz von Fuglede-Putnam gilt auch $BN^* = N^*B$ und somit folgt der Rest der Aussage aus dem Spektralsatz 1.4.11. $\square$

Die folgenden zwei Resultate behandeln einen Spezialfall, in dem man das Spektralmaß eines Operators genau angeben kann. Diese Resultate zu verallgemeinern wird das Ziel von Kapitel 3.2 und 4 sein.

Proposition 1.4.14 Sei μ ein endliches, reguläres Borelmaß auf $\mathbb{C}$, $\mathcal{H} = L^2(\mu)$ und N_μ der Multiplikationsoperator definiert durch $N_\mu f(z) = zf(z)$ für alle $f \in L^2(\mu)\chi^{(\infty)}$. Dann gelten folgende Aussagen:

a) $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert von A_t, wenn $\mu(\{\lambda\}) \neq 0$.
b) Jeder Eigenwert hat Vielfachheit 1.
c) Für das Spektralmaß E von N_μ gilt $E(\Delta) = M_{\chi_\Delta}$. (Hierbei bezeichnet M_{χ_Δ} den Multiplikationsoperator mit der Indikatorfunktion χ_Δ.)
d) Der Operator A_t hat ein einen *-zyklischen Vektor.

Beweis. Klarerweise ist der einzige Kandidat für einen Eigenvektor zum Eigenwert λ die Indikatorfunktion $\chi_{\{\lambda\}}$. Diese ist aber genau dann ungleich der Nullfunktion, wenn $\{\lambda\}$ keine Nullmenge ist. Daraus ergeben sich a) und b).
Nun zu Punkt c): Offensichtlich ist M_{χ_Δ} eine orthogonale Projektion für jedes $\Delta \in \mathbb{C}$. Damit ist $\tilde{E} : \Delta \mapsto M_{\chi_\Delta}$ ein Spektralmaß und $\tilde{E}_{g,h}(\Delta) := \big(\chi(\Delta)g, h\big) = \int g\overline{h}d\mu$ ein komplexes Maß auf $\mathcal{C}$. Dieses ist absolut stetig bezüglich μ mit Radon-Nikodým-Dicht $g\overline{h}$. Folglich gilt A.1 $\int zdE_{g,h} = \big(Ng, h\big) = \int zg\overline{h}d\mu = \int zd\tilde{E}_{g,h}$ für alle $g, h \in L^2(\mu)$, also $E = \tilde{E}$.
Um Punkt d) zu sehen, bemerken wir, dass $1 \in L^2(\mu)$, da μ endlich ist. Außerdem gilt $p(N, N^*)1 = p(z, \overline{z})$ für alle $p \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]$. Da die Polynomalgebra $\mathbb{C}[z]$ dicht in $L^2(\mu)$ ist, nach dem Satz von Stone-Weierstraß B.2, ist also auch $\{p(N, N^*)1 : p \in \mathbb{C}[z]\}$ dicht in $L^2(\mu)$, womit 1 *-zyklisch ist. $\square$

Proposition 1.4.15 Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $x \in \mathcal{H}$ ein zyklischer Vektor für den Operator A. Weiters sei $\mu(\cdot) := \langle E_A(\cdot)x, x\rangle$. Dann ist die Abbildung U von $\mathcal{H}$ nach $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ definiert durch $U\big(f(A)x\big) = f(t)$ ein unitärer Operator mit $A = U^{-1}A_tU$ und $U(x) \equiv 1$. Wobei hier A_t der Multiplikationsoperator aus Proposition 1.4.14 ist.

Beweis. Da der Vektor x zyklisch ist, gibt es zu jedem $y \in \mathcal{H}$ eine Folge von Vektoren der Form $y_k = \sum_{k=1}^{n} c_k E_A(M_k)x$ mit $c_k \in \mathbb{C}$ und $M_k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, die gegen y konvergiert. Das ist aber gleichbedeutend dazu, dass es eine Funktion f gibt mit

$$y = \int f(t) dE_A(t)x = f(A)x \tag{1.1}$$

$$\|y\|_{\mathcal{H}}^2 = \int |f(t)|^2 d\langle E_A(t)x, x\rangle = \int |f(t)|^2 d\mu < \infty \tag{1.2}$$

Aus (1.1) erhält man, dass U auf ganz $\mathcal{H}$ definiert ist und aus (1.2) erhält man, dass U nach $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ abbildet und isometrisch ist. Setzt man $f(\lambda) \equiv 1$ so ergibt sich $Ux(t) \equiv 1$. Sei nun $g \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Mit der Spektraldarstellung des Operators A ergibt sich $UAg(A)x = U \int tg(t)dE_A(t) = tg(t) = A_t(Ug(A)x)$ also $UA = A_tU$. Da U bijektiv ist, folgt $A = U^{-1}A_tU$. □

Kapitel 2

Operatoralgebren

2.1 Satz des Doppelzentralisators

Definition 2.1.1 Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathscr{S} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Dann heißt

$$\mathscr{S}' = \{A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) : \ AS = SA \quad \forall S \in \mathscr{S}\}$$

der Zentralisator und $\mathscr{S}'' = (\mathscr{S}')'$ der Doppelzentralisator von $\mathscr{S}$.

Bemerkung 2.1.2 Natürlich könnte man auch $\mathscr{S}''', \ldots$ definieren, aber es gilt bereits $\mathscr{S}' = \mathscr{S}'''$. Da jedes Element aus $\mathscr{S}'$ mit jedem Element aus $\mathscr{S}''$ kommutiert, gilt $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}'''$. Da auch $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{S}''$, kommutiert jedes Element aus $\mathscr{S}'''$ mit jedem Element aus $\mathscr{S}$ und ist deshalb schon in $\mathscr{S}'$ enthalten.

Bemerkung 2.1.3 Man sieht leicht, dass $\mathscr{S}'$ eine Algebra ist. Offensichtlich ist das neutrale Element I immer im Zentralisator enthalten. Seien $A, B \in \mathscr{S}'$ dann folgt $ABS = ASB = SAB$ also ist auch $AB \in \mathscr{S}'$.

Lemma 2.1.4 Sei $\mathscr{S} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, dann ist der Zentralisator $\mathscr{S}'$ abgeschlossen in der starken Operatortopologie.

Beweis. Sei $B \in \mathscr{S}$ und sei A_n eine Folge in $\mathscr{S}'$, die stark gegen A konvergiert. Für jedes $x \in \mathcal{H}$ gilt $\|ABx - BAx\| \leq \|ABx - A_nBx\| + \|BA_nx - BAx\| \leq \epsilon_1 + \|B\|\epsilon_2$, wobei ϵ_1 und ϵ_2 beliebig klein sind. Daraus folgt $AB = BA$ für alle $B \in \mathscr{S}$ und damit $A \in \mathscr{S}'$. Also ist $\mathscr{S}'$ stark abgeschlossen. $\square$

Korollar 2.1.5 Der Doppelzentralisator $\mathscr{S}''$ ist abgeschlossen in der starken Operatortopologie.

Bemerkung 2.1.6 Im nächsten Lemma wird der Abschluss in der starken Operatortopologie einer Algebra über ihre invarianten Unterräume charakterisiert. Dazu sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Mit Lat A wird die Menge aller invarianten abgeschlossenen Unterräume des Operators A bezeichnet. Im Folgenden schreiben wir $\mathcal{H}^{(n)}$ und $A^{(n)}$ als Abkürzungen für $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{H}$ und $\bigoplus_{i=1}^{n} A$. Sei $\mathscr{S} \subseteq \mathcal{H}$ dann bezeichnet $\mathscr{S}^{(n)} = \{A^{(n)} : A \in \mathscr{S}\}$ und Lat $\mathscr{S} = \bigcap\limits_{A \in \mathscr{S}}$ Lat A.

Lemma 2.1.7 Sei $\mathscr{S}$ eine Subalgebra von $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, die die Identität I enthält. Dann ist der Abschluss in der starken Operatortopologie $\overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\sigma}$ gleich der Menge

$$\{B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) : \text{Lat } \mathscr{S}^{(n)} \subseteq \text{Lat } B^{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}\}. \tag{2.1}$$

Beweis. Sei $\mathfrak{M}$ die Menge in 2.1. Sei $B \in \mathfrak{M}$, wir zeigen zuerst $\mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\sigma}$, indem wir zeigen, dass jede Umgebung von B nichtleeren Schnitt mit $\mathscr{S}$ hat. Dazu seien $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ beliebig aber fest. Wir definieren den Unterraum $M := \overline{\text{span}\{(Ax_1, \dots, Ax_n) : A \in \mathscr{S}\}}$. Da $\mathscr{S}$ eine Algebra ist, ist $M \in$ Lat $\mathscr{S}^{(n)}$. Damit ist auch $M \in$Lat $B^{(n)}$, woraus $(Bx_1, \dots, Bx_n) \in M$ folgt. Da aber $\{(Ax_1, \dots, Ax_n) : A \in \mathscr{S}\}$ dicht in M ist, existiert ein $A \in \mathscr{S}$, sodass $\Sigma_{k=1}^{n} \|Ax_k - Bx_k\|^2 < \epsilon^2$. Da die starke Operatortopologie von den Seminormen $\|\cdot\| \circ \iota_x$ erzeugt wird, folgt $B \in \overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\sigma}$.
Für die andere Inklusion sei $B \in \overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\sigma}$ und $M \in$Lat $\mathscr{S}^{(n)}$. Sei $(x_1, \dots, x_n) \in M$ und $\epsilon > 0$. Da $B \in \overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\sigma}$, existiert ein $A \in \mathscr{S}$, sodass $\|(Bx_1, \dots, Bx_n) - (Ax_1, \dots, Ax_n)\| < \epsilon$. Folglich ist $\text{dist}\big((Bx_1, \dots, Bx_n), M\big) = 0$. Damit wissen wir, dass M dicht in $B^n(M)$ ist und da beide Räume abgeschlossen sind, muss Gleichheit gelten. Daraus folgt $M \in$Lat $B^{(n)}$ und deswegen $B \in \mathfrak{M}$. □

In der nächsten Proposition behandeln wir den Zentralisator auf dem Summenraum.

Proposition 2.1.8 Sei $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ und $A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$ mit $A_n \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. (Wir betrachten beschränkte Operatoren und fordern daher $\sup_{n=1}^{\infty} \|A_n\| < \infty$.) Jeder beschränkte Operator B auf $\mathcal{H}$ hat eine Matrixdarstellung $[B_{ij}]$ mit $B_{ij} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$.
Es gilt $AB = BA$ genau dann, wenn $B_{ij}A_j = A_iB_{ij}$.

Beweis. Angenommen es gilt $B_{ij}A_j = A_iB_{ij}$. Sei $x = \bigoplus_{n=1}^{\infty} x_n$ aus $\mathcal{H}$, dann gilt $BAx = B(\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_nx_n) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \Sigma_{n=1}^{\infty} B_{in}A_nx_n = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \Sigma_{n=1}^{\infty} A_iB_{in}x_n = A(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \Sigma_{n=1}^{\infty} B_{in}x_n) = ABx$. Die andere Richtung folgt sofort, wenn man $x = (\delta_{in})_n$ wählt. □

Proposition 2.1.9 Sei $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ und $1 \leq n \leq \infty$ dann gilt $\{A^{(n)}\}'' = \{\{A\}''\}^{(n)}$.

Beweis. Als erstes zeigen wir $\{\{A\}''\}^{(n)} \subseteq \{A^{(n)}\}''$. Dazu sei $B \in \{A\}''$ also $B^{(n)} \in \{\{A\}''\}^{(n)}$. Sei nun $S = [S_{ij}] \in \{A^{(n)}\}'$, dann gilt nach Proposition 2.1.8 $S_{ij}A = AS_{ij}$ und somit $S_{ij} \in \{A\}'$. Für jedes $S_{ij} \in \{A\}'$ gilt aber nach Definition des Zentralisators $BS_{ij} = S_{ij}B$. Wendet man nun wieder Proposition 2.1.8 an, so erhält man $B^{(n)}S = SB^{(n)}$ und somit $B^{(n)} \in \{A^{(n)}\}''$.
Um $\{A^{(n)}\}'' \subseteq \{\{A\}''\}^{(n)}$ zu zeigen sei $B \in \{A^{(n)}\}''$ und $[\delta_{i_0j_0}]$ sei die Matrix, die an der Stelle (i_0, j_0) die Identität ist und sonst der Nulloperator. Nach Proposition 2.1.8 ist $[\delta_{i_0j_0}] \in \{A^{(n)}\}'$ weswegen $B[\delta_{i_0j_0}] = [\delta_{i_0j_0}]B$ gelten muss. Führt man die Matrixmultiplikation aus, so erhält man

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ i_0\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_{j_01} & B_{j_02} & \dots & B_{j_0n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} j_0\text{-te Spalte} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots 0 & B_{1i_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots 0 & B_{2i_0} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots 0 & B_{ni_0} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Also muss $B_{ij} = 0$ und $B_{ii} = B_{jj}$ für alle $i \neq j$ gelten. Die Matrix $[B_{ij}]$ hat also Diagonalgestalt und damit ist $B \in \{\{A\}''\}^{(n)}$. Somit ist die Gleichheit der beiden Mengen gezeigt. □

Satz 2.1.10 (Satz des Doppelzentralisators) Sei $\mathscr{S}$ eine $\mathcal{C}^*$-Subalgebra von $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, die I enthält. Dann gilt $\overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\sigma} = \overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\omega} = \mathscr{S}''$. Hierbei bezeichnet $\overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\sigma}$ den Abschluss in der starken Operatortopologie und $\overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\omega}$ den Abschluss in der schwachen Operatortopologie.

Beweis. Nach Korollar 1.2.12 gilt $\overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\sigma} = \overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\omega}$. Außerdem gilt nach Lemma 2.1.4, dass der Doppelzentralisator stark abgeschlossen ist. Mit $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{S}''$ folgt bereits $\overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\omega} = \overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\sigma} \subseteq \mathscr{S}''$. Es bleibt also nur $\mathscr{S}'' \subseteq \overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\sigma}$ zu zeigen.

Sei dazu $B \in \mathscr{S}'', n \geq 1$ und $\mathcal{M} \in \operatorname{Lat} \mathscr{S}^{(n)}$. Wir wollen zeigen, dass $B^{(n)}\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ und Lemma 2.1.7 verwenden. Da $\mathscr{S}$ eine $\mathcal{C}^*$-Algebra ist, ist auch $\mathscr{S}^{(n)}$ eine $\mathcal{C}^*$-Algebra. Der Unterraum $\mathcal{M}$ ist also invariant unter $A^{(n)}$ und $(A^*)^{(n)}$ für jedes $A \in \mathscr{S}$. Somit ist $\mathcal{M}$ sogar ein reduzierender Unterraum nach Proposition 1.1.3 für jedes $A^{(n)} \in \mathscr{S}^{(n)}$. Nach Proposition 1.1.4 kommutieren alle $A^{(n)} \in \mathscr{S}^{(n)}$ mit der orthogonalen Projektion P auf $\mathcal{M}$. Das ergibt $P \in \{\mathscr{S}^{(n)}\}'$. Da nach Proposition 2.1.9 $B^{(n)} \in \{\mathscr{S}^{(n)}\}''$ liegt, muss gelten $PB^{(n)} = B^{(n)}P$. Damit ist $\mathcal{M}$ ein invarianter Unterraum von $B^{(n)}$ und mit Lemma 2.1.7 folgt $B \in \overline{\mathscr{S}}^{\mathcal{T}_\sigma}$. □

Satz 2.1.11 Sei (X, Ω, μ) ein σ-endlicher Maßraum. Für jede Funktion $\phi \in L^\infty$ bezeichne M_ϕ den Multiplikationsoperator mit der Funktion ϕ auf $L^2(\mu)$. Für die Menge $\mathscr{A}_\mu = \{M_\phi : \phi \in L^\infty(\mu)\}$ gilt $\mathscr{A}_\mu = \mathscr{A}_\mu' = \mathscr{A}_\mu''$.

Beweis. Wenn $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$, gilt klarer Weise auch $\mathscr{A} = \mathscr{A}''$. Da alle Elemente von $\mathscr{A}$ miteinander kommutieren gilt schon $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}'$. Es bleibt also nur $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A}$ zu zeigen.
Sei dazu $A \in \mathscr{A}'$. Wir müssen zeigen, dass ein $\phi \in L^\infty(\mu)$ existiert mit $A = M_\phi$. Hierfür machen wir eine Fallunterscheidung, je nachdem ob $\mu(X) < \infty$, oder $\mu(X) = \infty$.
Im Fall, dass $\mu(X) < \infty$ gilt $1 \in L^2(\mu)$. Damit ist auch $\phi = A(1)$ in $L^2(\mu)$. Sei nun $\psi \in L^\infty(\mu)$, dann ist ψ auch in $L^2(\mu)$ und wir können A auf ψ anwenden. Es folgt

$$A(\psi) = AM_\psi 1 = M_\psi A1 = M_\psi \phi = \phi\psi.$$

Also ist A der Multiplikationsoperator mit der Funktion ϕ. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\phi \in L^\infty(\mu)$ ist. Angenommen $\|\phi\|_\infty = \infty$, dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Menge $\Delta_n := \{x \in X : |\phi(x)| > n\}$ in Ω mit $0 < \mu(\Delta_n) < \infty$. Für die Indikatorfunktion $\chi_{\Delta_n} \in L^2(\mu)$ gilt $\|A\chi_{\Delta_n}\|_2 = \|\phi\chi\|_2 \geq n\|\chi\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das ist aber ein Widerspruch zur Beschränktheit von $\|A\|$, also gilt $\|\phi\|_\infty < \infty$.
Nun betrachten wir den Fall, dass $\mu(X) = \infty$. Wir wählen eine Familie disjunkter Mengen $\Delta_k \in \Omega$ mit $\mu(\Delta_k) < \infty$ und $X = \bigcup_{k=1}^\infty \Delta_k$. Diese Wahl ist zulässig, da (X, Ω, μ) ein σ-endlicher Maßraum ist. Zu jedem Δ_k betrachten wir den Raum $L^2(\mu\big|_{\Delta_k}) \subseteq L^2(\mu)$. Für die Einschränkung des Operators A auf $L^2(\mu\big|_{\Delta_k})$ gilt bereits, dass ein $\phi_k \in L^\infty(\mu\big|_{\Delta_k})$ existiert mit $A \circ \chi_{\Delta_k} = M_{\phi_k}$. Jedes ϕ_k lässt sich kanonisch in $L^2(\mu)$ einbetten. Wählt man nun $\phi = \sum_{k=1}^\infty \phi_k$, so erhält man $A = M_\phi$. Dass die Funktion ϕ aus $L^\infty(\mu)$ ist, folgt aus der gleichen Überlegung, wie im ersten Beweisschritt. □

Korollar 2.1.12 Sei μ ein Maß mit kompaktem Träger in $\mathbb{C}$ und bezeichne N_μ den Multiplikationsoperator $f(z) \mapsto f(z)z$ auf $L^2(\mu)$ und M_ϕ den Multiplikationsoperator mit der $L^\infty(\mu)$-Funktion ϕ, so gilt

$$\{N_\mu\}' = \mathscr{A}_\mu := \{M_\phi : \phi \in L^\infty(\mu)\}.$$

Beweis. Offensichtlich gilt $\mathscr{A}_\mu \subseteq \{N\}'$. Für jedes $A \in \{N\}'$ gilt nach Satz 1.4.12 auch $AN_\mu^* = N_\mu^* A$. Daraus folgt $AM_p = M_p A$ für jedes Polynom in z und $\overline{z}$. Da diese Eigenschaft punktweise ist und bei ω-Konvergenz erhalten bleibt, gilt $A \in \mathscr{A}_\mu'$. Aus Satz 2.1.11 wissen wir, dass $\mathscr{A}_\mu = \mathscr{A}_\mu'$, womit die Aussage folgt. □

2.2 Von-Neumann Algebren

Definition 2.2.1 Eine von-Neumann Algebra ist eine $\mathcal{C}^*$-Subalgebra $\mathscr{A}$ von $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ für die $\mathscr{A} = \mathscr{A}''$ gilt.

Beispiel 2.2.2 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ und $\mathbb{C}$ sind von-Neumann Algebren. Nach Satz 2.1.11 ist $\mathscr{A}_\mu$ auch eine von-Neumann Algebra.

Proposition 2.2.3 Seien $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \dots$ von-Neumann Algebren, dann ist auch $\mathscr{A} := \bigoplus_{k=1}^\infty \mathscr{A}_k$ eine von Neumann Algebra.

Beweis. Zuerst überlegen wir uns, wie der Zentralisator $\mathscr{A}'$ ausschaut. Sei $B \in \mathscr{A}'$, analog zu Proposition 2.1.8 hat B eine Matrixdarstellung $[B_{ij}]$ und es muss

$$B_{ij} A_j = A_i B_{ij} \tag{2.2}$$

gelten. Da $\mathscr{A}_i$ eine von Neumann Algebra ist, gilt insbesondere $I \in \mathscr{A}_i$. Wählt man nun $A_i = I$ und $A_j = 0$ in (2.2) so erhält man $B_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$.
Da offensichtlich $0 \oplus 0 \oplus \dots I \oplus 0 \dots$ auch in $\mathscr{A}'$ enthalten ist, mit I an jeder beliebigen Stelle, hat auch jedes $B \in \mathscr{A}''$ Diagonalgestalt. Folglich ist $\mathscr{A}'' = \bigoplus_{k=1}^\infty \mathscr{A}_k'' = \bigoplus_{k=1}^\infty \mathscr{A}_k = \mathscr{A}$, da genau die Elemente in $\mathscr{A}''$ sind, die komponentenweise in $\mathscr{A}_i'$ liegen. □

Proposition 2.2.4 Sei $\mathscr{A}_j$ eine von-Neumann Algebra auf $\mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$. Ist $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ein Isomorphismus, so dass $U\mathscr{A}_1 U^{-1} = \mathscr{A}_2$, dann gilt auch $U\mathscr{A}_1' U^{-1} = \mathscr{A}_2'$.

Beweis. Sei $B \in \mathscr{A}_1'$ und $A \in \mathscr{A}_2$. Da $U^{-1}AU$ in $\mathscr{A}_1$ liegt, gilt $BU^{-1}AU = U^{-1}AUB$. Multipliziert man diese Gleichung von rechts mit U^{-1} und von links mit U, so erhält man $UBU^{-1}A = AUBU^{-1}$. Folglich gilt $U\mathscr{A}_1'U^{-1} \subseteq \mathscr{A}_2'$.
Vertauscht man die Rollen und wählt $A \in \mathscr{A}_1$ und $B \in \mathscr{A}_2'$, so erhält man $BUAU^{-1} = UAU^{-1}B$. Multiplizieren mit U^{-1} von links und U von rechts liefert $U^{-1}BUA = AU^{-1}BU$. Folglich gilt $U^{-1}\mathscr{A}_2'U \subseteq \mathscr{A}_1'$. Insgesamt ergibt sich daraus $U\mathscr{A}_1'U^{-1} = \mathscr{A}_2'$.

□

Definition 2.2.5 Sei $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ und $x \in \mathcal{H}$. Der Vektor x heißt separierend für $\mathscr{A}$, wenn aus $Ax = 0$ und $A \in \mathscr{A}$ schon $A = 0$ folgt.

Definition 2.2.6 Sei $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, ein Vektor h aus dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt zyklischer Vektor der Menge $\mathscr{A}$, wenn $\operatorname{span}\{Ah : A \in \mathscr{A}\}$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt.

Definition 2.2.7 Sei $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, ein Vektor h aus dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt *-zyklischer Vektor der Menge $\mathscr{A}$, wenn $\operatorname{span}\{Ah, A^*h : A \in \mathscr{A}\}$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt.

Lemma 2.2.8 Sei N ein normaler Operator aus $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ und E sein Spektralmaß. Die Menge $\{p(N, N^*)h : p \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]\}$ liegt genau dann dicht in $\mathcal{H}$, wenn die Menge $\operatorname{span}\{E(\Delta)h : \Delta \in \mathcal{B}(\sigma(\mathbb{C}))\}$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt.

Beweis. Da $\sigma(N)$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist, lässt sich jedes Polynom $p(z, \overline{z})$ in der L^2-Norm durch eine Folge von Treppenfunktionen $f_n := \sum_{i=1}^{N_n} c_i \chi_{\Delta_n}$ approximieren und umgekehrt. Mit Hilfe des Spektralsatz können wir diese Dichtheitseigenschaften von $\sigma(N)$ auf $\mathcal{H}$ übertragen. Sei dazu $\tilde{f}_n := \sum_{i=1}^{N_n} c_i E(\Delta_n)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\|p(N, N^*)h - \tilde{f}_n h\|^2 &= \big((p(N, N^*) - \tilde{f}_n)h, (p(N, N^*) - \tilde{f}_n)h\big) = \\ &= \int_{\sigma(N)} |p(z, \overline{z}) - f_n|^2 dE_{h,h} \to 0.\end{aligned}$$

Analog können wir in die andere Richtung für eine feste Treppenfunktion f das Element fh mit einer Folge von Polynomen $p_n h$ approximieren. Folglich liegen die Mengen dicht ineinander. □

Beispiel 2.2.9 Sei (X, Ω, μ) ein σ-endlicher Maßraum und $\big(\Delta_k\big)_k$ eine abzählbare Zerlegung von Ω mit $\mu(\Delta_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wählt man die Funktion $f = \Sigma_{k=1}^{\infty} \chi_{\Delta_k} \frac{2^{-k}}{\mu(\Delta_k)}$, so gilt $f \in L^2(\mu)$ und $\mu(\ker(f)) = 0$. Daraus folgt, dass f ein separierender Vektor für

die Menge $\mathscr{A}_\mu$ aus Satz 2.1.11 ist.
Außerdem ist für jede Funktion g mit endlichem Träger die Funktion $f^{-1}g$ aus $L^2(\mu)$. Folglich existiert zu jedem g mit endlichem Träger, ein Multiplikationsoperator $M_{f^{-1}g}f \in \mathscr{A}_\mu$ für den gilt $g = M_{f^{-1}g}f$. Da die Menge aller Funktionen mit endlichem Träger dicht in $L^2(\mu)$ ist, ist f auch ein zyklischer Vektor.

Proposition 2.2.10 Sei $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ und x_0 ein zyklischer Vektor der Menge $\mathscr{A}$, dann ist x_0 ein separierender Vektor von $\mathscr{A}'$.

Beweis. Angenommen es gilt $Tx_0 = 0$ für alle $T \in \mathscr{A}'$. Da T mit allen $A \in \mathscr{A}$ kommutiert gilt $TAx_0 = ATx_0 = A0 = 0$. Da x_0 ein zyklischer Vektor ist, ist T auf einer dichten Teilmenge von $\mathcal{H}$ gleich 0. Da T stetig ist, gilt $T = 0$. □

Korollar 2.2.11 Sei $\mathscr{A}$ eine abelsche Subalgebra von $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, dann ist jeder zyklische Vektor von $\mathscr{A}$ auch ein separierender Vektor von $\mathscr{A}$.

Beweis. Da $\mathscr{A}$ abelsch ist, gilt $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}'$. Damit ist jeder separierende Vektor von $\mathscr{A}'$ auch ein separierender Vektor von $\mathscr{A}$. □

Satz 2.2.12 Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und $\mathscr{A}$ eine abelsche $\mathcal{C}^*$-Subalgebra von $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, dann sind die folgende Aussagen äquivalent.

a) $\mathscr{A}$ ist eine maximal abelsche von Neumann Algebra.
b) $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$
c) $\mathscr{A}$ hat einen zyklischen Vektor, enthält die Identität I und ist in der starken Operatortopologie abgeschlossen.
d) Es gibt einen kompakten metrischen Raum X, ein positives Borelmaß μ mit Träger in X und einen Isomorphismus $U : L^2(\mu) \to \mathcal{H}$, so dass $U\mathscr{A}_\mu U^{-1} = \mathscr{A}$.

Beweis. a)⇔b): Angenommen $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$, dann ist jeder Operator $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, der mit alle Operatoren $A \in \mathscr{A}$ kommutiert bereits in $\mathscr{A}$ enthalten, also ist $\mathscr{A}$ maximal abelsch. Insbesondere gilt $\mathscr{A} = \mathscr{A}' = \mathscr{A}''$. Also ist $\mathscr{A}$ auch eine von Neumann Algebra.
Sei umgekehrt $\mathscr{A}$ eine maximal abelsche von Neumann Algebra. Da $\mathscr{A}$ abelsch ist, gilt $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}'$. Sei nun $B \in \mathscr{A}'$, dann ist $\tilde{\mathscr{A}} := \operatorname{span}\{\mathscr{A} \cup B\}$ immer noch abelsch und eine

Oberalgebra von $\mathscr{A}$. Bilden wir den Abschluss dieser Menge in der starken Operatortopologie $\overline{\tilde{\mathscr{A}}}^{\sigma}$, so haben wir nach Satz 2.1.10 eine abelsche von Neumann Algebra konstruiert, die $\mathscr{A}$ enthält. Aus der Maximalität von $\mathscr{A}$ folgt nun $\mathscr{A} = \tilde{\mathscr{A}}$ und damit $B \in \mathscr{A}$ für alle $B \in \mathscr{A}'$, also $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$.

b)$\Rightarrow$c): Da die Identität I mit jedem Operator kommutiert, gilt $I \in \mathscr{A}' = \mathscr{A}$. Da aus $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$ auch $\mathscr{A} = \mathscr{A}''$ folgt, ist $\mathscr{A}$ nach Lemma 2.1.4 in der starken Operatortopologie abgeschlossen.
Nun zeigen wir, dass es einen zyklischen Vektor gibt. Da $\mathcal{H}$ separabel ist, können wir nach dem Lemma von Zorn B.3 eine Folge von Einheitsvektoren $\{e_n\}$ wählen, so dass $\overline{\{\mathscr{A}e_n\}} \perp \overline{\{\mathscr{A}e_m\}}$ für $n \neq m$ und $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \overline{\{\mathscr{A}e_n\}}$. Aus diesen konstruieren wir den zyklischen Vektor $e_0 := \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{\sqrt{2^n}}$. Da $e_n \perp e_m$ gilt $\|e_0\|^2 = \Sigma_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$.
Sei nun P_n die orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}_n := \overline{\{\mathscr{A}_n\}}$. Offensichtlich ist $\mathcal{H}_n$ invariant unter $\mathscr{A}$ und damit auch unter $\mathscr{A}^*$, da ja $\mathscr{A}$ eine $\mathcal{C}^*$-Algebra ist. Nach Proposition 1.1.3 ist $\mathcal{H}_n$ ein reduzierender Unterraum für $\mathscr{A}$ und mit Proposition 1.1.4 folgt $P \in \mathscr{A}' = \mathscr{A}$. Damit erhalten wir $\mathcal{H}_n = \overline{\mathscr{A}e_n} = \overline{\{\mathscr{A}Pe_0\}} \subseteq \overline{\{\mathscr{A}e_0\}}$. Daraus ergibt sich, dass $\mathscr{A}e_0$ dicht in $\mathcal{H}$ ist und somit ist e_0 ein zyklischer Vektor von $\mathscr{A}$.

c)$\Rightarrow$d): Für diesen Beweis verwenden wir die Resultate aus Kapitel 1.3 und 1.4. Der Gelfandraum wird zum kompakten Raum X und aus der Gelfandtransformation konstruieren wir den Isomorphismus.
Zuerst überlegen wir uns, dass die abgeschlossene Einheitskugel $K_1(\mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ metrisierbar und kompakt ist nach 1.2.7 und 1.2.5, da $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum ist. Es existiert also eine abzählbare $\omega-$dichte Teilmenge $S \subseteq \mathscr{A}$. Sei $\mathscr{S}$ die von S generierte $\mathcal{C}^*$-Algebra, dann ist $\mathscr{S}$ eine separable $\mathcal{C}^*$-Algebra, deren σ-Abschluss $\mathscr{A}$ ist. Betrachten wir nun den Gelfandraum $\Delta(\mathscr{S})$. Da $\mathscr{S}$ separabel ist, können wir nach Korollar 1.2.9 $\Delta(\mathscr{S})$ metrisieren. Wir setzen also $X = \Delta(\mathscr{S})$. Nach Satz 1.3.13 ist die Inverse der Gelfandtransformation $\Gamma_{\mathscr{S}}$ ein Isomorphismus von $C(X)$ nach $\mathscr{S}$. Folglich gibt es nach Satz 1.4.7 ein Spektralmaß E mit $\Gamma_{\mathscr{S}}^{-1}(u) = \int u dE$.
Sei nun $\phi \in \mathfrak{Bm}(X)$, dann existiert eine Folge $\{u_i\}$ in $C(X)$, sodass $\int u_i d\nu \rightarrow \int \phi d\nu$ für alle regulären Borelmaße ν auf X nach Lemma 1.2.10. Damit konvergiert auch $\int u_i dE$ gegen $\int \phi dE$ in der schwachen Operatortopologie. Da $\mathscr{A}$ $\mathcal{T}_{\sigma}$-abgeschlossen und mit Satz 2.1.10 auch $\mathcal{T}_{\omega}$-abgeschlossen ist, gilt $\{\int \phi dE : \phi \in B(X)\} \subseteq \mathscr{A}$.
Im nächsten Schritt konstruieren wir das Maß μ. Dazu sei e_0 ein zyklischer Vektor von $\mathscr{A}$. Wir setzen $\mu(\Delta) := \|E(\Delta)e_0\|^2 = \langle E(\Delta)e_0, e_0\rangle$. Damit gilt für jedes $\phi \in B(X)$ $\int \phi d\mu = \langle (\int \phi dE)e_0, e_0\rangle$. Wir können nun $B(X)$ als Teilraum von $L^2(\mu)$ auffassen, indem wir Funktionen miteinander identifizieren, die μ-fast überall übereinstimmen. Für jedes

$\phi \in B(X)$ gilt

$$\|(\int \phi dE)e_0\|^2 = \langle (\int \phi dE)e_0, (\int \phi dE)e_0\rangle = \langle (\int \phi dE)^*(\int \phi dE)e_0, e_0\rangle = \tag{2.3}$$

$$= \langle (\int \overline{\phi}\phi dE)e_0, e_0\rangle = \int |\phi|^2 d\mu. \tag{2.4}$$

Wir können also eine Abbildung $\tilde{U} : L^2(\mu) \supseteq B(X) \to \mathcal{H}$ definieren mit $\tilde{U}\phi = (\int \phi dE)e_0$. Aufgrund von (2.3) ist diese Abbildung wohl definiert. Gleichzeitig liefert (2.3), dass $\tilde{U}$ eine Isometrie ist. Da X kompakt ist, ist $B(X)$ eine dichte Teilmenge von $L^2(\mu)$. Ebenso ist $\tilde{U}(B(X)) \supseteq \mathscr{A}e_0$ dicht in $\mathcal{H}$, da ja e_0 ein zyklischer Vektor ist. Deswegen lässt sich $\tilde{U}$ zu einem Isomorphismus U von $L^2(\mu)$ nach $\mathcal{H}$ fortsetzen.
Sei nun $\phi \in B(X)$, $\psi \in L^\infty(\mu)$ und bezeichne M_ψ den Multiplikationsoperator, dann gilt

$$UM_\psi\phi = U(\psi\phi) = (\int \psi\phi dE)e_0 = (\int \psi dE)(\int \phi dE)e_0 = (\int \psi dE)U\phi.$$

Daraus folgt $UM_\psi U^{-1} = \int \psi dE$, also muss auch $U\mathscr{A}_\mu U^{-1} \subseteq \mathscr{A}$ gelten. Aus Satz 2.1.11 kombiniert mit Satz 2.1.10 erhalten wir, dass $\mathscr{A}_\mu$ eine σ-abgeschlossen C^*-Algebra ist und somit auch $U\mathscr{A}_\mu U^{-1}$. Da $U\mathscr{A}_\mu U^{-1}$ die Algebra $UC(X)U^{-1} = \mathscr{S}$ enthält, welche σ-dicht in $\mathscr{A}$ ist, folgt $U\mathscr{A}_\mu U^{-1} = \mathscr{A}$.

d)$\to$b): Aus Proposition 2.1.11 wissen wir, dass $\mathscr{A}_\mu = \mathscr{A}_\mu'$. Sei $B \in \mathscr{A}'$, dann gilt $BUM_\phi U^{-1} = UM_\phi U^{-1}B,\ \forall M_\phi \in \mathscr{A}_\mu$.
Das lässt sich umformen zu $U^{-1}BUM_\phi = M_\phi U^{-1}BU,\ \forall M_\phi \in \mathscr{A}_\mu$, was gleichbedeutend zu $U^{-1}BU \in \mathscr{A}_\mu' = \mathscr{A}_\mu$. Rücktransformieren liefert $B \in \mathscr{A}$ und somit $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A}$. Da $\mathscr{A}$ abelsch ist, gilt auch $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}'$. □

Korollar 2.2.13 Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, dann hat jede abelsche C^*-Subalgebra $\mathscr{A}$ von $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ einen separierenden Vektor.

Beweis. Als erstes überlegen wir uns mit Hilfe des Lemmas von Zorn B.3, dass $\mathscr{A}$ in einer maximalen abelschen von Neumann Algebra $\mathscr{A}_m$ enthalten ist. Dazu sei $\mathscr{A}_i$ eine bezüglich der Mengeninklusion totalgeordnete Kette abelscher Algebren, die $\mathscr{A}$ enthalten. Sei $\mathscr{S} := \bigcup_{i\in I}\mathscr{A}_i$. Für $A, B \in \mathscr{S}$ existieren $j, k \in I$, sodass $A \in \mathscr{A}_i\ \forall i \geq j$ und $B \in \mathscr{A}_i\ \forall i \geq k$. Damit existiert aber auch eine abelsche Algebra $\mathscr{A}_{\max(j,k)}$, die A und B enthält, weswegen $AB = BA$ gelten muss. Die C^*-Algebra Eigenschaften von $\mathscr{S}$ erhalten wir mit dem gleichen Prinzip, folglich ist $\mathscr{S}$ eine abelsche C^*-Algebra und jede totalgeordnete Kette

somit beschränkt.
Damit ist das Lemma von Zorn anwendbar und wir erhalten, dass $\mathscr{A}$ in einer maximalen abelschen C^*-Algebra enthalten ist. Zwei Operatoren A, B kommutieren genau dann, wenn $ABx = BAx$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Es handelt sich also um eine punktweise Eigenschaft, die beim abschließen in der starken Operatortopologie erhalten bleibt. Somit muss $\mathscr{S}$ schon stark abgeschlossen sein, da ja sonst $\overline{\mathscr{S}}^{\sigma}$ eine echt größere abelsche C^*-Algebra wäre. Mit Satz 2.1.10 erhalten wir, dass $\mathscr{S}$ eine von Neumann Algebra ist.
Jetzt können wir Satz 2.2.12 verwenden und erhalten, dass $\mathscr{S}$ einen zyklischen Vektor e_0 hat. Nach Korollar 2.2.11 ist e_0 auch ein separierender Vektor von $\mathscr{S}$. Damit ist e_0 aber auch ein separierender Vektor jeder Teilmenge von $\mathscr{S}$, insbesondere von $\mathscr{A}$. $\square$

Kapitel 3

Erzeugte von-Neumann Algebren

3.1 Skalarwertige Spektralmaße

Von nun an werden wir immer voraussetzen, dass $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum ist.

Definition 3.1.1 Sei N ein normaler Operator auf $\mathcal{H}$, dann bezeichnen wir mit $W^*(N)$ die von N erzeugte von-Neumann Algebra, also den Schnitt aller von-Neumann Algebren, die N enthalten.

Lemma 3.1.2 Für $N \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ und N normal gilt

$$W^*(N) = \overline{\{p(N, N^*) :\ p(z, \overline{z}) \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]\}}^{\mathcal{T}_\sigma} = \overline{\{p(N, N^*) :\ p(z, \overline{z}) \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]\}}^{\mathcal{T}_\omega}.$$

Beweis. Offensichtlich ist 1 in der Menge $M := \{p(N, N^*) :\ p(z, \overline{z}) \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]\}$ enthalten. Da $W^*(N)$ unter den Algebra-Operationen abgeschlossen ist und N enthält, gilt $M \subseteq W^*(N)$. Nach Satz 2.1.10 ist $\overline{M}^{\{}\mathcal{T}_\sigma\} = \overline{M}^{\{}\top_\omega\}$ schon eine von-Neumann Algebra und somit die kleinste von-Neumann Algebra, die N enthält. □

Proposition 3.1.3 Ist N ein normaler Operator aus $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, so gilt $W^*(N) = \{N\}'' \supseteq \{\phi(N) : \phi \in B(\sigma(N))\}$.

Beweis. Offensichtlich ist $\{N\}''$ eine von Neumann Algebra, die N enthält. Es bleibt die Frage, ob es auch eine C^*-Algebra ist. Sei dazu $B \in \{N\}''$, das heißt, aus $AN = NA$ folgt

$AB = BA$ für alle $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Satz 1.4.12 liefert, dass aus $AN = NA$ auch $A^*N = NA^*$ folgt. Damit gilt aber auch $A^*B = BA^*$, was durch anwenden der Involution auf beiden Seiten der Gleichung zu $B^*A = AB^*$ wird. Damit ist $B^* \in \{N\}''$ und somit $\{N\}''$ eine C^*-Algebra. Da $W^*(N)$ die kleinste C^*-von Neumann Algebra ist, die N enthält, gilt $W^*(N) \subseteq \{N\}''$.
Für zwei Algebren $\mathscr{A}, \mathscr{S}$ gilt stets $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{S} \to \mathscr{A}' \supseteq \mathscr{S}' \to \mathscr{A}'' \subseteq \mathscr{S}''$. Da offensichtlich $\{N\} \subseteq W^*(N)$, gilt auch $\{N\}'' \subseteq W^*(N)'' = W^*(N)$, womit die erste Gleichheit gezeigt ist.
Die Teilmengeninklusion folgt aus dem Spektralsatz 1.4.11. Dieser liefert ja, dass jeder Operator $B \in \{N, N^*\}' \stackrel{Satz 1.4.12}{=} \{N\}'$ auch mit allen Projektionen $E(\Delta)$ kommutiert, wobei $\Delta \subseteq \sigma(N)$ eine Borelmenge ist. Gehen wir vom Spektralmaß zum zugehörigen komplexen Maß $E_{g,h}$ mit $g, h \in \mathcal{H}$ über, so erhalten wir $E_{g,B^*h}(\Delta) = \big(E(\Delta)g, B^*h\big) = \big(BE(\Delta)g, h\big) = \big(E(\Delta)Bg, h\big) = E_{Bg,h}(\Delta)$. Ins Integral einsetzen liefert

$$\begin{aligned}\big(B\phi(N)g, h\big) &= \big(B \int \phi dEg, h\big) = \big(\int \phi dEg, B^*h\big) = \int \phi dE_{g,B^*h} = \\ &= \int \phi dE_{Bg,h} = \big(\int \phi dEBg, h\big) = \big(\phi(N)Bg, h\big).\end{aligned}$$

Das gilt für alle $g, h \in \mathcal{H}$, woraus $B\phi(N) = \phi(N)B$ folgt. Damit ist $\{N\}'' \supseteq \{\phi(N) : \phi \in B(\sigma(N))\}$ gezeigt. □

Proposition 3.1.3 lässt sich noch ausbauen. Statt der Teilmengeninklusion gilt sogar die Gleichheit. Um das zu zeigen bedarf es allerdings noch einiger Lemmata.

Definition 3.1.4 Sei $N \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ein normaler Operator mit Spektralmaß E. Nach Korollar 2.2.13 hat $W^*(N)$ einen separierenden Vektor e_0. Wir definieren das Maß μ_{E,e_0} auf $\mathscr{B}(\sigma(N))$ mit $\mu_{E,e_0} = \big(E(\Delta e_0, e_0)\big)$. Wenn es zu keiner Verwechslung kommen kann, schreiben wie auch einfach μ_{e_0} statt μ_{E,e_0}.

Lemma 3.1.5 Mit der Notation aus Definition 3.1.4 gilt $\mu_{e_0}(\Delta) = 0$ genau dann, wenn $E(\Delta) = 0$.

Beweis. Da $E(\Delta)$ eine orthogonale Projektion ist, gilt $\big(E(\Delta)e_0, e_0\big) = \big(E(\Delta)E(\Delta)e_0, e_0\big) = \big(E(\Delta)e_0, E(\Delta)e_0\big)$. Also ist $\mu(\Delta) = 0$, wenn $E(\Delta)e_0 = 0$. Aus dem Spektralsatz wissen wir, dass $E(\Delta) \in \{N\}''$. Folglich muss $E(\Delta) = 0$ sein, da ja e_0 separierend für $\{N\}''$ ist. □

Definition 3.1.6 Sei N ein normaler Operator auf $\mathcal{H}$ und E das zugehörige Spektralmaß. Wir nennen ν ein skalarwertiges Spektralmaß für N, wenn ν ein positives Borelmaß auf $\sigma(N)$ ist mit $\nu(\Delta) = 0 \Leftrightarrow E(\Delta) = 0$.

Das Maß aus Lemma 3.1.5 ist ein skalarwertiges Spektralmaß, womit die Existenz solcher Maße sicher gestellt ist. Im Weiteren werden wir zeigen, dass sogar jedes skalarwertige Spektralmaß eine Darstellungsform wie in Lemma 3.1.5 hat.

Definition 3.1.7 Sei $h \in \mathcal{H}$ und N ein normaler Operator. Wir definieren $\mathcal{H}_h :=$cl$[W^*(N)h]$ und schreiben N_h für die Einschränkung $N\big|_{\mathcal{H}_h}$.

Lemma 3.1.8 $\mathcal{H}_h$ ist der kleinste reduzierende Unterraum für N, der h enthält.

Beweis. Es ist klar, dass $\{p(N, N^*)h : p \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]\}$ in jedem reduzierenden Unterraum von N enthalten ist, der h enthält. Da nach Definition jeder reduzierende Unterraum abgeschlossen ist, folgt die Aussage. $\square$

Lemma 3.1.9 Sei $h \in \mathcal{H}$ und $\rho_h : W^*(N) \to W^*(N_h)$ definiert durch $\rho_h(A) = A\big|_{\mathcal{H}_h}$, dann gilt:

- ρ_h ist ein $\mathcal{T}_\omega$-stetiger *-Epimorhismus (also ein surjektiver *-Homomorphismus).
- $\rho_h(\psi(N)) = \psi(N_h)$ für jedes $\psi \in B(\sigma(N))$.
- Für jedes $A \in W^*(N)$ existiert ein $\phi \in B(\sigma(N_h))$, sodass $\rho_h(A) = \phi(N_h)$.

Beweis. Zuerst überlegen wir uns, dass ρ_h tatsächlich die Menge $W^*(N)$ in die Menge $W^*(N_h)$ abbildet. Da $\mathcal{H}_h$ unter N und N^* invariant ist, ist die Einschränkung eines Polynoms, das Polynom der Einschränkungen: $\rho_h(p(N, N^*)) = p(N_h, N_h^*)$. Sei nun p_n eine Folge von Polynomen, sodass $p_n(N, N^*) \xrightarrow{\mathcal{T}_\omega} A$, also $\big(p_n(N, N^*)f, g\big) \to \big(Af, g\big)$ für alle $f, g \in \mathcal{H}$. Damit konvergiert auch $\big(p_n(N_h, N_h^*)f, g\big) \to \big(\rho_h(A)f, g\big)$ für alle $f, g \in \mathcal{H}_h$ und folglich gilt $\rho_h(A) \in W^*(N_h)$, da ja $W^*(N_h)$ schwach abgeschlossen ist.
Für jede $\mathcal{T}_\omega$-konvergente Folge A_n gilt $\big(A_nf, g\big) \to \big(A_nf, g\big)$ für alle $f, g \in \mathcal{H}$ und somit insbesondere auch für alle $f, g \in \mathcal{H}_h$. Damit ist auch die Einschränkung konvergent, woraus die Stetigkeit von ρ_h folgt.
Offensichtlich ist ρ_h ein Homomorphismus. Dass ρ_h mit * verträglich ist, erhält man durch

simples umformen: $\big(\rho_h(A^*)f,g\big) = \big(A^*f,g\big) = \big(f,Ag\big) = \big(f,\rho_h Ag\big) = \big(\rho(A)^*f,g\big)$ für alle $f,g \in \mathcal{H}_h$.
Sei nun $\psi \in B(\sigma(N))$, dann existiert nach Lemma 1.2.10 eine Folge von Polynomen $p_n(z,\overline{z})$, für die gilt $\int_{\sigma(N)} p_n d\nu \to \int_{\sigma(N)} \psi d\nu$ für alle $\nu \in M(\sigma(N))$. Da jeder Operator, der auf $\mathcal{H}$ invertierbar ist, erst recht auf $\mathcal{H}_h$ invertierbar ist, gilt $\sigma(N_h) \subseteq \sigma(N)$. Somit erhalten wir, dass auch $\int_{\sigma(N_h)} p_n d\nu \to \int_{\sigma(N_h)} \psi d\nu$ für alle $\nu \in M(\sigma(N_h))$. Insbesondere gelten diese Aussagen für alle Maße der Form $E_{f,g}$ mit f,g aus $\mathcal{H}$ beziehungsweise $\mathcal{H}_h$. Das ist gleichbedeutend zu $p_n(N,N^*) \xrightarrow{\mathcal{T}_\omega} \psi(N)$ und $p_n(N_h,N_h^*) \xrightarrow{\omega} \psi(N_h)$. Mit der $\mathcal{T}_\omega$-Stetigkeit von ρ ergibt sich $\rho_h(\psi(N)) = \psi(N_h)$.
Wir betrachten nun den unitären Isomorphismus $U_h : \mathcal{H}_h \to L^2(\mu_h)$ aus Proposition 1.4.15. Für diesen gilt $U_h N_h U_h^{-1} = N_{\mu_h}$. Sei nun $A \in W^*(N)$ dann gilt $AN = NA$ und somit auch $A_h N_h = N_h A_h$ für $A_h = \rho(A)$. Durch Anwenden von U_h und U_h^{-1}, sowie Einschieben von $I = U_h^{-1} \circ U_h$ erhalten wir $U_h A_h U_h^{-1} U_h N_h U_h^{-1} = U_h N_h U_h^{-1} U_h A_h U_h^{-1}$ und somit $U_h A_h U_h^{-1} \in \{N_{\mu_h}\}'$. Aus Korollar 2.1.12 folgt, dass es ein $\phi \in B(\sigma(N_h))$ gibt, mit $U_h A_h U_h^{-1} = M_\phi$. Dieses ϕ kann wieder mit einer Polynomfolge p_n nach Lemma 1.2.10 so approximiert werden, dass $\int_{\sigma(N_h)} p_n d\nu \to \int_{\sigma(N_h)} \phi d\nu$ für alle $\nu \in M(\sigma(N_h))$. Da U_h unitär ist, gilt

$$N_{\mu_h}^2 = U_h N_h U_h^{-1} U_h N_h U_h^{-1} = U_h N_h^2 U_h^{-1} \quad N_{\mu_h}^* = U_h N_h^* U_h^{-1}.$$

Durch Induktion folgt damit $U_h^{-1} M_{p_n} U_h = p_n(N_h, N_h^*)$ für die Polynomfolge p_n. Nun müssen wir noch zeigen, dass M_{p_n} gegen M_ϕ in der schwachen Operatortopologie konvergiert. Für alle $f,g \in \mathcal{H}_h$ gilt

$$\big(U_h^{-1} M_{p_n} U_h f, g\big) = \big(M_{p_n} U_h f, U_h g\big) = \int_{\sigma(N_h)} p_n \underbrace{U_h f U_h g d\mu}_{:=d\nu} = \int_{\sigma(N_h)} p_n d\nu \to \int_{\sigma(N_h)} \phi d\nu =$$
$$= \int_{\sigma(N_h)} \phi U_h f U_h g d\mu = \big(U_h^{-1} M_\phi U_h f, g\big)$$

Damit konvergiert $p_n(N,N^*)$ gegen $\phi(N)$ und wir erhalten $A_h = U_h^{-1} M_\phi U_h = \phi(N)$.
Um die Surjektivität von ρ zu zeigen, konstruieren wir einfach zu jedem $B \in W^*(N_h)$ ein Urbild. Wähle dazu $\psi \in B(\sigma(N_h))$ mit $\psi(N_h) = B$. Dieses ψ lässt sich auf $\sigma(N) \backslash \sigma(N_h)$ mit 0 fortsetzen. Nach Proposition 3.1.3 gilt $\psi(N) \in W^*(N)$ und $\rho(\psi(N)) = \psi(N_h) = B$ gilt nach Konstruktion. □

Lemma 3.1.10 Sei N ein normaler Operator, h ein separierender Vektor für $W^*(N)$ und μ_h das zu N gehörige skalarwertige Spektralmaß aus Lemma 3.1.5. Für jedes positive Maß ν, das absolut stetig bezüglich μ_h ist, existiert ein $e \in \mathcal{H}$, sodass $\nu = \mu_e$.

Beweis. Da ν absolut stetig bezüglich μ_h ist, existiert nach dem Satz von Radon-Nikodým A.1 eine Funktion $g \in L^2(\mu_h)$ auf $\sigma(N)$ mit $g = \frac{d\nu}{d\mu}$. Da ν ein positives Maß ist, ist g nicht-negativ und wir können eine Funktion $f \in L^2(\mu_h)$ definieren mit $f := \sqrt{g}$. Auf diese Funktion wenden wir den unitären Isomorphismus U_h aus Proposition 1.4.15 an und setzten $e := U_h^{-1} f$. Damit ergibt sich für jede Borelmenge $\Delta \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}\nu(\Delta) = \int_\Delta g d\mu_h = \int_{\sigma(N)} \chi_\Delta f f d\mu_h = \big(\chi_\Delta f, f\big)_{L^2(\mu_h)} = \big(U_h^{-1}(\chi_\Delta f), U_h^{-1} f\big) = \\ = \big(U_h^{-1}\chi_\Delta U_h U_h^{-1} f, U_h^{-1} f\big) = \big(E(\Delta)e, e\big) = \mu_e(\Delta).\end{aligned}$$

□

3.2 Funktionalkalkül

Wir wollen noch einmal die Resultate aus Kapitel 1.4 revue passieren lassen. Zu einem normalen Operator N erhalten wir nach Korollar 1.4.10 einen Isomorphismus von $C(\sigma(N)) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Zu diesem gibt es ein Spektralmaß nach Satz 1.4.7. Nach Satz 1.4.6 lässt sich damit der Homomorphismus auf $\mathfrak{Bm}(\sigma(N))$ erweitern. Insgesamt erhalten wir also einen Funktionalkalkül

$$\Phi : \begin{cases} \mathfrak{Bm}(\sigma(N)) & \to & \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \\ \phi & \mapsto & \int \phi dE \end{cases}$$

mit

$$\|\phi\|_\infty = \| \int \phi dE\|, \quad \phi \in C(\sigma(N)).$$

Hier stellen sich nun zwei Fragen, denen wir in diesem Kapitel nachgehen werden.

- Wie schaut eigentlich das Bild unter Φ aus?
- Lässt sich die Normeigenschaft auf alle Funktionen aus $\mathfrak{Bm}(\sigma(N))$ erweitern?

Die erste Frage beantwortet Lemma 3.2.2. Die zweite Frage werden wir in Satz 3.2.6 für einen leicht adaptierten Funktionalkalkül beantworten.

Lemma 3.2.1 Sein N ein normaler Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann ist die Menge $\{\phi(N) : \phi \in B(\sigma(N))\}$ eine *-Algebra.

Beweis. Da die Abbildung Φ_E aus Satz 1.4.6 ein *-Homomorphismus ist, übertragen sich die *-Algebraeigenschaften der Menge $\{\phi : \phi \in B(\sigma(N))\}$ einfach auf $\{\phi(N) : \phi \in B(\sigma(N))\}$. $\square$

Lemma 3.2.2 Für jeden normalen Operator $N \in \mathcal{H}$ gilt $W^*(N) = \{\phi(N) : \phi \in B(\sigma(N))\}$

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathscr{S}$ die Menge $\{\phi(N) : \phi \in B(\sigma(N))\}$. Aus Lemma 3.2.1 und 3.1.3 wissen wir, dass $\mathscr{S}$ eine *-Subalgebra von $W^*(N)$ ist. Aus Satz 2.1.10 wissen wir, dass $W^*(N)$ die kleinste $\mathcal{T}_\omega$-abgeschlossene *-Algebra ist, die N enthält. Offensichtlich ist $N \in \mathscr{S}$, weswegen es genügt zu zeigen, dass $\mathscr{S}$ $\mathcal{T}_\omega$-abgeschlossen ist.
Sei ϕ_n eine Folge in $B(\sigma(N))$, für die $\phi_n(N) \stackrel{\mathcal{T}_\omega}{\to} A$ gilt. Da $W^*(N)$ $\mathcal{T}_\omega$-abgeschlossen ist, muss $A \in W^*(N)$. Aus Lemma 3.1.9 wissen wir, dass $\phi_n(N_h) \to A\big|_{\mathcal{H}_h}$ für jedes $h \in \mathcal{H}$ und dass es für jedes $A\big|_{\mathcal{H}_h}$ ein $\phi_h \in B(\mathbb{C})$ gibt mit $\phi_h(N_h) = A\big|_{\mathcal{H}_h}$.
Zuerst zeigen wir, dass ϕ_n gegen ϕ_h in $L^1(\mu_h)$ konvergiert. Wir wissen, dass $\big(\phi_n(N_h)f, g\big) \to \big(\phi_n(N_h)f, g\big)$ für alle $f, g \in \mathcal{H}_h$. Nach Lemma 2.2.8 können wir $f = g = E(\Delta)h$ wählen, wobei E das Spektralmaß zu N ist und $\Delta \in \mathcal{B}(\sigma(N))$. Mit Proposition 1.4.15 erhalten wir

$$\int_\Delta \phi_n - \phi_h d\mu_h = \big(\phi_n(N_h) - \phi_h(N_h)h, E(\Delta)h\big) \to 0 \quad \forall \Delta \in \mathcal{B}(\sigma(N)).$$

Somit ist $\phi_n \stackrel{L^1(\mu_h)}{\to} \phi_h$ gezeigt. Was uns jetzt noch fehlt, ist die Erweiterung auf den ganzen Raum.
Aus Korollar 2.2.13 wissen wir, dass $W^*(N)$ einen separierenden Vektor e hat. Nach Lemma 3.1.5 ist μ_e ein skalarwertiges Spektralmaß für N. Mit der gleichen Argumentation, wie für μ_h, können wir ein $\phi_e \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ wählen mit $\phi_e(N_e) = A\big|_{\mathcal{H}_e}$ und erhalten $\phi_n \stackrel{L^1(\mu_e)}{\to} \phi_e$. Da μ_e ein skalarwertiges Spektralmaß für N ist, gilt $\mu_e(\Delta) = 0 \Rightarrow E(\Delta) = 0 \Rightarrow \mu_h(\Delta) = 0$. Also ist $\mu_h \ll \mu_e$.
Nach dem Satz von Radon-Nikodým A.1 existiert also die Radon-Nikodým-Dichte $\frac{d\mu_h}{d\mu_e} \in L^1(\mu_e)$. Für jede Borelmenge Δ gilt:

$$\int_\Delta \phi_n d\mu_h = \int_\Delta \phi_n \frac{d\mu_h}{d\mu_e} d\mu_e \to \int_\Delta \phi_e \frac{d\mu_h}{d\mu_e} d\mu_e = \int_\Delta \phi_e d\mu_h$$

und

$$\int_\Delta \phi_n d\mu_h \to \int_\Delta \phi_h d\mu_h.$$

Also stimmen ϕ_e und ϕ_h μ_h-fast überall überein. Sei nun $g \in \mathcal{H}_h$ beliebig. Da h für $\mathcal{H}_h$ zyklisch ist, gilt $\mu_g \ll \mu_h$. Folglich stimmen ϕ_e und ϕ_h auch auf dem Träger von μ_g überein. Damit und mit Lemma 3.1.9 erhalten wir

$$\big(\phi_h(N_h)g, g\big) = \big(\phi_h(N)g, g\big) = \int \phi_h d\mu_g = \int \phi_e d\mu_g = \big(\phi_e(N_h)g, g\big).$$

Damit folgt $\phi_h(N_h)g = \phi_e(N_h)g$ für alle $g \in \mathcal{H}_h$. Das liefert schließlich $Ah = \phi_h(N_h)h = \phi_e(N_h)h = \phi_e(N)h$. Da h beliebig war haben wir schon $A = \phi_e(N)$ gezeigt und damit das Lemma bewiesen. □

Korollar 3.2.3 Sei ρ_h der *-Epimorphismus aus Lemma 3.1.9, dann gilt $\ker(\rho_h) = \{\phi(N) : \phi = 0\ \mu_h\text{-fast überall}\}$.

Beweis. Die Inklusion $\supseteq$ gilt, da h ein separabler Vektor ist und aus $0 = \int_{\sigma(N)} \phi d\mu_h = \int_{\sigma(N)} \phi dE_{h,h} = \big(\phi(N)h, h\big)$ schon $\phi(N)h = 0$ folgt.
Sei nun $\rho_h(A) = 0$. Wir wissen aus Lemma 3.1.9, dass es ein $\phi \in \mathfrak{Bm}(\sigma(N))$ gibt mit $\rho(A) = \phi(N)$. Wir machen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass es ein $\Delta \in \mathcal{B}(\sigma(N))$ gibt mit $\mu_h(\Delta) \geq 0$ und $\phi(x) \neq 0$ für alle $x \in \Delta$. Da ϕ messbar ist, können wir Δ mit der Borelmenge $\phi^{-1}(\mathbb{R}^+)$ schneiden und so o.B.d.A. annehmen, dass sogar $\phi(x) > 0$ gilt für alle $x \in \Delta$.
Wenden wir jetzt den Operator $\rho(A)$ auf $E(\Delta)h$ an, so erhalten wir

$$\big(\rho(A)E(\Delta)h, E(\Delta)h\big) = \big(\phi(N)E(\Delta)h, E(\Delta)h\big) = \int_\Delta \phi d\mu_h > 0.$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass $\rho(A)$ der Nulloperator ist. □

Satz 3.2.4 Sei N ein normaler Operator und $e \in \mathcal{H}$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

a) e ist ein separierender Vektor.
b) μ_e ist ein skalarwertiges Spektralmaß für N.
c) Die Abbildung $\rho_e : W^*(N) \to W^*(N_e)$ aus Lemma 3.1.9 ist ein *-Isomorphismus.
d) $\{\phi \in \mathfrak{Bm}(\sigma(N)) : \phi(N) = 0\} = \{\phi \in \mathfrak{Bm}(\sigma(N)) : \phi = 0\ \mu_e\text{-fast überall}\}$.

Beweis. Für den Beweis müssen wir im Wesentlichen nur die schon vorhandenen Resultate zusammen sammeln. Dass b) aus a)folgt, wissen wir aus Lemma 3.1.5.

Um zu zeigen, dass c) aus b) folgt, müssen wir nach Lemma 3.1.9 nur noch zeigen, dass ρ_e injektiv ist, wenn μ_e ein skalarwertiges Spektralmaß ist. Aus Korollar 3.2.3 wissen wir, dass $\ker \rho_e = \{\phi(N) : \phi = 0 \mu_e\text{-fast überall}\}$. Aus der Spektraldarstellung erhalten wir $\ker \rho_e = \{0\}$, denn zu jedem $A \in \ker \rho_e$ können wir $A = \int_{\sigma(N)} \phi dE = \int_{\Delta_A} \phi dE$ setzen, wobei Δ_A eine μ_e-Nullmenge und wegen b) auch eine E-Nullmenge ist. Damit gilt $A = 0$. Dass d) aus c) folgt, sieht man sofort aus Korollar 3.2.3.
Nehmen wir nun an, dass d) gilt und $A \in W^*(N)$ mit $Ae = 0$. Aus Lemma 3.2.2 wissen wir, dass es ein $\phi \in \mathfrak{Bm}(\sigma(N))$ gibt mit $\phi(N) = A$. Wir erhalten $0 = \big(Ae, Ae\big) = \big(A^*Ae, e\big) = \int_{\sigma(N)} |\phi|^2 d\mu_e$. Also ist $\phi = 0$ μ_e-fast überall und nach d) gilt damit $\phi(N) = 0$, also $A = 0$. Damit ist e separierend und aus d) folgt a). $\square$

Lemma 3.2.5 Seien $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ C^*-Algebren mit 1 und ρ ein C^*-Homomorphismus von $\mathscr{A}$ nach $\mathscr{B}$, dann gilt $\|\rho(A)\| \leq \|A\| \; \forall A \in \mathscr{A}$.

Beweis. Zuerst überlegen wir uns, dass für jedes $A \in \mathscr{A}$ gilt $\sigma(\rho(A)) \subseteq \sigma(A)$. Sei $\lambda \notin \sigma(A)$, dann existiert ein $B \in \mathscr{A}$, sodass $(A - \lambda I_{\mathscr{A}})^{-1} = B$. Damit ist aber auch $\rho(B) = \rho((A - \lambda I_{\mathscr{A}})^{-1})$. Da $\rho(A - \lambda I_{\mathscr{A}}) = \rho(A) - \lambda I_{\mathscr{B}}$, gilt auch $\lambda \notin \sigma(\rho(A))$. Aus $\sigma(\rho(A)) \subseteq \sigma(A)$ folgt insbesondere $r(\rho(A)) \leq r(A)$. Nun können wir Satz 1.4.2 verwenden und erhalten

$$\|\rho(A)\|^2 = \|\rho(A)^*\rho(A)\| = \|\rho(A^*A)\| = r(\rho(A^*A)) \leq r(A^*A) = \|A^*A\| = \|A\|^2.$$

Im ersten Gleichheitszeichen fließt die C^*-Algebraeigenschaft von $\mathscr{A}$ ein. Bei der dritten Gleichheit haben wir verwendet, dass A^*A ein selbstadjungierter Operator ist und deswegen $\lim\limits_{n\to\infty} \|(A^*A)^n\|^{\frac{1}{n}} = \|A^*A\|$ gilt. $\square$

Satz 3.2.6 (Funktionalkalkül) Sei N ein normaler Operator auf dem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und μ ein skalarwertiges Spektralmaß für N, dann ist die Abbildung $\rho : L^\infty(\mu) \to W^*(N), \; \phi \mapsto \phi(N)$ wohldefiniert und es gilt

a) $\rho : \big(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_{L^\infty}\big) \to \big(W^*(N), \|\cdot\|\big)$ ist ein isometrischer *-Isomorphismus.
b) $\rho : \big(L^\infty(\mu), \omega^*\big) \to \big(W^*(N), \mathcal{T}_\omega\big)$ ist ein Homöomorphismus.

Beweis. Wir wissen aus Lemma 2.2.13, dass $W^*(N)$ einen separierenden Vektor e hat. Da μ ein skalarwertiges Spektralmaß ist, ist es absolut stetig bezüglich des ebenfalls skalarwertigen Spektralmaßes μ_e. Folglich gibt es nach Lemma 3.1.10 einen Vektor $h \in \mathcal{H}$, sodass $\mu = \mu_h$. Aus Satz 3.2.4 wissen wir, dass h ebenfalls ein separierender Vektor ist,

da ja μ ein skalarwertiges Spektralmaß ist. Nach Satz 3.2.4 Punkt d) ist somit $\phi(N) = 0$ genau dann wenn $\phi = 0$ μ-fast überall für alle $\phi \in \mathfrak{Bm}(\sigma(N))$. Daraus erhalten wir sowohl die Wohldefiniertheit, als auch $\ker(\rho) = \{0\}$.
Dass ρ ein *-Homomorphismus ist, wissen wir aus Satz 1.4.6. Lemma 3.2.2 liefert uns, dass ρ surjektiv ist. Da $\ker(\rho) = \{0\}$, ist ρ sogar ein *-Isomorphismus. Mit Lemma 3.2.5 erhalten wir, dass sowohl $\|\rho(\phi)\| \leq \|\phi\|$ als auch $\|\rho^{-1}(A)\| \leq \|A\|$ gelten muss. Folglich ist ρ eine Isometrie.
um b) zu zeigen sei zunächst daran erinnert, dass ω^* Konvergenz einer Folge ϕ_i in $L^\infty(\mu)$ nichts anderes bedeutet als $\int \phi_i f d\mu \to \int \phi f d\mu,\ \forall f \in L^1(\mu)$, da ja der $L^\infty(\mu)$ der Dualraum des $L^1(\mu)$ ist. Sei also ϕ_i eine Folge in $L^\infty(\mu)$, von der wir annehmen, dass $\phi(N) \overset{\mathcal{T}_\omega}{\to} 0$. Zu jeder Funktion $f \in L^1(\mu)$ existieren Funktion $f_1, f_2 \in L^1(\mu)$ mit $f = f_1 - f_2$ und $f_1, f_2 \geq 0$. Wir können also für den Beweis o.B.d.A. schon $f \geq 0$ annehmen, da das Integral ja linear ist. Mit $f \geq 0$ lässt sich ein Maß $(f\mu)(\Delta) := \int_\Delta f d\mu$ definieren, das absolut stetig bezüglich μ ist. Nach Lemma 3.1.10 existiert ein Vektor h, sodass $(f\mu) = \mu_h$. Damit erhalten wir $\int \phi_i f d\mu = \int \phi_i d\mu_h = \big(\phi_i(N)h, h\big) \to 0$, also $\phi \overset{\omega^*}{\to} 0$ in $L^\infty(\mu)$. Damit ist ρ^{-1} stetig von $\big(W^*(N), \omega\big)$ nach $\big(L^\infty(\mu), \omega^*\big)$.
Um zu zeigen, dass auch ρ stetig ist, verwenden wir die gleiche Idee. Sei ϕ_i eine Folge in $L^\infty(\mu)$, die gegen 0 ω^*-konvergiert. Sei $h \in \mathcal{H}$, dann ist μ_h absolut stetig bezüglich μ, da ja μ ein skalarwertiges Spektralmaß ist. Somit gibt es nach dem Satz von Radon-Nikodým A.1 eine Funktion $f \in L^1(\mu)$ mit $f = \frac{d\mu_h}{d\mu}$. Damit gilt $\big(\phi_i(N)h, h\big) = \int \phi_i d\mu_h = \int \phi_i f d\mu \to 0$. Also gilt auch $\phi_i(N) \overset{\mathcal{T}_\omega}{\to} 0$ und ρ ist somit ein Homöomorphismus. $\square$

Satz 3.2.7 Sei N ein normaler Operator auf dem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und μ ein skalarwertiges Maß μ für N. Für jedes $\phi \in L^\infty(\mu)$ ist $\sigma(\phi(N)) = \bigcap\{\overline{\phi(\Delta)} : \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{C}) \ \wedge\ \mu(\mathbb{C}\backslash\Delta) = 0\} =:$ μ-essentieller Range von ϕ. Wir schreiben auch μ-ess-ran(ϕ) für den μ-essentiellen Range von ϕ.

Beweis. Aus Satz 3.2.6 wissen wir, dass $\sigma(\phi(N)) = \sigma(\phi)$, da ja $(\phi(N) - \lambda I)$ genau dann invertierbar ist, wenn $(\phi - \lambda)$ eine multiplikative Inverse besitzt. Wir zeigen also $\sigma(\phi) =$ μ-essentieller Range von ϕ.
Sei $\lambda \notin \mu$-ess-ran(ϕ), dann existiert eine Borelmenge Δ mit $\mu(\mathbb{C}\backslash\Delta) = 0$ und $\lambda \notin \overline{\phi(\Delta)}$. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit $|\phi(x) - \lambda| > \delta$ für alle $x \in \Delta$. Folglich existiert die multiplikative Inverse $\psi = \frac{1}{\phi - \lambda}$ von $(\phi - \lambda)$ und somit ist $\lambda \notin \sigma(\phi)$.
Sei nun $\lambda \in \mu$-ess-ran(ϕ). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Borelmenge Δ_n mit $0 < \mu(\Delta_n) < \infty$ und $|\phi(x) - \lambda| < \frac{1}{n}$ für alle $x \in \Delta_n$. Damit erhalten wir $\|\frac{1}{\phi - \lambda}\|_{L^\infty(\mu)} > n,\ \forall n \in \mathbb{N}$, weswegen $(\phi - \lambda)$ keine multiplikative Inverse in $L^\infty(\mu)$ haben kann. Somit gilt $\lambda \in \sigma(\phi)$.
Insgesamt erhalten wir also $\sigma(\phi(N)) = \sigma(\phi) = \mu$-ess-ran$(\phi)$. $\square$

Proposition 3.2.8 Seien N, μ und ϕ so wie in Satz 3.2.7. Wenn $N = \int z dE$, dann ist $\mu \circ \phi^{-1}$ ein skalarwertiges Spektralmaß für $\phi(N)$ und $E \circ \phi^{-1}$ das Spektralmaß für $\phi(N)$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $E \circ \phi^{-1}$ das Spektralmaß für $\phi(N)$ ist. Seien $g, h \in \mathcal{H}$, wir betrachten das Integral $\int_{\sigma(N)} \phi dE_{g,h}$ im Lebesgue-Sinn als Limes der Integrale über die Treppenfunktionen $\phi_n := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{\Delta_i}$, die punktweise und monoton wachsend gegen ϕ konvergieren. (Wir nehmen o.B.d.A an $\phi > 0$ an. Da die Integrale über positiv und negativ Teil über die kompakte Menge $\sigma(N)$ sicher endlich sind, können wir diese Annahme gefahrlos machen.) Damit ergibt sich

$$\big(\phi(N)g, h\big) = \int_{\sigma(N)} \phi dE_{g,h} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_{g,h}(\Delta_i) = \left| \begin{array}{c} \alpha_i \to \phi(x_i) \\ x_i \in \Delta_i \\ \Delta_i \subseteq \sigma(N) \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_{g,h} \circ \phi^{-1}(\phi(\Delta_i)) = \int_{\phi(\sigma(N))} z dE_{g,h} \circ \phi^{-1} =$$

$$= \int_{\mu\text{-ess-ran}(\phi)} z dE_{g,h} \circ \phi^{-1}.$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, da Lebesgue-Nullmengen beim Integral weggelassen werden können und jede μ-Nullmenge auch eine $E_{g,h}$-Nullmenge ist.
Nun zeigen wir, dass $\mu \circ \phi^{-1}$ ein skalarwertiges Spektralmaß für $\phi(N)$ ist. Wie im Beweis von Satz 3.2.6 können wir $\mu = \mu_h$ mit einem separablen Vektor h schreiben. Da $W^*(\phi(N)) = \{\psi(\phi(N)) : \psi \in \mathfrak{Bm}(\sigma(\phi(N)))\} \subseteq \{\psi(N) : \psi \in \mathfrak{Bm}(\sigma(N))\} = W^*(N)$ ist h auch ein separabler Vektor für $\phi(N)$. Durch $\mu \circ \phi^{-1}(\Delta) = \mu_h \circ \phi^{-1}(\Delta) = \big(E \circ \phi^{-1}(\Delta)h, h\big)$ können wir $\mu \circ \phi^{-1}$ wie in Lemma 3.1.5 anschreiben, weswegen es ein skalarwertiges Spektralmaß sein muss. $\square$

Kapitel 4

Vielfachheit normaler Operatoren

4.1 Einleitung

Zu Beginn dieses Kapitels sei noch einmal auf Satz 1.4.15 verwiesen. Dieser besagt, dass jeder normale Operator $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, zu dem es einen zyklischen Vektor e gibt, unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator N_μ auf $L^2(\mu)$ ist. Hierbei ist $\mu(\Delta) = \big(E(\Delta)e, e\big)$. Die Frage, die sich hier aufdrängt, ist, welche Aussage noch möglich ist, wenn die Forderung nach einem zyklischen Vektor wegfällt. Wir werden nun zwei intuitive Ansätze ausführen, dieses Problem anzugehen, unter der Annahme, dass $\mathcal{H}$ separabel ist.

Beispiel 4.1.1 Sei N ein normaler Operator auf dem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und E sein Spektralmaß. Zu $e \in \mathcal{H}$ bezeichne $\mathcal{H}_e := \overline{\{W^*(N)e\}}$ und $N_e := N\big|_{\mathcal{H}_e}$, wie in Definition 3.1.7. Nun betrachten wir die, mit der Teilmengeninklusion $\subseteq$ halbgeordnete Menge $\mathcal{M} := \{\{e_i : i \in I\} : \mathcal{H}_{e_j} \perp \mathcal{H}_{e_k},\ \forall j \neq k \wedge j, k \in I\}$. Jede Kette in $\mathcal{M}$ ist durch die Vereinigung all ihrer Elemente beschränkt, also ist das Lemma von Zorn B.3 anwendbar und wir erhalten die Existenz einer maximalen Menge $\mathcal{N} = \{e_i : i \in I\}$. Da $\mathcal{H}$ separabel ist, muss $\mathcal{N}$ abzählbar sein und aus der Maximalität von $\mathcal{N}$ folgt $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_{e_n}$. Nach Konstruktion ist e_n ein *-zyklischer Vektor für N_{e_n}. Sei E_n das Spektralmaß zu N_{e_n}, und $\mu_n(\cdot) = \big(E_n(\cdot)e_n, e_n\big)$. Nach Satz 1.4.15 ist N_{e_n} unitär äquivalent zu N_{μ_n}. Insgesamt erhalten wir also $N \cong \bigoplus_{n=1}^{\infty} N_{\mu_n}$.
Allerdings hat diese Darstellung das große Manko, dass wir keine Aussage über den Zusammenhang der einzelnen μ_n haben. Für zwei verschiedene Darstellungen $N \cong \bigoplus_{n=1}^{\infty} N_{\mu_n} \cong \bigoplus_{n=1}^{\infty} N_{\nu_n}$ können wir also nicht $N_{\mu_n} \cong N_{\nu_n}$ folgern.

Wir machen einen zweiten Ansatz.

Beispiel 4.1.2 Sei N ein normaler Operator auf dem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und E sein Spektralmaß. Wir suchen eine Darstellung $N \cong \bigoplus_{n=1}^{\infty} N_{\mu_n}$ mit $\mu_n \ll \mu_m \iff n \leq m$. Da alle Maße absolut stetig bezüglich μ_1 sein müssen, ist es naheliegend μ_1 als skalarwertiges Spektralmaß für N zu wählen.
Wir wissen aus Korollar 2.2.13, dass $W^*(N)$ einen separablen Vektor e_1 hat, folglich können wir $\mu_1(\cdot) = \big(E(\Delta)e_1, e_1\big)$ setzen. Mit $N_1 := N_{e_1}$ erhalten wir $N_1 \cong N_{\mu_1}$. Sei $N_2 := N\big|_{\mathcal{H}_{e_1}^{\perp}}$ und E_2 das zugehörige Spektralmaß. Wie wir in Lemma 4.2.8 sehen werden gilt $E_2(\Delta) = E(\Delta)\big|_{\mathcal{H}_1^{\perp}}$. Damit erhalten wir aus Lemma 3.2.2 $W^*(N_2) = \{T\big|_{\mathcal{H}_1^{\perp}} : T \in W^*(N)\} =: W^*(N)\big|_{\mathcal{H}_1^{\perp}}$. Sei weiters e_2 ein separabler Vektor für $W^*(N_2)$, dann gilt $\mu_2(\Delta) := \big(E_2(\Delta)e_2, e_2\big)$.
Jetzt können wir $\mathcal{H}_2 := \overline{\{W^*(N)e_2\}} = \overline{\{W^*(N_2)e_2\}} \subseteq \mathcal{H}_1^{\perp}$ definieren und den Prozess induktiv fortsetzen. Damit erhalten wir eine Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit zugehörigen Maßen μ_n, die $\mu_{n+1} \ll \mu_n$ erfüllt, und Hilberträumen $\mathcal{H}_n = \overline{\{W^*(N)e_n\}}$, die aufeinander orthogonal stehen. Allerdings fehlt uns $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ um auf $N \cong \bigoplus_{n=1}^{\infty} N_{\mu_n}$ schließen zu können.

Es bedarf also noch einiger vorbereitender Lemmata, um eine sinnvolle Erweiterung von Satz 1.4.15 zu erhalten. Diese werden wir im folgenden Kapitel abarbeiten.

4.2 Satz der unitären Äquivalenz

Definition 4.2.1 Wir sagen, dass zwei Maße μ und ν wechselseitig absolut stetig sind (i.Z. $[\mu] = [\nu]$), wenn $\mu \ll \nu$ und $\nu \ll \mu$.

Ziel dieses Abschnittes ist es, den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 4.2.2 (Satz der unitären Äquivalenz)

a) Sei N ein normaler Operator auf dem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann gibt es eine Folge, die auch endlich sein kann, von Maßen $\{\mu_n\}$ auf $\mathbb{C}$, sodass $\mu_{n+1} \ll \mu_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$N \cong \bigoplus_{n=1}^{\infty} N_{\mu_n}. \tag{4.1}$$

b) Seien N und $\{\mu_n\}$, wie in Punkt a) und $M \cong \bigoplus_{n=1}^{\infty} N_{\nu_n}$, wobei $\nu_{n+1} \ll \nu_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $N \cong M$, genau dann wenn $[\mu_n] = [\nu_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 4.2.3 Eine partielle Isometrie ist ein Operator W zwischen zwei Banachräumen, der für jedes $h \in \ker(W)^\perp$ die Gleichheit $\|W(h)\| = \|h\|$ erfüllt. Wir nennen $\ker(W)^\perp$ den Initialraum und $\operatorname{ran}(W)$ den Finalraum von W.

Proposition 4.2.4 Sei A ein beschränkter Operator aus $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, dann existiert eine eindeutige Zerlegung $A = WP$, wobei P positiv ist und W eine partielle Isometrie mit $\ker(A)^\perp$ als Initialraum, $\overline{\operatorname{ran}(A)}$ als Finalraum.

Beweis. Zuerst zeigen wir die Existenz. Wir definieren $P = \sqrt{A^*A}$. Die Wurzel ist eindeutig und wohl definiert, da A^*A positiv ist. P ist selbstadjungiert, da ja $\sigma(P) \subseteq \mathbb{R}^+$. Damit erhalten wir $\|Ph\|^2 = \big(Ph, Ph\big) = \big(P^2h, h\big) = \big(A^*Ah, h\big) = \big(Ah, Ah\big) = \|Ah\|^2$. Folglich ist der Operator

$$V : \begin{cases} \operatorname{ran}(P) \to \operatorname{ran}(A) \\ P(h) \mapsto A(h) \end{cases}$$

wohldefiniert und eine Isometrie. Die Linearität von V erhalten wir aus der Linearität von P und A mit $V(P(h_1) + P(ch_2)) = V(P(h_1 + ch_2)) = A(h_1 + ch_2) = A(h_1) + cA(h_2)$, $h_1, h_2 \in \mathcal{H}, c \in \mathbb{C}$. Da V stetig ist, lässt sich der Operator zu $\tilde{V}$ auf $\overline{\operatorname{ran}(P)}$ fortsetzen. Jetzt können wir die partielle Isometrie W definieren durch:

$$W(h) := \begin{cases} \tilde{V}(h) & h \in \overline{\operatorname{ran}(P)} \\ 0 & h \in \operatorname{ran}(P)^\perp \end{cases}$$

Die Operatoren haben nach Konstruktion die gewünschten Eigenschaften. Nun zur Eindeutigkeit. Angenommen $A = \tilde{W}\tilde{P}$, wobei $\tilde{W}$ und $\tilde{P}$ die gewünschten Eigenschaften haben. Dann gilt $A^*A = \tilde{P}^*\tilde{W}^*\tilde{W}\tilde{P}$. Da $\tilde{W}$ eingeschränkt auf $\overline{\operatorname{ran}(P)}$ eine Isometrie ist, ist der Operator dort insbesondere unitär, weswegen $\tilde{W}^*\tilde{W}\big|_{\overline{\operatorname{ran}(P)}} = I\big|_{\overline{\operatorname{ran}(P)}}$. Wir erhalten somit $A^*A = \tilde{P}^*I\big|_{\overline{\operatorname{ran}(P)}}\tilde{P} = \tilde{P}^*\tilde{P}$. Also ist $\tilde{P} = \sqrt{A^*A} = P$. Nun gilt für jedes $f = Ph \in \operatorname{ran}(P)$ $Wf = WPh = Ah = \tilde{W}\tilde{P}h = \tilde{W}Ph = \tilde{W}f$. Offensichtlich gilt auch für jedes $h \in \operatorname{ran}(P)^\perp$ $Wh = 0 = \tilde{W}h$. Somit stimmen W und $\tilde{W}$ auf einem dichten Teilraum überein und da die Operatoren stetig sind, folgt daraus schon $W = \tilde{W}$. □

Proposition 4.2.5 Seien N_1, N_2 normale Operatoren auf $\mathcal{H}_1$ bzw. $\mathcal{H}_2$. Sei $X : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ein Operator mit $XN_1 = XN_2$, so gilt:

a) $\overline{\operatorname{ran}(X)}$ reduziert N_2;

b) $\ker X$ reduziert N_1;
c) $M_1 := N_1\big|_{(\ker X)^\perp} \cong N_2\big|_{\overline{(\operatorname{ran} X)}} =: M_2$.

Beweis. a) Für jedes $f_1 \in \mathcal{H}_1$ gilt $N_2 X f_1 = X N_1 f_1 \in \operatorname{ran}(X)$ und da N_2 stetig ist, folgt somit $\overline{\operatorname{ran}(X)}$ ist invariant unter N_2. Aus dem Satz von Fuglede-Putnam 1.4.12 erhalten wir, dass auch $XN_1^* = N_2^* X$ gilt und durch die gleiche Überlegung folgt, dass $\overline{\operatorname{ran}(X)}$ auch für N_2^* invariant ist. Das bedeutet nichts anderes, als dass $\overline{\operatorname{ran}(X)}$ N_2 reduziert.
b) Sei $f \in \ker X$, dann $0 = N_2 X f = X N_1 f$, also $N_1 f \in \ker X$. Also ist $\ker X$ invariant unter N_1 und mit dem Satz von Fuglede-Putnam 1.4.12 folgt wieder die Invarianz unter N_1^*. Das beweist b).
c) Wir betrachten den Operator $\tilde{X} : \ker(X)^\perp \to \overline{\operatorname{ran}(X)},\ f \mapsto Xf$, für den gilt $XM_1 = M_2 X$. Sei $\tilde{X} = WP$ die Polarzerlegung aus Proposition 4.2.4. Durch adjungieren erhalten wir $\tilde{X}^* M_2^* = M_1^* \tilde{X}^*$ und mit dem Satz von Fuglede-Putnam 1.4.12 $\tilde{X}^* M_2 = M_1 \tilde{X}^*$. Multiplizieren wir diese Gleichung von rechts mit $\tilde{X}$ und verwenden dann $M_2 X = X M_1$, so erhalten wir $M_1 \tilde{X}^* \tilde{X} = \tilde{X}^* M_2 \tilde{X} = \tilde{X}^* \tilde{X} M_1$ also $P^2 = X^{\tilde{*}} X \in \{M_1\}'$. Mit Korollar 1.4.13 erhalten wir $P \in \{M_1\}'$. Das führt zu $M_2 W P = M_2 \tilde{X} = \tilde{X} M_1 = W P M_1 = W M_1 P$ also $M_2 W = W M_1$ auf $\operatorname{ran}(P)$. Da aber $0 = \ker(\tilde{X}) = \ker(P)$ und P selbstadjungiert ist, ist $\operatorname{ran}(P)$ dicht in $\overline{\operatorname{ran}(X)}$ und somit gilt $M_2 W = W M_1$ also $M_1 \cong M_2$. □

Satz 4.2.6 Seien ν und μ zwei Maße, dann gilt $N_\nu \cong N_\mu$ genau dann, wenn $[\nu] = [\mu]$.

Beweis. Angenommen $[\mu] = [\nu]$, dann existiert nach dem Satz von Radon-Nikodým A.1 ein $\phi = \frac{d\mu}{d\nu} > 0$. Für jedes $g \in L^1(\mu)$ ist $\phi g \in L^1(\nu)$ und $\int g\phi d\nu = \int g d\mu$. Damit gilt aber auch für jedes $f \in L^2(\mu)$, $\sqrt{\phi} f \in L^2(\nu)$ und $\|\sqrt{\phi} f\|_{L^2(\nu)} = \|f\|_{L^2(\mu)}$. Folglich ist der Operator $U : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$, definiert durch $Uf = \sqrt{\phi} f$ eine Isometrie.
Da μ und ν wechselseitig absolut stetig sind, ist $\phi \neq 0$ ν-fast überall und $\frac{1}{\sqrt{\phi}}$ ist wohldefiniert. Zu $g \in L^2(\nu)$ betrachten wir also $\frac{g}{\sqrt{\phi}} \in L^2(\mu)$ und erhalten $U \frac{g}{\sqrt{\phi}} = g$. Somit ist U auch surjektiv und U^{-1} ist nicht anderes als die Multiplikation mit $\frac{1}{\sqrt{\phi}}$. Wir erhalten also für alle $g \in L^2(\nu)$

$$UN_\mu U^{-1} g = UN_\mu \frac{g}{\sqrt{\phi}} = Uz\frac{g}{\sqrt{\phi}} = zg.$$

Somit ist $UN_\mu U^{-1} = N_\nu$ gezeigt.
Für die Rückrichtung nehmen wir an, dass $V : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ ein Isomorphismus ist, sodass $VN_\mu V^{-1} = N_\nu$. Offensichtlich gilt auch $VN_\mu^k V^{-1} = N_\nu^k$ und $V(N_\mu^*)^k V^{-1} = (N_\nu^*)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Gleichheit überträgt sich in natürlicher Weise auf alle Polynome inN_μ

und N_μ^*, also $Vp(N_\mu, N_\mu^*)V^{-1} = p(N_\nu, N_\nu^*)$. Da aus $N_\mu \cong N_\nu$ auch $\sigma(N_\mu) = \sigma(N_\nu) =: K$ folgt, lässt sich mit Hilfe des Spektralsatz 1.4.11 die Gleichheit auf alle stetigen Funktionen von $u(N_\mu)$, $u \in C(K)$ fortsetzten. Da N_μ und N_ν beschränkte Operatoren sind, ist K kompakt und somit $1 \in L^2(\mu)$. Wir setzen $\psi = V(1) \in L^2(\nu)$. Insgesamt erhalten wir $V(u) = Vu(N_\mu)1 = u(N_\nu)V1 = u\psi$. Da V eine Isometrie ist, gilt $\int |u|^2 d\mu = \int |u|^2|\psi|^2 d\nu$ für jedes $u \in C(K)$ und damit $\int v d\mu = \int v|\psi|^2 d\nu$ für jedes $v \in C(K)$ mit $v \geq 0$. Da es zu jedem linearen Funktional nach dem Rieszschen Darstellungssatz A.2 aber genau einen Riesz-Repräsentanten gibt, muss $\mu = |\psi|^2\nu$ und somit $\mu \ll \nu$. Führt man den Beweis mit V^{-1} an Stelle von V, so erhält man $\nu \ll \mu$, also insgesamt $[\mu] = [\nu]$. □

Proposition 4.2.7 Sei N ein normaler Operator auf dem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $e \in \mathcal{H}$, dann existiert ein für $W^*(N)$ separierender Vektor e_0 mit $e \in \overline{\{W^*(N)e_0\}}$.

Beweis. Sei f_0 ein separierender Vektor für $W^*(N)$ und E das Spektralmaß für N. Wir setzen $\mu(\Delta) := \big(E(\Delta)f_0, f_0\big)$ und $\mathcal{G} = \overline{W^*(N)f_0}$. Der Vektor e lässt sich aufteilen in $e = g_1 + h_1$ mit $g_1 \in \mathcal{G}$ und $h_1 \in \mathcal{G}^\perp$. Es ist also h_1 „ der Teil, der noch fehlt“. Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass $e_0 = f_0 \oplus h_1$ gesetzt werden kann.
Dafür definieren wir ein zweites Maß $\eta(\Delta) := \big(E(\Delta)h_1, h_1\big)$, das bezüglich μ absolut stetig ist, da ja f_0 separierend ist. Weiters definieren wir den Raum $\mathcal{L} := \overline{W^*(N)h_1} \subseteq \mathcal{G}^\perp$. Sowohl $\mathcal{L}$, als auch $\mathcal{G}$ reduzieren den Operator N, weswegen wir die Einschränkungen von N auf $\mathcal{L}$ und $\mathcal{G}$ betrachten können. Es gilt $N\big|_{\mathcal{G}} \cong N_\mu$ und $N\big|_{\mathcal{L}} \cong N_\eta$ nach Satz 1.4.15, da ja f_0 und h_1 *-zyklische Vektoren für die jeweiligen Mengen sind. Setzen wir $\Delta := \frac{d\eta}{d\mu}^{-1}(\mathbb{R}^+)$, so gilt $[\eta] = [\mu\big|_\Delta]$. Sei nun $\nu = \mu\big|_\Delta$, dann gilt nach Satz 4.2.6 $N\big|_{\mathcal{L}} \cong N_\nu$. Sei $U : \mathcal{G} \oplus \mathcal{L} \to L^2(\mu) \oplus L^2(\nu)$ ein Isomorphismus mit $U((0) \oplus \mathcal{L}) \subseteq (0) \oplus L^2(\nu)$ und $U(N\big|_{\mathcal{G}\oplus\mathcal{L}})U^{-1} = N_\mu \oplus N_\nu$. Mit Hilfe von U können wir jetzt auf den Funktionenräumen weiter arbeiten. Sei $Ue = U(g_1 + h_1) = g \oplus h$. Wir definieren

$$f(z) := \begin{cases} g(z) & z \in \Delta \\ 1 & z \notin \Delta \end{cases}$$

und $\mathcal{M} := \overline{\{UW^*(N)U^{-1}(f \oplus h)\}}$. Mit Lemma 3.2.2 und unter Berücksichtigung, dass μ ein skalarwertiges Spektralmaß ist, können wir $\mathcal{M}$ auch schreiben, als
$\mathcal{M} = \overline{\{\phi f \oplus \phi h : \phi \in \mathfrak{Bm}(\sigma(N))\}} = \overline{\{\phi f \oplus \phi h : \phi \in L^\infty(\mu)\}}$. Hier ist ebenfalls eingegangen, dass $\sigma(UNU^{-1}) = \sigma(N) = \mu$-ess-rang(id) $=$ supp(μ), nach Satz 3.2.7. Nun zeigen wir, dass $g \oplus h \in \mathcal{M}$. Bezeichne dafür Δ^c das Komplement von Δ. Wir erhalten $\phi\chi_{\Delta^c} \oplus 0 = \phi\chi_{\Delta^c}(f \oplus h) \in \mathcal{M}$ für alle $\phi \in L^\infty(\mu)$. Das impliziert insbesondere $L^2(\mu\big|_{\Delta^c}) \oplus 0 \subseteq \mathcal{M}$, womit wir $(g-1)\chi_{\Delta^c} \oplus 0 \in \mathcal{M}$ erhalten. Insgesamt ergibt sich

$g \oplus h = f \oplus h + (g-1)\chi_{\Delta^c} \oplus 0 \in \mathcal{M}$, da ja $f \oplus h$ offensichtlich in $\mathcal{M}$ liegt.
Nun bleibt noch zu zeigen, dass $f \oplus h$ separierend für UNU^{-1} ist. Sei dazu $\phi \in L^\infty(\mu)$ und $\phi f \oplus \phi h = 0$. Da h_1 ein zyklischer Vektor war, ist $h(z) \neq 0$ ν-fast überall, womit aus $\phi f = \phi h = 0$ μ-fast überall, schon $\phi = 0$ μ-fast überall folgt.
Wir haben also gezeigt, dass $f \oplus h$ separierend für $UW^*(N)U^{-1}$ ist und dass $Ue \in \overline{\{UW^*(N)U^{-1}(f \oplus h)\}}$. Da U ein Isomorphismus ist, bedeutet das nichts anderes, als $e \in \overline{\{W*(N)U^{-1}(f \oplus h)\}}$ und $U^{-1}(f \oplus h)$ ist separierend für $W^*(N)$, womit die Proposition bewiesen ist. □

Lemma 4.2.8 Sei N ein normaler Operator auf den Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ ein reduzierender Unterraum für N. Bezeichnen wir mit $N_2 := N\big|_{\mathcal{M}}$ die Einschränkung von N auf $\mathcal{M}$ und mit E_2 das Spektralmaß von N_2, so gilt $E_2(\Delta) = E(\Delta)\big|_{\mathcal{M}}$.

Beweis. Offensichtlich ist E_2 ein Spektralmaß. Für $g, h \in \mathcal{M}$ gilt $\big(E(\Delta)g, h\big) = \big(E_2(\Delta)g, h\big)$ und somit $\big(N_2 g, h\big) = \big(Ng, h\big) = \int_{\sigma(N)} z dE_{g,h} = \int_{\sigma(N)} z dE_{2g,h}$. Jetzt bleibt noch zu zeigen, dass $E_2(\sigma(N_2)) = \mathcal{M}$. Dazu beweisen wir, dass $\Delta \subseteq \sigma(N_2) \iff \text{ran}E(\Delta) \subseteq \mathcal{M}$.

$$\begin{aligned}
&\text{ran}E(\Delta) \cap \mathcal{M} = \emptyset \\
\iff &\Delta \text{ ist eine } E_{2g,h}\text{-Nullmenge } \forall g, h \in \mathcal{M} \\
\iff &\|(z-\lambda)^{-1}\|_{L^\infty(E_{2g,h})} < \infty \ \forall \lambda \in \Delta, \forall g, h \in \mathcal{M} \\
\iff &\exists \int_{\sigma(N_2)} (z-\lambda)^{-1} dE_{2g,h} \ \forall \lambda \in \Delta, \forall g, h \in \mathcal{M} \\
\iff &\Delta \cap \sigma(N_2) = \emptyset
\end{aligned}$$

Also haben wir $E(\sigma(N_2)) = \mathcal{M}$ woraus offensichtlich $E_2(\sigma(N_2)) = \mathcal{M}$ folgt. Da $\sigma(N_2) \subseteq \sigma(N)$, gilt somit $(N_2 g, h) = \int_{\sigma(N_2)} z dE_{2g,h}$ $\forall g, h \in \mathcal{M}$. Also ist E_2 das zu N_2 gehörige Spektralmaß. □

Damit können wir jetzt den ersten Teil von Satz 4.2.2 recht leicht beweisen.

Beweis von Satz 4.2.2 a): Sei e_1 ein separierender Vektor für $W^*(N)$ und sei $\{f_n\}$ eine orthogonal Basis für $\mathcal{H}$, sodass $f_1 = e_1$ und E das Spektralmaß für N ist. Wir setzen $\mathcal{H}_1 := \overline{\{W^*(N)e_1\}}$, $\mu_1(\Delta) := \big(E(\Delta)e_1, e_1\big)$ und $N_2 := N\big|_{\mathcal{H}_1^\perp}$ mit dem nach Lemma 4.2.8 zugehörigen Spektralmaß E_2. Sei f_2' das Bild von f unter der orthogonale Projektion auf $\mathcal{H}_1^\perp$. Nach Proposition 4.2.7 existiert ein Vektor e_2, der separierend für $W^*(N_2)$ ist, mit $f_2' \in \overline{\{W^*(N_2)e_2\}} =: \mathcal{H}_2$. Nun können wir $\mu_2(\Delta) := \big(E(\Delta)e_2, e_2\big) = \big(E_2(\Delta)e_2, e_2\big)$

definieren und den Prozess induktiv weiterführen. Damit erhalten wir eine Folge orthogonaler Vektoren $\{e_n\}$ und eine Folge orthogonaler Unterräume $\mathcal{H}_n := \overline{\{W^*(N_n)e_n\}}$, wobei $N_n := N\big|_{\mathcal{H}_{n-1}}$. Da $f_n \in \mathcal{H}_n$ und $\{f_n\}$ eine Basis ist, gilt $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$. Nun überlegen wir uns noch, wieso die Ordnung der Maße gilt. Da e_n separierend für $W^*(N_n)$ ist und $E_n \in W^*(N_n)$, erhalten wir $\mu_n(\Delta) = 0 \to E_n(\Delta) = 0 \to E_n(\Delta)\big|_{\mathcal{H}_n^\perp} = E_{n+1}(\Delta) = 0$ und somit gilt $\mu_{n+1} \ll \mu_n$. □

Die folgende Proposition wird uns ermöglichen den Beweis von Satz 4.2.2 b) über eine Induktion zu führen.

Proposition 4.2.9 Seien $N \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_A)$ und $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B)$ normale Operatoren, wobei N einen *-zyklischen Vektor besitzt. Aus $N \oplus A \cong N \oplus B$ folgt schon $A \cong B$.

Beweis. Wir bezeichnen mit U den unitären Isomorphismus von $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_A \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_B$, der $U(N \oplus A)U^{-1} = N \oplus B$ erfüllt. Diesen können wir als 2×2-Matrix anschreiben.

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$$

Hierbei gilt $U_{11} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, $U_{12} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_A, \mathcal{H})$, $U_{21} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_B)$ und $U_{22} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$. Die Operatoren $N \oplus A$ und $N \oplus B$ können wir ebenfalls als 2×2-Matrizen auffassen mit

$$N \oplus A = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad N \oplus B = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Damit können wir die Gleichungen $U(N \oplus A) = (N \oplus B)U$ und $U(N \oplus A)^* = (N \oplus B)^*U$ neu anschreiben als

$$\begin{bmatrix} U_{11}N & U_{12}A \\ U_{21}N & U_{22}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} NU_{11} & NU_{12} \\ BU_{21} & BU_{22} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

und

$$\begin{bmatrix} U_{11}N^* & U_{12}A^* \\ U_{21}N^* & U_{22}A^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^*U_{11} & N^*U_{12} \\ B^*U_{21} & B^*U_{22} \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

genauso wie die Gleichungen $U^*(N \oplus B) = (N \oplus A)U^*$ und $U^*(N \oplus B)^* = (N \oplus A)^*U^*$

$$\begin{bmatrix} U_{11}^*N & U_{12}^*B \\ U_{21}^*N & U_{22}^*B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} NU_{11}^* & NU_{12}^* \\ AU_{21}^* & AU_{22}^* \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

und

$$\begin{bmatrix} U_{11}^*N^* & U_{12}^*B^* \\ U_{21}^*N^* & U_{22}^*B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^*U_{11}^* & N^*U_{12}^* \\ A^*U_{21}^* & A^*U_{22}^* \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Aus der Tatsache, dass U unitär ist, folgt $U^*U = 1_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}_A}$ und $UU^* = 1_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}_B}$. Für die Matrizenelemente bedeutet das

$$\begin{bmatrix} U_{11}^*U_{11} + U_{12}^*U_{21} & U_{11}^*U_{12} + U_{12}^*U_{22} \\ U_{21}^*U_{11} + U_{22}^*U_{21} & U_{21}^*U_{12} + U_{22}^*U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & 1_{\mathcal{H}_A} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

und

$$\begin{bmatrix} U_{11}U_{11}^* + U_{12}U_{21}^* & U_{11}U_{12}^* + U_{12}U_{22}^* \\ U_{21}U_{11}^* + U_{22}U_{21}^* & U_{21}U_{12}^* + U_{22}U_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & 1_{\mathcal{H}_B} \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Aus Gleichung (4.2) entnehmen wir $U_{22}A = BU_{22}$, was mit Proposition 4.2.5 $A\big|_{\ker(U_{22})^\perp} \cong B\big|_{\ker(U_{22}^*)^\perp}$, dass der Raum $\ker(U_{22})^\perp$ A reduziert und, dass der Raum $\overline{\operatorname{ran}(U_{22})} = \ker(U_{22}^*)^\perp$ B reduziert liefert.
Im nächsten Schritt wollen wir zeigen, dass auch $A\big|_{\ker(U_{22})} \cong B\big|_{\ker(U_{22}^*)}$ gilt. Aus $h \in \ker(U_{22})$, folgt

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{12}h \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Da U eine Isometrie ist, bildet U_{12} den Raum $\ker(U_{22})$ in einen abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{H}$ ab. Wir definieren $\mathcal{M}_1 := U_{12}(\ker(U_{22}))$. Mit $\ker(U_{22})^\perp$ ist natürlich auch $\ker(U_{22})$ reduzierend für A. Verwenden wir nun $U_{12}A = NU_{12}$ und $U_{12}A^* = N^*U_{12}$ aus Gleichung (4.2) so erhalten wir $N\mathcal{M}_1 = NU_{12}(\ker(U_{22})) = U_{12}A(\ker(U_{22})) \subseteq U_{12}(\ker(U_{22})) = \mathcal{M}_1$, beziehungsweise $N^*\mathcal{M}_1 = N^*U_{12}(\ker(U_{22})) = U_{12}A^*(\ker(U_{22})) \subseteq U_{12}(\ker(U_{22})) = \mathcal{M}_1$. Folglich reduziert $\mathcal{M}_1$ auch den Operator N und wir können dessen Einschränkung auf $\mathcal{M}_1$ als eigenen Operator betrachten. Da U_{12} aber eine Isometrie von $\ker(U_{22})$ nach $\mathcal{M}_1$ ist, folgt $A\big|_{\ker(U_{22})} \cong N\big|_{\mathcal{M}_1}$. Der zugehörige Isomorphismus ist hier $U_{12}\big|_{\ker(U_{22})}$.
Jetzt machen wir das gleiche Spielchen für B und U^*. In diesem Fall ist U_{12}^* die Isometrie von $\ker(U_{22}^*)$ nach $\mathcal{M}_2 := U_{21}^*(\ker U_{22}^*)$. Aus den Gleichungen (4.4) und (4.5) erhalten wir in analoger Weise, dass $\mathcal{M}_2$ ebenfalls den Operator N reduziert und somit $B\big|_{\ker(U_{22}^*)} \cong N\big|_{\mathcal{M}_2}$. Hier ist der zugehörige Isomorphismus $U_{12}^*\big|_{\ker(U_{22}^*)}$.
Wenn wir nun noch zeigen können, dass $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$ ist wir fertig. Um das zu erreichen zeigen wir zunächst $\mathcal{M}_1 = \ker(U_{11})^*$.
Sei dazu $h \in \ker(U_{11}^*)$. Mit $U_{11}^*U_{12} + U_{12}^*U_{22} = 0$ aus Gleichung (4.6) folgt $U_{11}^*U_{12}h = 0$,

also $\mathcal{M}_1 \subseteq \ker U_{11}^*$. Sei nun umgekehrt $f \in \ker U_{11}^*$. Mit $U_{11}^* U_{11} + U_{12}^* U_{21} = 1$ aus Gleichung (4.6) folgt $U_{12}U_{21}^* f = f$. Weiters erhalten wir mit $U_{21}U_{11}^* + U_{22}U_{21}^* = 0$ aus Gleichung (4.7) $U_{22}U_{21}^* f = 0$, also ist $U_{21}^* f \in \ker(U_{22})$. Damit ist auch $f = U_{12}U_{21}^* f \in U_{12}(\ker(U_{22})) = \mathcal{M}_1$. Insgesamt erhalten wir $\mathcal{M}_1 = \ker(U_{11}^*)$.
Mit dem gleichen Vorgehen zeigen wir $\mathcal{M}_2 = \ker U_{11}$. Mit $U_{11}U_{12}^* + U_{12}U_{22}^* = 0$ aus Gleichung (4.7) erhalten wir $0 = (U_{11}U_{12}^*)(\ker(U_{22}^*)) = U_{11}(\mathcal{M}_2)$, also $\mathcal{M}_2 \subseteq \ker U_{11}$. Sei nun $f \in \ker(U_{11})$. Mit $U_{11}^* U_{11} + U_{12}^* U_{21} = 1_{\mathcal{H}}$ aus Gleichung (4.6) erhalten wir $U_{12}^* U_{21} f = f$. Mit $U_{21}^* U_{11} + U_{22}^* U_{21} = 0$ aus Gleichung (4.6) erhalten wir $0 = (U_{21}^* U_{11} + U_{22}^* U_{21}) f = U_{22}^* U_{21} f$ also $U_{21} f \in \ker(U_{22}^*)$. Insgesamt folgt $\ker(U_{11}) \subseteq U_{12}^*(\ker(U_{22}^*)) = \mathcal{M}_2$.
Als letzten Schritt müssen wir jetzt nur noch zeigen, dass $\ker(U_{11}^*) = \ker(U_{11})$. Dazu verwenden wir, dass N einen *-zyklischen Vektor besitzt. Daraus lässt sich mit Satz 1.4.15 schließen $N \cong N_\mu$. Weiters wissen wir aus Korollar 2.1.12, dass $\{N_\mu\}' = \{M_\phi : \phi \in L^\infty(\mu)\}$. Aus Gleichung (4.2) entnehmen wir $U_{11}N = NU_{11}$, also $U_{11} \in \{N\}'$. Da nun $U_{11} \cong M_\phi$ für ein $\phi \in L^\infty(\mu)$, ist U_{11} insbesondere normal. Damit gilt $\|U_{11}^* f\|^2 = \big(U_{11}^* f, U_{11}^* f\big) = \big(U_{11}U_{11}^* f, f\big) = \big(U_{11}^* U_{11} f, f\big) = 0$ für jedes $f \in \ker(U_{11})$. Diese Überlegung lässt sich natürlich auch mit vertauschten Rollen von U_{11} und U_{11}^* durchführen. Folglich ist $\ker(U_{11}) = \ker(U_{11}^*)$ und somit $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $A\big|_{\ker(U_{22})^\perp} \cong B\big|_{\ker(U_{22}^*)^\perp}$ und $A\big|_{\ker(U_{22})} \cong B\big|_{\ker(U_{22}^*)}$, also $A \cong B$. □

Beweis von Satz 4.2.2 b). Nun können wir uns dem Beweis von Satz 4.2.2 b) widmen. Die eine Richtung ist einfach. Angenommen $[\mu_n] = [\nu_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt mit Satz 4.2.6 $N_{\mu_n} \cong N_{\nu_n}$. Sei U_n ein unitäre Isomorphismus, der $U_n N_{\mu_2} = N_{\nu_n} U_n$ erfüllt für alle $n \in \mathbb{N}$, dann erfüllt der Diagonaloperator $U := \bigoplus_{n=1}^\infty U_n$ die Gleichung $UN = MU$. Folglich ist $N \cong M$.
Für die Rückrichtung zeigen wir zuerst, dass μ_1 und ν_1 skalarwertige Spektralmaße für $\tilde{N} := \bigoplus_{n=1}^\infty N_{\mu_n}$ beziehungsweise $\tilde{M} := \bigoplus_{n=1}^\infty N_{\nu_n}$ sind. Die Einschränkung $\tilde{N}\Big|_{L^2(\mu_n)}$ entspricht dem Multiplikationsoperator aus Proposition 1.4.15 und hat daher $\tilde{E}_n(\Delta) = M_{\chi_\Delta} \in L^2(\mu_n)$ als Spektralmaß. Da nach Lemma 4.2.8 das Spektralmaß der Einschränkung die Einschränkung des Spektralmaß ist, ergibt sich für das Spektralmaß $\tilde{E}$ von $\tilde{N}$ die Gleichung $\tilde{E}(\Delta) = \bigoplus_{n=1}^\infty M_{\chi_\Delta}$. Sei nun $\mu_1(\Delta) = 0$. Da jedes Maß μ_n absolut stetig bezüglich μ_1 ist, entspricht jedes χ_Δ der Nullfunktion auf dem jeweiligen $L^2(\mu_n)$ und somit folgt $\tilde{E}(\Delta) = 0$. Wir haben also gezeigt, dass μ_1 ein skalarwertiges Spektralmaß für $\tilde{N}$ ist. Nun überlegen wir, dass μ_1 damit auch für N ein skalarwertiges Spektralmaß ist. Sei dazu E das zu N gehörige Spektralmaß und V der unitäre Isomorphismus mit $V^{-1}NV = \tilde{N}$. Aus

$$\int z dF_{f,g} = \big(\tilde{N} f, g\big) = \big(V^{-1}NVf, g\big) = \big(NVf, Vg\big) = \int z dE_{Vf,Vg}$$

erhalten wir $\big(F(\Delta)f, g\big) = \big(E(\Delta)Vf, Vg\big)$. Also gilt

$$\begin{aligned}
&F(\Delta) = 0 \\
\Rightarrow &\big(F(\Delta)f, g\big) = 0 \ \forall f, g \in L^2(\mu) \\
\Rightarrow &\big(E(\Delta)Vf, Vg\big) = 0 \ \forall Vf, Vg \in L^2(\mu)
\end{aligned}$$

und weil V surjektiv ist

$$\begin{aligned}
\Rightarrow &\big(E(\Delta)f, g\big) = 0 \ \forall f, g \in \mathcal{H} \\
\Rightarrow &E(\Delta) = 0.
\end{aligned}$$

Somit folgt aus $\mu_1(\Delta) = 0$ schon $E(\Delta) = 0$. An dieser Stelle sei angemerkt, dass natürlich auch μ_k ein skalarwertiges Spektralmaß für $\bigoplus_{n=k}^{\infty} N_{\mu_n}$ ist, nach genau der gleichen Argumentation.
Da μ_1 und ν_1 für den gleichen Operator skalarwertige Spektralmaße sind, gilt $[\mu_1] = [\nu_1]$ und mit Satz 4.2.6 auch $N_{\mu_1} \cong N_{\nu_1}$. Nun können wir Proposition 4.2.9 verwenden und erhalten damit $\bigoplus_{n=2}^{\infty} N_{\mu_n} \cong \bigoplus_{n=2}^{\infty} N_{\nu_n}$. Damit lässt sich der Beweis induktiv weiter führen. $\square$

4.3 Korollare

Definition 4.3.1 Sei μ ein Maß auf X. Als Träger von μ bezeichnen wir die Menge $\inf(\{X \backslash \Delta : \mu(\Delta) = 0 \wedge \Delta \text{ offen}\}$ in Zeichen $\operatorname{supp}(\mu)$. Das Infimum ist hierbei über die Ordnung nach der Mengeninklusion zu verstehen.

Satz 4.3.2 Seien μ und ν reguläre Borelmaße auf dem Raum X und K der Träger von μ. Dann ist $\nu\big|_K \ll \mu$.

Beweis. Sei $\mu(\Delta) = 0$. Da ν regulär ist gilt $\nu\big|_K(\Delta) = \sup\{\nu\big|_K(O) : O \subseteq \Delta \ \wedge \ O \text{ offen}\}$. Da $\mu(M) = 0$, ist jede offene Teilmenge O von M nicht im Träger von μ enthalten und somit $\nu\big|_K(O) = 0$. Folglich gilt auch $\nu\big|_K(M) = 0$. $\square$

Korollar 4.3.3 Sei N ein normaler Operator auf dem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit dem zugehörigen skalarwertigen Spektralmaß μ, dann gibt es eine absteigende Folge von Borelmengen $\{\Delta_n\}$ aus $\mathcal{B}(\sigma(N))$, sodass $\Delta_1 = \sigma(N)$ und $N \cong \bigoplus_{n=1}^{\infty} N_{\mu|_{\Delta_n}}$.
Ist M ein weiterer normaler Operator auf einem separablen Hilbertraum mit skalarwertigem Spektralmaß ν, $\{\tilde{\Delta}_n\}$ eine absteigende Folge von Borelmengen aus $\mathcal{B}(\sigma(M))$ mit

$\tilde{\Delta}_1 = \sigma(M)$ und $M \cong \bigoplus_{n=1}^{\infty} N_{\nu|_{\tilde{\Delta}_n}}$. Dann gilt $N \cong M$ genau dann wenn sowohl $[\mu] = [\nu]$ als auch $\mu(\Delta_n \backslash \tilde{\Delta}_n)) = \mu(\tilde{\Delta}_n \backslash \Delta) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus Satz 4.2.2 kombiniert mit Satz 4.3.2, indem man μ_n durch $\mu\big|_{\mathrm{supp}(\mu_n)}$ ersetzt. □

Beispiel 4.3.4 (Endlich dimensionale Operatoren) Sei N ein normaler Operator auf einem endlich dimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Satz 4.2.2 sagt uns, dass $N \cong \bigoplus_{i=1}^{n} N_{\mu_i}$. Jedes N_{μ_i} ist wiederum unitär äquivalent zu einem normalen Operator N_i auf einem Teilraum $\mathcal{H}_i$ von $\mathcal{H}$. Da es zu jedem normalen Operator eine Normalbasis gibt, können wir o.B.d.A. N_i als Diagonaloperator auffassen. Zu $N_i\big|_{\mathcal{H}_i}$ gibt es einen zyklischen Vektor, weswegen jeder Eigenwert on N_i einfach sein muss, weil ja $\{W^*(N_i)e\} \cap \{h : Nh = \lambda h\}$ für jedes festes λ maximal eindimensional ist.
Sei e_i der zyklische Vektor zu $N_i\big|_{\mathcal{H}_i}$, dann ist $e_i = \sum_{j=1}^{n} c_j b_j$ eine Linearkombination aus allen Eigenvektoren b_j von N_i, wobei $c_j \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Das Spektrum $\sigma(N_i)$ ist die Menge aller Eigenwerte von N_i. Schreiben wir b_λ für den zu λ gehörigen Eigenvektor, so lassen sich die Maße μ_i schreiben als $\mu_i(\Delta) = \sum_{\lambda \in (\Delta \cap \sigma(N_i))} |(e_i, b_\lambda)|^2$. Die Ordnung der Maße $\mu_i \ll \mu_{i+1}$ gibt uns also Aufschluss über das genaue Aussehen der N_i. Jeder Operator N_i hat Diagonalgestalt. In seiner Diagonale stehen alle Eigenwerte, deren Vielfachheit größer gleich i ist. Insbesondere ist die Dimension von $\mathcal{H}$ gleich der Anzahl an Eigenwerten mit Vielfachheit größer gleich i.

Definition 4.3.5 Zwei Maße μ und ν auf dem Raum X heißen singulär zueinander, wenn eine messbare Menge A existiert, sodass $\mu(X \backslash A) = 0$ und $\nu(A) = 0$.

Satz 4.3.6 Sei N ein normaler Operator auf dem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann existieren zueinander singuläre Maße $\mu_\infty, \mu_1, \mu_2, \ldots$, sodass

$$N \cong N_{\mu_\infty}^{(\infty)} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} N_{\mu_n}^{(n)}.$$

Ist M ein weiterer normaler Operator mit zugehörigen Maßen $\nu_\infty, \nu_1, \nu_2, \ldots$, si gilt $N \cong M$ genau dann, wenn $[\mu_n] = [\nu_n]$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Beweis. Sei μ ein skalarwertiges Spektralmaß für N und sein $\{\Delta_n\}$ eine Folge von Borelmengen wie in Korollar 4.3.3. Wir definieren $\Sigma_n := \Delta_n \backslash \Delta_{n+1}$, $\Sigma_\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ und die zugehörigen Maße $\mu_n := \mu\big|_{\Sigma_n}$. Damit gilt $\Delta_n = \Sigma_\infty \cup (\Delta_n \backslash \Delta_{n+1}) \cup (\Delta_{n+1} \backslash \Delta_{n+2}) \cup \dots = \Sigma_\infty \cup \bigcup_{k=n}^{\infty} \Sigma_k$ und folglich $\mu\big|_{\Delta_n} = \mu_\infty + \mu_n + \mu_{n+1} + \dots$. Analog erhalten wir für den Operator $N_{\mu|_{\Delta_n}} \cong N_{\mu_\infty} \oplus N_{\mu_n} \oplus N_{\mu_{n+1}} \oplus \dots$. Das führt zu

$$N \cong \bigoplus_{n=1}^{\infty} N_{\mu|_{\Delta_n}} \cong \bigoplus_{n=1}^{\infty} (N_{\mu_\infty} \oplus N_{\mu_1} \oplus \dots \oplus N_{\mu_n}) \cong N_{\mu_\infty}^{(\infty)} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} N_{\mu_n}^{(n)}.$$

Nun zur Eindeutigkeit. Aus $[\mu_n] = [\nu_n]$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ folgt mit Satz 4.2.6 $N_{\mu_n} \cong N_{\nu_n}$ und somit $N \cong M$.

Sei nun $N \cong M$. Wir gehen jetzt den selben Weg, wie beim ersten Beweisschritt aber in die andere Richtung. Zuerst konstruieren wir Maße $\tilde{\nu}_n := \nu_\infty + \sum_{k=n}^{\infty} \nu_k$. Diese Maße erfüllen offensichtlich $\tilde{\nu}_{n+1} \ll \tilde{\nu}_n$ und $M \cong \bigoplus_{n=1}^{\infty} N_{\tilde{\nu}_n}$. Mit Korollar 4.3.3 folgt $[\mu\big|_{\Delta_n}] = [\tilde{\nu}_n]$. Wir können μ_n und ν_n rekonstruieren durch $\mu_n = \mu\big|_{\Delta_n \backslash \Delta_{n+1}} = \mu\big|_{\Delta_n} - \mu\big|_{\Delta_{n+1}}$ und $\nu_n = \tilde{\nu}_n - \tilde{\nu}_{n+1}$. Da $\mu\big|_{\Delta_n}$ und $\mu\big|_{\Delta_{n+1}}$ auf Δ_n übereinstimmen und $\tilde{\nu}_n$ und $\tilde{\nu}_{n+1}$ auf dem Träger von $\tilde{\nu}_{n+1}$ übereinstimmen, sind die Differenzen immer noch Maße und außerdem überträgt sich die Äquivalenz der Maße auf ihre Differenz. Um das zu sehen bedenke man, dass ja $\tilde{\nu}_n - \tilde{\nu_{n+1}} = \int_{\Delta_n \backslash \Delta_{n+1}} \frac{d\tilde{\nu}_n}{d\mu|_{\Delta_n}} d\mu\big|_{\Delta_n}$ und umgekehrt.

$\square$

Anhang A

Maßtheorie

Die nächsten zwei Resultate findet man in [3].

Satz A.1 (Satz von Radon-Nikodým) Sei μ ein σ-endliches Maß auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ und ν ein bezüglich μ absolut stetiges komplexes Maß, dann existiert eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, so dass

$$\nu(\Delta) = \int_\Delta f d\mu \quad \forall \Delta \in \mathcal{A}.$$

Die Funktion f heißt Radon-Nikodým-Dichte von ν bezüglich μ und wird auch als Maß-Ableitung $\frac{d\nu}{d\mu}$ angeschrieben. Ist ν ein signiertes Maß, so bildet f nach $\mathbb{R}$ ab und ist ν ein Maß, so bildet f in die nicht negativen reellen Zahlen ab. Ist ν ein endliches Maß, so ist f bezüglich μ integrierbar. Insbesondere ist f μ-fast überall eindeutig.

Satz A.2 (Rieszscher Darstellungssatz) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $L : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ ein lineares beschränktes Funktional, dann gibt es einen eindeutigen Vektor $h_0 \in \mathcal{H}$, sodass $L(h) = \big(h, h_0\big)$ für alle $h \in \mathcal{H}$. Zusätzlich gilt $\|h_0\| = \|L\|$.

Anhang B

Analysis

Der nächste Satz ist aus [2].

Satz B.1 (Banach-Alaoglu) Für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist die bezüglich der Abbildungsnorm abgeschlossene Einheitskugel um die Null in X'

$$K_1^{X'} = \{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$$

kompakt bezüglich der ω^*-Topologie $\sigma(X', X)$.

Die folgenden zwei Resultate sind aus [1] entnommen.

Satz B.2 (von Stone-Weierstraß) Eine Unteralgebra von $C(X;\mathbb{C})$ mit X kompakt, die punktetrennend ist, die konstante Funktion 1 enthält und mit jeder Funktion f auch ihre komplex konjungierte $\overline{f}$ enthält, liegt dicht in $C(X;\mathbb{C})$.

Satz B.3 (Lemma von Zorn) Hat eine teilgeordnete Menge A die Eigenschaft, dass jede Kette beschränkt ist, so hat sie ein maximales Element.

Zeichenverzeichnis

$\mathbb{C}[z]$ steht für die Menge aller Polynome über $\mathbb{C}$ in z und $\overline{z}$.

$\mathcal{H}$ steht für einen Hilbertraum.

$\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ steht für die Menge aller beschränkten Operatoren auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$.

$\mathcal{B}(\Omega)$ steht für die Menge der Borelmengen auf Ω.

$\mathfrak{Bm}(X)$ steht für die Menge aller beschränkten und messbaren Funktionen auf dem Raum X.

$[\mu] = [\nu]$ bedeutet, dass die Maße äquivalent sind.

$N_1 \cong N_2$: Die Operatoren N_1 und N_2 sind unitär äquivalent.

$\sigma(X, X')$: Steht für die schwache Topologie. Siehe Definition 1.2.1.

$\mathcal{T}_\sigma$: Starke Operatortopologie. Siehe Definition 1.2.2.

$\mathcal{T}_\omega$: Schwache Operatortopologie. Siehe Definition 1.2.2.

ω^*: Schwachsterntopologie, siehe Definition 1.2.3.

$U_1(X)$: Die offene Einheitskugel auf dem Raum X.

$K_1(X)$: Die abgeschlossene Einheitskugel auf dem Raum X.

Lat A: Die Menge aller abgeschlossenen Unterräume, die invariant unter dem Operator A sind, siehe Bemerkung 2.1.6.

$\mathcal{H}^{(n)} := \oplus_{k=1}^{n} \mathcal{H}$, siehe Bemerkung 2.1.6.

$A^{(n)} := \oplus_{k=1}^{n} A \in \mathcal{H}^(n)$, siehe Bemerkung 2.1.6.

$\mathscr{A}_\mu := \{M_\phi : \phi \in L^\infty(\mu)\}$, siehe Satz 2.1.11.

M_ϕ: Multiplikationsoperator mit der Funktion ϕ, siehe Satz 2.1.11.

N_μ bezeichnet den Multiplikationsoperator mit der unabhängigen Variablen auf $L^2(\mu)$, siehe Proposition 1.4.14.

$\mathcal{H}_h :=$cl$[W^*(N)h]$, siehe Definition 3.1.7.

$N_h := N\big|_{\mathcal{H}_h}$, siehe Definition 3.1.7.

I: Identität

$I_{\mathscr{A}}$: Identität auf $\mathscr{A}$

$r(A)$: Spektralradius des Operators A, siehe Definition 1.3.4.

Literaturverzeichnis

[1] Blümlinger Martin: *Analysis 3.* Wien, 2011
(http://www.asc.tuwien.ac.at/~blue/)

[2] Blümlinger Martin, Woracek Harald und Kaltenbäck Michael: *Funktionalanalysis.* Wien, 2014
(http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/fana2016.pdf)

[3] Kusolitsch Norbert: *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie: Eine Einführung.* Springer-Lehrbuch. Springer Spektrum, Berlin, 2014

[4] Conway John B.: *A course in functional analysis.* Graduate texts in mathematics. Springer, New York, 1985

[5] Woracek Harald: *Vorlesung: Funktionalanalysis 2.*
(http://www.asc.tuwien.ac.at/~woracek/homepage/main.php)