Vektorverbände

Manuel Erler

23. März 2015

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Theorie der Vektorverbände wurde um 1935 unabhängig von F. Riesz, H. Freudenthal und L. V. Kantorovitch entwickelt.
Diese Theorie erfreut sich einer weiten Anwendbarkeit auf Maßtheorie und Funktionalanalysis, weil viele wichtige Funktionenräume oder Räume von Maßen Vektorverbände bilden. So können Sätze dieser Sparten als Spezialfälle von Ergebnissen über Vektorverbände gesehen werden. Zum Beipiel folgt der Satz von Radon-Nikodym aus dem Spektralsatz von Freudenthal.

In meiner Bachelorarbeit werden einige algebraischen Aspekte von Vektorverbanden an Hand von [1],[5] und [6] aufgearbeitet.

Kapitel 2

Grundlegendes

Wir wollen einige Begriffe wiederholen.

Definition 2.1.1 Sei L eine Menge, dann bezeichnet man eine Teilmenge $\leq$ von $L \times L$ als Halbordnung, wenn sie folgende drei Bedingungen erfüllt:

(HO1) Reflexivität: $x \leq x, \forall x \in L$

(HO2) Antisymmetrie: $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y, \forall x, y \in L$

(HO3) Transitivität: $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Eine obere Schranke einer Teilmenge $A \subseteq L$ ist ein Element $s \in L$, das ganz A majorisiert, also $a \leq s$ für alle a aus A falls diese existiert. Analog definiert man untere Schranken.

Unter dem Supremum $\sup(A)$ einer Menge A in einer Halbordnung $\langle L, \leq \rangle$ versteht man die kleinste Untere Schranke von A. Dual dazu ist das Infimum $\inf(A)$ einer Menge als die größte untere Schranke definiert.

Definition 2.1.2 Eine Algebra $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ heißt ein Verband, wenn für alle $x, y, z \in L$ gilt:

(L1) $\left.\begin{array}{l} x \vee x = x \\ x \wedge x = x \end{array}\right\}$ Idempotenz

(L2) $\left.\begin{array}{l} x \vee y = y \vee x \\ x \wedge x = y \wedge x \end{array}\right\}$ Kommutativität

(L3) $\left.\begin{array}{l} (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \\ (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \end{array}\right\}$ Assoziativität

(L4) $\left.\begin{array}{l} x \vee (x \wedge y) = x \\ x \wedge (x \vee y) = x \end{array}\right\}$ Verschmelzungsgesetze

Verbände stehen in einem bijektiven Zusammenhang zu Halbordnungen, wo es zu je zwei Elementen Supremum und Infimum gibt. Sei $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ ein Verband. Die Relation $\leq$ auf L mit $x \leq y$, wenn $x \wedge y = x$, bildet eine Halbordnung, wobei $x \wedge y = \inf(x, y), x \vee y = \sup(x, y)$.
Sei umgekehrt $\langle L, \leq \rangle$ eine Halbordnung, sodass für alle $x, y \in L$ Supremum und Infimum existieren. Definiert man auf L zweistellige Operationen $x \wedge y = \inf(x, y), x \vee y = \sup(x, y)$, dann ist $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ ein Verband.

Definition 2.1.3 Es seien $\langle L, +\rangle$ eine abelsche Gruppe, $\langle K, +, \cdot\rangle$ ein Körper und eine Abbildung $K \times L \to L : (\alpha, x) \mapsto \alpha x$ gegeben, so heißt L ein Vektorraum, wenn für alle $\alpha, \beta \in K$ und $x, y \in L$ folgende Axiome erfüllt sind:

(V1) $\alpha(x + y) = (\alpha x) + (\alpha y)$,

(V2) $(\alpha + \beta)x = (\alpha x) + (\beta x)$,

(V3) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,

(V4) $1x = x$.

Definition 2.1.4 Ein Vektorraum L über $\mathbb{R}$ versehen mit einer Ordnung $\leq$ heißt geordneter Vektorraum, wenn die Ordnung mit den Vektorraumoperationen verträglich ist:

(OV1) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ für alle $x, y, z \in L$,

(OV2) $x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$ für alle $x, y \in L$ und $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Ist $\langle L, \leq\rangle$ zusätzlich ein Verband, so nennt man L einen Vektorverband oder auch Riesz-Raum.

Beispiel 2.1.5

(i) Die reellen Zahlen bilden einen Vektorverband, wie in Beispiel 3.1.3(i) gezeigt wird.

(ii) Betrachte das Produkt $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben $x \leq y$, wenn $x_k \leq y_k$ für $k = 1, ..., n$ in $\mathbb{R}$.

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ mit $x \leq y$, also $x_k \leq y_k$ für $k = 1, ..., n$. Es folgt $x_k + z_k \leq y_k + z_k$ für $k = 1, ..., n$, also $x + z \leq y + z$.

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x \leq y$ und $\alpha \geq 0$. Mit **(OV2)** folgt aus $x_k \leq y_k$, dass $\alpha x_k \leq \alpha y_k$. Daraus folgt $\alpha x \leq \alpha y$.

Damit ist $\mathbb{R}^n$ ein geordneter Vektorraum.

Seien x, y aus $\mathbb{R}^n$. Wir definieren $z_k := x_k \vee y_k$ für $k = 1, ..., n$ und werden zeigen, dass $x \vee y = z \in \mathbb{R}^n$. Da $\mathbb{R}$ wegen Beispiel 3.1.3(i) ein Vektorverband ist, ist z wohldefiniert und liegt in $\mathbb{R}^n$. Da $x_k, y_k \leq x_k \vee y_k = z_k$ für $k = 1, ..., n$ gilt, ist z eine obere Schranke von $\{x, y\}$.

Sei s eine obere Schranke von $\{x, y\}$, also $x_k, y_k \leq s$ für $k = 1, ..., n$. Daraus folgt $z_k = x_k \vee y_k \leq s$ für $k = 1, .., n$, also $z \leq s$. Damit ist z die kleinste obere Schranke von $\{x, y\}$ und $\mathbb{R}^n$ ein Vektorverband.

(iii) Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ kann auch mit der lexikographischen Ordnung versehen werden. Hier gilt $x < y$ genau dann, wenn es ein $k \in \{1, 2, ..., n\}$ gibt, sodass $x_k < y_k$ und $x_i = y_i$ für $i = 1, ..., k - 1$.

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ mit $x < y$. Dann gibt es ein $k \in \{1, 2, ..., n\}$ sodass $x_k < y_k$ und $x_i = y_i$ für $i = 1, ..., k - 1$. Es folgt $x_k + z_k < y_k + z_k$ und $x_i + z_i = y_i + z_i$ für $i = 1, ..., k - 1$, also $x + z < y + z$.

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x < y$ und $\alpha \geq 0$. Dann gibt es ein $k \in \{1, 2, ..., n\}$ sodass $x_k < y_k$ und $x_i = y_i$ für $i = 1, ..., k-1$. Mit **(OV2)** gilt $\alpha x_k < \alpha y_k$ und $\alpha x_i = \alpha y_i$ für $i = 1, ..., k-1$, also $\alpha x < \alpha y$.

Damit ist $\mathbb{R}^n$ ein geordneter Vektorraum.

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Wenn $x \neq y$ gibt es einen kleinsten Index k mit $x_k \neq y_k$. Da $\mathbb{R}$ totalgeordnet ist, gilt $x_k < y_k$ oder $x_k > y_k$, also $x < y$ oder $x > y$. Damit folgt $x \vee y = y$ oder $x \vee y = x$. Auf Grund von Lemma 2.1.6(ii) ist $\mathbb{R}^n$ dann auch unter $\wedge$ abgeschlossen. Damit ist $\mathbb{R}^n$ ein Vektorverband.

(iv) Sei $\langle \Omega, \mathfrak{A} \rangle$ ein Messraum, also eine nichtleere Grundmenge Ω versehen mit einer σ-Algebra $\mathcal{A}$. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt messbar, wenn $f^{-1}(\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{A}$ ist, wobei $\mathfrak{B}$ die Borel-Mengen auf $\mathbb{R}$ sind. Der Raum der messbaren Funktionen wird mit $\mathcal{M}$ bezeichnet. Für $f, g \in \mathcal{M}$ schreiben wir $f \leq g$, wenn $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in \Omega$.

Wie in Teil (ii) sieht man hier dass die gewünschten Gesetze **(OV1)**, **(OV2)** in $\mathcal{M}$ gelten, da dies in $\mathbb{R}$ der Fall ist, und $\mathcal{M}$ ist ein geordneter Vektorraum.

Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (\alpha, \beta) \mapsto \max\{\alpha, \beta\}$ ist stetig in $(\alpha_1, \beta_1)^T \in \mathbb{R}^2$ mit o.B.d.A. $\alpha_1 \leq \beta_1$. Denn wählt man auf $\mathbb{R}^2$ die 1-Norm $||(x, y)^T||_1 := |x| + |y|$, so ergibt sich für $(\alpha, \beta)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $\alpha \leq \beta$,

$$\begin{aligned} |\sup\{\alpha_1, \beta_1\} - \sup\{\alpha, \beta\}| &= |\alpha_1 - \alpha| \leq |\alpha_1 - \alpha| + |\beta_1 - \beta| \\ &= ||(\alpha_1, \beta_1)^T - (\alpha, \beta)^T||_1. \end{aligned}$$

Im Fall $\alpha \geq \beta$ gilt $\alpha_1 - \beta \leq \alpha_1 - \alpha$ sowie $\beta - \alpha_1 \leq \beta - \beta_1$ und deshalb ist $|\alpha_1 - \beta| \leq ||(\alpha_1, \beta_1)^T - (\alpha, \beta)^T||_1$.

Nach [2] III Korollar 1.4 sind stetige Abbildungen auch messbar und zusammen mit [2] III Satz 1.5 folgt $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\} \in \mathcal{M}$.

Für $f, g \in \mathcal{M}$ definieren wir $h : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ für $x \in \Omega$, und wollen zeigen, dass $f \vee g = h \in \mathcal{M}$ erfüllt ist. Wegen $f(x), g(x) \leq \max\{f(x), g(x)\}$ für alle $x \in \Omega$, ist h eine obere Schranke von $\{f, g\}$.

Sei s eine obere Schranke von $\{f, g\}$. Dann gilt mit $f(x), g(x) \leq s(x)$ auch $\max\{f(x), g(x)\} \leq s(x)$ für alle $x \in \Omega$, also $h \leq s$. Damit ist h die kleinste obere Schranke von f und g und $\mathcal{M}$ ist ein Vektorverband.

(v) Sei X ein kompakter Raum und $C(X)$ der Raum der stetigen Funktionen$f : X \to \mathbb{R}$.

Da stetige Funktionen messbar sind, gilt $C(X) \subseteq \mathcal{M}$. Er ist sogar ein Teilraum und es genügt zu zeigen, dass $f \vee g \in C(X)$ für $f, g \in C_c(X)$. Da die Verknüpfung stetiger Funktionen stetig ist und wir bereits in (iv) gezeigt haben, dass $(\alpha, \beta) \mapsto \max\{\alpha, \beta\}$ stetig ist, ist $f \vee g$ stetig, für $f, g \in C(X)$.

Damit gilt $f \vee g \in C(X)$ und $C(X)$ ist ein Vektorverband.

(vi) Sei $\langle \Omega, \mathfrak{A}, \mu \rangle$ ein Maßraum, also Ω eine nichtleere Grundmenge, $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra und μ ein Maß darauf. Für $p \in (1, \infty)$ bezeichnet $\mathcal{L}_p := \{f \in \mathcal{M} : \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty\}$ den Raum der p-integrierbaren Funktionen. Für $f, g \in \mathcal{L}_p$ schreiben wir $f \leq g$, wenn $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in \Omega$ erfüllt ist.

Da $\mathcal{L}_p$ ein Teilvektorraum von $\mathcal{M}$ ist, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{L}_p$ unter den Verbandsoperationen von M abgeschlossen ist, um L als Vektorverband zu identifizieren.

Seien $f, g \in \mathcal{L}$ und $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ für $x \in \Omega$. Da $\mathbb{R}$ totalgeordnet ist und **(OV1)** in $\mathbb{R}$ erfüllt ist, gilt für $x \in \Omega$ entweder $|\max\{f(x), g(x)\}|^p = |f(x)|^p \leq |f(x)|^p + |g(x)|^p$ oder $|\max\{f(x), g(x)\}|^p = |g(x)|^p \leq |f(x)|^p + |g(x)|^p$, also allenfalls $|\max\{f(x), g(x)\}|^p \leq |f(x)|^p + |g(x)|^p$.

Wegen der Linearität und Monotonie der Integrals gilt

$$\int_\Omega |f \vee g|^p d\mu \leq \int_\Omega |f|^p + |g|^p d\mu \leq \int_\Omega |f|^p d\mu + \int_\Omega |g|^p d\mu < \infty.$$

Damit liegt $f \vee g$ in $\mathcal{L}_p$ und $\mathcal{L}_p$ ist ein Vektorverband.

Bemerkung Wir werden $x \vee y + z$ für $(x \vee y) + z$ schreiben. Also binden die Verbandsoperationen stärker als $+, -$.

Lemma 2.1.6 Sei L ein geordneter Vektorraum, dann gilt für $z \in L, A \subseteq L$ und $\alpha > 0$,

(i) $\bigvee A + z = \bigvee (A + z)$,

(ii) $\bigwedge A = -\bigvee(-A)$,

(iii) $\alpha \bigvee A = \bigvee(\alpha A)$.

Dabei existieren die linken Seiten genau dann, wenn es die rechten tun.

Beweis ad(i): Wenn $\bigvee A$ existiert, so folgt aus $\bigvee A \geq x$ für alle $x \in A$, wegen **(OV1)**, dass $\bigvee A + z \geq x + z$ für alle $x \in A$. Es ist also $\bigvee A + z$ eine obere Schranke von $A + z$.
Sollte nun s auch eine obere Schranke von $A + z$ sein, also $s \geq x + z$ für alle $x \in A$, so folgt durch Subtraktion von z, dass $s - z \geq x$ und weiters $s - z \geq x$ für alle $x \in A$ und damit $s - z \geq \bigvee A$. Addieren von z liefert $s \geq \bigvee A + z$. Damit ist $\bigvee A + z$ die kleinste obere Schranke von $x + z, y + z$.
Wenn $\bigvee(A+z)$ existiert, so folgt aus dem Gezeigten insbesondere die Existenz von $\bigvee(A+z-z) = \bigvee A$.

ad(ii): Zum Beweis des zweiten Punktes sei bemerkt, dass $x \geq y$ genau dann gilt, wenn $-x \leq -y$. Dies sieht man, indem man nach **(OV1)** entweder $-x$ oder y zur Ungleichung $x - y \geq 0$ addiert.
Wenn $\bigvee(-A)$ existiert, ist deshalb $-x \leq \bigvee(-A)$ äquivalent zu $x \geq -\bigvee(-A)$ für alle $x \in A$, also $-\bigvee(-A)$ eine untere Schranke von A.
Für eine untere Schranke s von A ist $-s \geq -x$ für alle $x \in A$ und weiter $-s \geq \bigvee(-A)$. Die letzte Ungleichung ist wieder äquivalent zu $s \leq -\bigvee(-A)$, was $-\bigvee(-A)$ als größte untere Schranke identifiziert.
Existiert umgekehrt $\bigwedge A$, dann folgt aus $x \geq \bigwedge A$, dass $-x \leq -\bigwedge A$ für alle $x \in A$. Das heißt $-\bigwedge A$ ist eine obere Schranke von $-A$.
Für eine obere Schranke s von $-A$ folgt aus $-s \leq x$ für alle $x \in A$, dass $-s \leq \bigwedge A$, was äquivalent ist zu $s \geq -\bigwedge A$. Damit ist $-\bigwedge A$ die kleinste obere Schranke von $-A$. Multiplikation mit -1 liefert die Behauptung.

ad(iii): Wegen **(OV2)** ist $\alpha \bigvee A$ eine obere Schranke von αA.

Sei s eine obere Schranke von αA, also $s \geq \alpha x$ für alle $x \in A$. Mit $\alpha > 0$ ist auch $\frac{1}{\alpha} > 0$, und aus **(OV2)** folgt $x = \frac{1}{\alpha}\alpha x \leq \frac{1}{\alpha}s$ für alle $x \in A$ und weiters $\frac{1}{\alpha}s \geq \bigvee A$. Multiplikation mit α liefert $s \geq \alpha \bigvee A$. Damit ist $\alpha \bigvee A$ die kleinste obere Schranke von αA.
Existiert umgekehrt $\bigvee(\alpha A)$, so folgt aus dem Gezeigten die Existenz von $\frac{1}{\alpha}\bigvee(\frac{1}{\alpha}\alpha A) = \frac{1}{\alpha}\bigvee A$. ■

Ein Vektorverband ist auch distributiv, wie wir im Folgenden sehen werden.

Lemma 2.1.7 Sei L ein Vektorverband und $x, y \in L$, dann gilt $x \wedge y = (x + y) - (x \vee y)$.

Beweis Seien $x, y \in L$. Addiert man $x - y$ zur Gleichung aus 2.1.6(ii), so ergibt sich $x - y - (x \wedge y) = (-x \vee -y) + x - y$. Mit **(OV2)** folgt

$$\begin{aligned} x - y - (x \wedge y) &= (-x \vee -y) + x - y = ((-x + x) \vee (-y + x)) - y \\ &= ((y - y) \vee (x - y)) - y = (y \vee x) - 2y, \end{aligned}$$

woraus man $x \wedge y = x + y - (x \vee y)$ erhält. ■

Satz 2.1.8 Sei A Teilmenge eines Vektorverbandes L, deren Supremum in L existiert. Dann gilt für alle $y \in L$, folgende Distributivität:

$$\bigvee A \wedge y = \bigvee_{x \in A} (x \wedge y), \quad \bigwedge A \vee y = \bigwedge_{x \in A} (x \vee y).$$

Beweis Für beliebiges x aus A gilt $y \geq y \wedge x$. Wegen $\bigvee A \geq x \geq y \wedge x$ ist $\bigvee A \wedge y$ eine obere Schranke von $x \wedge y$ für alle $x \in A$.

Sei s eine obere Schranke von $\{x \wedge y : x \in A\}$. Wegen der Darstellung in Lemma 2.1.7 folgt $s \geq x \wedge y = x + y - (x \vee y)$ und nach Addition der Ungleichung mit $x \vee y$ gilt $s + (x \vee y) \geq x + y$. Wegen $x \leq \bigvee A$ ist $x \vee y \leq \bigvee A \vee y$ und mit **(OV2)** erhält man $s + (\bigvee A \vee y) \geq s + (x \vee y) \geq x + y$ für alle $x \in A$. Da die letzte Ungleichung für alle $x \in A$ gilt, wird auch das Supremum der rechten Seite majorisiert, also $s + (\bigvee A \vee y) \geq \bigvee_{x \in A}(x + y) = \bigvee A + y$. Die letzte Identität folgt aus Lemma 2.1.6(i). Schließlich erkennt man mit Lemma 2.1.7, dass $s \geq \bigvee A + y - \bigvee A \vee y = \bigvee A \wedge y$. Damit ist $\bigvee A \wedge y$ die kleinste obere Schranke. ■

Kapitel 3

Kegel

3.1 Kegel der positiven Elemente

Eine äquivalente Betrachtungsweise auf die Struktur geordneter Vektorräume bieten Kegel.

Definition 3.1.1 Eine nichtleere Teilmenge C eines Vektorraumes heißt Kegel (engl.: cone), wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

(K1) $C + C \subseteq C$,

(K2) $\alpha C \subseteq C$ für alle $\alpha \geq 0$

(K3) $C \cap (-C) = \{0\}$

Die Menge der positive Elemente eines geordneten Vektorraumes wird mit $L_+ := \{x \in L | x \geq 0\}$ bezeichnet.

Satz 3.1.2 Sei L ein Vektorraum, dann gelten folgende Aussagen.

(i) Ist $C \subseteq L$ ein Kegel auf einem Vektorraum L, und definiert man eine Relation $\leq'$ auf L durch $x \leq' y \Leftrightarrow y - x \in C$, so bildet $\langle L, \leq' \rangle$ einen geordneten Vektorraum.

(ii) Ist $\leq$ eine Halbordnung auf L, die $\langle L, \leq \rangle$ zu einem geordneten Vektorraum macht, dann ist L_+ ein Kegel.

(iii) Ist $\langle L, \leq \rangle$ ein geordneter Vektorraum, so ist die vom Kegel L_+ erzeugte Ordnung $\leq'$ gleich der ursprünglichen $\leq$.

(iv) Umgekehrt sind die positiven Elemente des geordneten Vektorraumes $\langle L, \leq' \rangle$, mit der von einem Kegel C bestimmten Halbordnung $\leq'$ gleich C selbst.

Beweis ad(i): Die Relation $\leq'$ ist reflexiv, denn $x - x = 0 \in C$.
Für die Antisymmetrie seien $x \leq' y$ und $y \leq' x$, also definitionsgemäß $x - y, y - x \in C$. Damit ist $x - y \in C \cap -C = \{0\}$ nach **(K3)**, also $x = y$.
Sind $x \leq' y \leq' z$, so liegen wegen **(K1)** mit $y - x, z - y$ auch $z - x = z - y + y - x$ in C. Das zeigt, dass $\leq'$ eine Halbordnung ist.

Die Verträglichkeitsbedingung **(OV1)** ist wegen $y + z - (x + z) = y - x \in C$ erfüllt. Für **(OV2)** sei $y - x \in C$ und $\alpha \geq 0$. Wegen **(K2)** liegt auch $\alpha y - \alpha x$ in C. Wir haben bewiesen, dass $\langle L, \leq' \rangle$ ein geordneter Vektorraum ist.

ad(ii): Seinen $x, y \in L_+$, also $0 \leq x, y$. Wegen der Verträglichkeitsbedingung **(OV1)** gilt dann $0 \leq y \leq x + y$, also $x + y \in L_+$.

Die Bedingung **(OV2)** sorgt dafür, dass für $x \in L_+$ und $\alpha \geq 0$ wegen $0 = 0 \cdot \alpha \leq \alpha x$ auch αx ein positiver Vektor ist.

Wenn $x, -x \in L_+$, das heißt $0 \leq x$ und $0 \leq -x$, dann folgt durch Addition von x zur letzteren Ungleichung, dass $x \leq 0$ und weiter aus der Antisymmetrie der Halbordnung **(HO2)**, dass $x = 0$.

ad(iii): Sei $\langle L, \leq \rangle$ ein geordneter Vektorraum und $\leq'$ die von L^+ erzeugte Ordnung, also $x \leq' y$ genau dann, wenn $y - x \in L_+$. Das heißt aber $y - x \geq 0$, was wegen **(OV1)** äquivalent zu $y \geq x$ ist.

ad(iv): Sei C ein Kegel im Vektorraum L, dann ist $\leq'$ eine Ordnung, die L zu einem geordneten Vektorraum macht. Für diesen gilt dann $L_+ = \{x \in L : x \geq' 0\} = \{x \in L : x - 0 \in C\} = C$. ■

Deshalb wird L_+ auch als positiver Kegel bezeichnet.

Beispiel 3.1.3

(i) In [4] Kapitel 2 wird gezeigt, dass die reellen Zahlen einen angeordneten Körper bilden. Die Eigenschaften **(P1)**,**(P2)** und **(P3)** aus Definition 2.2.1 bedeuten, dass $\mathbb{R}_+ = P \cup \{0\}$ ein Kegel ist. Also ist $\mathbb{R}$ wegen Satz 3.1.2 ein geordneter Vektorraum.

   Wegen **(P3)** ist $\mathbb{R}$ total geordnet, das heißt, dass je zwei Elemente miteinander vergleichbar sind. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x \leq y$, dann gilt $x \vee y = y$ und $x \wedge y = x$. Damit ist $\mathbb{R}$ ein Vektorverband.

(ii) Sei $\mathbb{R}^2$ versehen mit der koordinatenweisen Ordnung. Dann ist $\mathbb{R}^2_+$ gleich dem ersten Quadranten.

(iii) Sei $\mathbb{R}^2$ versehen mit der lexikographischen Ordnung. Dann bilden der erste und vierte Quadrant ohne der negativen $y-$Achse den Kegel der positiven Elemente.

(iv) In $\mathcal{M}$ und damit auch in $C(X)$ und $\mathcal{L}_p$ sind die positiven Elemente die Funktionen mit positivem Wertebereich.

3.2 Generierende Kegel

Definition 3.2.1 Wir sagen ein Kegel C eines Vektorraumes L ist generierend, wenn $L = C - C$ gilt.

Beispiel 3.2.2 Sei $L = \mathbb{R}^2$ und $C = \{(x_1, 0) : x_1 \geq 0\}$.
Aus $x_1, y_1 \geq 0$ folgt mit **(OV2)** $x_1 + y_1 \geq 0$ und somit $C + C \subseteq C$. Mit **(OV1)** folgt aus $x_1, \alpha \geq 0$, dass $\alpha x_1 \geq 0$, also $\lambda C \subseteq C$. Sei $x_1 \in C \cap -C$, dann gilt $x_1 \geq 0$ und $x_1 \leq 0$ und mit **(HO2)** $x_1 = 0$. Damit ist C ein Kegel.
Im Vektorraum L ist C nicht generierend, denn $C - C = \mathbb{R} \times \{0\} \neq \mathbb{R}^2$. Zudem wird Satz 3.2.8 zeigen, dass L keinen Vektorverband bildet.

Lemma 3.2.3 Ein Kegel C eines Vektorraumes L ist genau dann generierend, wenn für jedes $x \in L$ ein $y \in C$ existiert, sodass $x \leq y$, wobei $\leq$ die von C gemäß Satz 3.1.2 induzierte Halbordnung ist.

Beweis Falls C generierend ist, so kann man ein beliebiges $x \in L$ schreiben als $x = c_1 - c_2$ für Elemente $c_1, c_2 \in C$. Wählt man $y := c_1$, dann gilt $y - x = c_2 \in C$, also $x \leq y$.
Umgekehrt folgt aus $x \leq y$ mit $y \in C$, dass $x = y - (y - x)$ die Differenz zweier Vektoren aus C ist. ■

Definition 3.2.4 Sei $\langle L, \leq \rangle$ ein geordneter Vektorraum. Wir nennen ein Element e aus L_+ eine Ordnungseinheit, wenn es für jedes $x \in L$ eine reelle Zahl $\lambda > 0$ gibt mit $x \leq \lambda e$.

Bemerkung Aus Lemma 3.2.3 folgt, dass bei Existenz einer Ordnungseinheit der positive Kegel stets generierend ist.

Definition 3.2.5 Wenn L ein Vektorverband und $x \in L$ ist, dann definieren wir $x^+ := 0 \vee x, x^- := 0 \vee -x$ und $|x| := x \vee -x$.
Zwei Elemente x, y eines Vektorverbandes heißen disjunkt zueinander, wenn $|x| \wedge |y| = 0$.

Beispiel 3.2.6

(i) In den lexikographisch geordneten $\mathbb{R}^n$ sind zwei Elemente immer vergleichbar. Sind $x, y \in \mathbb{R}^n$ disjunkt, so gilt entweder $x = 0$ oder $y = 0$, vergleiche Beispiel 2.1.5(iii).

(ii) Sei $\mathcal{M}$ der Vektorverband aus Beispiel 2.1.5(iv) und f aus $\mathcal{M}$. Dann gilt $|f|(x) = (f \vee -f)(x) = \max\{f(x), -f(x)\} = |f(x)|$.

Zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{M}$ sind genau dann disjunkt, wenn $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ und $g^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ disjunkt sind. Denn gilt $|f| \wedge |g| = 0$, also $\min\{|f(x)|, |g(x)|\} = 0$ für alle $x \in \Omega$, so folgt $|f(x)| = 0$ oder $|g(x)| = 0$, beziehungsweise $f(x) = 0$ oder $g(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$. Daraus folgt $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap g^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \emptyset$.
Ist umgekehrt $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap g^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \emptyset$, also $f^{-1}(\{0\}) \cup g^{-1}(\{0\}) = \Omega$, so gilt für $x \in \Omega$, dass $f(x) = 0$ oder $g(x) = 0$ und damit $|f| \wedge |g| = 0$.

Lemma 3.2.7 In einem Vektorverband L gilt für $x, y, z \in L$,

(i) $x \wedge y = y - (y - x)^+ = x - (x - y)^+$,

(ii) $x \vee y = (y - x)^+ + x = (x - y)^+ + y$,

(iii) $x + y = x \vee y + x \wedge y$.

Beweis ad(i): Wegen Lemma 2.1.6(i) gilt,

$$x \wedge y = x \wedge (x - x + y) = x + (0 \wedge (y - x)).$$

Auf Grund von Lemma 2.1.6(ii) erhält man,

$$x + (0 \wedge (y - x)) = x - (0 \vee -(y - x)) = x - (0 \vee (x - y)) = x - (x - y)^+.$$

Die zweite Gleichheit und der Punkt (ii) folgen analog.

ad(iii): Aus den Punkten (i),(ii) dieses Lemmas folgt

$$x \vee y + x \wedge y = (y - x)^+ + x + y - (y - x)^+ = x + y.$$

■

Satz 3.2.8 Der positive Kegel eines Vektorverbandes ist immer generierend. Genauer kann man jedes $x \in L$ als $x = x^+ - x^-$ schreiben. Zudem ist diese Darstellung als Differenz zweier disjunkter, positiver Elemente eindeutig.

Beweis Mit Hilfe von 2.1.6(i) sieht man $x^+ - x = (0 \vee x) - x = -x \vee 0 = x^-$, also $x = x^+ - x^-$. Beide Komponenten x^+ und x^- sind offensichtlich aus L_+, wodurch sich jeder Vektor aus L als Differenz zweier positiver Elemente schreiben lässt, also gilt $L = L_+ - L_+$.

Wegen Lemma 2.1.6(ii) und **(OV1)** gilt

$$0 = -x^- + x^- = -(-x \vee 0) + x^- = (x \wedge 0) + x^- = ((x^+ - x^-) \wedge 0) + x^- = x^+ \wedge x^-.$$

Das heißt, x^+ ist disjunkt zu x^-.

Für die Eindeutigkeit sei $x = y - z$ für disjunkte $y, z \in L_+$. Wegen Lemma 3.2.7(i) gilt,

$$0 = y \wedge z = y - (y - z)^+ = y - x^+.$$

Analog erhält man $z = x^-$. ■

Lemma 3.2.9 In einem Vektorverband L gilt für $x, y \in L$:

(i) $|x| = x^+ + x^-$,

(ii) $|x| = |-x|$,

(iii) $|\lambda x| = |\lambda||x|$ für $\lambda \in \mathbb{R}$,

(iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$,

(v) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$,

(vi) Aus $|x| = 0$ folgt $x = 0$.

Beweis ad(i): Aus Lemma 2.1.6(i) folgt $|x| = x \vee -x = 2x \vee 0 - x$. Wegen Lemma 2.1.6(iii) und Satz 3.2.8 ist dies weiter gleich $2(x \vee 0) - x = 2x^+ - (x^+ - x^-) = x^+ + x^-$.

ad ii): Wegen **(L2)** gilt $|x| = x \vee -x = -x \vee x = |-x|$.

ad(iii): Aus Lemma 2.1.6 iii) folgt $|\lambda x| = \lambda x \vee -\lambda x = |\lambda|(\mathrm{sgn}(\lambda)x \vee -\mathrm{sgn}(\lambda)x) = |\lambda||x|$.

ad(iv): Wegen $\pm y \leq |y|$ und $\pm x \leq |x|$ gilt $\pm(x+y) \leq |x| + |y|$ und damit die Behauptung.

ad(v): Auf Grund von Lemma 3.2.7 i) und ii) gilt,

$$x \vee y - x \wedge y = (y-x)^+ + x - (x - (x-y)^+) = (y-x)^+ + (x-y)^+.$$

Wegen dem ersten Punkt dieses Lemmas folgt,

$$(y-x)^+ + (x-y)^+ = (y-x)^+ + (y-x)^- = |y-x|.$$

ad(vi): Wegen Punkt i) gilt $x^+ + x^- = |x| = 0$, also $x^+ = -x^-$. Mit $x^-, x^+ \geq 0$ gilt auch $-x^+, -x^- \leq 0$ und deshalb $0 \leq x^+ = -x^- \leq 0$, also $x^+ = x^- = 0$. Aus Satz 3.2.8 folgt dann $x = x^+ - x^- = 0$. ■

Definition 3.2.10 Seien $x, y \in L$ Elemente eines geordneter Vektorraumes mit $x \leq y$, dann versteht man unter einem Ordnungsintervall die Menge $[x,y] := \{z \in L : x \leq z \leq y\}$.

Satz 3.2.11 (Decomposition Theorem) Seien x, y Elemente aus dem positiven Kegel eines Vektorverbandes L. Dann gilt $[0, x+y] = [0,x] + [0,y]$.

Beweis Aus **(OV1)** folgt $[0,x]+[0,y] \subseteq [0,x+y]$. Denn wegen **(OV1)** gilt für $0 \leq x' \leq x, 0 \leq y' \leq y$, dass $0 \leq x' + y' \leq x + y' \leq x + y$, also $x' + y' \in [0, x+y]$.
Für die andere Inklusion setze bei gegebenem $0 \leq z \leq x+y$,

$$0 \leq x' := x \wedge z \leq x, \; y' := z - x'$$

Mit Lemma 2.1.6(i) folgt

$$y - y' = y - z + x' = (y-z) + (z \wedge x) = (y - z + z) \wedge (y - z + x) = y \wedge (x + y - z) \geq 0,$$

also $y' \leq y$. Wegen $z \geq z \wedge x = x'$ liefert **(OV1)** $y' = z - x' \geq 0$.
Insgesamt liegt $z = x' + y'$ in $[0,x] + [0,y]$. ■

3.3 Disjunkte Elemente

An dieser Stelle sei an Definition 3.2.5 erinnert, wo zwei Elemente x, y eines Vektorverbandes als disjunkt definiert wurden, wenn $|x| \wedge |y| = 0$.

Lemma 3.3.1 In einem Vektorverband L gilt für paarweise disjunkte Elemente $x_1, ..., x_n \in L, n \in \mathbb{N}$, dass

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \bigvee_{k=1}^{n} x_k. \tag{3.1}$$

Beweis Der Beweis erfolgt durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist die Aussage trivial. Angenommen (3.1) gilt für n, dann folgt $\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1} = \bigvee_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}$. Wegen

Lemma 3.2.7(iii) und, weil wegen Satz 2.1.8 $\bigvee_{k=1}^{n} x_k \wedge x_{n+1} = \bigvee_{k=1}^{n}(x_k \wedge x_{n+1}) = 0$, folgt $\bigvee_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1} = \bigvee_{k=1}^{n} x_k \vee x_{n+1} + \bigvee_{k=1}^{n} x_k \wedge x_{n+1} = \bigvee_{k=1}^{n} x_k \vee x_{n+1} = \bigvee_{k=1}^{n+1} x_k$. ■

Lemma 3.3.2 (Birkhoff) Sei L ein Vektorverband, dann gilt für alle $x, y, z \in L$,

$$|x \vee z - y \vee z| + |x \wedge z - y \wedge z| = |x - y|,$$

und somit gelten auch die Ungleichungen

$$|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|, |x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|.$$

Beweis Wegen Lemma 3.2.9(v) gilt

$$|x - y| = x \vee y - x \wedge y = (x \vee y + z) - (x \wedge y + z),$$

und aus Lemma 3.2.7(iii) folgt weiter

$$(x \vee y + z) - (x \wedge y + z) = (x \vee y \vee z + (x \vee y) \wedge z) - ((x \wedge y) \vee z + x \wedge y \wedge z).$$

Das ist aber wegen Lemma 3.2.9(v) zusammen mit Satz 2.1.8 schließlich gleich $|x \vee z - y \vee z| + |x \wedge z - y \wedge z|$.

■

Lemma 3.3.3 In einem Vektorverband L gilt für $x, y, z \in L_+$,

$$(x + y) \wedge z \leq (x \wedge z) + (y \wedge z).$$

Beweis Aus der Birkhoff'schen Ungleichung in Lemma 3.3.2 folgt,

$$0 \leq (x + y) \wedge z - (x \wedge z) = |(x + y) \wedge z - (x \wedge z)| \leq |(x + y) - x| = |y| = y.$$

Es gilt natürlich auch

$$0 \leq (x + y) \wedge z - (x \wedge z) \leq (x + y) \wedge z \leq z.$$

Zusammen ergibt sich $0 \leq (x + y) \wedge z - (x \wedge z) \leq y \wedge z$. Mit **(OV1)** folgt die Behauptung. ■

Lemma 3.3.4 Sei L ein Vektorverband. Dann gilt für disjunkte $x, y \in L$, dass $|x+y| = |x|+|y|$.

Beweis Seien $x, y \in L$, dann gilt wegen Lemma 3.3.3 und Satz 3.2.8

$$0 \leq (x^+ + y^+) \wedge (x^- + y^-) \leq x^+ \wedge x^- + x^+ \wedge y^- + y^+ \wedge x^- + y^+ \wedge y^- \leq 2(|x| \wedge |y|) = 0.$$

Auf Grund von Satz 3.2.8 gilt $(x + y)^+ = x^+ + y^+$ und $(x + y)^- = x^- + y^-$, denn $(x + y)^+ - (x + y)^- = x + y = (x^+ + y^+) - (x^- + y^-)$. Aus Lemma 3.2.9(i) folgt schließlich $|x + y| = (x + y)^+ + (x + y)^- = x^+ + x^- + y^+ + y^- = |x| + |y|$. ■

Lemma 3.3.5 In einem Vektorverband L gelten für $x, y, z \in L$ folgende Aussagen.

(i) Wenn x disjunkt zu y ist und $|z| \leq |x|$, dann ist z disjunkt zu y.

(ii) Wenn x disjunkt zu y ist und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist λx disjunkt zu y.

(iii) Wenn x_1 disjunkt zu y und x_2 disjunkt zu y ist, dann ist $x_1 + x_2$ disjunkt zu y.

Beweis ad(i): Wegen $0 \leq |z| \wedge |y| \leq |x| \wedge |y| = 0$ sind x und y disjunkt.

ad(ii): Wenn x disjunkt zu y ist, dann ist $(|\lambda| + 1)x$ disjunkt zu $(|\lambda| + 1)y$, denn wegen Lemma 2.1.6(iii) und Lemma 3.2.9(iii) gilt für $\alpha := |\lambda| + 1$,

$$|\alpha x| \wedge |\alpha y| = (|\alpha||x|) \wedge (|\alpha||y|) = |\alpha|(|x| \wedge |y|) = 0.$$

Wegen $|\lambda x| = |\lambda||x| \leq (|\lambda| + 1)|x|$ und dem ersten Punkt ist λx disjunkt zu $(|\lambda| + 1)y$. Mit dem selben Argument folgt aus $|y| \leq (|\lambda| + 1)|y|$, dass λx disjunkt zu y ist.

ad(iii): Wenn x_1 disjunkt zu y und x_2 disjunkt zu y ist, dann gilt wegen Lemma 3.2.9(iv) und Lemma 3.3.3,

$$|x_1 + x_2| \wedge |y| \leq (|x_1| + |x_2|) \wedge |y| \leq |x_1| \wedge |y| + |x_2| \wedge |y| = 0.$$

■

Definition 3.3.6 Für eine Teilmenge A eines Vektorverbandes L ist das disjunkte Komplement definiert duch $A^d := \{x \in L : \forall a \in A \text{ gilt } a \text{ disjunkt zu } x\}$.

Lemma 3.3.7 Für eine Teilmenge A eines Vektorverbandes L gelten folgende Aussagen.

(i) A^d ist ein linearer Teilraum.

(ii) A^d enthält mit eineml Element auch alle betragsmäßig kleineren.

(iii) Für jede Teilmenge $B \subseteq A^d$, deren Supremum in L existiert, enthält A^d dieses Supremum.

Beweis ad(i): Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x, y \in A^d$, das heißt x, y sind disjunkt zu allen z aus A. Dann liegt auf Grund von Lemma 3.3.5(ii),(iii) auch $x + \lambda y$ in A^d. Da $|0| \wedge |z| = 0$ für alle $z \in A$, gilt $0 \in A^d$. Damit ist A^d ein linearer Teilraum.

ad(ii): Seien $x \in A^d, y \in L$ mit $|y| \leq |x|$. Da $x \in A^d$ gilt $|x| \wedge |z| = 0$ für alle $z \in A$. Wegen $|y| \wedge |z| \leq |x| \wedge |z| = 0$ liegt y in A^d.

ad(iii): Sei $B \subseteq A^d$ mit $\bigvee B \in L$. Aus Lemma 2.1.6(ii) folgt mit **(L3)** $(-\bigvee B) \wedge |z| = \bigwedge(-B) \wedge |z| = \bigwedge((-B) \wedge |z|) \leq \bigwedge(|B| \wedge |z|) = 0$ für alle $z \in A$. Wegen Lemma 2.1.8 gilt $\bigvee B \wedge |z| = \bigvee(B \wedge |z|) = \bigvee(|B| \wedge |z|) = 0$ für alle $z \in A$. Zusammen ergibt sich $|\bigvee B| \wedge |z| = (\bigvee B \vee (-\bigvee B)) \wedge |z| = (\bigvee B \wedge |z|) \vee ((-\bigvee B) \wedge |z|) \leq 0$ für alle $z \in A$. Damit liegt $\bigvee B$ in A^d. ■

Lemma 3.3.8 Jede Menge E paarweise disjunkter Elemente ungleich 0 eines Vektorverbandes L ist linear unabhängig.

Beweis Wäre dem nicht so, dann könnte man ein $x \in E$, aus den anderen linear kombinieren, also

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n,$$

für $x_1, ..., x_n \in E$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$.
Da x zu allen x_i disjunkt ist, ist es das wegen Lemma 3.3.5 auch zu Linearkombinationen von diesen, inklusive sich selbst. Das heißt $x = x \wedge x = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Kapitel 4

Ansteigende Mengen

Definition 4.1.1

(i) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem Vektorverband heißt ansteigend, wenn $x_1 \leq x_2 \leq ...$ und analog absteigend, wenn $x_1 \geq x_2 \geq ...$ erfüllt ist.

(ii) Eine Teilmenge X eines Vektorverbandes wird als ansteigend bezeichnet, wenn es für alle $x, y \in X$ ein $z \in X$ gibt, sodass $x, y \leq z$.

Bemerkung Die Bildmengen ansteigender Folgen sind spezielle ansteigende Mengen.

Lemma 4.1.2 Sei L ein Vektorverband. Dann gilt für $A, B \subseteq L$, in dem Sinne, dass die rechte Seite existiert, wenn es die linke tut,

$$\bigvee A + \bigvee B = \bigvee (A + B).$$

Beweis Es gilt $\bigvee A \geq x$ für alle $x \in A$ und $\bigvee B \geq y$ für alle $y \in B$. Aus **(OV1)** folgt $\bigvee A + \bigvee B \geq \bigvee A + y \geq x + y$ für alle $x \in A, y \in B$. Somit ist $\bigvee A + \bigvee B$ eine obere Schranke für $A + B$.
Sei s eine obere Schranke von $A + B$, das heißt $s \geq x + y$ für alle $x \in A, y \in B$. Mit **(OV1)** erhält man $s - x \geq y$ für alle $y \in B$, also auch $s - x \geq \bigvee B$. Durch Addition der Ungleichung mit $x - \bigvee B$ erhält man $s - \bigvee B \geq x$ für alle $x \in A$ und somit auch $s - \bigvee B \geq \bigvee A$. Dies ist wieder wegen **(OV1)** äquivalent zu $s \geq \bigvee A + \bigvee B$. Das heißt $\bigvee A + \bigvee B$ ist die kleinste obere Schranke von $A + B$. ■

Lemma 4.1.3 Sei L ein Vektorverband und X, Y ansteigende Mengen in L mit $\bigvee X = x$ und $\bigvee Y = y$ für $x, y \in L$.

(i) Für $\lambda \geq 0$ gilt $\bigvee \lambda X = \lambda x$, wobei λX ebenfalls ansteigend ist.

(ii) Es gilt $\bigvee (X + Y) = x + y$, wobei $X + Y$ ebenfalls ansteigend ist.

Beweis ad(i): Seien $\lambda x, \lambda y \in \lambda X$. Da X eine ansteigende Menge ist, gibt es ein $z \in X$ mit $x, y \leq z$. Wegen **(OV2)** werden dann auch $\lambda x, \lambda y$ von λz majorisiert. Damit ist λX eine ansteigende Menge. Auf Grund von Lemma 2.1.6(iii) gilt $\bigvee(\lambda X) = \lambda \bigvee X = \lambda x$.

ad(ii): Seien $x_1 + y_1, x_2 + y_2 \in X + Y$. Da X, Y ansteigende Mengen sind, gibt es $x_3 \in X$ mit $x_1, x_2 \leq x_3$ und $y_3 \in Y$ mit $y_1, y_2 \leq y_3$. Aus **(OV1)** folgt $x_3 + y_3 \geq x_1 + y_3 \geq x_1 + y_1$ und $x_3 + y_3 \geq x_2 + y_3 \geq x_2 + y_2$. Damit ist $X + Y$ wieder eine ansteigende Menge. Nach Lemma 4.1.2 gilt $\bigvee(X + Y) = \bigvee X + \bigvee Y = x + y$. ■

Die Vektorverband-Axiome sichern nur die Existenz von Suprema beziehungsweise Infima endlicher Mengen. Um die Suprema von ansteigenden Mengen, sogenannten Ordnungs-Grenzwerten zu untersuchen, werden zusätzliche Axiome eingeführt.

Definition 4.1.4 Ein Vektorverband L heißt archimedisch, wenn aus $y \in L, x \in L_+$ und $ny \leq x$ für alle $n = 1, 2, ...$ folgt, dass $y \leq 0$.

Lemma 4.1.5 Sei L ein Vektorverband, der das archimedische Axiom erfüllt. Dann hat für jedes positive x die Menge $\{n^{-1}x : n \in \mathbb{N}\}$ Infimum 0.

Beweis Sei $x \in L_+$. Aus $0 \leq x$ folgt mit **(OV2)** dass $0 \leq n^{-1}x$. Also ist 0 eine untere Schranke. Sei s eine untere Schranke von $\{n^{-1}x : n \in \mathbb{N}\}$, also $s \leq n^{-1}x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit **(OV2)** schließt man $sn \leq x$ und aus dem archimedischen Axiom folgt $s \leq 0$. Damit gilt $0 = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}x$. ■

Beispiel 4.1.6 Betrachte den $\mathbb{R}^n$ versehen mit der lexikographischen Ordnung. Wenn wir für $x = (1, 0, ...), y = (0, 1, ...)$ wählen, so gilt $ky \leq x, k \in \mathbb{N}$, aber $y > 0$. Somit ist $\mathbb{R}^n$, versehen mit der lexikographischen Ordnung, nicht archimedisch.

Definition 4.1.7 Ein Vektorverband L wird Dedekind-vollständig genannt, wenn jede von oben beschränkte Teilmenge ein Supremum respektive jede von unten beschränkte Teilmenge ein Infimum besitzt.

Lemma 4.1.8 In einem Vektorverband L sind äquivalent:

(i) L ist Dedekind-vollständig.

(ii) Für jede ansteigende Menge $X \subseteq L_+$, die nach oben beschränkt ist, existiert ein $x \in L$, sodass $x = \bigvee X$.

Beweis Es ist nur zu beweisen, dass die zweite Aussage die Dedekind-Vollständigkeit impliziert. Dazu wird gezeigt, dass es zu jeder Teilmenge A von L eine ansteigende Menge X gibt, die A enthält und die selben oberen Schranken besitzt.

Für eine beliebige Teilmenge $A \subseteq L$ definieren wir

$$X := \{\bigvee \tilde{A} : \tilde{A} \text{ ist endliche Teilmenge von } A\}.$$

Diese Menge enthält A und hat offenbar die selben oberen Schranken.
X ist dabei ansteigend, da für endliche $\tilde{A}, \tilde{B} \subseteq A$ sicherlich $\bigvee \tilde{A}, \bigvee \tilde{B} \leq \bigvee(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \in X$. ■

Kapitel 5

Spezielle Teilräume

5.1 Ideale

Definition 5.1.1 Ein linearer Teilraum I eines geordneten Vektorraumes heißt Ideal, wenn er mit einem Element auch alle betragsmäßig kleineren enthält, genauer wenn aus $x \in I, |y| \leq |x|$ folgt, dass $y \in I$.

Beispiel 5.1.2 Sei $\mathcal{L}_p$ der Vektorverband aus Beispiel 2.1.5(v). Wir definieren eine Äquivalenzrelation $f = g$ μ-fü, wenn es eine Nullmenge N gibt, sodass $f|_{\Omega \setminus N} = g|_{\Omega \setminus N}$.
Die Äquivalenzklasse $N(\mu) := \{f \in \mathcal{L}_p : f = 0 \ \mu \text{ fü}\}$ ist bekanntermaßen ein linearer Teilraum von $\mathcal{L}_p$.

Seien $f \in N(\mu), g \in \mathcal{L}_p$ mit $|g| \leq |f|$. Das heißt es gibt eine Nullmenge N mit $f|_{\Omega \setminus N} = 0$ und $|g(x)| \leq |f(x)|$ für alle $x \in \Omega$. Dann gilt für $x \in \Omega \setminus N$, dass $|g(x)| \leq |f(x)| = 0$ und weiters $g|_{\Omega \setminus N} = 0$, also $g \in N(\mu)$. Damit ist $N(\mu)$ ein Ideal.

Lemma 5.1.3 Sei L ein Vektorverband und I ein Ideal darin. Dann ist I ein Untervektorverband von L.

Beweis Seien $x, y \in I$. Da I ein linearer Teilraum ist, genügt es wegen Lemma 2.1.6(ii) zu zeigen, dass $x \vee y \in I$. Dazu addiert man die Formeln aus Lemma 3.2.9(v) und Lemma 3.2.7(iii) und erhält

$$x + y + |x - y| = x \vee y + x \wedge y + x \vee y - x \wedge y = 2(x \vee y).$$

Da mit z auch $|z|$ in I liegt und I einen linearer Teilraum bildet, ist auch $x \vee y$ ein Element von I. Damit ist I ein Untervektorverband. ∎

Definition 5.1.4 Da sowohl $\{0\}$ als auch L Ideale sind und der Schnitt von Idealen wieder ein Ideal bildet, kann man das von einer Teilmenge A erzeugte Ideal $I(A)$, als den Durchschnitt über alle Ideale, die A enthalten, definieren. Das von einem $e \in L$ erzeugte Ideal wird mit $I(e)$ bezeichet.

Lemma 5.1.5 Für das von einer Teilmenge A eines Vektorverbandes L erzeugte Ideal gilt,

(i) $I(A) = \bigcup\{n[-y, y] : n \in \mathbb{N}, y = |a_1| \vee ... \vee |a_r|, a_1, ..., a_r \in A\}$,

(ii) $I(e) = \bigcup\{n[-e, e] : n \in \mathbb{N}\}$ für $e \geq 0$.

Beweis Wir wollen zuerst zeigen, dass $I := \bigcup\{n[-y, y] : n \in \mathbb{N}, y = |a_1| \vee ... \vee |a_r|, a_1, ..., a_r \in A\}$ ein Ideal ist. Dazu seien $x, y \in I$, also existieren $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_1, ..., a_r, a'_1, ..., a'_s \in A$, sodass $|x| \leq n(|a_1| \vee ... \vee |a_r|)$ und $|y| \leq m(|a'_1| \vee ... \vee |a'_s|)$. Wegen Lemma 3.2.9(iv) gilt,

$$\begin{aligned}|x + y| &\leq |x| + |y| \leq n(|a_1| \vee ... \vee |a_r|) + m(|a'_1| \vee ... \vee |a'_s|)\\ &\leq n(|a_1| \vee ... \vee |a_r| \vee |a'_1| \vee ... \vee |a'_s|) + m(|a_1| \vee ... \vee |a_r| \vee |a'_1| \vee ... \vee |a'_s|)\\ &= (n + m)(|a_1| \vee ... \vee |a_r| \vee |a'_1| \vee ... \vee |a'_s|).\end{aligned}$$

Damit liegt $x + y$ wieder in I.

Ist λ eine reelle Zahl, so folgt wegen Lemma 3.2.9(iii) aus

$$|\lambda x| = |\lambda||x| \leq |\lambda| n \bigvee_{i=1}^{r} |a_i| \leq N \bigvee_{i=1}^{r} |a_i|,$$

mit einer natürlichen Zahl $N \geq |\lambda| n$, dass $\lambda x \in I$. Also ist I ein linearer Teilraum.
Als Vereinigung symmetrischer Intervalle ist I dann auch ein Ideal.

Sei J ein weiteres Ideal das A enthält. Dann enthält J auch alle $|a|$ für $a \in A$. Für $x \in I$ gilt mit Lemma 3.2.7(iii), dass $|x| \leq n(|a_1| \vee ... \vee |a_r|) \leq (n|a_1| + ... + n|a_r|)$. Damit ist x aber auch ein Element von J, weil J ein Ideal ist, also $I \subseteq J$. Das heißt, I ist das kleinste Ideal, das A enthält. ■

Bemerkung Mit dem letzten Lemma wird klar, dass $e \in L$ genau dann eine Ordnungseinheit ist, wenn $I(e) = L$, vergleiche Definition 3.2.4.

5.2 Bänder

Definition 5.2.1 Sei L ein Vektorverband. Ein Ideal B heißt Band, wenn es für jede Teilmenge $A \subseteq B$, deren Supremum in L existiert, dieses Supremum enthält.

Die Menge aller Bänder enthält sowohl $\{0\}$ als auch L, und ist unter Durchschnittbildung abgeschlossen. Somit existiert immer ein kleinstes Band, das eine vorgegebene Teilmenge $A \subseteq L$ enthält, welches mit $B(A)$ bezeichnet wird. Wir schreiben für $B(\{e\})$ auch $B(e)$.

Lemma 5.2.2 Sei L ein Vektorverband und I ein Ideal darin.

(i) Dann ist der positive Kegel des von I erzeugten Bandes $B(I)$ gleich der Menge von Suprema gewisser ansteigender Mengen in I, genauer

$$B(I)_+ = \{x \in L_+ : x = \bigvee I \cap [0, x]\}. \tag{5.1}$$

(ii) Wird I von einem $e \in L_+$ erzeugt, das heißt $I = I(e)$, so gilt

$$B(I)_+ = \{x \in L_+ : x = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} x \wedge ne\}.$$

Beweis ad(i): Wir definieren

$$B := \{x \in L_+ : x = \bigvee X, X \text{ ansteigende Teilmenge von } I_+\}$$

und damit $\hat{I} := B - B$.

(1) B besteht aus allen $x \in L_+$ mit $x = \bigvee I \cap [0, x]$.

Da I unter $\vee$ abgeschlossen ist, ist $I \cap [0, x]$ eine ansteigende Menge in I_+. Somit liegt jedes $x \in L_+$ mit $x = \bigvee I \cap [0, x]$ in B. Für die andere Inklusion sei $x \in B$, also $x = \bigvee X$ für eine ansteigende Menge $X \subseteq I_+$. Wegen $X \subseteq I \cap [0, x]$ sind alle oberen Schranken von $I \cap [0, x]$ auch obere Schranken von X. Die kleinste obere Schranke x von X ist auch obere Schranke von $I \cap [0, x]$ und damit die kleinste obere Schranke, also $x = \bigvee X = \bigvee I \cap [0, x]$.

(2) Aus Lemma 4.1.3 folgt $B + B \subseteq B$ und $\lambda B \subseteq B$ für $\lambda \geq 0$.

(3) Mit $0 \leq x \in B$ sind auch alle kleineren $0 \leq y \leq x$ in B enthalten. Dazu sei $X \subseteq I_+$ eine ansteigende Menge mit Supremum x. Aus Lemma 2.1.8 folgt, dass $\bigvee(X \wedge y) = \bigvee X \wedge y = x \wedge y = y$. Also ist $X \wedge y$ eine ansteigende Menge in I_+ mit Supremum y und daher $y \in B$.

Damit folgt auch $\hat{I}_+ = B$, da für $x - y \in \hat{I} = B - B$ mit $x - y \geq 0$ wegen dem eben gezeigten angewandt auf $0 \leq x - y \leq x$ immer $x - y \in B$ folgt.

(4) Wegen $I \subseteq \hat{I} = B - B \subseteq B(I)$ bleibt nur zu zeigen, dass $\hat{I}$ ein Band ist.

- Linearer Teilraum:
  Wegen (2) ist $\hat{I}$ unter $+$ abgeschlossen. Sei $x \in \hat{I}$, also $x = x^+ - x^-$ mit $x^+, x^- \in \hat{I}_+ = B$. Ist $\lambda \geq 0$, so gilt wegen (2), dass $\lambda x \in \hat{I}$. Für $\lambda \leq 0$ gilt mit $\beta = -\lambda$ und (2), dass $\lambda x = \lambda x_+ - \lambda x^- = \beta x^- - \beta x^+ \in B - B = \hat{I}$.
- Ideal:
  Sei $y \in \hat{I}$, also $y = b - a$ für $a, b \in B$ und $x \in L$ mit $|x| \leq |y|$. Wegen Lemma 3.2.9(v) und Lemma 3.2.7(iii) gilt

  $$|y| = |b - a| = b \vee a - b \wedge a \leq b \vee a + b \wedge a = b + a.$$

  Wegen (2) ist $b + a \in B$ und wegen (3) gilt $|y| \in B$.
  Aus Lemma 3.2.9(i) folgt $x^+ + x^- = |x| \leq |y|$, und damit gilt $x^+, x^- \leq |y|$. Wegen (3) folgt $x^+, x^- \in B$. Da $\hat{I}$ ein linearer Teilraum ist, gilt $x = x^+ - x^- \in \hat{I}$.
- beliebige Suprema:
  Sei $A \subseteq B$ eine Teilmenge deren Supremum $a = \bigvee A$ in L existiert. Wegen dem Beweis von Lemma 4.1.8 kann A als ansteigend angenommen werden. Dann gilt

  $$\begin{aligned} a = \bigvee A &= \bigvee_{x \in A} \bigvee \{y : y \in I, 0 \leq y \leq x\} \\ &= \bigvee \{y : y \in I, 0 \leq y \leq x \text{ für ein } x \in A\}. \end{aligned}$$

Seien $y_1, y_2 \in Y := \{y : y \in I, 0 \leq y \leq x$ für ein $x \in A\}$, dann gibt es $x_1, x_2 \in A$ mit $y_1 \in [0, x_1]$ und $y_2 \in [0, x_2]$. Da A ansteigend ist, existiert ein $x_3 \in A$ mit $x_1, x_2 \leq x_3$. Für $y_3 := (y_1 \vee y_2) \wedge x_3$ folgt aus $y_1, y_2 \leq y_1 \vee y_2$ und $y_{1,2} \leq x_3$, dass $y_1, y_2 \leq y_3$.
Da I ein Ideal ist, folgt $y_3 \in I$ aus $y_3 \leq y_1 \vee y_2 \in I$. Zusammen mit $y_3 \leq x_3 \in A$ ergibt sich $y_3 \in Y$.
Damit ist Y ansteigend und a liegt in B.

ad(ii): Wir definieren für $x \in L_+$,

$$W := I(e) \cap [0, x], \; W' := \{x \wedge ne : n \in \mathbb{N}\}.$$

Wegen $W \supseteq W'$ ist jede obere Schranke von W auch eine von W'.
Sei umgekehrt s eine obere Schranke von W' also $s \geq ne \wedge x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen Lemma 5.1.5 gilt $W = \bigcup_{k \in \mathbb{N}}([-ke, ke] \cap [0, x]) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}}[0, ke \wedge x]$. Damit ist jede obere Schranke von W' auch eine von W.
Da die oberen Schranken von W und W' übereinstimmen, tun dies auch deren Suprema, falls diese existieren. ∎

Definition 5.2.3 Gilt für ein Band B in einem Vektorverband L, dass $L = B \oplus B^d$, so wird dieses Projektions-Band genannt.

Bemerkung In Lemma 3.3.7 wurde gezeigt, dass A^d, für eine Teilmenge A eines Vektorverbandes L, ein Band bildet.

Lemma 5.2.4 Sei L ein Vektorverband und $B \subseteq L$ mit $B \oplus B^d = L$. Dann existiert eine lineare Projektion $P : L \to B$ mit $0 \leq P(x) \leq x$ und $0 \leq (I - P)(x) \leq x$ für alle $x \in L_+$.

Beweis Wegen $L = B \oplus B^d$ gibt es lineare Projektionen P und Q mit $P + Q = I$. Wegen Lemma 3.3.4 gilt für $x \in L_+$,

$$P(x) + Q(x) = x = |x| = |P(x) + Q(x)| = |P(x)| + |Q(x)|.$$

Da die Darstellung in einer direkten Summe eindeutig ist, gelten $0 \leq |P(x)| = P(x)$ und $0 \leq |Q(x)| = Q(x)$. Aus $x = P(x) + Q(x)$ folgt $0 \leq P(x) \leq x$ und $0 \leq (I - P)(x) = Q(x) \leq x$. ∎

Satz 5.2.5 Sei L ein Vektorverband. Ein Band B ist genau dann ein Projektions-Band, wenn für alle positiven x das Supremum $x_B = \bigvee [0, x] \cap B$ existiert.
In diesem Fall gilt für die zugehörige Band-Projektion $P(x) = x_B$ für $x \in L_+$.

Beweis Ist B ein Projektions-Band, so gilt $L = B \oplus B^d$, also kann man jedes $x \in L_+$ nach Lemma 5.2.4 schreiben als $x = P(x) + Q(x)$ mit $0 \leq P(x), Q(x) \leq x$ für lineare Projektionen $P : L \to B, Q : L \to B^d$. Da B^d, wegen Lemma 3.3.7 ein Ideal ist, gilt $[0, Q(x)] \subseteq B^d$, also $[0, Q(x)] \cap B = \emptyset$. Da B als Band auch ein Ideal ist, gilt $[0, P(x)] \subseteq B$. Zusammen mit Satz 3.2.11, angewandt auf den Untervektorverband B, folgt $[0, x] \cap B = [0, P(x)] \cap B + [0, Q(x)] \cap B = [0, P(x)] \cap B = [0, P(x)]$. Daraus folgt $x_B = P(x)$.

Für die andere Implikation sei B ein Band, sodass x_B für alle positiven x existiert. Wir definieren $z := x - x_B \geq 0$ und zeigen, dass $z \in B^d$.

Angenommen dies trifft nicht zu, dann gilt für ein $y \in B$, dass $0 < p := z \wedge y \leq y$ und damit $p \in B$, sowie $x_B + p \in B$. Aus $p \leq z$ folgt $x_B + p \leq x_B + z = x$, also $x_B + p \in B \cap [0, x]$. Aber dann folgt aus $x_B + p \leq \sup(B \cap [0, x]) = x_B$, dass $p \leq 0$ im Widerspruch zu $p > 0$. Damit wurde gezeigt, dass $L_+ = B_+ \oplus V$ mit $V = \{z = x - x_B : x \in L_+\} \subseteq B_+^d$.
Schließlich ist noch zu zeigen, dass $V \supseteq B_+^d$. Die andere Inklusion wurde bereits bewiesen. Für $x \in B_+^d$ gibt es $x_B \in B$ und $z \in V \subseteq B_+^d$ sodass $x = x_B + z$. Aus $z \geq 0$ folgt $x_B = x_B \wedge (x_B + z) = x_B \wedge x = 0$. Damit liegt $x = z$ in V, also $B_+^d \subseteq V$ und $L_+ = B_+ \oplus B_+^d$.
Wegen Satz 3.2.8 sind L, B und B^d generierend. Damit folgt $L = B \oplus B^d$. ■

Satz 5.2.6 Sei L ein Vektorverband und $e \in L_+$. Das von e erzeugte Band $B(e)$ ist genau dann ein Projektionsband, wenn für jedes positive x das Supremum $x_e = \bigvee\{x \wedge ne : n \in \mathbb{N}\}$ in $B(e)$ existiert.
In diesem Fall gilt für die zugehörige Band-Projektion $P(x) = x_e$ für $x \in L_+$.

Beweis Für $x \in L_+$ definieren wir,

$$W = B(e) \cap [0, x],\ W' = \{x \wedge ne : n \in \mathbb{N}\}.$$

Wie im Beweis von Lemma 5.1.5(ii) sieht man, dass W und W' die selben oberen Schranken haben und Satz 5.2.5 liefert nun die Behauptung.

In diesem Fall folgt aus dem Bewiesenen und Lemma 5.2.5, dass $P(x) = x_e$ für $x \in L_+$. ■

Definition 5.2.7 Ein geordneter Vektorraum L erfüllt die Principal Projection Property (PPP), wenn jedes von einem Element erzeugte Band ein Projektions-Band ist.

5.3 Operatoren

Definition 5.3.1 Seien L, M zwei Vektorräume und $T : L \to M$ eine Abbildung. Dann heißt T ein linearer Operator, wenn für $x, y \in L$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$.

(P) Ein Operator T wird positiv genannt, wenn $T(x) \in M_+$ für $x \in L_+$.

(VH) Ein Operator T ist ein Verbands-Homomorphismus, wenn er endliche Suprema/ Infima erhält, das heißt $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ und $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$.

Lemma 5.3.2 Sind L, M Vektorverbände und $T : L \to M$ ein linearer Operator, dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) T ist positiv.

(ii) T ist monoton, also $T(x) \leq T(y)$ für $x, y \in L$ mit $0 \leq x \leq y$.

Beweis Sei T positiv und $x, y \in L$ mit $0 \leq x \leq y$. Mit **(OV2)** ist $0 \leq y - x$ und da T positiv ist, gilt $0 \leq T(y - x) = T(y) - T(x)$. Der letzten Ungleichung entnimmt man mit **(OV2)**, dass $T(x) \leq T(y)$, also ist T monoton.

Ist andererseits T monoton und $x \in L_+$, dann folgt aus $0 \leq x$, dass $0 = T(0) \leq T(x)$. Das heißt T ist auch positiv. ■

Lemma 5.3.3 Sind L, M Vektorverbände und $T : L \to M$ ein Verbands-Homomorphismus, dann ist T auch positiv.

Beweis Sei $x \in L_+$, also $0 \leq x$ oder $x \wedge 0 = 0$. Wegen **(VH)** und der Linearität von T gilt $T(x) \wedge 0 = T(x) \wedge T(0) = T(x \wedge 0) = T(0) = 0$, also $0 \leq T(x)$. ■

Lemma 5.3.4 Sind L, M Vektorverbände und $T : L \to M$ ein positiver Operator, so sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) T ist ein Verbands-Homomorphismus.

(ii) $T(x^+) \wedge T(x^-) = 0$ für alle $x \in L$.

Beweis Aus der Verbands-Homomorphie von T folgt $T(x^+) \wedge T(x^-) = T(x^+ \wedge x^-) = 0$, da nach Satz 3.2.8 $x^+ \wedge x^- = 0$.

Gilt umgekehrt (ii), so lässt sich, wegen der Linearität von T, das Bild eines $x \in L$ schreiben, als $T(x) = T(x^+ - x^-) = T(x^+) - T(x^-)$, mit $T(x^+) \wedge T(x^-) = 0$. Zudem gilt $T(x^+), T(x^-) \geq 0$, weil T positiv ist. Da diese Darstellung von $T(x) \in M$ als Differenz zweier positiver, disjunkter Elemente eindeutig ist (Satz 3.2.8), gilt $T(x^+) = (Tx)^+$ und $T(x^-) = (Tx)^-$. Daraus folgt mit Lemma 3.2.7(ii) für $x, y \in L$,

$$T(x \vee y) = T(x + (y - x)^+) = T(x) + T(y - x)^+ = T(x) + (T(y - x))^+ = T(x) \vee T(y).$$

Entsprechendes für $\wedge$ folgt analog aus Lemma 3.2.7(i). ■

Lemma 5.3.5 Seien L, M Vektorverbände, so gelten für einen Verbands-Homomorphismus $T : L \to M$ folgende Aussagen.

(i) Für $x \in L$ gilt $T(x^+) = T(x)^+, T(x^-) = T(x)^-, T(|x|) = |T(x)|$.

(ii) Der Kern $T^{-1}(0)$ bildet ein Ideal.

Beweis ad(i): Für ein $x \in L$ gilt wegen **(VH)**,

$$\begin{aligned}
T(x^+) &= T(0 \vee x) = T(x) \vee 0 = T(x)^+, \\
T(x^-) &= T(0 \wedge x) = T(x) \wedge 0 = T(x)^-, \\
T(|x|) &= T(x \vee -x) = T(x) \vee -T(x) = |T(x)|.
\end{aligned}$$

ad(ii): Wegen der Linearität von T, ist sein Kern ein linearer Teilraum.
Aus $x \in T^{-1}(0)$ und $|y| \leq |x|$ mit $y \in L$ folgt wegen $0 \leq T(|y|) \leq T(|x|) = |T(x)| = 0$, dass $|y| \in T^{-1}(0)$.
Auf Grund von $0 = T(|y|) = |T(y)|$ liegt y in $T^{-1}(0)$. Damit ist der Kern von T ein Ideal. ■

Definition 5.3.6 Sei L ein Vektorverband, so schreiben wir L^* für den Raum aller linearen Funktionale auf L. Ein $f \in L^*$ wird als ordnungsbeschränkt bezeichnet, wenn für alle $x, y \in L$ reelle Zahlen α, β existieren, sodass $f([x, y]) \subseteq [\alpha, \beta]$.

Mit L^o bezeichnen wir die Menge aller ordnungsbeschränkten Funktionen aus L^*. Für $f, g \in L^o$ schreiben wir $f \leq g$, wenn $f(z) \leq g(z)$ ist für alle $z \in L_+$.

Lemma 5.3.7 Ist L ein Vektorverband, so ist L^o ein geordneter Vektorraum. Insbesondere gilt $L^o_+ = \{f \in L^* : f \text{ positiv}\}$.

Beweis Seien $f, g \in L^o$ und $x, y \in L$. Dann gilt $f([x, y]) \subseteq [\alpha_f, \beta_f]$ und $g([x, y]) \subseteq [\alpha_g, \beta_g]$ für $\alpha_f, \alpha_g, \beta_f, \beta_g \in \mathbb{R}$. Für $\gamma \in (f+g)([x, y])$ gilt $\gamma = (f+g)(z) = f(z)+g(z)$ für ein $z \in [x, y]$.Wegen $\alpha_f + \alpha_g \leq f(z) + g(z) \leq \beta_f + \beta_g$ gilt $\gamma \in [\alpha_f + \alpha_g, \beta_f + \beta_g]$. Damit ist $f + g \in L^o$.
Sei $f \in L^o$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x, y \in L$. Dann gibt es $\alpha_f, \beta_f \in \mathbb{R}$, sodass $f([x, y]) \subseteq [\alpha_f, \beta_f]$. Für $\gamma \in (\lambda f)([x, y])$ gilt $\gamma = (\lambda f)(z) = \lambda f(z)$ für ein $z \in [x, y]$. Für $\lambda \geq 0$ gilt, wegen $\lambda\alpha_f \leq \lambda f(z) \leq \lambda\beta_f$, dass $\gamma \in [\lambda\alpha_f, \lambda\beta_f]$. Für $\lambda \leq 0$ gilt $\lambda\beta_f \leq \lambda f(z) \leq \lambda\alpha_f$ und $\gamma \in [\lambda\beta_f, \lambda\alpha_f]$. Damit ist $\lambda f \in L^o$ und L^o als linearer Teilraum von L^* ein Vektorraum.

Ein positives $f \in L^*$ ist auch ordnungsbeschränkt. Denn nach Lemma 5.3.2 ist f monoton und für $x, y \in L$ mit $x \leq y$ gilt $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$. Damit gilt $L^o_+ = \{f \in L^* : f \text{ positiv}\}$.

Seien $f, g \in L^o_+$ und $z \in L_+$, dann gilt $(f + g)(z) = f(z) + g(z) \geq 0$, also $f + g \in L^o_+$. Sei $f \in L^o_+, \alpha \geq 0$ und $z \in L_+$, dann gilt $\alpha f(z) \geq 0$, also $\alpha f \in L^o_+$. Sei $f \in L^o_+ \cap (-L^o_+)$ und $z \in L_+$, dann folgt aus $f(z) \leq 0$ und $f(z) \geq 0$, dass $f(z) = 0$. Ist nun $x \in L$, so gilt $f(x) = f(x^+) - f(x^-) = 0$.
Damit ist L^o_+ ein Kegel und L^o nach Satz 3.1.2 ein geordneter Vektorraum. ■

Lemma 5.3.8 Sei L ein Vektorverband und f ein positives lineares Funktional. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Jede additive, positiv homogene Abbildung $h : L_+ \to \mathbb{R}$ kann zu einem linearen Funktional $g : L \to \mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Dabei ist g eindeutig.

(ii) Jede additive, positiv homogene Abbildung $h : L_+ \to \mathbb{R}_+$, mit $h(z) \leq f(z)$ für alle $z \in L_+$, kann zu einem positiven, linearen Funktional $g : L \to \mathbb{R}$ fortgesetzt werden, sodass $g \leq f$.

Beweis ad(i): Für $x \in L$ und $x = y - z$ für $y, z \in L_+$ definieren wir durch $g(x) := h(y) - h(z)$ eine Fortsetzung von h auf ganz L. Wegen Satz 3.2.8 ist jedes $x \in L$ auf diese Weise darstellbar. Da h additiv ist, ist g unabhängig von der speziellen Darstellung von x als Differenz positiver Elemente. Denn für $x = y_1 - z_1 = y_2 - z_2 \in L$ mit $y_1, y_2, z_1, z_2 \in L_+$ gilt

$$h(y_1) + h(z_2) = h(y_1 + z_2) = h(y_2 + z_1) = h(y_2) + h(z_1).$$

Daraus folgt $h(y_1) - h(z_1) = h(y_2) - h(z_2)$.

Seien $x_1, x_2 \in L$ mit $x_1 = y_1 - z_1, x_2 = y_2 - z_2$ für $y_1, y_2, z_1, z_2 \in L_+$, dann folgt $x_1 + x_2 = (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)$ mit $y_1 + y_2, z_1 + z_2 \in L_+$ und aus der Additivität von h, dass

$$g(x_1) + g(x_2) = h(y_1) - h(z_1) + h(y_2) - h(z_2) = h(y_1 + y_2) - h(z_1 + z_2) = g(x_1 + x_2).$$

Damit ist g additiv.

Sei $x = y - z \in L$ mit $y, z \in L_+$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Angenommen $\alpha \geq 0$, dann gilt $\alpha x = \alpha y - \alpha z$ mit $\alpha y, \alpha z \in L_+$. Da h positiv homogen ist, gilt

$$g(\alpha x) = h(\alpha y) - h(\alpha z) = \alpha(h(y) - h(z)) = \alpha g(x).$$

Ist andererseits $\alpha \leq 0$, also $\alpha = -|\alpha|$, dann gilt wegen $\alpha x = |\alpha|z - |\alpha|y$ mit $|\alpha|z, |\alpha|y \in L_+$, dass

$$g(\alpha x) = h(|\alpha|z) - h(|\alpha|y) = |\alpha|(h(z) - h(y)) = -|\alpha|g(x) = \alpha g(x).$$

Das heißt, g ist homogen und damit ein lineares Funktional. Die Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt nun aus der Linearität.

ad(ii): Für $h : L_+ \to \mathbb{R}_+$ ist g positiv, denn $g(x) = h(x) \geq 0$ für $x \in L_+$.
$g \leq f$ folgt unmittelbar aus der Voraussetzung $h(z) \leq f(z), z \in L_+$ und aus $g|_{L_+} = h$. ■

Lemma 5.3.9 Ist L ein Vektorverband, so ist L^o ebenfalls ein Vektorverband. Seien $f, g \in L^o$, so gilt

$$\begin{aligned} f \vee g(x) &= \sup\{f(y) + g(z) : y, z \geq 0, x = y + z\}, \\ f \wedge g(x) &= \inf\{f(y) + g(z) : y, z \geq 0, x = y + z\}, \end{aligned}$$

für $x \in L_+$.

Beweis Seien $f, g \in L^o$, so definieren wir $h : Ł_+ \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := \sup\{f(y) + g(x - y) : y \in [0, x]\}$. Es gilt $h \geq f, g$.
Sei $x \in L^+$. Da $f - g$ ordnungsbeschränkt ist, gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sodass $\{f(y) + g(x - y) : y \in [0, x]\} = g(x) + \{(f - g)(y) : y \in [0, x]\} \subseteq g(x) + [\alpha, \beta]$. Da $\mathbb{R}$ ein vollständig angeordneter Körper ist existiert das Supremum $h(x)$.

Seien $x_1, x_2 \in L_+$, dann folgt aus Satz 3.2.11 und der Linearität von f und g

$$\begin{aligned}
h(x_1+x_2) &= \sup\{f(y)+g(x_1+x_2-y) : y \in [0,x_1+x_2] = [0,x_1]+[0,x_2]\} \\
&= \sup\{f(y_1+y_2)+g(x_1+x_2-y_1-y_2) : y_1 \in [0,x_1], y_2 \in [0,x_2]\} \\
&= \sup\{f(y_1)+f(y_2)+g(x_1-y_1)+g(x_2-y_2) : y_1 \in [0,x_1], y_2 \in [0,x_2]\} \\
&= \sup\{f(y_1)+g(x_1-y_1) : y_1 \in [0,x_1]\} + \sup\{f(y_2)-g(x_2-y_2) : y_2 \in [0,x_2]\} \\
&= h(x_1)+h(x_2).
\end{aligned}$$

Damit ist h additiv.
Seien $x \in L_+$ und $\alpha \geq 0$. Dann folgt aus Lemma 2.1.6(iii) und der Linearität von f und g

$$\begin{aligned}
h(\alpha x) &= \sup\{f(y)+g(\alpha x-y) : y \in [0,\alpha x]\} = \sup\{f(\alpha\tilde{y})+g(\alpha x-\alpha\tilde{y}) : \tilde{y} = \frac{1}{\alpha}y \in [0,x]\} \\
&= \sup\{\alpha(f(\tilde{y})+g(x-\tilde{y})) : \tilde{y} \in [0,x]\} = \alpha h(x).
\end{aligned}$$

Damit ist h positiv homogen.
Nach Lemma 5.3.8(i) kann h zu einer eindeutigen Linearform $\bar{h} : L \to \mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass $\bar{h}$ ordnungsbeschränkt ist. Für $x \in L_+$ gilt $f([0,x]) \subseteq [\alpha_f, \beta_f]$ und $g([0,x]) \subseteq [\alpha_g, \beta_g]$ mit $\alpha_f, \alpha_g, \beta_f, \beta_g \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $\bar{h}([0,x]) = h([0,x]) \subseteq [\alpha f+\alpha_g, \beta_f+\beta_g]$.
Seien $x, y \in L$ mit $x \leq y$, dann gilt $[x,y] = x+[0,y-x]$ und wegen der Additivität von $\bar{h}$ $\bar{h}([x,y]) = \bar{h}(x)+\bar{h}([0,y-x]) \subseteq \bar{h}(x)[\alpha,\beta] = [\bar{h}(x)+\alpha, \bar{h}(x)+\beta]$.
Damit liegt $\bar{h}$ in L^o.

Sei $s \in L^o$ eine obere Schranke von $\{f,g\}$, also $s(z) \geq f(z), g(z)$ für alle $z \in L_+$. Sei $x \in L_+$ beliebig, dann gilt für $y \in [0,x]$, wegen $s(y) \geq f(y)$ und $s(x-y) \geq g(x-y)$, dass $s(x) = s(y)+s(x-y) \geq f(y)+g(x-y)$. Daraus folgt $s \geq h$ und h ist die kleinste obere Schranke von f und g.

Die entsprechende Aussage für $\wedge$ folgt aus Lemma 2.1.6(ii) und L^o bildet einen Vektorverband. ∎

Lemma 5.3.10 Sei L ein Vektorverband und f ein positives lineares Funktional auf diesem, dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Das Funktional f ist ein Verbands-Homomorphismus von L nach $\mathbb{R}$ als Vektorverband aus Beispiel 3.1.3(i).

(ii) Das von f in L^o erzeugte Ideal $I(f)$ ist 1-dimensional.

Beweis (i)$\Rightarrow$(ii): Sei g aus dem von f erzeugten Ideal $I(f)$. Wegen Lemma 5.1.5 gilt $|g| \leq cf$ für ein $c \in \mathbb{R}_+$, also $|g|(z) \leq cf(z)$ für alle $z \in L_+$.
Wegen $g, -g \leq |g|$ gilt mit $g(z), -g(z) \leq |g|(z)$ auch $|g(z)| \leq |g|(z)$ für alle $z \in L_+$.
Mit $x \in f^{-1}(0)$ ist wegen Lemma 5.3.5 auch $|x| \in f^{-1}(0)$. Es folgt

$$|g(x)| \leq |g|(x) \leq |g|(|x|)| \leq cf(|x|) = 0,$$

also $x \in g^{-1}(0)$. Das heißt $f^{-1}(0) \subseteq g^{-1}(0)$.

Nach [3] 4.2.4 und 4.2.5 ist der Kern $f^{-1}(0)$ des linearen Funktionals f eine Hyperebene. Das heißt er besitzt ein 1-dimensionales Komplement A, also $L = f^{-1}(0) \oplus A$. Da $g^{-1}(0)$ selbst einen linearen Teilraum bildet, ist dieser entweder gleich L oder $f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$. In beiden Fällen gilt $g = \lambda f$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii)⇒(i): Für die andere Implikation sei $x \in L$. Da f positiv ist, gilt $f(x^+) \geq 0$. Ist $f(x^+) = 0$ dann folgt $f(x^+) \wedge f(x^-) = 0$.
Sei nun $f(x^+) > 0$. Betrachte die Abbildung

$$h : \begin{cases} L_+ \to \mathbb{R}_+ \\ y \mapsto \sup\{f(z) : z \in [0, y] \cap I(x^+)_+\} \end{cases}$$

(1) Seien $y_1, y_2 \in L_+$. Dann gilt wegen Satz 3.2.11 und weil $I(x^+)$ ein Ideal ist, dass $[0, y_1 + y_2] \cap I(x^+)_+ = [0, y_1] \cap I(x^+)_+ + [0, y_2] \cap I(x^+)_+$. Zusammen mit der Linearität von f folgt

$$\begin{aligned} h(y_1 + y_2) &= \sup\{f(z) : z \in [0, y_1 + y_2] \cap I(x^+)_+\} \\ &= \sup\{f(z_1 + z_2) : z_1 \in [0, y_1] \cap I(x^+)_+, z_2 \in [0, y_2] \cap I(x^+)_+\} \\ &= \sup\{f(z_1) + f(z_2) : z_1 \in [0, y_1] \cap I(x^+)_+, z_2 \in [0, y_2] \cap I(x^+)_+\} \\ &= \sup\{f(z_1) : z_1 \in [0, y_1] \cap I(x^+)_+\} + \sup\{f(z_2) : z_2 \in [0, y_2] \cap I(x^+)_+\} \\ &= h(y_1) + h(y_2). \end{aligned}$$

Damit ist h additiv.

(2) Sei $y \in L_+$ und $\alpha > 0$, dann folgt aus $z \leq \alpha y$, dass $\frac{z}{\alpha} \leq y$ und damit

$$h(\alpha y) = \sup\{f(z) : z \in [0, \alpha y] \cap I(x^+)_+\} = \sup\{f(z) : \frac{z}{\alpha} \in [0, y] \cap I(x^+)_+\}.$$

Mit $\tilde{z} = \frac{z}{\alpha}$, der Linearität von f und Lemma 2.1.6(iii) gilt

$$\sup\{f(\alpha\tilde{z}) : \tilde{z} \in [0, y] \cap I(x^+)_+\} = \sup\{\alpha f(\tilde{z}) : \tilde{z} \in [0, y] \cap I(x^+)_+\} = \alpha h(y).$$

Für $\alpha = 0$ gilt wegen der Linearität von f, dass

$$h(0y) = \sup\{f(z) : z \in [0, 0y] \cap I(x^+)_+\} = f(0) = 0 = 0h(y).$$

Damit ist h positiv homogen.

(3) Sei $y \in L_+$, dann gilt wegen Lemma 5.3.2, dass $f(z) \leq f(y)$ für $0 \leq z \leq y$. Damit ist auch $h(y) = \sup\{f(z) : z \in [0, y] \cap I(x^+)_+\} \leq f(y)$, also $h \leq f$.

Wegen Lemma 5.3.8(ii) kann h zu einer Linearform g auf L mit $0 \leq g \leq f$ fortgesetzt werden. Das heißt, g liegt im 1-dimensionalen Ideal $I(f)$, also $g = \beta f$ für ein reelles β.

Da f positiv ist, gilt $f(x^+) \geq f(z)$ für $z \in [0, x^+]$. Ist s eine obere Schranke von $\{f(z) : z \in [0, x^+] = [0, x^+] \cap I(x^+)_+\}$, dann gilt auch $f(x^+) \leq s$. Also gilt $f(x^+) = \sup\{f(z) : z \in [0, x^+]\} = h(x^+)$. Wegen $x_+ \in L_+$, gilt $g(x^+) = h(x^+) = f(x^+) > 0$ und damit $\beta = 1$, also $f = g$.

Ist $z \neq 0$ in $[0, x^-]$, so liegt z wegen $z \wedge nx^+ \leq x^- \wedge nx^+ = 0$ für kein $n \in \mathbb{N}$ in $[0, nx^+]$. Das heißt $[0, x^-] \cap [0, nx^+] = \{0\}$ und damit $[0, x^-] \cap I(x^+) = \{0\}$ (verlgeiche Lemma 5.1.5), also $h(x^-) = \bigvee\{f(z) : z \in [0, x^-] \cap I(x^+)\} = 0$. Schließlich folgt $f(x^-) = g(x^-) = h(x^-) = 0$ und damit $f(x^+) \wedge f(x^-) = 0$. Lemma 5.3.4 liefert die Behauptung. ■

5.4 Faktorraum

Definition 5.4.1 Sei L ein Vektorverband und J ein Ideal, so bezeichnet $L/J = \{[x] = x + J : x \in L\}$ den Faktorraum von L modulo J.

Wir schreiben $[x] \leq [y]$, wenn es ein $x_1 \in [x]$ und ein $y_1 \in [y]$ gibt, sodass $x_1 \leq y_1$.

Lemma 5.4.2 Sei L ein Vektorverband und J ein Ideal, dann sind für $x, y \in L$ folgende Aussagen äquivalent.

(i) Es gilt $[x] \leq [y]$.

(ii) Für jedes $x_1 \in [x]$ gibt es ein $y_1 \in [y]$, sodass $x_1 \leq y_1$ gilt.

(iii) Für jedes $x_1 \in [x]$ und jedes $y_1 \in [y]$ gibt es ein $j \in J$ mit $y_1 - x_1 \geq j$.

Beweis i)$\Rightarrow$ii): Nach Definition, gibt es $x_1 \in [x]$ und ein $y_1 \in [y]$, sodass $x_1 \leq y_2$. Sei $\tilde{x}_1 \in [x]$, also $\tilde{x}_1 = x_1 + j$ für ein $j \in J$. Wegen **(OV1)** gilt $\tilde{x}_1 = x_1 + j \leq y_1 + j =: \tilde{y}_1 \in [y]$.

ii)$\Rightarrow$iii): Seien $\tilde{x}_1 \in [x], \tilde{y}_1 \in [y]$. Für $\tilde{x}_1$ gibt es nach (ii) ein $y_1 \in [y]$ mit $\tilde{x}_1 \leq y_1$. Da man $\tilde{y}_1 = y_1 + j$ für ein $j \in J$ schreiben kann, folgt $\tilde{x}_1 \leq \tilde{y}_1 - j$. Aus **(OV1)** folgt $j \leq \tilde{y}_1 - \tilde{x}_1$.

iii)$\Rightarrow$i): Seien $x_1 \in [x], y_1 \in [y]$ und $j \in J$, sodass $y_1 - x_1 \geq j$. Dann gilt $y_1 \geq x_1 + j \in [x]$. ■

Lemma 5.4.3 Sei L ein Vektorverband und J ein Ideal darin, so ist der Faktorraum L/J wieder ein Vektorverband. Zudem ist die kanonische Projektion $\pi : L \to L/J$ ein Verbandshomomorphismus.

Beweis Wir zeigen zuerst, dass L/J mit der in Definition 5.4.1 eingeführten Relation eine Halbordnung bildet. Aus $x \leq x$ folgt $[x] \leq [x]$, das heißt die Relation ist reflexiv.
Seien $x, y, z \in L$ mit $[x] \leq [y]$ und $[y] \leq [z]$. Dann gibt es nach Lemma 5.4.2(iii) Elemente $j_1, j_2 \in J$, sodass $x - y \geq j_1$ und $z - y \geq j_2$. Damit gilt $z - x = z - y + y - x \geq j_1 + j_2 =: j \in J$, da J ein linearer Teilraum ist.
Seien x, y Elemente aus L, die sowohl $[x] \leq [y]$ als auch $[y] \leq [x]$ erfüllen. Nach Lemma 5.4.2(iii) gibt es $j_1, j_2 \in J$, sodass $x - y \geq j_1$ und $y - x \geq j_2$. Die Ungleichungen sind äquivalent zu $y - x \leq -j_1$ beziehungsweise $x - y \leq -j_2$. Nun liegt $j := -j_1 \vee -j_2$ wegen Lemma 5.1.3 in J. Damit gilt $|y - x| = (y - x) \vee (x - y) \leq -j_1 \vee -j_2 = j \in J$ und da J ein Ideal ist, liegt auch $y - x$ in J, also $[x] = [y]$.

Die Ordnungsrelation ist auch mit den Vektorraumoperationen kompatibel, wie im Folgenden gezeigt wird.
Seien $x, y \in L$ mit $[x] \leq [y]$ und $\lambda \geq 0$. Dann gibt es $x_1 \in [x]$ und $y_1 \in [y]$, sodass $x_1 \leq y_1$. Da **(OV2)** in L gilt, folgt $\lambda x_1 \leq \lambda y_1$ und damit $\lambda[x] = [\lambda x] \leq [\lambda y] = \lambda[y]$.
Seien $x, y, z \in L$ mit $[x] \leq [y]$, dann gibt es $x_1 \in [x]$ und $y_1 \in [y]$, sodass $x_1 \leq y_1$. Da **(OV1)** in L gilt, folgt $x_1 + z \leq y_1 + z$, also $[x_1 + z] \leq [y_1 + z]$. Damit gilt $[x] + [z] = [x_1] + [z] = [x_1 + z] \leq [y_1 + z] = [y_1] + [z] = [y] + [z]$.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass L/J mit zwei Elementen auch deren Supremum enthält. Genauer wollen wir für $[x], [y] \in L/J$ beweisen, dass sich ihr Supremum als $[x] \vee [y] = [x \vee y]$ ergibt.

Wegen $x \vee y \geq x, y$ gilt $[x \vee y] \geq [x], [y]$. Darum genügt es für jede obere Schranke $[z]$ von $[x], [y]$ nachzuweisen, dass sie auch $[z] \geq [x \vee y]$ erfüllt. Sei also $[z] \geq [x], [y]$, dann gibt es $j_1, j_2 \in J$ mit $z - x \geq j_1$ beziehungsweise $z - y \geq j_2$. Wegen Lemma 5.1.3 gilt $z - x, z - y \geq j_1 \wedge j_2 =: j \in J$ und mit **(OV1)** folgt $z \geq x + j, y + j$. Aus Lemma 2.1.6 folgt $z \geq (x + j) \vee (y + j) = x \vee y + j$. Wegen **(OV1)** ergibt sich $z - x \vee y \geq j$, das heißt $[z] \geq [x \vee y]$.

Die entsprechende Aussage für das Infimum ergibt sich wegen Lemma 3.2.7(iii) aus $[x \wedge y] = [x + y - x \vee y] = [x] + [y] - [x] \vee [y] = [x] \wedge [y]$.
Da $\pi(x) = [x]$, folgt damit auch dass π ein Verbandshomomorphismus ist. ∎

Beispiel 5.4.4 Sei $\mathcal{L}_p$ der Vektorverband aus Beispiel 2.1.5(vi) und $N(\mu) \subseteq \mathcal{L}_p$ das Ideal aus Beispiel 5.1.2. Dann ist der Faktorraum $L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)/N(\mu)$ wegen Lemma 5.4.3 ein Vektorverband.

Für $f, g \in \mathcal{L}_p$ gilt $[f] \leq [g]$ genau dann, wenn $[f] \leq [g]$ μ-fü gilt, wie im Folgenden gezeigt wird.
Seien $f, g \in \mathcal{L}_p$ mit $[f] \leq [g]$ μ-fü, also gibt es für alle $f \in [f]$ und alle $g \in [g]$ eine Nullmenge N, sodass $f|_{\Omega \setminus N} \leq g|_{\Omega \setminus N}$ erfüllt ist. Wegen $g - f = (g - f)\chi_{\Omega \setminus N} + (g - f)\chi_N \leq (g - f)\chi_N =: j \in [0]$ folgt aus Lemma 5.4.2 $[f] \leq [g]$.
Gilt umgekehrt $[f] \leq [g]$, so gibt es für $f \in [f]$ und $g \in [g]$ wegen Lemma 5.4.2 ein $j \in [0]$ sodass $g - f \geq j$. Das heißt es existiert eine Nullmenge N mit $j\chi_{\Omega \setminus N} = 0$ und es gilt $(g - f)\chi_{\Omega \setminus N} \geq j\chi_{\Omega \setminus N} = 0$. Damit gilt $f|_{\Omega \setminus N} \leq g|_{\Omega \setminus N}$, also $[f] \leq [g]$ μ-fü.

Literaturverzeichnis

[1] Charalambos D. Aliprantis and Rabee Tourky. *Cones and duality*, volume 84 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[2] Jürgen Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Springer-Verlag, Berlin, fourth edition, 2005. Grundwissen Mathematik. [Basic Knowledge in Mathematics].

[3] Hans Havlicek. *Lineare Algebra für technische Mathematiker*, volume 16 of *Berliner Studienreihe zur Mathematik [Berlin Study Series on Mathematics]*. Heldermann Verlag, Berlin, 2006.

[4] Michael Kaltenbäck. *Analysis 1*. 2010.

[5] W. A. J. Luxemburg and A. C. Zaanen. *Riesz spaces. Vol. I*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., New York, 1971. North-Holland Mathematical Library.

[6] Helmut H. Schaefer. *Banach lattices and positive operators*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 215.