Bachelorarbeit

Der Satz von Lidskii

Alexander Freißlinger

SS 2020

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung und Notationen

0.1 Einleitung

In der Linearen Algebra gibt es eine sehr gut studierte Theorie zu Determinanten und Spuren von Matrizen. Doch sind diese Resultate, oder wenigstens einige davon auch auf allgemeine Operatoren in einem Hilbertraum anwendbar? Dazu betrachtet man kompakte Operatoren, das sind lineare Abbildungen, die, obwohl sie auf unendlichdimensionalen Räumen definiert sind, ähnliche Eigenschaften wie endlichdimensionale Matrizen besitzen. Die Spur eines solchen Operators werden wir als Summe von Skalarprodukten definieren, was, wie in der linearen Algebra, der Summe über alle Diagonalelemente entspricht. Die Determinante wird als eine Summe von Spuren von Operatoren in der äußeren Algebra dargestellt. Auch an dieser Determinante kann man ablesen, ob ein Operator invertierbar ist oder nicht. Der Abschluss dieser Arbeit wird die Formulierung und der Beweis des Satzes von Lidskii, dem unendlichdimensionalen Analogon zu der Tatsache, dass die Spur einer Matrix die Summe ihrer Eigenwerte ist, beinhalten.

0.2 Notation

In dieser Arbeit wird mit $\mathcal{H}$ immer ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ und $L_b(X, Y)$ der Raum der beschränkten linearen Abbildungen von einem Banachraum X in einen Banachraum Y bezeichnen, wobei $L_b(X) := L_b(X, X)$. Weiters schreiben wir T^* für die Adjungierte eines linearen Operators T und $\mathcal{I}$ für die Identität auf $L_b(X)$. Schließlich setzen wir $U_r(x) = \{y \in X : \|x - y\| < r\}$ und $K_r(x) = \overline{U_r(x)} = \{y \in X : \|x - y\| \leq r\}$.

1 Einführende Resultate

Am Anfang dieser Arbeit werden wir einfache Resultate und Definitionen zu verschiedenen Themen der Operatortheorie, die wir in dieser Arbeit benötigen, wiederholen. Viele dieser Aussagen werden nicht bewiesen und sind in [11] und [10] nachzulesen.

1.1 Separable Räume

1.1.1 Definition. Ein Banachraum X heißt separabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge von X gibt, die dicht in X liegt.

1.1.2 Definition. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine Familie $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ heißt Orthonormalsystem, wenn für alle $\alpha, \beta \in A$

$$(e_\alpha, e_\beta) = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

gilt. Gibt es zu einem Orthonormalsystem M kein echt größeres Orthonormalsystem, das M umfasst, folgt also für ein Orthonormalsystem M' mit $M \subseteq M'$ schon $M = M'$, so heißt M eine Orthonormalbasis.

In separablen Hilberträumen haben Orthonormalbasen folgende schöne Eigenschaft.

1.1.3 Satz. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ist $\mathcal{H}$ separabel, so sind alle Orthonormalbasen in $\mathcal{H}$ abzählbar. Gibt es umgekehrt eine abzählbare Orthonormalbasis, so ist $\mathcal{H}$ separabel.

Beweis: Sei $\mathcal{H}$ separabel und $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ die in $\mathcal{H}$ dicht liegende abzählbare Menge und $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Orthonormalbasis. Für alle $\alpha \in A$ gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\|e_\alpha - x_n\| < \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Für $\alpha, \beta \in A$ mit $\alpha \neq \beta$ gilt

$$\|e_\alpha - e_\beta\|^2 = \|e_\alpha\|^2 + \|e_\beta\|^2 - (e_\alpha, e_\beta) - (e_\beta, e_\alpha) = 2,$$

womit $\|e_\alpha - e_\beta\| = \sqrt{2} > 1$. Also gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ höchstens ein $\alpha \in A$ derart, dass (1) gilt. Wegen $\mathcal{H} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_{\frac{1}{2}}(x_n)$ kann A höchstens abzählbar sein.

Ist umgekehrt $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis, so lässt sich jedes Element von $\mathcal{H}$ in eine Fourierreihe nach $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entwickeln; siehe Korollar 3.3.4 in [11]. Infolge liegt $\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\mathcal{H}$. Die Menge $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ ist abzählbar und liegt dicht in $\mathbb{C}$. Demnach ist $D := \{\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j : n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\}$ ebenfalls abzählbar. Wir wollen zeigen, dass D dicht in $\mathcal{H}$ liegt. Sei $x \in \mathcal{H}$ und $\varepsilon > 0$. Es existieren Skalare $\beta_n \in \mathbb{C}$ mit $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \beta_n e_n$. Da diese Summe konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$\left\|\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\beta_n e_n\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Da $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{C}$ ist, gibt es zu jedem j ein $\alpha_j \in \mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ mit $|\alpha_j - \beta_j| < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$. Setzen wir $x_N := \sum\limits_{n=1}^{N}\alpha_n e_n \in D$, so folgt

$$
\begin{aligned}
\|x - x_N\| &= \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}}\beta_n e_n - \sum_{n=1}^{N}\alpha_n e_n\right\| = \left\|\sum_{n=N+1}^{\infty}\beta_n e_n + \sum_{n=1}^{N}(\beta_n-\alpha_n)e_n\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{n=N+1}^{\infty}\beta_n e_n\right\| + \sum_{n=1}^{N}|\beta_n-\alpha_n|\,\|e_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

□

1.2 Kompakte Operatoren

Wir werden die wichtigsten Resultate über kompakte Operatoren zusammenfassen. Die Beweise sind in [11], Kapitel 6.5 und 6.7 nachzulesen.

1.2.1 Definition. Seien X und Y Banachräume. Ein linearer Operator $T : X \to Y$ heißt kompakt, wenn das Bild der Einheitskugel unter T relativ kompakt in Y ist, also wenn $\overline{T\big(K_1^X(0)\big)}$ kompakt ist. Wir bezeichnen die Menge aller kompakten Operatoren von X nach Y mit $\mathcal{K}(X,Y)$. Im Falle $X = Y$ schreiben wir $\mathcal{K}(X)$ dafür.

1.2.2 Proposition. Seien X, Y, Z Banachräume. Dann gilt:

a) $\mathcal{K}(X,Y)$ ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von $L_b(X,Y)$.

b) Für $T \in L_b(X,Y)$ mit $\dim\big(\operatorname{ran}(T)\big) < \infty$ gilt $T \in \mathcal{K}(X,Y)$.

c) Für $T \in L_b(X,Y)$ und $S \in L_b(Y,Z)$ ist ST ist kompakt, wenn einer der Operatoren T oder S kompakt ist.

In Banachräumen hat der Raum der kompakten Operatoren eine schöne algebraische Struktur. Um diese zu zeigen benötigen wir das Riesz'sche Lemma.

1.2.3 Lemma (*Riesz*)**.** Sei X ein normierter Raum und Y ein abgeschlossener echter Unterraum von X. Dann gibt es für alle $\varepsilon \in (0,1)$ ein $x_0 \in X$ mit $\|x_0\| = 1$ und $\|x_0 - y\| \geq 1 - \varepsilon$ für alle $y \in Y$.

Beweis: Sei $\varepsilon \in (0,1)$. Da Y ein echter Unterraum von X ist, gibt es ein $x \in X\backslash Y$. Da $X\backslash Y$ wegen der Abgeschlossenheit von Y offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $U_r(x) \subseteq X\backslash Y$. Wir setzen $d := d(x,Y) = \inf\{\|x-y\| : y \in Y\} \geq r > 0$. Wegen $\frac{d}{1-\varepsilon} > d$ gibt es ein

$y_0 \in Y$ mit $\|x - y_0\| < \dfrac{d}{1-\varepsilon}$. Setzen wir $x_0 := \dfrac{x - y_0}{\|x - y_0\|}$, so gilt für ein $y \in Y$ wegen $y_0 + \|x - y_0\|\, y \in Y$

$$\|x_0 - y\| = \frac{\|x - y_0 - (\|x - y_0\|\, y)\|}{\|x - y_0\|} = \frac{\|x - (y_0 + \|x - y_0\|\, y)\|}{\|x - y_0\|} \geq \frac{d}{\|x - y_0\|} > 1 - \varepsilon.$$

□

1.2.4 Satz. Für einen Banachraum X ist $\mathcal{K}(X)$ ein Ideal in $L_b(X)$, wobei

$$\mathcal{K}(X) \subsetneq L_b(X) \Leftrightarrow \dim(X) = \infty.$$

Beweis: Da für ein $S \in L_b(X)$ nach Proposition 1.2.2 mit T auch TS und ST kompakt sind, bildet $\mathcal{K}(X)$ ein Ideal in $L_b(X)$.
Im Falle $\dim(X) = n < \infty$ ist X homöomorph zu $\mathbb{C}^n$. Folglich ist die Einheitskugel in X kompakt. Die Identität $\mathcal{I} : X \to X$ gehört somit zu $\mathcal{K}(X)$. Für alle $S \in L_b(X)$ gilt daher $S = S\mathcal{I} \in \mathcal{K}(X)$, womit $\mathcal{K}(X) = L_b(X)$.
Sei umgekehrt angenommen, dass $\dim(X) = \infty$. Wir konstruieren gemäß dem Riesz'schen Lemma eine Folge induktiv. Sei $x_1 \in X$ mit $\|x_1\| = 1$. Sind $x_1, \dots x_{n-1}$ definiert, so gibt es wegen Lemma 1.2.3 aufgrund von $\dim(X) = \infty$ ein $x_n \in X$ mit $\inf\limits_{y \in Y_{n-1}} \|x_n - y\| \geq \frac{1}{2}$ und $\|x_n\| = 1$, wobei $Y_{n-1} = \operatorname{span}\{x_1, \dots x_{n-1}\}$. Somit gilt $x_n \in K_1(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ für alle $n \neq m$ hat die Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ keine konvergente Teilfolge. Daher ist $K_1(0)$ nicht kompakt und infolge $\mathcal{I} \notin \mathcal{K}(X)$.

□

1.3 Spektraltheorie kompakter Operatoren

Aus Satz 6.5.12 in [11] wissen wir, dass das Spektrum

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda\mathcal{I} \text{ ist nicht bijektiv}\}$$

eines kompakten Operators T höchstens abzählbar ist und jedes $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ ein Eigenwert ist, was bedeutet, dass $\ker(T - \lambda\mathcal{I}) \neq \{0\}$. In diesem Abschnitt zeigen wir weitere Eigenschaften des Spektrums eines kompakten Operators.

Die beiden nächsten Resultate handeln von bestimmten Darstellungen (selbstadjungierter) kompakter Operatoren. Die Beweise sind in Kapitel 6.7 in [11] nachzulesen.

1.3.1 Satz (*Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren*)**.** Ist $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, so gibt es ein höchstens abzählbares Orthonormalsystem $(e_j)_{j=1}^\kappa$ in $\mathcal{H}$ mit $\kappa \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und Zahlen $\lambda_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $j = 1, \dots, \kappa$ derart, dass $\lim\limits_{j\to\infty} \lambda_j = 0$ im Fall $\kappa = \infty$, dass $\{\lambda_j : j \in \{1, \dots, \kappa\}\} = \sigma(T)\backslash\{0\}$, dass e_j Eigenvektor zum Eigenwert λ_j für alle $j = 1, \dots, \kappa$ ist und dass

$$Tx = \sum_{j=1}^{\kappa} \lambda_j (x, e_j) e_j$$

für alle $x \in \mathcal{H}$. Diese Reihe konvergiert im Falle $\kappa = \infty$ bezüglich der Operatornorm. In jedem Fall gilt $\ker(T)^\perp = \overline{\operatorname{ran}(T)} = \overline{\operatorname{span}(\{e_j : j \in \{1, \dots, \kappa\}\})}$.

Zusätzlich können wir die Indexierung der Zahlen $(\lambda_j)_{j=1}^\kappa$ so wählen, dass $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots > 0$. Für ein $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ gilt gemäß dieser Indexierung $\lambda = \lambda_j$ für genau $\nu = \dim\big(\ker(T - \lambda\mathcal{I})\big)$-viele aufeinanderfolgende Indizes. Wir sagen dann, dass die Eigenwerte $(\lambda_j)_{j=1}^\kappa$ nach ihrer Vielfachheit gezählt sind.

Ist T zusätzlich positiv, also $(Tx, x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$, so gilt mit obiger Notation

$$\lambda_n = \min_{V \leq H, \dim(V) = n-1} \sup_{x \in V^\perp, \|x\| = 1} (Tx, x) \tag{2}$$

für alle $n \in \{1, \dots, \kappa\}$.

Wir wollen auch kompakte Operatoren, die nicht zwangsweise selbstadjungiert sind, ähnlich wie in Satz 1.3.1 darstellen. Dazu benötigen wir zunächst den Quadratwurzelsatz.

1.3.2 Satz (*Quadratwurzelsatz*)**.** Zu jedem $T \in L_b(\mathcal{H})$ mit $T = T^*$ und $(Tx, x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$ gibt es einen eindeutigen Operator $\sqrt{T} \in L_b(\mathcal{H})$, für den $\sqrt{T}^2 = T$, $\sqrt{T} = \sqrt{T}^*$ und $(\sqrt{T}x, x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt.

1.3.3 Bemerkung. Für ein $T \in L_b(\mathcal{H})$ ist der Operator T^*T wegen

$$(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2 \geq 0$$

für alle $x \in \mathcal{H}$ positiv, und somit können wir nach Satz 1.3.2 die Quadratwurzel $\sqrt{T^*T}$ davon bilden. Diesen Operator bezeichnen wir mit $|T|$.

1.3.4 Satz (*Singulärwertzerlegung*)**.** Seien $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ Hilberträume, $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ und bezeichne $(\lambda_j)_{j=1}^\kappa$ die Eigenwerte, gezählt nach ihrer Vielfachheit, des positiven Operators T^*T wie in Satz 1.3.1. Setzen wir $\eta(T) := \kappa$ und $\mu_j(T) = \sqrt{\lambda_j}$, so gibt es Orthonormalsysteme $(e_j)_{j=1}^{\eta(T)}$ in $\mathcal{H}_1$ und $(f_j)_{j=1}^{\eta(T)}$ in $\mathcal{H}_2$, derart, dass

$$T = \sum_{j=1}^{\eta(T)} \mu_j(T)(\cdot, e_j) f_j \quad \text{und} \quad T^* = \sum_{j=1}^{\eta(T)} \mu_j(T)(\cdot, f_j) e_j, \tag{3}$$

wobei für $\eta(T) = \infty$ diese Reihen bezüglich der Operatornorm konvergieren. Mit dieser Notation bildet $(e_j)_{j=1}^{\eta(T)}$ eine Orthonormalbasis von $\overline{\operatorname{ran}(T^*)}$ und $(f_j)_{j=1}^{\eta(T)}$ eine Orthonormalbasis von $\overline{\operatorname{ran}(T)}$. Die Zahlen $\mu_j(T)$ werden die Singulärwerte von T und (3) die Singulärwertzerlegung von T beziehungsweise T^* genannt.

Wir werden im Folgenden Abschätzungen für die Singulärwerte von kompakten Operatoren beweisen.

1.3.5 Proposition. Für $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $S \in L_b(\mathcal{H})$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt $\mu_j(zT) = |z|\mu_j(T)$ und $\mu_j(T) = \mu_j(T^*)$, sowie die Abschätzungen $\mu_j(TS) \leq \|S\|\,\mu_j(T)$ und $\mu_j(ST) \leq \|S\|\,\mu_j(T)$ für alle $j \in \{1, \dots, \eta(T)\}$.

Beweis: Es gilt $(zT)^* = \overline{z}T^*$, womit wir $(zT)^*(zT) = \overline{z}zT^*T = |z|^2T^*T$ erhalten. Da $(\mu_j(T)^2)_{j=1}^{\eta(T)}$ die Eigenwerte von T^*T sind, sind $(|z|^2\mu_j(T)^2)_{j=1}^{\eta(T)}$ die Eigenwerte von $|z|^2T^*T = (zT)^*(zT)$. Damit sind die Singulärwerte von zT die Zahlen $(|z|\mu_j(T))_{j=1}^{\eta(T)}$.

Wenden wir Satz 1.3.4 an, so erhalten wir für TT^* die Darstellung

$$\begin{aligned} TT^*x &= \sum_{j=1}^{\eta(T)} \mu_j(T)\Big(\sum_{i=1}^{\eta(T)} \mu_i(T)(x, f_i)e_i, e_j\Big) f_j = \sum_{j=1}^{\eta(T)} \sum_{i=1}^{\eta(T)} \mu_j(T)\mu_i(T)(x, f_i)(e_i, e_j) f_j \\ &= \sum_{j=1}^{\eta(T)} \mu_j(T)^2(x, f_j)f_j. \end{aligned}$$

Somit sind die Eigenwerte von TT^*, gezählt nach ihrer Vielfachheit, genau $(\mu_j(T)^2)_{j=1}^{\eta(T)}$. Da die Singulärwerte von T^* als die Wurzeln der Eigenwerte von $T^{**}T^* = TT^*$ definiert sind, folgt $\mu_j(T^*) = \mu_j(T)$.
Nach (2) angewendet auf T^*S^*ST gilt

$$\begin{aligned} \mu_j(ST)^2 &= \min_{V \leq H, \dim V = n-1} \sup_{x \in V^\perp, \|x\|=1} (T^*S^*STx, x) \\ &= \min_{V \leq H, \dim V = n-1} \sup_{x \in V^\perp, \|x\|=1} \|STx\|^2 \\ &\leq \min_{V \leq H, \dim V = n-1} \sup_{x \in V^\perp, \|x\|=1} \|S\|^2 (T^*Tx, x) = \|S\|^2 \mu_j(T)^2 \end{aligned}$$

und infolge

$$\mu_j(TS) = \mu_j((TS)^*) = \mu_j(S^*T^*) \leq \|S^*\|\,\mu_j(T^*) = \|S\|\,\mu_j(T).$$

$\square$

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir die Haupträume kompakter Operatoren.

1.3.6 Definition. Sei X ein Banachraum, $T \in L_b(X)$ und $\lambda \in \sigma(T)$ ein Eigenwert von T, also $\ker(T - \lambda\mathcal{I}) \neq \{0\}$. Dann nennen wir die Menge

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \ker\big((T - \lambda\mathcal{I})^n\big)$$

den Hauptraum von T zum Eigenwert λ und die Zahl

$$\nu = \dim\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \ker\big((T - \lambda\mathcal{I})^n\big)\Big) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

die algebraische Vielfachheit ν von λ als Eigenwert von T. Offensichtlich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $\ker\big((T-\lambda\mathcal{I})^n\big)$ invariant unter T ist, und dass $\Big(\ker\big((T-\lambda\mathcal{I})^n\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge abgeschlossener Unterräume ist.

Wie in Satz 1.3.1 können wir die Eigenwerte $(\lambda_j)_{j=1}^{\kappa}$ eines (nicht notwendigerweise selbstadjungierten) kompakten Operators derart indizieren, dass $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots > 0$ und für $\lambda \in \sigma(T)$ die Gleichung $\lambda = \lambda_j$ für genau $\dim\big(\ker(T-\lambda\mathcal{I})\big)$-viele aufeinanderfolgende Indizes j gilt. Sind die Eigenwerte $(\lambda_j)_{j=1}^{\kappa}$ in dieser Weise indiziert, so sagen wir die Eigenwerte sind gezählt nach ihrer Vielfachheit.

1.3.7 Proposition. Sei X ein Banachraum, $T \in L_b(X)$, $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ker\big((T-\lambda\mathcal{I})^n\big)$ der Hauptraum und $\nu = \dim(F)$ die algebraische Vielfachheit von einem Eigenwert $\lambda \in \sigma(T)$ von T. Dann hat der Operator $T\big|_F \in L_b(F)$ als einzigen Eigenwert λ, wobei die Haupträume von T und $T\big|_F$ zum Eigenwert λ übereinstimmen. Insbesondere ist ν die algebraische Vielfachheit von λ als Eigenwert von $T\big|_F$. Weiters gilt für $\lambda \neq 0$ und eine Projektion $P \in L_b(X)$ auf F, also $P^2 = P$ und $\operatorname{ran}(P) = F$, die mit T kommutiert, dass $\lambda \notin \sigma\big(T(\mathcal{I}-P)\big)$.

Beweis: Wegen $Tx = (T-\lambda\mathcal{I})x + \lambda x \in \ker\big((T-\lambda\mathcal{I})^n\big)$ für $x \in \ker\big((T-\lambda\mathcal{I})^n\big)$ gilt $T(F) \subseteq F$ und damit $T\big|_F \in L_b(F)$. Da λ ein Eigenwert von T ist, gibt es ein $x \in \ker(T-\lambda\mathcal{I}) \subseteq F$. Demnach gilt $T\big|_F x = Tx = \lambda x$, womit λ ein Eigenwert von $T\big|_F$ ist. Angenommen, es gäbe einen weiteren Eigenwert $\mu \in \mathbb{C}$ von $T\big|_F$ mit $\lambda \neq \mu$ und ein $x \in F\backslash\{0\}$ mit $T\big|_F x = \mu x$. Wegen $(T-\lambda\mathcal{I})x = Tx - \lambda x = \mu x - \lambda x = (\mu-\lambda)x$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(T-\lambda\mathcal{I})^n x = (\mu-\lambda)^n x \neq 0,$$

womit $x \notin \ker\big((T-\lambda\mathcal{I})^n\big)$. Wir erhalten den Widerspruch $x \notin F$. Somit ist λ der einzige Eigenwert von $T\big|_F$.

Offenbar gilt

$$\ker\big((T\big|_F - \lambda\mathcal{I}\big|_F)^n\big) \subseteq \ker\big((T-\lambda\mathcal{I})^n\big),$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \ker\big((T-\lambda\mathcal{I})^n\big) \subseteq F$. Wegen $x \in F$ gilt $(T\big|_F - \lambda\mathcal{I}\big|_F)^n x = (T-\lambda\mathcal{I})^n x = 0$, also $x \in \ker\big((T\big|_F - \lambda\mathcal{I}\big|_F)^n\big)$, womit $\ker\big((T-\lambda\mathcal{I})^n\big) = \ker\big((T\big|_F - \lambda\mathcal{I}\big|_F)^n\big)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei $P \in L_b(X)$ eine Projektion auf F, die mit T kommutiert. Wäre λ ein Eigenwert von $T(\mathcal{I}-P)$, so gäbe es ein $x \in X\backslash\{0\}$ mit $T(\mathcal{I}-P)x = \lambda x$, woraus

$$T(\mathcal{I}-P)x = (\mathcal{I}-P)T(\mathcal{I}-P)x = \lambda(\mathcal{I}-P)x$$

folgt. Im Falle $(\mathcal{I}-P)x \neq 0$ wäre $(\mathcal{I}-P)x$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von T, womit $(\mathcal{I}-P)x \in \ker(T-\lambda\mathcal{I}) \subseteq F$. Wir erhalten den Widerspruch

$$(\mathcal{I}-P)x \in \operatorname{ran}(P) \cap \operatorname{ran}(\mathcal{I}-P) = \{0\}.$$

Wegen $\lambda \neq 0$ und $x \neq 0$ gilt

$$0 = T(\mathcal{I} - P)x = \lambda x \neq 0.$$

Damit kann λ kein Eigenwert von $T(\mathcal{I} - P)$ sein.

$\square$

1.3.8 Bemerkung. Nach Korollar 2.3.6 in [9] gibt es eine solche Projektion wie in Proposition 1.3.5.

Wir wollen zeigen, dass die algebraische Vielfachheit eines von Null verschiedenen Eigenwerts eines kompakten Operators immer endlich ist.

1.3.9 Satz. Sei X ein Banachraum, $T \in \mathcal{K}(X)$ und $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq m$

$$\ker\big((T - \lambda\mathcal{I})^m\big) = \ker\big((T - \lambda\mathcal{I})^n\big)$$

und

$$\nu = \dim\Big(\ker\big((T - \lambda\mathcal{I})^m\big)\Big) < \infty$$

gilt. Insbesondere ist $\ker\big((T - \lambda\mathcal{I})^m\big)$ der Hauptraum und ν die algebraische Vielfachheit von λ als Eigenwert von T.

Beweis: Gäbe es kein so ein m, so setzen wir $Y_k := \ker\big((T - \lambda\mathcal{I})^k\big)$ und erhalten $Y_k \subsetneq Y_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren gemäß Lemma 1.2.3 eine Folge $(x_n)_{n=2}^{\infty}$, für die $\|x_n\| = 1$, $x_n \in Y_n$ und $\|x_n - y\| > \frac{1}{2}$ für alle $y \in Y_{n-1}$ und alle $n \geq 2$ gilt.

Für $n < k$ ist der Ausdruck $(T - \lambda\mathcal{I})x_n + \lambda x_n - (T - \lambda\mathcal{I})x_k$ in Y_{k-1} enthalten, weshalb

$$\|Tx_n - Tx_k\| = \|(T - \lambda\mathcal{I})x_n + \lambda x_n - (T - \lambda\mathcal{I})x_k + \lambda x_k\| > \frac{|\lambda|}{2}.$$

Folglich kann diese Folge keine konvergente Teilfolge haben, was im Widerspruch zur Kompaktheit von T steht. Also gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $Y_m = Y_n$ für alle $n \geq m$. Es bleibt zu zeigen, dass Y_m endlichdimensional ist. Für $x \in \ker\big((T - \lambda\mathcal{I})^m\big)$ mit $\|x\| \leq 1$ folgt

$$0 = (T - \lambda\mathcal{I})^m x = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} (-\lambda)^{n-k} T^k x = \sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k} (-\lambda)^{n-k} T^k x + (-\lambda)^n x$$

und damit

$$-\sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k} (-\lambda)^{-k} T^k x = x.$$

Wir setzen $S := -\sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k} (-\lambda)^{-k} T^k \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Nach der obigen Gleichung ist die Einheitskugel in $\ker\big((T - \lambda\mathcal{I})^m\big)$ ganz in $S\big(K_1(0)\big)$ enthalten, womit ihr Abschluss wegen der Kompaktheit von $\overline{S\big(K_1(0)\big)}$ selbst kompakt ist. Nach Satz 1.2.4 ist $\ker\big((T - \lambda\mathcal{I})^m\big)$ endlichdimensional.

$\square$

2 Spurklasse-Operatoren

In diesem Kapitel werden wir die Spur eines Operators, wie wir sie für Matrizen aus der linearen Algebra kennen, definieren. Dies funktioniert leider nur für gewisse Operatoren, aber wir werden sehen, dass für diese Operatoren einige schöne Eigenschaften gelten. In diesem Kapitel arbeiten wir ausschließlich mit separablen Hilberträumen $\mathcal{H}$, weil diese abzählbare Orthonormalbasen zulassen.

2.1 Die Spurklasse

Bevor wir zu den Resultaten dieses Kapitels kommen, erinnern wir an den Satz über die Polarzerlegung, Satz 1.5.15 in [5].

2.1.1 Satz (*Polarzerlegung*)**.** Zu jedem $T \in L_b(\mathcal{H})$ gibt es einen Operator $U \in L_b(\mathcal{H})$ mit $T = U|T|$, wobei $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in \overline{\operatorname{ran}(|T|)}$ und $Ux = 0$ für alle $x \in \operatorname{ran}(|T|)^\perp$ gilt. In dieser Situation ist U^*U gerade die orthogonale Projektion auf $\overline{\operatorname{ran}(|T|)}$.

2.1.2 Proposition. Sei $T \in L_b(\mathcal{H})$ und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Orthonormalbasen von $\mathcal{H}$. Dann gilt
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|T^*e_n\|^2 = \sum_{m\in\mathbb{N}} \|Tf_m\|^2$$
als Gleichheit in $[0, +\infty]$.

Beweis: Mit der Parsevalschen Gleichung (Korollar 3.3.4 in [11]) erhalten wir
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} |(Te_n, f_m)|^2 \quad (\in [0, +\infty]).$$
Da alle Summanden positiv sind, können wir die Summen vertauschen und erhalten
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} |(Te_n, f_m)|^2 = \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |(e_n, T^*f_m)|^2 = \sum_{m\in\mathbb{N}} \|T^*f_m\|^2 ,$$
wobei die letzte Gleichheit wieder aus der Parsevalschen Gleichung folgt. Wiederholt man diese Schritte mit T^* und bemerkt, dass $T^{**} = T$, so folgt die Behauptung.

□

Für ein $T \geq 0$ erhalten wir aus Proposition 2.1.4 und der Beziehung
$$(Tx, x) = (\sqrt{T}^2 x, x) = (\sqrt{T}x, \sqrt{T}x) = \|\sqrt{T}x\|^2$$
folgendes

2.1.3 Korollar. Sei $T \geq 0$ und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Orthonormalbasen. Dann gilt
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (Te_n, e_n) = \sum_{m\in\mathbb{N}} (Tf_m, f_m) \quad (\in [0, +\infty]).$$

2.1.4 Lemma. Seien $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Orthonormalsysteme von $\mathcal{H}$ und $T, S \in L_b(\mathcal{H})$. Mit $b_{nm} := (Th_m, f_n)(e_n, Sg_m)$ gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_{nm}| \leq \|T\|\,\|S\| \tag{4}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_{mn}| \leq \|T\|\,\|S\| \tag{5}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt für $S = T = \mathcal{I}$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_{nm}| \leq 1$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_{mn}| \leq 1.$$

Beweis: Mit der Cauchy-Schwarzschen und der Besselschen Ungleichung, vgl. Satz 3.3.3 in [11], erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_{nm}|\right)^2 &= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |(Th_m, f_n)(e_n, Sg_m)|\right)^2 \\
&\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |(Th_m, f_n)|^2\right) \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |(e_n, Sg_m)|^2\right) \\
&\leq \|Th_m\|^2 \cdot \|Sg_m\|^2 \leq \|T\|^2\,\|S\|^2 .
\end{aligned}$$

Wegen $b_{mn} = (S^* e_m, g_n)(f_m, T^* h_n)$ folgt (5) aus (4).

□

2.1.5 Satz. Sei $T \in L_b(\mathcal{H})$ und sei $\mathcal{N}$ die Menge aller abzählbar unendlichen Orthonormalsysteme von $\mathcal{H}$. Für eine Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (|T|e_n, e_n) = \sup_{g,h\in\mathcal{N}} \sum_m |(Tg_m, h_m)| \quad (\in [0, +\infty]). \tag{6}$$

Ist (6) endlich, so ist T kompakt. Für kompakte T stimmt (6) überein mit

$$\sum_{n=1}^{\eta(T)} \mu_n(T).$$

Beweis: Wegen Korollar 2.1.3 ist die linke Seite unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis. Wir wählen die Orthonormalbasis $e := (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass $e = g \cup f$ mit $g, f \in \mathcal{N}$, wobei g eine Orthonormalbasis von $\overline{\operatorname{ran}(|T|)}$ und f eine Orthonormalbasis von $\operatorname{ran}(|T|)^\perp$ ist. Ist $U \in L_b(\mathcal{H})$ wie in Satz 2.1.1, so gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} (|T|e_n, e_n) &= \sum_m (|T|g_m, g_m) = \sum_m (U^*U|T|g_m, g_m) \\
&= \sum_m (U|T|g_m, Ug_m) = \sum_m (Tg_m, h_m),
\end{aligned}$$

wobei $h \in \mathcal{N}$ das durch $h_m := Ug_m$ definierte Orthonormalsystem ist. Insbesondere ist die rechte Seite von (6) immer größer oder gleich der linken Seite.
Sei angenommen, dass die linke Seite in (6) konvergiert. Wir definieren für $m \in \mathbb{N}$ einen Operator S_m durch

$$S_m x = \sum_{n=1}^{m} (x, e_n) \sqrt{|T|} e_n.$$

Wegen der Parsevalschen Gleichung und der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung gilt für ein $x \in \mathcal{H}$ und $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\left\| (\sqrt{|T|} - S_m) x \right\| &= \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} (x, e_n) \sqrt{|T|} e_n \right\| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |(x, e_n)| \left\| \sqrt{|T|} e_n \right\| \\
&\leq \Big(\sum_{n=m+1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_{n=m+1}^{\infty} \left\| \sqrt{|T|} e_n \right\|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_{n=m+1}^{\infty} (\sqrt{|T|} e_n, \sqrt{|T|} e_n) \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|x\| \cdot \Big(\sum_{n=m+1}^{\infty} (|T| e_n, e_n) \Big)^{\frac{1}{2}}. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Da $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} (|T| e_n, e_n)$ endlich ist, konvergiert wegen dem Cauchy-Kriterium obige Summe für $m \to \infty$ gegen 0, womit $\lim\limits_{m \to \infty} \left\| \sqrt{|T|} - S_m \right\| = 0$. Wegen $\dim\big(\operatorname{ran}(S_m)\big) = m < \infty$ ist $\sqrt{|T|}$ als Grenzwert einer Folge von Operatoren mit endlichdimensionalem Bild kompakt, womit auch T kompakt ist.

Sei $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Nach dem Spektralsatz, Satz 1.3.1, und dem Satz über die Singulärwertzerlegung, Satz 1.3.4, gibt es $(g_m)_{m=1}^{\eta(T)}$, $(h_m)_{m=1}^{\eta(T)} \in \mathcal{N}$ mit

$$T = \sum_{m=1}^{\eta(T)} \mu_m(T) (\cdot, g_m) h_m \quad \text{und} \quad T^* T = \sum_{m=1}^{\eta(T)} \mu_m(T)^2 (\cdot, g_m) g_m.$$

Für den Operator $S := \sum\limits_{m=1}^{\eta(T)} \mu_m(T) (\cdot, g_m) g_m$ gilt

$$\begin{aligned}
S^2 x &= \sum_{m=1}^{\eta(T)} \mu_m(T) \Big(\sum_{n=1}^{\eta(T)} \mu_n(T) (x, g_n) g_n, g_m \Big) g_m \\
&= \sum_{m=1}^{\eta(T)} \sum_{n=1}^{\eta(T)} \mu_m(T) \mu_n(T) (x, g_n)(g_n, g_m) g_m = \sum_{m=1}^{\eta(T)} \mu_m(T)^2 (x, g_m) g_m \\
&= T^* T x.
\end{aligned}$$

Wegen

$$(Sx, y) = \sum_{m=1}^{\eta(T)} \mu_m(T) (x, g_m)(g_m, y) = \Big(x, \sum_{m=1}^{\eta(T)} \mu_m(T) (y, g_m) g_m \Big) = (x, Sy)$$

und

$$(Sx,x)=\sum_{m=1}^{\eta(T)}\mu_m(T)(x,g_m)(g_m,x)=\sum_{m=1}^{\eta(T)}\mu_m(T)|(x,g_m)|^2\geq 0$$

für $x,y\in\mathcal{H}$ ist S selbstadjungiert und positiv. Da die Quadratwurzel eines Operators nach Satz 1.3.2 eindeutig ist, folgt $S=\sqrt{T^*T}=|T|$. Für eine Orthonormalbasis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt gemäß der Parsevalschen Gleichung, Korollar 3.3.4 in [11],

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(|T|b_n,b_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m=1}^{\eta(T)}\mu_m(T)|(g_m,b_n)|^2=\sum_{m=1}^{\eta(T)}\mu_m(T)\left\|g_m\right\|^2=\sum_{m=1}^{\eta(T)}\mu_m(T), \tag{8}$$

wobei wir hier wieder die Summen vertauschen können, da alle Summanden positiv sind. Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}},(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{N}$ und $b_{nm}=(h_m,f_n)(e_n,g_m)$. Wegen

$$(Te_n,f_n)=\sum_{m=1}^{\eta(T)}\mu_m(T)(e_n,g_m)(h_m,f_n)=\sum_{m=1}^{\eta(T)}\mu_m(T)b_{nm}$$

folgt aus Lemma 2.1.4

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}|(Te_n,f_n)|\leq\sum_{m=1}^{\eta(T)}\mu_m(T)\sum_n|b_{nm}|\leq\sum_{m=1}^{\eta(T)}\mu_m(T). \tag{9}$$

Im Fall $f_m=h_m$, $e_n=g_n$ gilt $b_{nm}=\begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$ und $(Te_n,f_n)=\mu_n(T)$ für $1\leq m,n\leq\eta(T)$. In diesem Fall gilt also

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}|(Te_n,f_n)|=\sum_{n=1}^{\eta(T)}\mu_n(T).$$

Obige Gleichung und (9) gemeinsam mit (8) zeigen die Behauptung für kompakte Operatoren. Da nach dem ersten Teil des Beweises die Endlichkeit einer der beiden Summen in (6) die Kompaktheit von T impliziert und diese wiederum die Gleichheit dieser Summen, ist die Aussage auch für beliebige $T\in L_b(\mathcal{H})$ bewiesen.

□

2.1.6 Definition. Für ein $T\in L_b(\mathcal{H})$ und eine Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{H}$ sei

$$\left\|T\right\|_1:=\sum_{n\in\mathbb{N}}(|T|e_n,e_n)\in[0,+\infty].$$

Nach Korollar 2.1.3 ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis. Wir nennen die Menge

$$\mathcal{T}_1(\mathcal{H})=\{T\in L_b(\mathcal{H}):\left\|T\right\|_1<+\infty\} \tag{10}$$

die Spurklasse und ein $T\in\mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ einen Spurklasse-Operator.
Nach Satz 2.1.5 ist jeder Spurklasse-Operator kompakt, also $\mathcal{T}_1(\mathcal{H})\subseteq\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

2.1.7 Proposition. $\mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ ist ein beidseitiges *-Ideal in $L_b(\mathcal{H})$, $\|\cdot\|_1$ ist eine Norm auf $\mathcal{T}_1(\mathcal{H})$, wobei für $T \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ und $S \in L_b(\mathcal{H})$

$$\|T\|_1 = \|T^*\|_1 \ , \quad \|ST\|_1 \leq \|S\| \, \|T\|_1 \ , \quad \|TS\|_1 \leq \|S\| \, \|T\|_1 \ , \quad \|T\| \leq \|T\|_1 \, . \tag{11}$$

Insbesondere ist $(\mathcal{T}_1(\mathcal{H}), \circ, \|\cdot\|_1)$ eine normierte Algebra.

Beweis: Aus Proposition 1.3.5 zusammen mit Satz 2.1.5 folgt die Ideal-Eigenschaft und die ersten 3 (Un-)Gleichungen in (11). Nach Satz 2.1.5 gilt

$$\|T\|_1 = \sup_{g,h \in \mathcal{N}} \sum_m |(Tg_m, h_m)|.$$

Daraus folgt die Dreiecksungleichung, die skalare Multiplikativität und die Positivität von $\|\cdot\|_1$. Für $T = 0$ folgt auch $\|T\|_1 = 0$. Sei $\|T\|_1 = 0$ für ein $T \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$, also

$$\sum_m |(Tg_m, h_m)| = 0 \tag{12}$$

für alle Orthonormalsysteme $g, h \in \mathcal{N}$. Da für alle $x \in \mathcal{H} \backslash \{0\}$ die Menge $\{\frac{1}{\|x\|} x\}$ sich zu einem abzählbaren Orthonormalsystem erweitern lässt, gilt nach (12)

$$\frac{1}{\|x\|^2} |(Tx, x)| = 0$$

für alle $x \in \mathcal{H}$. Nach Lemma 6.6.6 in [11] folgt $T = 0$. Es bleibt $\|T\| \leq \|T\|_1$ zu zeigen. Für ein $x \in \mathcal{H} \backslash \{0\}$ mit $Tx = 0$ folgt trivialerweise $\|Tx\| = 0 \leq \|T\|_1 \, \|x\|$. Im Falle $Tx \neq 0$ sind die Mengen $\{\frac{1}{\|x\|} x\}$ und $\{\frac{1}{\|Tx\|} Tx\}$ Orthonormalsysteme von $\mathcal{H}$. Somit gilt

$$\|Tx\|^2 = |(Tx, Tx)| = \|Tx\| \, \|x\| \left| \left(T(\tfrac{1}{\|x\|} x), \tfrac{1}{\|Tx\|} Tx \right) \right| \leq \|Tx\| \, \|x\| \, \|T\|_1 \, ,$$

woraus

$$\|Tx\| \leq \|T\|_1 \, \|x\|$$

folgt. Für alle $x \in \mathcal{H} \backslash \{0\}$ gilt $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|_1$, also auch $\|T\| \leq \|T\|_1$.

□

2.2 Die Spur eines Operators

Nun wollen wir für Spurklasse-Operatoren die Spur definieren.

2.2.1 Satz. Für ein $T \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ und eine Orthonormalbasis $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist

$$\mathrm{Tr}(T) := \sum_{n \in \mathbb{N}} (T\varphi_n, \varphi_n) \tag{13}$$

absolut konvergent und unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis. Schreibt man T gemäß Satz 1.3.4 wie in (3) und ist $S \in L_b(\mathcal{H})$, so gilt

$$\mathrm{Tr}(TS) = \mathrm{Tr}(ST) = \sum_{m=1}^{\eta(T)} \mu_m(T)(Sf_m, e_m)$$

Beweis: Ist $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis, $(e_m)_{m=1}^{\eta(T)}$, $(f_m)_{m=1}^{\eta(T)}$ Orthonormalsysteme wie in Satz 1.3.4 und $(\mu_m(T))_{m=1}^{\eta(T)}$ die Singulärwerte von T, dann gilt wegen Lemma 2.1.4

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m=1}^{\eta(T)}\mu_m(T)|(Sf_m,\varphi_n)(\varphi_n,e_m)| &= \sum_{m=1}^{\eta(T)}\mu_m(T)\sum_{n\in\mathbb{N}}|(Sf_m,\varphi_n)(\varphi_n,e_m)| \\ &\leq \|S\|\sum_{m=1}^{\eta(T)}\mu_m(T) = \|S\|\,\|T\|_1 < +\infty.\end{aligned}$$

Obige Ungleichung legitimieren die Summenvertauschung in (14). Schreiben wir T wie in (3) mit Orthonormalsystemen $(e_m)_{m=1}^{\eta(T)}$ und $(f_m)_{m=1}^{\eta(T)}$, so gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(ST\varphi_n,\varphi_n) = \sum_{m=1}^{\eta(T)}\mu_m(T)\sum_{n\in\mathbb{N}}(Sf_m,\varphi_n)(\varphi_n,e_m) = \sum_{m=1}^{\eta(T)}\mu_m(T)(Sf_m,e_m). \tag{14}$$

Analog gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}}(TS\varphi_n,\varphi_n) &= \sum_{m=1}^{\eta(T)}\mu_m(T)\sum_{n\in\mathbb{N}}(f_m,\varphi_n)(S\varphi_n,e_m) \\ &= \sum_{m=1}^{\eta(T)}\mu_m(T)\Big(S\big(\sum_{n\in\mathbb{N}}(f_m,\varphi_n)\varphi_n\big),e_m\Big) = \sum_{m=1}^{\eta(T)}\mu_m(T)(Sf_m,e_m).\end{aligned}$$

Insbesondere ist die linke Seite unabhängig von $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für $S=\mathcal{I}$ folgt die Unabhängigkeit von $\mathrm{Tr}(T)$ von $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\square$

Zum Abschluss dieses Kapitels behandeln wir noch einige interessante Dualitäten.

2.2.2 Satz. Es gilt

$$\mathcal{K}(\mathcal{H})' \simeq \mathcal{T}_1(\mathcal{H}) \quad \text{und} \quad \mathcal{T}_1(\mathcal{H})' \simeq L_b(\mathcal{H})$$

mit Isomorphismen

$$\Phi : \mathcal{T}_1(\mathcal{H}) \to \mathcal{K}(\mathcal{H})' : T \mapsto (S \mapsto \mathrm{Tr}(TS))$$

und

$$\Psi : L_b(\mathcal{H}) \to \mathcal{T}_1(\mathcal{H})' : S \mapsto (T \mapsto \mathrm{Tr}(TS))$$

Zusätzlich gilt noch

$$\|\Phi(T)\|_{\mathcal{K}(\mathcal{H})'} = \|T\|_1 \quad \text{und} \quad \|\Psi(S)\|_{\mathcal{T}_1(\mathcal{H})'} = \|S\|. \tag{15}$$

Insbesondere ist $(\mathcal{T}_1(\mathcal{H}),\circ,\|\cdot\|_1)$ eine vollständige normierte Algebra und somit eine Banachalgebra.

Beweis: Wir wollen als erstes (15) beweisen. Wegen Satz 2.2.1 gilt mit den Orthonormalsystemen $(e_m)_{m=1}^{\eta(T)}$ und $(f_m)_{m=1}^{\eta(T)}$

$$\begin{aligned}|\mathrm{Tr}(TS)| &\leq \sum_{m=1}^{\eta(T)} |\mu_m(T)(Sf_m, e_m)| \leq \sum_{m=1}^{\eta(T)} \mu_m(T) \|Sf_m\| \, \|e_m\| \\ &\leq \sum_{m=1}^{\eta(T)} \mu_m(T) \|S\| \, \|f_m\| \, \|e_m\| = \|S\| \sum_{m=1}^{\eta(T)} \mu_m(T) = \|S\| \, \|T\|_1 \, .\end{aligned}$$

Aus der Definition der Spur folgt $\mathrm{Tr}(\alpha T_1 + \beta T_2) = \alpha \mathrm{Tr}(T_1) + \beta \mathrm{Tr}(T_2)$ für alle $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Somit ist auch $\Phi(T)$ bzw. $\Psi(S)$ für alle $T \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ bzw. $S \in L_b(\mathcal{H})$ linear. Diese Tatsache und die obige Abschätzung implizieren $\Phi(\mathcal{T}_1(\mathcal{H})) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H})'$ und $\Psi(L_b(\mathcal{H})) \subseteq \mathcal{T}_1(\mathcal{H})'$ mit $\|\Phi(T)\| \leq \|T\|_1$ und $\|\Psi(S)\| \leq \|S\|$.

Wir schreiben $T \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H})$ wie in (3) und setzen für $m \leq \eta(T)$, $m \in \mathbb{N}$,

$$S_m := \sum_{n=1}^{m} (\cdot, f_n) e_n.$$

Für diese Abbildung gilt $S_m f_j = e_j$, $j = 1, \ldots, m$ und $S_m \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Nach der Bessel-Ungleichung (Satz 3.3.3 in [11]) gilt für ein $x \in \mathcal{H}$ und ein $m \leq \eta(T)$

$$\|S_m x\|^2 = (S_m x, S_m x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \overline{(x, f_j)} (x, f_i)(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{m} |(x, f_i)|^2 \leq \|x\|^2 \, . \tag{16}$$

Da für $x = f_i$ mit $i \in \{1, \ldots, \eta(T)\}$ Gleichheit herrscht, folgt $\|S_m\| = 1$.

Nach Satz 2.2.1 gilt

$$\mathrm{Tr}(TS_m) = \sum_{n=1}^{\eta(T)} \mu_n(T)(S_m f_n, e_n) = \sum_{n=1}^{m} \mu_n(T),$$

womit für $m \to \infty$ $\|\Phi(T)\|_{\mathcal{K}(\mathcal{H})'} = \|T\|_1$ folgt.

Sei $S \in L_b(\mathcal{H})$ beliebig und $e, f \in \mathcal{H}$ mit $\|e\| = \|f\| = 1$. Für $T := (\cdot, f)e$ gilt $T^* = (\cdot, e)f$ und $T^*T = (\cdot, f)f$ mit $(T^*T)(T^*T) = T^*T$, also $|T| = T^*T$. Offenbar hat T^*T nur den Eigenwert 1. Somit gilt

$$\|T\|_1 = 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Tr}(TS) = (Se, f).$$

Nimmt man nun das Supremum über alle $e, f \in \mathcal{H}$ mit $\|e\| = \|f\| = 1$, so folgt $\sup\limits_{\|e\|=\|f\|=1} |\mathrm{Tr}(TS)| = \|S\|$.

Für $\varphi \in \mathcal{K}(\mathcal{H})'$ und $x, y \in \mathcal{H}$ betrachte $R_{x,y} := (\cdot, y)x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ und $\alpha(x, y) := \varphi(R_{x,y})$. Damit ist $\alpha : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform, für die wegen

$$\|(z, y)x\| \leq \|z\| \, \|y\| \, \|x\|$$

die Abschätzung

$$|\alpha(x,y)| \leq \|\varphi\|_{\mathcal{K}(\mathcal{H})'} \|(\cdot,y)x\| \leq \|\varphi\|_{\mathcal{K}(\mathcal{H})'} \|x\| \|y\|$$

gilt. Demnach ist α eine beschränkte Sesquilinearform. Nach dem Satz von Lax-Milgram, Satz 3.2.6 in [11], gibt es ein $T \in L_b(\mathcal{H})$ derart, dass $\alpha(x,y) = (Tx,y)$ für alle $x,y \in \mathcal{H}$. Seien $(e_n)_{n=1}^m$, $(f_n)_{n=1}^m$ Orthonormalsysteme und $(\zeta_n)_{n=1}^m \in \mathbb{C}^m$ mit $(Tf_n, e_n) = e^{i\zeta_n}|(Tf_n,e_n)|$ für alle $n \leq m$. Für $S := \sum_{n=1}^m (\cdot, e^{i\zeta_n} e_n) f_n \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ gilt wegen (16) $\|S\| = 1$. Es folgt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^m |(Tf_n,e_n)| = \sum_{n=1}^m (Tf_n, e^{i\zeta_n} e_n) &= \varphi\Big(\sum_{n=1}^m (\cdot, e^{i\zeta_n} e_n) f_n\Big) \\ &= |\varphi(S)| \leq \|\varphi\|_{\mathcal{K}(\mathcal{H})'} \|S\| = \|\varphi\|_{\mathcal{K}(\mathcal{H})'}\end{aligned}$$

Für $m \to \infty$ folgt aus der Beliebigkeit der Orthonormalsysteme wegen Satz 2.1.7

$$\|T\|_1 \leq \|\varphi\|_{\mathcal{K}(\mathcal{H})'} < +\infty,$$

also $T \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$.
Sei $S \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ beliebig. Schreiben wir S und T gemäß ihrer Singulärwertzerlegung, Satz 1.3.4, in der Form

$$S = \sum_{n=1}^{\eta(S)} \mu_n(S)(\cdot, g_n)h_n \ , \quad T = \sum_{n=1}^{\eta(T)} \mu_n(T)(\cdot, e_n)f_n,$$

so folgt mit Satz 2.2.1

$$\begin{aligned}\varphi(S) &= \sum_{n=1}^{\eta(S)} \mu_n(S)\varphi((\cdot,g_n)h_n) = \sum_{n=1}^{\eta(S)} \mu_n(S)(Th_n,g_n) = \sum_{n=1}^{\eta(S)}\sum_{m=1}^{\eta(T)} \mu_n(S)\mu_m(T)(h_n,e_n)(f_m,g_n) \\ &= \sum_{m=1}^{\eta(T)} \mu_m(T)\Bigg(\sum_{n=1}^{\eta(S)} \mu_n(S)(f_m,g_n)h_n, e_m\Bigg) = \sum_{m=1}^{\eta(T)} \mu_n(T)(Sf_m,e_m) = \mathrm{Tr}(TS)\end{aligned}$$

Wobei die Summenvertauschung wieder durch Lemma 2.1.4 legitimiert ist. Somit gilt $\mathcal{K}(\mathcal{H})' = \Phi(\mathcal{T}_1(\mathcal{H}))$, wobei $\|\varphi\| = \|\Phi(T)\| \leq \|T\|_1 \leq \|\varphi\|$.
Sei $\varphi \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})'$ und für $x,y \in \mathcal{H}$ betrachte wieder $R_{x,y} := (\cdot,y)x \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ und $\alpha(x,y) := \varphi(R_{x,y})$. Da $\frac{1}{\|x\|}x$ und $\frac{1}{\|y\|}y$ Orthonormalsysteme sind, hat $R_{x,y}$ die eindeutige Singulärwertzerlegung

$$R_{x,y} = (\cdot,y)x = \|x\| \|y\| (\cdot, \tfrac{1}{\|y\|}y)\tfrac{1}{\|x\|}x.$$

Somit gilt $\|R_{x,y}\|_1 = \|x\| \|y\|$ und wir erhalten

$$|\alpha(x,y)| = |\varphi(R_{x,y})| \leq \|\varphi\|_{\mathcal{T}_1(\mathcal{H})'} \|R_{x,y}\|_1 = \|\varphi\|_{\mathcal{T}_1(\mathcal{H})'} \|x\| \|y\| .$$

Wieder mit dem Satz von Lax-Milgram gibt es ein $S \in L_b(\mathcal{H})$ mit $\|S\| \leq \|\varphi\|_{\mathcal{T}_1(\mathcal{H})'}$ und $\alpha(x,y) = (Sx,y)$ für alle $x,y \in \mathcal{H}$. Schreiben wir $T \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ wie in (3) und bemerken, dass wegen $\|T\| \leq \|T\|_1$ das Funktional φ auch bezüglich der Abbildungsnorm stetig ist, dann folgt

$$\varphi(T) = \sum_{m=1}^{\eta(T)} \mu_m(T)\varphi((\cdot, e_m)f_m) = \sum_{m=1}^{\eta(T)} \mu_m(T)(Sf_m, e_m) = \mathrm{Tr}(TS).$$

Somit gilt $\mathcal{T}_1(\mathcal{H})' \subseteq \Psi(L_b(\mathcal{H}))$, wobei $\|\varphi\| = \|\Psi(S)\| \leq \|S\| \leq \|\varphi\|$.

$\square$

3 Determinanten

Bevor wir beginnen, mit Determinanten zu arbeiten, benötigen wir das algebraische Konzept der äußeren Algebra. Danach werden wir Determinanten für eine spezielle Klasse von Operatoren definieren, und einige Eigenschaften nachweisen, die für endlichdimensionale Matrizen aus der linearen Algebra bekannt sind.

3.1 Das Tensorprodukt von Hilberträumen

Wir konstruieren das Tensorprodukt auf Basis von Satz 3.3.3 in [11], der besagt, dass ein Hilbertraum mit einer Orthonormalbasis $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ mittels der Abbildung $x \mapsto ((x, e_\alpha))_{\alpha\in A}$ isometrisch isomorph in den Raum der komplexwertigen und quadratsummierbaren Folgen $\ell^2(A, \mathbb{C})$ überführt wird. Nach Satz 1.1.3 ist ein separabler Hilbertraum isometrisch isomorph zu $\ell^2(\mathbb{N})$. Diese Interpretation eines Hilbertraums motiviert die folgende Definition.

3.1.1 Definition. Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren den n-fachen Tensorprodukthilbertraum von $\mathcal{H}$ als

$$\bigotimes^n \mathcal{H} := \ell^2(\mathbb{N}^n) = \{(a_{(i_1,\dots,i_n)})_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n} : \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n} |a_{(i_1,\dots,i_n)}|^2 < +\infty\}$$

versehen mit dem üblichen ℓ^2 Skalarprodukt. Für $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ definieren wir

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n := \Big(\prod_{k=1}^n (x_k, e_{i_k})\Big)_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n}.$$

In diesem Kapitel wird $\mathcal{H}$ immer als separabler Hilbertraum mit Orthonormalbasis $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$, bezüglich der wir $\mathcal{H}$ mit $\ell^2(\mathbb{N})$ identifizieren, vorausgesetzt. Im Folgenden schreiben wir $I = (i_1, \dots, i_n)$ für ein Tupel aus $\mathbb{N}^n$.

3.1.2 Proposition.

a) Für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ ist $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in \bigotimes^n \mathcal{H}$ und es gilt $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = \prod_{k=1}^n (x_k, y_k)$ für alle $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathcal{H}$.

b) Die Abbildung

$$\bigotimes^n : \mathcal{H}^n \to \bigotimes^n \mathcal{H} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$$

ist linear und stetig in jedem Argument und stetig als Abbildung von $\mathcal{H}^n$ nach $\bigotimes^n \mathcal{H}$, wobei wir $\mathcal{H}^n$ mit dem Summenskalarprodukt versehen.

c) Ist $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$, dann ist $\{f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_n} : (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n\}$ eine Orthonormalbasis von $\bigotimes^n \mathcal{H}$. Insbesondere liegt $\operatorname{span}(\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}\})$ dicht in $\bigotimes^n \mathcal{H}$.

Beweis:
ad a): Wegen Korollar 3.3.4 in [11] gilt

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}(x_k,y_k) &= (x_1,y_1)\dots(x_n,y_n) = \Big(\sum_{i_1\in\mathbb{N}}(x_1,e_{i_1})e_{i_1},y_1\Big)\dots\Big(\sum_{i_n\in\mathbb{N}}(x_n,e_{i_n})e_{i_n},y_n\Big)\\ &= \Big(\sum_{i_1\in\mathbb{N}}(x_1,e_{i_1})(e_{i_1},y_1)\Big)\dots\Big(\sum_{i_n\in\mathbb{N}}(x_n,e_{i_n})(e_{i_n},y_n)\Big).\end{aligned}$$

Da alle Summen in obiger Gleichung wegen Satz 3.3.3 in [11] absolut konvergieren, kommt es nicht auf die Reihenfolge der Summanden an und wir erhalten

$$\prod_{k=1}^{n}(x_k,y_k) = \sum_{I\in\mathbb{N}^n}(x_1,e_{i_1})(y_1,e_{i_1})\cdot\dots\cdot(x_n,e_{i_n})(x_n,e_{i_n}) = \sum_{I\in\mathbb{N}^n}\prod_{k=1}^{n}(x_k,e_{i_k})\cdot\overline{\prod_{k=1}^{n}(y_k,e_{i_k})}.$$

Daraus folgt für $x_k=y_k$, $k\in\{1,\dots,n\}$,

$$\prod_{k=1}^{n}\|x_k\|^2 = \sum_{I\in\mathbb{N}^n}\prod_{k=1}^{n}|(x_k,e_{i_k})|^2 = \|x_1\otimes\dots\otimes x_n\|^2, \tag{17}$$

woraus wir $x_1\otimes\dots\otimes x_n\in\bigotimes^n\mathcal{H}$ für alle $x_1,\dots,x_n\in\mathcal{H}$ erhalten. Schließlich folgt aus dem vorher Gezeigten

$$\begin{aligned}(x_1\otimes\dots\otimes x_n, y_1\otimes\dots\otimes y_n) &= \Bigg(\Big(\prod_{k=1}^{n}(x_k,e_{i_k})\Big)_{I\in\mathbb{N}^n},\Big(\prod_{k=1}^{n}(y_k,e_{i_k})\Big)_{I\in\mathbb{N}^n}\Bigg)\\ &= \sum_{I\in\mathbb{N}^n}\prod_{k=1}^{n}(x_k,e_{i_k})\cdot\overline{\prod_{k=1}^{n}(y_k,e_{i_k})}\\ &= \Big(\sum_{i_1\in\mathbb{N}}(x_1,e_{i_1})(e_{i_1},y_1)\Big)\dots\Big(\sum_{i_n\in\mathbb{N}}(x_n,e_{i_n})(e_{i_n},y_n)\Big)\\ &= \prod_{k=1}^{n}(x_k,y_k).\end{aligned}$$

ad b): Die komponentenweise Linearität ist offensichtlich und die komponentenweise Stetigkeit folgt aus (17). Sei $x_1^m,\dots,x_n^m,x_1,\dots,x_n\in\mathcal{H}$, $m\in\mathbb{N}$ derart, dass $\big((x_1^m,\dots,x_n^m)\big)_{m\in\mathbb{N}}$ bezüglich der Summennorm gegen $(x_1,\dots,x_n)$ konvergiert. Wir erhalten für ein $i\in\{1,\dots,n\}$ wegen

$$\|x_i^m-x_i\|^2 \le \sum_{j=1}^{n}\left\|x_j^m-x_j\right\|^2 = \|(x_1^m,\dots,x_n^m)-(x_1,\dots,x_n)\|_{\mathcal{H}^n}^2 \to 0,$$

dass $x_i^m\to x_i$ in $\mathcal{H}$. Wegen a) folgt

$$\begin{aligned}\left\|\bigotimes^n(x_1^m,\dots,x_n^m)-\bigotimes^n(x_1,\dots,x_n)\right\|^2 &= \|x_1^m\otimes\dots\otimes x_n^m - x_1\otimes\dots\otimes x_n\|^2\\ &= \|x_1^m\otimes\dots\otimes x_n^m\|^2+\|x_1\otimes\dots\otimes x_n\|^2\\ &\quad -2\cdot\mathrm{Re}\big((x_1^m\otimes\dots\otimes x_n^m, x_1\otimes\dots\otimes x_n)\big)\\ &= \prod_{j=1}^{n}\|x_j^m\|^2+\prod_{j=1}^{n}\|x_j\|^2-2\cdot\mathrm{Re}\Big(\prod_{j=1}^{n}(x_j^m,x_j)\Big),\end{aligned}$$

womit wir aus der Stetigkeit von $(\cdot,\cdot)$

$$\lim_{m\to\infty}\left\|\bigotimes^n(x_1^m,\dots,x_n^m)-\bigotimes^n(x_1,\dots,x_n)\right\|^2=2\cdot\prod_{j=1}^n\|x_j\|^2-2\cdot\mathrm{Re}\Big(\prod_{j=1}^n(x_j,x_j)\Big)=0$$

erhalten.

ad c): Für eine Orthonormalbasis $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gilt nach a)

$$(f_{i_1}\otimes\cdots\otimes f_{i_n},f_{j_1}\otimes\cdots\otimes f_{j_n})=\prod_{k=1}^n(f_{i_k},f_{j_k}).$$

Obiges Produkt ist nur für $I=J$ ungleich 0 und in diesem Fall gleich 1. Zunächst wollen wir zeigen, dass für die spezielle Orthonormalbasis $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ das orthogonale Komplement der Menge $E:=\{e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}:i_1,\dots,i_n\in\mathbb{N}^n\}$ nur aus dem Nullvektor besteht. Für ein $(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\in E^\perp$ gilt für alle $J\in\mathbb{N}^n$

$$0=\big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n},e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_n}\big)=\sum_{I\in\mathbb{N}^n}a_I\prod_{k=1}^n(e_{i_k},e_{j_k})=a_J,$$

woraus $(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}=0$ und damit $E^\perp=\{0\}$ folgt. Nach Korollar 3.3.4 in [11] ist $\{e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}:I\in\mathbb{N}^n\}$ eine Orthonormalbasis in $\bigotimes^n\mathcal{H}$. Wegen $\mathrm{span}(E)\subseteq\{x_1\otimes\cdots\otimes x_n:x_1,\dots,x_n\in\mathcal{H}\}$ liegt mit $\mathrm{span}(E)$ auch die Menge $\mathrm{span}(\{x_1\otimes\cdots\otimes x_n:x_1,\dots,x_n\in\mathcal{H}\})$ dicht in $\bigotimes^n\mathcal{H}$.

Wir wollen nun zeigen, dass für eine beliebige Orthonormalbasis $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ die lineare Hülle der Menge $F:=\{f_{i_1}\otimes\cdots\otimes f_{i_n}:(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n\}$ dicht in $\bigotimes^n\mathcal{H}$ liegt. Für $x_1,\dots,x_n\in\mathcal{H}$ und $k\in\{1,\dots,n\}$ gilt

$$x_k=\sum_{i_k\in\mathbb{N}}(x_k,f_{i_k})f_{i_k}.$$

Wegen a) und b) folgt

$$\begin{aligned}x_1\otimes\cdots\otimes x_n&=\Big(\sum_{i_1\in\mathbb{N}}(x_1,f_{i_1})f_{i_1}\Big)\otimes\cdots\otimes\Big(\sum_{i_n\in\mathbb{N}}(x_n,f_{i_n})f_{i_n}\Big)\\&=\sum_{i_1\in\mathbb{N}}\cdots\sum_{i_n\in\mathbb{N}}\prod_{k=1}^n(x_k,f_{i_k})\cdot(f_{i_1}\otimes\cdots\otimes f_{i_n})\in\overline{\mathrm{span}(F)}\end{aligned}$$

und infolge $\mathrm{span}(\{x_1\otimes\cdots\otimes x_n:x_1,\dots,x_n\in\mathcal{H}\})\subseteq\overline{\mathrm{span}(F)}$, womit $\mathrm{span}(F)$ dicht in $\bigotimes^n\mathcal{H}$ liegt.

□

3.1.3 Satz. Für ein $T\in L_b(\mathcal{H})$ gibt es eine eindeutige Abbildung $\bigotimes^n T\in L_b(\bigotimes^n\mathcal{H})$ mit

$$\bigotimes^n T(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)=Tx_1\otimes\cdots\otimes Tx_n \tag{18}$$

für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$. Für diese Abbildung gilt $\|\bigotimes^n T\| \leq \|T\|^n$ und $\bigotimes^n (ST) = \left(\bigotimes^n S\right)\left(\bigotimes^n T\right)$, wobei $S \in L_b(\mathcal{H})$.

Beweis: Im Folgenden identifizieren wir $\mathcal{H}$ mit $\ell^2(\mathbb{N})$ und betrachten T als Element von $L_b\big(\ell^2(\mathbb{N})\big)$. Für $k \in \{1, \dots n\}$ definieren wir die lineare Abbildung $T_k : \bigotimes^n \mathcal{H} \to \bigotimes^n \mathcal{H}$ durch

$$T_k\big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\big) := (b_I)_{I\in\mathbb{N}^n},$$

wobei

$$(b_{(i_1,\dots,i_{k-1},i,i_{k+1},\dots,i_n)})_{i\in\mathbb{N}} = T\big((a_{(i_1,\dots,i_{k-1},i,i_{k+1},\dots,i_n)})_{i\in\mathbb{N}}\big)$$

für alle $i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots i_n \in \mathbb{N}$. Wir wollen zeigen, dass die Abbildung T_k wohldefiniert, linear und beschränkt ist. Für $(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n} \in \bigotimes^n \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned}\left\|(a_{(i_1,\dots,i_{k-1},i,i_{k+1},\dots,i_n)})_{i\in\mathbb{N}}\right\|^2 &= \sum_{i\in\mathbb{N}} |a_{(i_1,\dots,i_{k-1},i,i_{k+1},\dots,i_n)}|^2 \\ &\leq \sum_{I\in\mathbb{N}^n} |a_I|^2 = \|(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\|^2 < +\infty,\end{aligned}$$

weshalb $(b_I)_{I\in\mathbb{N}^n} := T_k\big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\big)$ wohldefiniert ist, wobei

$$\begin{aligned}\left\|T_k\big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\big)\right\|^2 &= \sum_{\substack{i_j\in\mathbb{N}\\ j\neq k}} \sum_{i\in\mathbb{N}} |b_{(i_1,\dots,i_{k-1},i,i_{k+1},\dots,i_n)}|^2 \\ &= \sum_{\substack{i_j\in\mathbb{N}\\ j\neq k}} \left\|T\big((a_{(i_1,\dots,i_{k-1},i,i_{k+1},\dots,i_n)})_{i\in\mathbb{N}}\big)\right\|^2 \\ &\leq \|T\|^2 \sum_{\substack{i_j\in\mathbb{N}\\ j\neq k}} \left\|(a_{(i_1,\dots,i_{k-1},i,i_{k+1},\dots,i_n)})_{i\in\mathbb{N}}\right\|^2 \\ &= \|T\|^2 \sum_{\substack{i_j\in\mathbb{N}\\ j\neq k}} \sum_{i\in\mathbb{N}} |a_{(i_1,\dots,i_{k-1},i,i_{k+1},\dots,i_n)}|^2 \\ &\leq \|T\|^2 \|(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\|^2 .\end{aligned}$$

Also ist das offenbar lineare T_k beschränkt mit $\|T_k\| \leq \|T\|$. Definieren wir

$$\bigotimes^n T := T_1 \circ \cdots \circ T_n,$$

so ist mit $T_1, \dots, T_n$ auch $\bigotimes^n T$ wohldefiniert, linear und beschränkt mit $\|\bigotimes^n T\| \leq \|T\|^n$.

Für $k \in \{1, \dots, n\}$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ sei $(b_I)_{I\in\mathbb{N}^n} \in \bigotimes^n \mathcal{H}$ derart, dass $T_k(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (b_i)_{I\in\mathbb{N}^n}$. Für $i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(b_{i_1,\dots,i_{k-1},i,i_{k+1},\dots,i_n})_{i\in\mathbb{N}} = T\bigg(\Big((x_k, e_i) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n (x_j, e_{i_j})\Big)_{i\in\mathbb{N}}\bigg) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n (x_j, e_{i_j}) T\big((x_k, e_i)_{i\in\mathbb{N}}\big).$$

Gemäß Korollar 3.3.4 in [11] identifizieren wir $(x_k, e_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ mit $x_k \in \mathcal{H}$ und $Tx_k \in \mathcal{H}$ mit $(Tx_k, e_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$. Wir erhalten

$$(b_{i_1,\dots,i_{k-1},i,i_{k+1},\dots,i_n})_{i\in\mathbb{N}} = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} (x_j, e_{i_j})(Tx_k, e_i)_{i\in\mathbb{N}},$$

woraus

$$T_k(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (b_I)_{I\in\mathbb{N}^n} = x_1 \otimes \dots x_{k-1} \otimes Tx_k \otimes x_{k+1} \otimes \cdots \otimes x_n$$

und schließlich

$$\bigotimes^n T(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (T_1 \circ \cdots \circ T_n)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = Tx_1 \otimes \cdots \otimes Tx_n$$

folgt. Ist $R \in L_b(\bigotimes^n \mathcal{H})$ ein weiterer Operator mit $R(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = Tx_1 \otimes \cdots \otimes Tx_n$ für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$, so stimmen die linearen und stetigen Operatoren R und $\bigotimes^n T$ auf der Menge $\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}\}$ überein. Daraus folgt, dass sie auch auf der Menge $\overline{\operatorname{span}(\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}\})} = \bigotimes^n \mathcal{H}$ überein.

Ist $S \in L_b(\mathcal{H})$ ein weiterer beschränkter Operator, so gilt für $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}\Big(\bigotimes^n S\Big)\Big(\bigotimes^n T\Big)(x_1 \otimes \dots x_n) &= \Big(\bigotimes^n S\Big)(Tx_1 \otimes \cdots \otimes Tx_n)\\ &= STx_1 \otimes \cdots \otimes STx_n\\ &= \bigotimes^n (ST)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n).\end{aligned}$$

Da $\left(\bigotimes^n S\right)\left(\bigotimes^n T\right)$ und $\bigotimes^n (ST)$ nach dem ersten Beweisschritt linear und stetig sind, stimmen die Operatoren auch auf $\overline{\operatorname{span}(\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}\})} = \bigotimes^n \mathcal{H}$ überein.

$\square$

Wir wollen zeigen für eine Abbildung T aus der Spurklasse der Operator $\bigotimes^n T$ ebenfalls ein Spurklasse-Operator ist. Hierfür benötigen wir folgendes

3.1.4 Lemma. Für $T \in L_b(\mathcal{H})$ gilt $\left(\bigotimes^n T\right)^* = \bigotimes^n (T^*)$. Ist T positiv, so ist auch $\bigotimes^n T$ positiv und es gilt $\sqrt{\bigotimes^n T} = \bigotimes^n \sqrt{T}$. Insbesondere gilt $\left|\bigotimes^n T\right| = \bigotimes^n |T|$.

Beweis: Für $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned}\Big(\bigotimes^n T(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n), y_1 \otimes \cdots \otimes y_n\Big) &= \big(Tx_1 \otimes \cdots \otimes Tx_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n\big)\\ &= \prod_{k=1}^{n} (Tx_k, y_k) = \prod_{k=1}^{n} (x_k, T^* y_k)\\ &= (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, T^* y_1 \otimes \cdots \otimes T^* y_n)\\ &= \Big(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, \bigotimes^n (T^*)(y_1 \otimes \cdots \otimes y_n)\Big).\end{aligned}$$

Da die Adjungierte eindeutig und die lineare Hülle von $\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{H}\}$ dicht in $\bigotimes^n \mathcal{H}$ ist, folgt $\big(\bigotimes^n T\big)^* = \bigotimes^n \big(T^*\big)$.

Ist T zusätzlich positiv, dann existiert die Quadratwurzel $\sqrt{T}$ von T. Für $(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}$ gilt nach Satz 3.1.3 und dem vorherigen Beweisschritt

$$\begin{aligned}
\Big(\bigotimes^n T((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}), (a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\Big) &= \Big(\bigotimes^n (\sqrt{T}\sqrt{T})((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}), (a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\Big) \\
&= \Big((\bigotimes^n \sqrt{T})(\bigotimes^n \sqrt{T})((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}), (a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\Big) \\
&= \Big(\bigotimes^n \sqrt{T}((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}), (\bigotimes^n \sqrt{T})^*((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n})\Big) \\
&= \Big(\bigotimes^n \sqrt{T}((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}), \bigotimes^n \sqrt{T}((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n})\Big) \\
&= \Big\|\bigotimes^n \sqrt{T}((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n})\Big\|^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

womit $\bigotimes^n T$ und folglich auch $\bigotimes^n \sqrt{T}$ positiv sind. Wegen der Eindeutigkeit der Quadratwurzel gilt folgt aus

$$\bigotimes^n \sqrt{T} \bigotimes^n \sqrt{T} = \bigotimes^n \big(\sqrt{T}\sqrt{T}\big) = \bigotimes^n T$$

die Beziehung $\sqrt{\bigotimes^n T} = \bigotimes^n \sqrt{T}$.

□

3.1.5 Proposition. Für ein $T \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ ist $\bigotimes^n T \in \mathcal{T}_1\big(\bigotimes^n \mathcal{H}\big)$ mit

$$\mathrm{Tr}\Big(\bigotimes^n T\Big) = \mathrm{Tr}(T)^n.$$

Beweis: Für eine Orthonormalbasis $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gilt wegen Proposition 3.1.2 und Lemma 3.1.4

$$\begin{aligned}
\Big\|\bigotimes^n T\Big\|_1 &= \sum_{J\in\mathbb{N}^n} \Big(\big|\bigotimes^n T\big|(f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_n}), f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_n}\Big) \\
&= \sum_{J\in\mathbb{N}^n} (|T|f_{j_1} \otimes \cdots \otimes |T|f_{j_n}, f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_n}) \\
&= \sum_{J\in\mathbb{N}^n} \prod_{k=1}^{n} (|T|f_{j_k}, f_{j_k}) \\
&= \sum_{j_1\in\mathbb{N}} (|T|f_{j_1}, f_{j_1}) \cdots \sum_{i_n\in\mathbb{N}} (|T|f_{j_n}, f_{j_n}) \\
&= \|T\|_1^n < +\infty.
\end{aligned}$$

Substituieren wir in obiger Rechnung T für $|T|$, so erhalten wir $\mathrm{Tr}\big(\bigotimes^n T\big) = \mathrm{Tr}(T)^n$.

□

3.2 Die äußere Algebra

Bevor wir den Begriff der äußeren Algebra einführen, benötigen wir einige Aussagen über die symmetrische Gruppe Σ_n.

3.2.1 Bemerkung. Die symmetrische Gruppe ist die Menge aller Permutationen der Menge $\{1, \dots, n\}$, also $\Sigma_n = \{\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} : \pi \text{ bijektiv}\}$. Die Signatur einer Permutation $\pi \in \Sigma_n$ ist definiert durch $\operatorname{sgn}(\pi) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}$. Ist die Anzahl der Fehlstände von π, also die Anzahl der Paare $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ mit $i < j$ und $\pi(i) > \pi(j)$, eine gerade Zahl, so ist $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$, anderenfalls $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$. Die Symmetrische Gruppe ist mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe mit der Identität $\mathcal{I}_{\Sigma_n}$ als neutralem Element und die Abbildung $\operatorname{sgn} : \Sigma_n \to \{-1, 1\}$ ein Gruppenhomomorphismus in die multiplikative Gruppe $\{-1, 1\}$. Es gilt also für $\pi, \tau \in \Sigma_n$ die Beziehung $\operatorname{sgn}(\pi \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\tau)$. Daraus folgt $\operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi \circ \pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\mathcal{I}_{\Sigma_n}) = 1$, weshalb $\operatorname{sgn}(\pi) = \operatorname{sgn}(\pi^{-1})$ für alle $\pi \in \Sigma_n$.

3.2.2 Definition. Für ein $\pi \in \Sigma_n$ definieren wir die linearen Abbildungen $\sigma_\pi : \bigotimes^n \mathcal{H} \to \bigotimes^n \mathcal{H}$ durch

$$\sigma_\pi\big((a_{(i_1,\dots,i_n)})_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n}\big) = (a_{(i_{\pi(1)},\dots,i_{\pi(n)})})_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n}$$

und $\mathcal{A}_n : \bigotimes^n \mathcal{H} \to \bigotimes^n \mathcal{H}$ durch

$$\mathcal{A}_n\big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\big) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}(\pi)\sigma_\pi\big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\big).$$

Die äußere Algebra von $\mathcal{H}$ ist definiert durch

$$\bigwedge^n \mathcal{H} := \{(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n} \in \bigotimes^n \mathcal{H} : \sigma_\pi\big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\big) = \operatorname{sgn}(\pi)(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n} \text{ für alle } \pi \in \Sigma_n\}.$$

Für $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ und $T \in L_b(\mathcal{H})$ definieren wir weiters

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n := \sqrt{n!}\mathcal{A}_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$$

und

$$\bigwedge^n T := \mathcal{A}_n \circ \Big(\bigotimes^n T\Big)\Big|_{\bigwedge^n \mathcal{H}}$$

Im Folgenden wird für $\pi \in \Sigma_n$ der Ausdruck $I \circ \pi$ immer für das Tupel $(i_{\pi(1)}, \dots, i_{\pi(n)}) \in \mathbb{N}^n$ stehen.

3.2.3 Bemerkung. Für $x_1, \dots, x_n$ und $\pi \in \Sigma_n$ gilt

$$\begin{aligned}\sigma_\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \sigma_\pi\Bigg(\Big(\prod_{k=1}^n (x_k, e_{i_k})\Big)_{I\in\mathbb{N}^n}\Bigg) = \Big(\prod_{k=1}^n (x_k, e_{i_{\pi(k)}})\Big)_{I\in\mathbb{N}^n} \\ &= \Big(\prod_{k=1}^n (x_{\pi^{-1}(k)}, e_{i_k})\Big)_{I\in\mathbb{N}^n} = x_{\pi^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\pi^{-1}(n)}.\end{aligned}$$

Weiters ist es leicht zu sehen, dass σ_π eine unitäre Abbildung von $\bigotimes^n \mathcal{H}$ in sich selbst ist. Für $\pi, \tau \in \Sigma_n$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned}(\sigma_\pi \circ \sigma_\tau)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sigma_\pi(x_{\tau^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau^{-1}(n)}) &= \Big(\prod_{k=1}^n (x_{\tau^{-1}(k)}, e_{i_{\pi(k)}})\Big)_{I\in\mathbb{N}^n} \\ &= \Big(\prod_{k=1}^n (x_{\tau^{-1}\left(\pi^{-1}(k)\right)}, e_{i_k})\Big)_{I\in\mathbb{N}^n} = x_{(\pi\circ\tau)^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{(\pi\circ\tau)^{-1}(n)} \\ &= \sigma_{\pi\circ\tau}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n).\end{aligned}$$

Demnach stimmen die beiden linearen und stetigen Abbildungen $\sigma_\pi \circ \sigma_\tau$ und $\sigma_{\pi\circ\tau}$ auf der Teilmenge $\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}\}$ überein, womit sie auch auf $\operatorname{span}(\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}\}) = \bigotimes^n \mathcal{H}$ übereinstimmen.

3.2.4 Proposition.

a) $\mathcal{A}_n$ ist die orthogonale Projektion auf $\bigwedge^n \mathcal{H}$, wobei $\mathcal{A}_n \circ \sigma_\pi = \sigma_\pi \circ \mathcal{A}_n = \operatorname{sgn}(\pi)\mathcal{A}_n$ für alle $\pi \in \Sigma_n$. Insbesondere gilt für $\pi \in \Sigma_n$ und $x_1, \dots, x_n$, dass $x_{\pi^{-1}(1)} \wedge \cdots \wedge x_{\pi^{-1}(n)} = \operatorname{sgn}(\pi)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)$.

b) Gibt es für $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ ein i und ein j aus $\mathbb{N}$ mit $i \neq j$ und $x_i = x_j$, so folgt $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = 0$. Ist $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine linear abhängige Teilmenge von $\mathcal{H}$, so gilt $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = 0$.

Beweis: *ad a)*: Für ein $(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n} \in \bigotimes^n \mathcal{H}$ gilt wegen Bemerkung 3.2.1 und Bemerkung 3.2.3

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n^2((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}) = \mathcal{A}_n(\mathcal{A}_n((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n})) &= \mathcal{A}_n\Bigg(\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}(\pi)\sigma_\pi\big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\big)\Bigg) \\ &= \frac{1}{(n!)^2}\sum_{\tau\in\Sigma_n}\sum_{\pi\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}(\tau\circ\pi)\sigma_{\tau\circ\pi}\big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\big).\end{aligned}$$

Für festes $\pi, \tau \in \Sigma_n$ gilt $\tau \circ \pi = (\tau \circ \alpha) \circ (\alpha^{-1} \circ \pi)$ für alle $\alpha \in \Sigma_n$. Dieser Summand kommt daher in obiger Doppelsumme genau $\big|\Sigma_n\big| = n!$ mal vor. Da die Abbildung $\pi \mapsto \tau \circ \pi$ eine Bijektion von Σ_n nach Σ_n ist, können wir die Substitution $\alpha = \tau \circ \pi$ einführen und gleiche Summanden zusammenfassen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n^2((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}) &= \frac{n!}{(n!)^2}\sum_{\alpha\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}(\alpha)\sigma_\alpha\big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\big) \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{\alpha\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}(\alpha)\sigma_\alpha\big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\big) \\ &= \mathcal{A}_n((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}).\end{aligned}$$

Weiters gilt für $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
\big(\mathcal{A}_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n), y_1 \otimes \cdots \otimes y_n\big) &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\pi)(x_{\pi^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\pi^{-1}(n)}, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{k=1}^{n} (x_{\pi^{-1}(k)}, y_k) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) \prod_{k=1}^{n} (x_k, y_{\pi(k)}) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{k=1}^{n} (x_k, y_{\tau^{-1}(k)}) \\
&= \big(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, \mathcal{A}_n(y_1 \otimes \cdots \otimes y_n)\big),
\end{aligned}$$

womit wegen der Dichtheit von $\operatorname{span}(\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}\})$ in $\bigotimes^n \mathcal{H}$ der Operator $\mathcal{A}_n$ selbstadjungiert und dadurch eine orthogonale Projektion ist.

Für ein $(a_I)_{I \in \mathbb{N}^n} \in \bigotimes^n \mathcal{H}$ und ein $\tau \in \Sigma_n$ gilt

$$\sigma_\tau\big(\mathcal{A}_n((a_I)_{I \in \mathbb{N}^n})\big) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\pi) \sigma_\tau\big(\sigma_\pi((a_I)_{I \in \mathbb{N}^n})\big) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\pi) \sigma_{\tau \circ \pi}\big((a_I)_{I \in \mathbb{N}^n}\big).$$

Substituieren wir $\alpha = \tau \circ \pi$, so erhalten wir

$$\sigma_\tau\big(\mathcal{A}_n((a_I)_{I \in \mathbb{N}^n})\big) = \operatorname{sgn}(\tau) \frac{1}{n!} \sum_{\alpha \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\alpha) \sigma_\alpha\big((a_I)_{I \in \mathbb{N}^n}\big) = \operatorname{sgn}(\tau) \mathcal{A}_n((a_I)_{I \in \mathbb{N}^n}), \tag{19}$$

und somit $\mathcal{A}_n((a_I)_{I \in \mathbb{N}^n}) \in \bigwedge^n \mathcal{H}$.

Für ein $(a_I)_{I \in \mathbb{N}^n} \in \bigwedge^n \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_n\big((a_I)_{I \in \mathbb{N}^n}\big) &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\pi) \sigma_\pi((a_I)_{I \in \mathbb{N}^n}) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\pi)^2 (a_I)_{I \in \mathbb{N}^n} \\
&= \frac{1}{n!} \Big(\sum_{\pi \in \Sigma_n} 1\Big) (a_I)_{I \in \mathbb{N}^n} = \frac{n!}{n!} (a_I)_{I \in \mathbb{N}^n} = (a_I)_{I \in \mathbb{N}^n}.
\end{aligned}$$

Also gilt $\bigwedge^n \mathcal{H} = \operatorname{ran}(\mathcal{A}_n)$.

Für ein $(a_I)_{I \in \mathbb{N}^n}$ und ein $\tau \in \Sigma_n$ gilt nach Bemerkung 3.2.3

$$\mathcal{A}_n\big(\sigma_\tau((a_I)_{I \in \mathbb{N}^n})\big) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\pi) \sigma_{\pi \circ \tau}\big((a_I)_{I \in \mathbb{N}^n}\big).$$

Da $\pi \circ \tau$ für $\pi \in \Sigma_n$ ganz Σ_n durchläuft, erhalten wir mit der Substitution $\alpha = \pi \circ \tau$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_n\big(\sigma_\tau((a_I)_{I \in \mathbb{N}^n})\big) &= \frac{1}{n!} \sum_{\alpha \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\alpha \circ \tau^{-1}) \sigma_\alpha\big((a_I)_{I \in \mathbb{N}^n}\big) \\
&= \operatorname{sgn}(\tau) \mathcal{A}_n((a_I)_{I \in \mathbb{N}^n}).
\end{aligned}$$

ad b): Sei $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ mit $x_j = x_i$ für ein j und ein i in $\mathbb{N}$ mit $i \neq j$. Sei $\tau \in \Sigma_n$ die Permutation, die i und j vertauscht und die restlichen Elemente gleich lässt. Für diese Permutation gilt $\tau^{-1} = \tau$, $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$ und $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n = \sigma_\tau(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$. Für ein $\alpha \in \Sigma_n$ mit $\mathrm{sgn}(\alpha) = -1$ gilt $\mathrm{sgn}(\alpha \circ \tau) = 1$ und $(\alpha \circ \tau) \circ \tau = \alpha$. Also kann jede Permutation α aus Σ_n mit $\mathrm{sgn}(\alpha) = -1$ in der Form $\pi \circ \tau$ dargestellt werden, wobei $\pi \in \Sigma_n$ mit $\mathrm{sgn}(\pi) = 1$. Daraus folgt aus Bemerkung 3.2.3

$$\begin{aligned}
x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = \sqrt{n!}\mathcal{A}_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in \Sigma_n} \mathrm{sgn}(\pi)\sigma_\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\mathrm{sgn}(\pi)=1} \sigma_\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) - \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\mathrm{sgn}(\pi)=1} (\sigma_\pi \circ \sigma_\tau)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\mathrm{sgn}(\pi)=1} \sigma_\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) - \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\mathrm{sgn}(\pi)=1} \sigma_\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = 0.
\end{aligned}$$

Ist $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine linear abhängige Teilmenge, so können wir o.B.d.A. annehmen, dass x_1 als Linearkombination von $x_2, \dots, x_n$ geschrieben werden kann. Es gibt also $c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ derart, dass

$$x_1 = \sum_{i=2}^{n} c_i x_i.$$

Wir erhalten wegen der Linearität von $\mathcal{A}_n$

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = \Big(\sum_{i=2}^{n} c_i x_i\Big) \wedge \cdots \wedge x_n = \sum_{i=2}^{n} c_i (x_i \wedge \cdots \wedge x_n) = 0.$$

□

Um Determinanten zu definieren, benötigen wir Orthonormalbasen und den Begriff der Spurklasse im Raum $\bigwedge^n \mathcal{H}$. Aus einer Orthonormalbasis in $\mathcal{H}$ können wir ähnlich wie in Proposition 3.1.2 eine Orthonormalbasis in $\bigwedge^n \mathcal{H}$ bauen.

3.2.5 Satz. Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}$, so ist

$$B := \{f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_n} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_n\}$$

eine Orthonormalbasis in $\bigwedge^n \mathcal{H}$. Insbesondere liegt die Menge $\mathrm{span}(\{x_1 \wedge \cdots \wedge x_n : x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}\})$ dicht in $\bigwedge^n \mathcal{H}$.

Beweis: Wir zeigen zuerst die Orthogonalität. Seien $I = (i_1, \dots, i_n)$ und $J = (j_1, \dots, j_n)$ zwei aufsteigende Tupel, d.h. $i_1 < \cdots < i_n$ beziehungsweise $j_1 < \cdots < j_n$. Weil $\mathcal{A}_n$ eine orthogonale Projektion ist, folgt aus Proposition 3.1.2

$$\begin{aligned}
(f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_n}, f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n}) &= n!(\mathcal{A}_n(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_n}), f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_n}) \\
&= \sum_{\pi \in \Sigma_n} \mathrm{sgn}(\pi)(f_{i_{\pi^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes f_{i_{\pi^{-1}(n)}}, f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_n}) \\
&= \sum_{\pi \in \Sigma_n} \mathrm{sgn}(\pi) \prod_{k=1}^{n} (f_{i_{\pi^{-1}(k)}}, f_{j_k}). \qquad (20)
\end{aligned}$$

Sind I und J verschieden, so gibt es keine Permutation $\pi \in \Sigma_n$ derart, dass $I \circ \pi = J$, da $I \circ \pi$ nur für $\pi = \mathcal{I}_{\Sigma_n}$ aufsteigend ist. Somit ist für $I \neq J$ das Produkt in (20) immer 0. Ist $I = J$, so gilt $I \circ \pi = J$ nur für $\pi = \mathcal{I}_{\Sigma_n}$. Somit folgt $\|f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_n}\|^2 = 1$.

Es bleibt zu zeigen, dass die lineare Hülle von B dicht in $\bigwedge^n \mathcal{H}$ liegt. Nach Proposition 3.1.2 ist $F := \{f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_n} : i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}\}$ eine Ortonormalbasis von $\bigotimes^n \mathcal{H}$ und somit span(F) dicht in $\bigotimes^n \mathcal{H}$. Wegen $\mathcal{A}_n \in L_b(\bigotimes^n \mathcal{H})$ gilt

$$\begin{aligned}\bigwedge^n \mathcal{H} &= \mathcal{A}_n\Big(\bigotimes^n \mathcal{H}\Big) = \mathcal{A}_n(\overline{\operatorname{span}(F)}) \subseteq \overline{\mathcal{A}_n(\operatorname{span}(F))} \\ &= \overline{\operatorname{span}\big(\{f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_n} : i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}\}\big)}\end{aligned}$$

Wegen Proposition 3.2.4 können wir in der obigen Menge alle Elemente mit gleichen Indizes weglassen, da diese gleich 0 sind. Also gilt

$$\bigwedge^n \mathcal{H} = \overline{\operatorname{span}\big(\{f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_n} : i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}, i_k \neq i_l \text{ für } l \neq k\}\big)}.$$

Da wegen Proposition 3.2.4 Vertauschungen innerhalb von $f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_n}$ nur das Vorzeichen ändern, können wir die Indizes aufsteigend sortieren, womit

$$\bigwedge^n \mathcal{H} = \overline{\operatorname{span}\big(\{f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_n} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_n\}\big)} = \overline{\operatorname{span}(B)}$$

□

Im Folgenden sei $\mathbb{N}^n_{\uparrow} := \{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n : i_1 < \cdots < i_n\} \subseteq \mathbb{N}^n$ die Menge aller aufsteigenden Tupel in $\mathbb{N}^n$ beziehungsweise $\mathbb{N}^n_{\leq m\uparrow} := \{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n : i_1 < \cdots < i_n \leq m\}$ die Menge aller aufsteigenden Tupel aus $\mathbb{N}^n$ mit Einträgen kleiner oder gleich $m \in \mathbb{N}$.

3.2.6 Satz. Für $T \in L_b(\mathcal{H})$ gilt $\bigwedge^n T(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = Tx_1 \wedge \cdots \wedge Tx_n$ für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ und $\bigwedge^n T \in L_b(\bigwedge^n \mathcal{H})$. Ist $S \in L_b(\mathcal{H})$ ein weiterer Operator, so gilt $\bigwedge^n(ST) = \big(\bigwedge^n S\big)\big(\bigwedge^n T\big)$.

Beweis: Der Operator $\bigwedge^n T$ ist als Verknüpfung der stetigen Abbildungen $\mathcal{A}_n$ und $\bigotimes^n T$ selbst stetig. Wegen Satz 3.1.3 und Proposition 3.2.4 gilt für $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}\bigwedge^n T(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) &= \Big(\mathcal{A}_n \circ \bigotimes^n T\Big)\big(\sqrt{n!}\mathcal{A}_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)\big) \\ &= \mathcal{A}_n\Big(\frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\pi)\Big(\bigotimes^n T\Big)(x_{\pi^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\pi^{-1}(n)})\Big) \\ &= \mathcal{A}_n\Big(\frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\pi)(Tx_{\pi^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes Tx_{\pi^{-1}(n)})\Big) \\ &= \sqrt{n!}\mathcal{A}_n\big(\mathcal{A}_n(Tx_1 \otimes \cdots \otimes Tx_n)\big) \\ &= \sqrt{n!}\mathcal{A}_n(Tx_1 \otimes \cdots \otimes Tx_n) \\ &= Tx_1 \wedge \cdots \wedge Tx_n.\end{aligned}$$

Für ein $S \in L_b(\mathcal{H})$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ gilt wegen dem vorherigen Beweisschritt

$$\begin{aligned}\bigwedge^n (ST)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) &= (STx_1 \wedge \cdots \wedge STx_n) = \bigwedge^n S(Tx_1 \wedge \cdots \wedge Tx_n) \\ &= \Big(\bigwedge^n S\Big)\Big(\bigwedge^n T\Big)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n),\end{aligned}$$

womit $\left(\bigwedge^n S\right)\left(\bigwedge^n T\right)$ mit $\bigwedge^n(ST)$ auf der Menge $\{x_1 \wedge \cdots \wedge x_n : x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}\}$ übereinstimmt. Da die lineare Hülle dieser Menge nach Satz 3.2.5 dicht in $\bigwedge^n \mathcal{H}$ liegt und die Operatoren stetig und linear sind, stimmen sie auf dem gesamten Raum überein.

$\square$

Wir wollen auch die Spurklasse der äußeren Algebra untersuchen.

3.2.7 Lemma. Für $T \in L_b(\mathcal{H})$ gilt $\left(\bigwedge^n T\right)^* = \bigwedge^n(T^*)$ und $\sqrt{\bigwedge^n T} = \bigwedge^n \sqrt{T}$. Ist T positiv, so ist auch $\bigwedge^n T$ positiv. Insbesondere gilt $\left|\bigwedge^n T\right| = \bigwedge^n |T|$.

Beweis: Aus Lemma 3.1.4 und der Tatsache, dass $\mathcal{A}_n$ als orthogonale Projektion auf $\bigwedge^n \mathcal{H}$ selbstadjungiert ist und $\mathcal{A}_n\big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\big) = (a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}$ für alle $(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n} \in \bigwedge^n \mathcal{H}$ erfüllt, folgt für $(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}, (b_I)_{I\in\mathbb{N}^n} \in \bigwedge^n \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}\Big(\bigwedge^n T(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}, (b_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\Big) &= \big(\mathcal{A}_n\big(\bigotimes^n T(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\big), (b_i)_{I\in\mathbb{N}^n}\big) \\ &= \big(\bigotimes^n T(a_i)_{I\in\mathbb{N}^n}, (b_i)_{I\in\mathbb{N}^n}\big) \\ &= \big(\mathcal{A}_n(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}, \bigotimes^n (T^*)(b_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\big) \\ &= \Big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}, \mathcal{A}_n\big(\bigotimes^n (T^*)(b_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\big)\Big) \\ &= \big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}, \bigwedge^n (T^*)(b_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\big).\end{aligned}$$

Ist T positiv, so folgt mit Lemma 3.1.4, dass $\bigotimes^n T$ positiv ist. Wieder mit der Selbstadjungiertheit von $\mathcal{A}_n$ folgt für $(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n} \in \bigwedge^n \mathcal{H}$

$$\big(\bigwedge^n T(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}, (a_i)_{I\in\mathbb{N}^n}\big) = \big(\bigotimes^n T\big(\mathcal{A}_n(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\big), \mathcal{A}_n(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\big) \geq 0.$$

Mit Satz 3.2.6 erhalten wir

$$\Big(\bigwedge^n \sqrt{T}\Big)^2 = \bigwedge^n (\sqrt{T}^2) = \bigwedge^n T,$$

womit aus der Eindeutigkeit der Quadratwurzel $\sqrt{\bigwedge^n T} = \bigwedge^n \sqrt{T}$ folgt.

$\square$

Wir wollen die Ergebnisse des zweiten Kapitels auf die Operatoren aus $L_b\big(\bigwedge^n \mathcal{H}\big)$ anwenden. Dazu erinnern wir an Begriffe, die im 2. Kapitel vermehrt vorgekommen sind. $(\mu_n(T))_{n=1}^{\eta(T)}$ nennen wir die Eigenwerte von $|T|$, gezählt nach ihrer Vielfachheit, also $\mu_1(T) \geq \mu_2(T) \geq \cdots > 0$, wobei $\eta(T) = \dim\big(\overline{\operatorname{ran}(T)}\big) \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$.

3.2.8 Satz. Für $T \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ gilt $\bigwedge^n(T) \in \mathcal{T}_1(\bigwedge^n(\mathcal{H}))$, wobei

$$\left\|\bigwedge^n(T)\right\|_1 = \sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq \eta(T)\uparrow}} \prod_{k=1}^n \mu_{j_k}(T) \leq \frac{1}{n!}\|T\|_1^n. \tag{21}$$

Beweis: Wir schreiben T gemäß der Singulärwertzerlegung, Satz 1.3.4, als

$$T = \sum_{j=1}^{\eta(T)} \mu_j(T)(\cdot, g_j) f_j.$$

Wir wollen zeigen, dass $B := \{f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_n} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq \eta(T)\}$ eine Orthonormalbasis von $\overline{\operatorname{ran}\big(\bigwedge^n T\big)}$ ist. Der Beweis der Orthogonalität verläuft analog zum Beweis in Satz 3.2.5.

Da f_j für $1 \leq j \leq \eta(T)$ in $\overline{\operatorname{ran}(T)}$ liegt, gibt es Folgen $(f_j^m)_{m=1}^\infty$ aus $\operatorname{ran}(T)$ mit $\lim\limits_{m\to\infty} f_j^m = f_j$. Weiters gibt es für alle $m \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, \ldots, \eta(T)\}$ ein $g_j^m \in \mathcal{H}$ derart, dass $Tg_j^m = f_j^m$. Aus Proposition 3.1.2 und der Tatsache, dass $\mathcal{A}_n$ stetig ist, folgt für $1 \leq j_1 < \cdots < j_n \leq \eta(T)$

$$\begin{aligned}
f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n} &= \sqrt{n!}\mathcal{A}_n(f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_n}) = \sqrt{n!}\mathcal{A}_n\big(\lim_{m\to\infty}(f_{j_1}^m \otimes \cdots \otimes f_{j_n}^m)\big) \\
&= \lim_{m\to\infty} \sqrt{n!}\mathcal{A}_n(Tg_{j_1}^m \otimes \cdots \otimes Tg_{j_n}^m) = \lim_{m\to\infty}(Tg_{j_1}^m \wedge \cdots \wedge Tg_{j_n}^m) \\
&= \lim_{m\to\infty}\Big(\bigwedge^n T\Big)(g_{j_1}^m \wedge \cdots \wedge g_{j_n}^m) \in \overline{\operatorname{ran}\big(\bigwedge^n T\big)}.
\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass $\operatorname{span}(B)$ dicht in $\overline{\operatorname{ran}\big(\bigwedge^n T\big)}$ ist, weisen wir zunächst nach, dass die lineare Hülle der Menge

$$\{Tx_1 \wedge \cdots \wedge Tx_n : x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{H}\} = \Big(\bigwedge^n T\Big)\big(\{x_1 \wedge \cdots \wedge x_n : x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{H}\}\big)$$

dicht in $\operatorname{ran}\big(\bigwedge^n T\big)$ liegt. Setzen wir $D := \{x_1 \wedge \cdots \wedge x_n : x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{H}\}$, so gilt wegen Satz 3.2.5 gilt $\overline{\operatorname{span}(D)} = \bigwedge^n \mathcal{H}$, und wegen der Stetigkeit von $\bigwedge^n T$ folgt

$$\overline{\Big(\bigwedge^n T\Big)\big(\operatorname{span}(D)\big)} \supseteq \Big(\bigwedge^n T\Big)\big(\overline{\operatorname{span}(D)}\big) = \bigwedge^n T\big(\bigwedge^n \mathcal{H}\big) = \operatorname{ran}\big(\bigwedge^n T\big).$$

Für $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ folgt wegen der Stetigkeit und Linearität beziehungsweise Multilinearität der Abbildungen $\mathcal{A}_n$ und $\bigotimes^n$

$$\begin{aligned}
Tx_1 \wedge \cdots \wedge Tx_n &= \sqrt{n!}\mathcal{A}_n(Tx_1 \otimes \cdots \otimes Tx_n) \\
&= \sqrt{n!}\mathcal{A}_n\Big(\big(\sum_{j_1=1}^{\eta(T)}(x_1, g_{j_1})f_{j_1}\big) \otimes \cdots \otimes \big(\sum_{j_n=1}^{\eta(T)}(x_n, g_{j_n})f_{j_n}\big)\Big) \\
&= \sum_{j_1=1}^{\eta(T)} \cdots \sum_{j_n=1}^{\eta(T)} \prod_{k=1}^n (x_k, g_{j_k})\sqrt{n!}\mathcal{A}_n(f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_n}) \\
&= \sum_{j_1=1}^{\eta(T)} \cdots \sum_{j_n=1}^{\eta(T)} \prod_{k=1}^n (x_k, g_{j_k})(f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n}).
\end{aligned}$$

Aus der obigen Gleichung folgt

$$\overline{\operatorname{ran}\big(\bigwedge^n T\big)} \supseteq \overline{\operatorname{span}(B)} \supseteq \overline{\operatorname{span}\Big(\big(\bigwedge^n T\big)(D)\Big)} \supseteq \overline{\operatorname{ran}\big(\bigwedge^n T\big)},$$

womit $\operatorname{span}(B)$ dicht in $\overline{\operatorname{ran}\big(\bigwedge^n T\big)}$ ist.

Wir wollen die Eigenwerte von $\big|\bigwedge^n T\big|$ berechnen. Wegen Lemma 3.2.7 gilt für $1 \leq j_1 < \cdots < j_n \leq \eta(T)$

$$\begin{aligned} \big|\bigwedge^n T\big|(f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n}) &= \bigwedge^n |T|(f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n}) = |T|f_{j_1} \wedge \cdots \wedge |T|f_{j_n} \\ &= \mu_{j_1}(T)f_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mu_{j_n}(T)f_{j_n} = \prod_{k=1}^n \mu_{j_k}(T)(f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n}). \end{aligned}$$

Angenommen, es gibt einen weiteren Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ mit Eigenvektor $(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n} \in \overline{\operatorname{ran}\big(\bigwedge^n T\big)}\backslash\{0\}$. Da $\{f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n} : 1 \leq j_1 < \cdots < j_n \leq \eta(T)\}$ eine Orthonormalbasis von $\overline{\operatorname{ran}\big(\bigwedge^n T\big)}$ ist, gilt

$$(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n} = \sum_{J\in\mathbb{N}^n_{\leq\eta(T)\uparrow}} \big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}, f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n}\big)(f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n}).$$

Aus der Stetigkeit von $\bigwedge^n T$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n} = \big|\bigwedge^n T\big|\big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}\big) &= \sum_{J\in\mathbb{N}^n_{\leq\eta(T)\uparrow}} \big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}, f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n}\big)(|T|f_{j_1} \wedge \cdots \wedge |T|f_{j_n}) \\ &= \sum_{J\in\mathbb{N}^n_{\leq\eta(T)\uparrow}} \big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}, f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n}\big) \cdot \Big(\prod_{k=1}^n \mu_{j_k}(T)\Big) \cdot (f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n}) \\ &= \sum_{J\in\mathbb{N}^n_{\leq\eta(T)\uparrow}} \Big(\prod_{k=1}^n \mu_{j_k}(T)\Big) \cdot \big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}, f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n}\big)(f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n}). \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Fourier-Koeffizienten, vgl. Satz 3.3.3 in [11], muss für alle $J \in \mathbb{N}^n_{\leq\eta(T)\uparrow}$ die Gleichheit

$$\lambda\big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}, f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n}\big) = \Big(\prod_{k=1}^n \mu_{j_k}(T)\Big)\big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}, f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n}\big) \tag{22}$$

gelten. Da $(a_I)_{I\in\mathbb{N}^n} \in \overline{\operatorname{ran}\big(\bigwedge^n T\big)}\backslash\{0\}$ und $\{f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n} : 0 < j_1 < \cdots < j_n \leq \eta(T)\}$ eine Orthonormalbasis von $\overline{\operatorname{ran}\big(\bigwedge^n T\big)}$ ist, muss es ein $J \in \mathbb{N}^n_{\leq\eta(T)\uparrow}$ geben derart, dass $\big((a_I)_{I\in\mathbb{N}^n}, f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n}\big) \neq 0$. Für dieses J folgt wegen (22) $\lambda = \prod\limits_{k=1}^n \mu_{j_k}(T)$, womit Eigenwerte von $\big|\bigwedge^n T\big|$ genau von der Gestalt $\big(\prod\limits_{k=1}^n \mu_{j_k}(T)\big)_{1\leq j_1<\cdots<j_n\leq\eta(T)}$ sind. Nach Satz 2.1.5 gilt

$$\Big\|\bigwedge^n T\Big\|_1 = \sum_{J\in\mathbb{N}^n_{\leq\eta(T)\uparrow}} \prod_{k=1}^n \mu_{j_k}(T).$$

Es bleibt noch die Abschätzung in (21) zu zeigen. Zunächst gilt

$$\|T\|_1^n = \Big(\sum_{j=1}^{\eta(T)} \mu_j(T)\Big)^n = \sum_{j_1=1}^{\eta(T)} \mu_{j_1}(T) \cdots \sum_{j_n=1}^{\eta(T)} \mu_{j_n}(T) = \sum_{J\in\mathbb{N}^n_{\leq\eta(T)}} \prod_{k=1}^{n} \mu_{j_k}(T).$$

Lassen wir Summanden mit $j_p = j_q$ für gewisse $p \neq q$ weg und setzen $\mathcal{N} := \{(j_1, \dots, j_n) : j_p \neq j_q \text{ für } p \neq q\}$, so erhalten wir die Abschätzung

$$\|T\|_1^n = \sum_{J\in\mathbb{N}^n_{\leq\eta(T)}} \prod_{k=1}^{n} \mu_{j_k}(T) \geq \sum_{J\in\mathcal{N}} \prod_{k=1}^{n} \mu_{j_k}(T). \tag{23}$$

Wir betrachten für ein festes $J \in \mathcal{N}$ den Summanden $\prod_{k=1}^{n} \mu_{j_k}(T)$. Für alle $\pi \in \Sigma_n$ gilt $\prod_{k=1}^{n} \mu_{j_k}(T) = \prod_{k=1}^{n} \mu_{j_{\pi(k)}}(T)$. Somit kommt dieser Summand in (23) genau $n!$ mal vor. Also können wir gleiche Summanden zusammenfassen. Da es für ein $(j_1, \dots, j_n)^T \in \{1, \dots, \eta(T)\}^n$ mit $j_p \neq j_q$ für $p \neq q$ genau eine Permutation $\pi \in \Sigma_n$ gibt mit $j_{\pi(1)} < \cdots < j_{\pi(n)}$, können wir uns auf aufsteigende Vektoren aus $\{1, \dots, \eta(T)\}^n$ beschränken und (23) zu

$$\|T\|_1^n \geq \sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^n_{\leq\eta(T)} \\ j_p\neq j_q \text{ für } p\neq q}} \prod_{k=1}^{n} \mu_{j_k}(T) = n! \sum_{J\in\mathbb{N}^n_{\leq\eta(T)\uparrow}} \prod_{k=1}^{n} \mu_{j_k}(T).$$

umformen.

□

3.3 Die Determinante

3.3.1 Definition. Für ein $T \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ definieren wir die Determinante von $\mathcal{I} + T$ als

$$\det(\mathcal{I} + T) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr}\Big(\bigwedge^n T\Big), \tag{24}$$

wobei wir $\mathrm{Tr}\big(\bigwedge^0 T\big) := 1$ setzen.

Wir wollen zeigen, dass diese Summe für alle $T \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ konvergiert.

3.3.2 Lemma. Für eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$1 + \sum_{n=1}^{m} \sum_{J\in\mathbb{N}^n_{\leq m\uparrow}} \prod_{i=1}^{n} z_{j_i} = \prod_{n=1}^{m} (1 + z_n).$$

Beweis: *Induktionsanfang*: Für $m = 1$ gilt

$$1 + \sum_{n=1}^{1} \sum_{J\in\mathbb{N}^n_{\leq 1\uparrow}} \prod_{i=1}^{n} z_{j_i} = 1 + \sum_{J\in\mathbb{N}^1_{\leq 1\uparrow}} z_{j_1} = 1 + z_1 = \prod_{n=1}^{1} (1 + z_n).$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein $m \in \mathbb{N}$ gelte

$$1 + \sum_{n=1}^{m} \sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq m\uparrow}} \prod_{i=1}^{n} z_{j_i} = \prod_{n=1}^{m} (1 + z_n).$$

Induktionsschritt: Es gilt

$$\sum_{n=1}^{m+1} \sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq m+1\uparrow}} \prod_{i=1}^{n} z_{j_i} = \sum_{n=1}^{m} \sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq m+1\uparrow}} \prod_{i=1}^{n} z_{j_i} + \sum_{J \in \mathbb{N}^{m+1}_{\leq m+1\uparrow}} \prod_{i=1}^{m+1} z_{j_i}.$$

Wir können die Summe $\sum\limits_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq m+1\uparrow}} \prod\limits_{i=1}^{n} z_{j_i}$ aufteilen, indem wir die Tupel aus $\mathbb{N}^n_{\leq m+1\uparrow}$, die $m+1$ enthalten, von den restlichen trennen. Summieren wir nur über Tupel, die $m+1$ enthalten, so können wir z_{m+1} herausheben, und über $\mathbb{N}^{n-1}_{\leq m\uparrow}$ summieren. Wir erhalten wegen $\mathbb{N}^{m+1}_{\leq m+1\uparrow} = \{(1, \ldots, m+1)\}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m+1} \sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq m+1\uparrow}} \prod_{i=1}^{n} z_{j_i} &= \sum_{n=2}^{m} \sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq m+1\uparrow}} \prod_{i=1}^{n} z_{j_i} + \sum_{J \in \mathbb{N}^1_{\leq m+1\uparrow}} z_{j_1} + \sum_{J \in \mathbb{N}^{m+1}_{\leq m+1\uparrow}} \prod_{i=1}^{m+1} z_{j_i} \\
&= \sum_{n=2}^{m} \Big(\sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq m\uparrow}} \prod_{i=1}^{n} z_{j_i} + z_{m+1} \sum_{J \in \mathbb{N}^{n-1}_{\leq m\uparrow}} \prod_{i=1}^{n-1} z_{j_i} \Big) + \sum_{n=1}^{m+1} z_n + \prod_{n=1}^{m+1} z_n \\
&= \sum_{n=1}^{m} \sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq m\uparrow}} \prod_{i=1}^{n} z_{j_i} + z_{m+1} \sum_{n=2}^{m} \sum_{J \in \mathbb{N}^{n-1}_{\leq m\uparrow}} \prod_{i=1}^{n-1} z_{j_i} + z_{m+1} + z_{m+1} \prod_{n=1}^{m} z_n \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \prod_{n=1}^{m} (1 + z_n) - 1 + z_{m+1} \sum_{n=2}^{m+1} \sum_{J \in \mathbb{N}^{n-1}_{\leq m\uparrow}} \prod_{i=1}^{n-1} z_{j_i} + z_{m+1} \\
&= \prod_{n=1}^{m} (1 + z_n) - 1 + z_{m+1} \Big(\sum_{n=1}^{m} \sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq m\uparrow}} \prod_{i=1}^{n} z_{j_i} + 1 \Big) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \prod_{n=1}^{m} (1 + z_n) - 1 + z_{m+1} \prod_{n=1}^{m} (1 + z_n) \\
&= (1 + z_{m+1}) \prod_{n=1}^{m} (1 + z_n) - 1 = \prod_{n=1}^{m+1} (1 + z_n) - 1
\end{aligned}$$

□

3.3.3 Satz. Seien $T, S \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$. Die Summe in (24) ist absolut konvergent, wobei folgende Aussagen gelten.

a) $|\det(\mathcal{I} + T)| \leq \prod\limits_{j=1}^{\eta(T)} (1 + \mu_j(T)) \leq \exp(\|T\|_1)$.

b) $z \mapsto \det(\mathcal{I} + zT)$ ist analytisch in $\mathbb{C}$ mit Werten in $\mathbb{C}$.

c) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante C_ε mit $|\det(\mathcal{I} + zT)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|z|}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

d) Die Abbildung $\det : (\mathcal{T}_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1) \to \mathbb{C} : T \mapsto \det(\mathcal{I} + T)$ ist stetig.

e) Für $\mathcal{H} = F \oplus F^\perp$ mit $\dim(F) < \infty$, $T(F^\perp) = \{0\}$ und $T(F) \subseteq F$ gilt $\det(\mathcal{I} + T) = |\mathcal{I}_{|F} + T_{|F}|$, wobei rechts die endlichdimensionale Determinante aus der linearen Algebra steht.

f) $\det\big((\mathcal{I} + T)(\mathcal{I} + S)\big) = \det(\mathcal{I} + T) \cdot \det(\mathcal{I} + S)$.

Beweis: *ad a)*: Wir zeigen zuerst, dass $\prod_{n=1}^{\eta(T)} (1 + \mu_n(T)) < +\infty$. Wegen $\ln(x+1) \leq x$ für alle $x > 0$ erhalten wir

$$\prod_{n=1}^{\eta(T)} (1 + \mu_n(T)) = \exp\Bigg(\ln\Big(\prod_{n=1}^{\eta(T)} (1 + \mu_n(T))\Big)\Bigg) = \exp\Big(\sum_{n=1}^{\eta(T)} \ln(1 + \mu_n(T))\Big)$$
$$\leq \exp\Big(\sum_{n=1}^{\eta(T)} \mu_n(T)\Big) = \exp(\|T\|_1) < +\infty.$$

Aus Satz 3.2.8 und Satz 2.2.2 folgt:

$$\big|\mathrm{Tr}\big(\bigwedge^n T\big)\big| \leq \Big\|\bigwedge^n T\Big\|_1 = \sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq \eta(T)\uparrow}} \prod_{i=1}^{n} \mu_{j_i}(T).$$

Für $\eta(T) \in \mathbb{N}$ und $n > \eta(T)$ gilt $\mathbb{N}^n_{\leq \eta(T)\uparrow} = \emptyset$ und somit

$$\sum_{n=1}^{\eta(T)} \sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq \eta(T)\uparrow}} \prod_{i=1}^{n} \mu_{j_i}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq \eta(T)\uparrow}} \prod_{i=1}^{n} \mu_{j_i}(T),$$

was offensichtlich auch für $\eta(T) = \infty$ gilt. Die absolute Konvergenz der rechten Seite von (24) und a) folgt mit Lemma 3.3.2 aus

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \big|\mathrm{Tr}\big(\bigwedge^n T\big)\big| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq \eta(T)\uparrow}} \prod_{i=1}^{n} \mu_{j_i}(T) = 1 + \sum_{n=1}^{\eta(T)} \sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq \eta(T)\uparrow}} \prod_{i=1}^{n} \mu_{j_i}(T)$$
$$= \lim_{m \to \eta(T)} \Big(1 + \sum_{n=1}^{m} \sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq m\uparrow}} \prod_{i=1}^{n} \mu_{j_i}(T)\Big) = \lim_{m \to \eta(T)} \prod_{n=1}^{m} (1 + \mu_n(T))$$
$$= \prod_{n=1}^{\eta(T)} (1 + \mu_n(T)) \leq \exp(\|T\|_1) < +\infty.$$

ad b): Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\det(\mathcal{I} + zT) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr}\big(\bigwedge^n (zT)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \mathrm{Tr}\big(\bigwedge^n T\big).$$

Wegen $\left|\operatorname{Tr}\left(\bigwedge^n T\right)\right| \leq \|\bigwedge^n T\|_1^n \leq \dfrac{1}{n!}\,\|T\|_1$, vgl. Satz 3.2.8, konvergiert die Potenzreihe auf der rechten Seite der obigen Gleichung für alle $z \in \mathbb{C}$ und stellt dort die Funktion $z \mapsto \det(\mathcal{I} + zT)$ dar.

ad c): Sei $\varepsilon > 0$ und $z \in \mathbb{C}$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\sum\limits_{n=N+1}^{\eta(T)} \mu_n(T) < \frac{\varepsilon}{2}$. Weil der Ausdruck $\prod\limits_{j=1}^{N}(1 + |z|\mu_j(T))$ ein Polynom in $|z|$ ist, konvergiert der Ausdruck

$$\prod_{j=1}^{N}(1 + |z|\mu_j(T)) \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{2}|z|}$$

für $|z| \to \infty$ gegen 0. Es gibt daher eine Konstante $C_\varepsilon > 0$ mit

$$\prod_{j=1}^{N}(1 + |z|\mu_j(T)) \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{2}|z|} \leq C_\varepsilon$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Wegen $|1 + z| \leq e^{|z|}$, a) und Proposition 1.3.5 gilt

$$\begin{aligned}|\det(\mathcal{I} + zT)| &\leq \prod_{j=1}^{\eta(T)}(1 + |z|\mu_j(T)) \leq \prod_{j=1}^{N}(1 + |z|\mu_j(T)) \cdot \exp\Big(\sum_{n=N+1}^{\eta(T)} |z|\mu_n(T)\Big) \\ &\leq C_\varepsilon e^{\frac{\varepsilon}{2}|z|} \cdot e^{\frac{\varepsilon}{2}|z|} = C_\varepsilon e^{\varepsilon|z|}.\end{aligned}$$

ad d): Sei $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ein Folge aus $\mathcal{T}_1(\mathcal{H})$, die bezüglich $\|\cdot\|_1$ gegen einen Operator $T \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ konvergiert, und $\varepsilon > 0$. Da $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge aus $\mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ ist, gibt es ein $C > 0$ mit $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \|T_m\|_1 \leq C < +\infty$. Nach dem Cauchy-Kriterium gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{C^n}{n!} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nach Satz 2.2.2 ist die Abbildung $T \mapsto \operatorname{Tr}(T)$ stetig und damit auch $T \mapsto \operatorname{Tr}(T)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $M_n \in \mathbb{N}$ derart, dass für $m \geq M_n$ die Abschätzung

$$|\operatorname{Tr}(T_m)^n - \operatorname{Tr}(T)^n| < \frac{\varepsilon}{3(N+1)}$$

gilt. Setzen wir $M := \max\limits_{n=1,\ldots,N} M_n$, so folgt für $m \geq M$, $n \leq N$ und einer Orthonormalbasis $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{H}$ aus Proposition 3.1.5, Satz 2.2.1 und der Tatsache, dass $\mathcal{A}_n$ als orthogonale Projektion auf $\bigwedge^n \mathcal{H}$ selbstadjungiert ist und $\mathcal{A}_{n|\bigwedge^n \mathcal{H}} = \mathcal{I}_{\bigwedge^n \mathcal{H}}$

erfüllt,

$$\begin{aligned}
\big|\mathrm{Tr}(\bigwedge^n T_m) - \mathrm{Tr}(\bigwedge^n T)\big| &= \big|\mathrm{Tr}\Big(\mathcal{A}_n \circ (\bigotimes^n T_m - \bigotimes^n T)_{|\bigwedge^n \mathcal{H}}\Big)\big| \\
&= \big|\sum_{J\in\mathbb{N}^n_\uparrow} \Big(\mathcal{A}_n(\bigotimes^n T_m - \bigotimes^n T)(f_{j_1}\wedge\cdots\wedge f_{j_n}), f_{j_1}\wedge\cdots\wedge f_{j_n}\Big) \\
&= \big|\sum_{J\in\mathbb{N}^n_\uparrow} \Big((\bigotimes^n T_m - \bigotimes^n T)(f_{j_1}\wedge\cdots\wedge f_{j_n}), f_{j_1}\wedge\cdots\wedge f_{j_n}\Big)\big| \\
&= \big|\mathrm{Tr}(\bigotimes^n T_m - \bigotimes^n T)\big| = |\mathrm{Tr}(T_m)^n - \mathrm{Tr}(T)^n| < \frac{\varepsilon}{3(N+1)}.
\end{aligned}$$

Weiters gilt mit Satz 3.2.8 und Satz 2.2.2

$$\begin{aligned}
\big|\sum_{n=N+1}^{\infty} \mathrm{Tr}(\bigwedge^n T_m - \bigwedge^n T)\big| &\le \sum_{n=N+1}^{\infty} \big|\mathrm{Tr}(\bigwedge^n T_m)\big| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \big|\mathrm{Tr}(\bigwedge^n T)\big| \\
&\le \sum_{n=N+1}^{\infty} \Big\|\bigwedge^n T_m\Big\|_1 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \Big\|\bigwedge^n T\Big\|_1 \\
&\le 2\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{C^n}{n!} < \frac{2\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten für $m \ge M$

$$\begin{aligned}
|\det(\mathcal{I}+T_m) - \det(\mathcal{I}+T)| &= \Big|\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr}(\bigwedge^n T_m - \bigwedge^n T)\Big| \\
&< \sum_{n=0}^{N} \frac{\varepsilon}{3(N+1)} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

ad e): Zunächst sei M eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^k$ nach $\mathbb{C}^k$, die bezüglich einer Basis $(e_j)_{j=1}^k$ die Gestalt einer oberen Dreiecksmatrix hat, und bezeichne $(\lambda_j)_{j=1}^k$ ihre Eigenwerte gezählt nach ihrer Vielfachheit. Für $n > k$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}^k$ gilt wegen Proposition 3.2.4 $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = 0$. Es folgt $\bigwedge^n(\mathbb{C}^k) = \{0\}$, womit $\bigwedge^n M = 0$. Da die Standardbasis von $\mathbb{C}^k$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^k$ bildet, erhalten wir mit Satz 3.2.6 und Satz 2.2.1

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr}\Big(\bigwedge^n M\Big) = \sum_{n=0}^{k} \mathrm{Tr}\Big(\bigwedge^n M\Big) &= \sum_{n=0}^{k} \sum_{J\in\mathbb{N}^n_{\le k\uparrow}} \Big(\bigwedge^n M(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_n}), e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_n}\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{k} \sum_{J\in\mathbb{N}^n_{\le k\uparrow}} (Me_{j_1}\wedge\cdots\wedge Me_{j_n}, e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_n}) \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{n=0}^{k} \sum_{J\in\mathbb{N}^n_{\le k\uparrow}} \sum_{\pi,\tau\in\Sigma_n} \mathrm{sgn}(\pi\circ\tau) \prod_{i=1}^{n} (Me_{j_{\pi^{-1}(i)}}, e_{j_{\tau^{-1}(i)}}).
\end{aligned}$$

Damit das Produkt in der obigen Summe nicht Null wird, muss aufgrund der Dreiecksgestalt $\pi^{-1}(i) \ge \tau^{-1}(i)$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gelten. Gäbe es ein $i \in \{1, \dots, n\}$

mit $\pi^{-1}(i) \neq \tau^{-1}(i)$, so auch einen Index i_0, der $\pi^{-1}(i_0) \neq \tau^{-1}(i_0)$ erfüllt, und für den $\pi^{-1}(i_0)$ am größten ist. Wegen $\pi^{-1}(i) \geq \tau^{-1}(i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$ muss $\pi^{-1}(i_0) > \tau^{-1}(i_0)$ gelten. Für $k = \tau\big(\pi^{-1}(i_0)\big)$ folgt $i_0 \neq k$ und daher $\tau^{-1}(k) = \pi^{-1}(i_0) \neq \pi^{-1}(k)$. Nach der Wahl von i_0 folgt der Widerspruch $\tau^{-1}(k) = \pi^{-1}(i_0) > \pi^{-1}(k)$. Also gilt $\pi^{-1} = \tau^{-1}$ und infolge $\pi = \tau$. Da die endlichdimensionale Determinante einer Matrix das Produkt ihrer Eigenwerte ist, folgt mit Lemma 3.3.2

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Tr}\Big(\bigwedge\nolimits^{n} M\Big) &= \frac{1}{n!} \sum_{n=0}^{k} \sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq k \uparrow}} \sum_{\pi \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\pi \circ \pi) \prod_{i=1}^{n} (M e_{j_{\pi^{-1}(i)}}, e_{j_{\pi^{-1}(i)}}) \\
&= \sum_{n=0}^{k} \sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq k \uparrow}} \prod_{i=1}^{n} (M e_{j_i}, e_{j_i}) = \sum_{n=0}^{k} \sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq k \uparrow}} \prod_{i=1}^{n} \lambda_{j_i} \\
&= \prod_{j=1}^{k} (1 + \lambda_j) = |\mathcal{I} + M|.
\end{aligned}
$$

Für $n > \dim(F)$ ist wegen $\operatorname{ran}(T) \subseteq F$ die Familie $(Tx_j)_{j=1}^{n}$ für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ linear abhängig. Aus Proposition 3.2.4 folgt $Tx_1 \wedge \cdots \wedge Tx_n = 0$ für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$, womit $\operatorname{ran}\big(\bigwedge^n T\big) = \{0\}$ und folglich $\bigwedge^n T = 0$.

Da sich F als Hilbertraum für $k := \dim(F)$ mit $\mathbb{C}^k$ identifizieren lässt, gibt es gemäß Satz 12.8.5 in [10] eine Orthonormalbasis $(f_j)_{j=1}^{k}$ von F, bezüglich der $T_{|F}$ die Gestalt einer oberen Dreiecksmatrix hat. Erweitern wir diese zu einer Orthonormalbasis von ganz $\mathcal{H}$, so gilt $Tf_j = 0$ für alle $j > k$. Sei $Q : F \to \mathbb{C}^k$ die unitäre Abbildung mit $Qf_j = e_j$ für $j = 1, \ldots, k$, wobei $(e_j)_{j=1}^{k}$ die Standardbasis des $\mathbb{C}^k$ bezeichnet. Die Abbildung $M := QTQ^{-1}$ hat wegen

$$
(Tf_j, f_i) = (Q^{-1}MQf_j, f_i) = (MQf_j, Qf_i)_{\mathbb{C}^k} = (Me_j, e_i)_{\mathbb{C}^k}
$$

für $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ auch obere Dreiecksgestalt. Für $I, J \in \mathbb{N}^n_{\leq k \uparrow}$ gilt zudem

$$
\Big(\bigwedge\nolimits^{n} T(f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n}), f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_n}\Big) = \Big(\bigwedge\nolimits^{n} M(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_n}), e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}\Big).
$$

Wegen $Tf_j = 0$ für $j > k$ und $\bigwedge^n T = 0$ für $n > k$ folgt aus dem eingangs behandelten Spezialfall

$$
\begin{aligned}
\det(\mathcal{I} + T) &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Tr}\Big(\bigwedge\nolimits^{n} T\Big) = \sum_{n=1}^{k} \operatorname{Tr}\Big(\bigwedge\nolimits^{n} T\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{k} \sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\uparrow}} \Big(\bigwedge\nolimits^{n} T(f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n}), f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_n}\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{k} \sum_{J \in \mathbb{N}^n_{\leq k \uparrow}} \Big(\bigwedge\nolimits^{n} M(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_n}), e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_n}\Big) \\
&= \det(\mathcal{I} + M) = |\mathcal{I} + M|.
\end{aligned}
$$

Da wegen $T\big|_F = Q^{-1}MQ$ die Abbildungen $\mathcal{I}\big|_F + T\big|_F$ und $\mathcal{I} + M$ zueinander ähnlich sind, gilt schließlich $|\mathcal{I} + M| = |\mathcal{I}\big|_F + T\big|_F|$.

ad f): Sei $T, S \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$. Da Operatoren mit endlichdimensionalem Bild dicht in $\mathcal{T}_1$ bezüglich $\|\cdot\|$ liegen, gibt es Folgen $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ von Operatoren von endlichem Rang aus $L_b(\mathcal{H})$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n - S\| = 0$. Für diese Operatoren gilt nach e) und der Multiplikativität der Determinante für endlichdimensionale Räume die Eigenschaft f). Nach d) ist $\det : \mathcal{T}_1 \to \mathbb{C} : T \mapsto \det(I+T)$ bezüglich $\|\cdot\|_1$ und wegen Proposition 2.1.7 auch bezüglich $\|\cdot\|$ stetig. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\det\big((I+T)(I+S)\big) &= \det\big((I + \lim_{n\to\infty} T_n)(I + \lim_{n\to\infty} S_n)\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \det\big((I+T_n)(I+S_n)\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \det(I+T_n)\cdot\det(I+S_n) \\
&= \det(I + \lim_{n\to\infty} T_n)\cdot\det(I + \lim_{n\to\infty} S_n) \\
&= \det(I+T)\cdot\det(I+S)
\end{aligned}$$

□

Wir zeigen, dass wie im Endlichdimensionalen die Determinante über die Invertierbarkeit eines Operators entscheidet.

3.3.4 Satz. Sei $T \in \mathcal{T}_1$. Ist $I+T$ invertierbar, so gilt $\det(I+T) \neq 0$. Ist $I+T$ nicht invertierbar, so hat die Funktion $f(z) := \det(I+zT)$ eine ν-fache Nullstelle bei $z=1$, wobei ν die algebraische Vielfachheit von -1 als Eigenwert von T ist.

Beweis: Ist $I+T$ invertierbar, so gilt mit $S := -T(I+T)^{-1}$

$$(I+T)(I+S) = I + T - (I+T)T(I+T)^{-1} = I.$$

Wegen Satz 3.3.3 folgt

$$\det(I+T)\cdot\det(I+S) = \det(I+0) = 1 \neq 0.$$

Sei umgekehrt $I+T$ nicht invertierbar. Wegen der Kompaktheit von T ist -1 ein Eigenwert. Sei $\nu = \dim\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \ker\big((T+\mathcal{I})^k\big)\Big)$ die algebraische Vielfachheit von -1.

Nach Satz 1.3.9 gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\nu = \dim\Big(\ker\big((T+\mathcal{I})^m\big)\Big) < \infty$ und nach Korollar 2.3.6 in [9] eine Projektion P auf $\ker\big((I+T)^m\big)$ mit $TP = PT$. Wegen $P(I-P) = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
(I+zTP)(I+zT(I-P)) &= I + zT - zTP + zTP + z^2TPT(I-P) \\
&= I + zT + z^2T^2P(I-P) \\
&= I + zT,
\end{aligned}$$

womit wegen Satz 3.3.3

$$\det(I+zT) = \det(I+zTP)\cdot\det(I+zT(I-P)). \tag{25}$$

Nach Satz 1.3.9 ist $F := \ker\big((I+T)^m\big)$ endlichdimensional, womit TP endlichdimensionales Bild hat. Wegen Proposition 1.3.7 hat $T\big|_F \in L_b(F)$ die Zahl -1 als einzigen Eigenwert, und dieser hat algebraische Vielfachheit ν. Da im Endlichdimensionalen die Determinante das Produkt der Eigenwerte ist, folgt mit Satz 3.3.3

$$\det(\mathcal{I} + zTP) = \det(\mathcal{I}\big|_F + zT\big|_F) = (1-z)^\nu.$$

Wieder wegen Proposition 1.3.7 ist -1 kein Eigenwert von $T(\mathcal{I} - P)$. Nach (25) und dem ersten Beweisteil hat $\det(\mathcal{I} + zT)$ eine ν-fache Nullstelle bei -1.

$\square$

4 Der Satz von Lidskii

Für endlichdimensionale Matrizen ist es wohlbekannt, dass die Spur gleich der Summe der Eigenwerte ist. In diesem letzten Kapitel wollen wir das unendlichdimensionale Analogon dazu betrachten, den sogenannten Satz von Lidskii. Zunächst benötigen wir ein Resultat aus der komplexen Analysis und die Schur-Lalesco-Weyl-Ungleichung.

4.1 Die Schur-Lalesco-Weyl-Ungleichung

Mit der Schur-Lalesco-Weyl-Ungleichung wollen wir eine Beziehung zwischen der Summe der Eigenwerte und der Summe der Singulärwerte eines kompakten Operators herstellen. Zuvor benötigen wir den Begriff einer Schur-Basis.

4.1.1 Lemma (*Schur*)**.** Sei $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ mit von Null verschiedenen und nach ihrer Vielfachheit gezählten Eigenwerten $(\lambda_n)_{n=1}^{\kappa}$. Dann gibt es ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n=1}^{\kappa}$ mit

$$(Te_n, e_n) = \lambda_n \quad \text{für } n \in \{1, \dots, \kappa\}$$

Dieses Orthonormalsystem nennt man auch, obwohl es nicht vollständig sein muss, eine Schur-Basis.

Beweis: Zu jedem λ_j gibt es nach Satz 1.3.9 ein $m_j \in \mathbb{N}$ mit $F_j := \ker\big((T - \lambda_j)^{m_j}\big) = \ker\big((T - \lambda_j)^n\big)$ für alle $n \geq m_j$. Nach Satz 1.3.9 ist F_j endlichdimensional. Wir können daher eine Basis $(b_k^{(j)})_{k=1}^{\nu_j}$ von F_j wählen, wobei ν_j die algebraische Vielfachheit von λ_j bezeichnet.

Wir definieren $U_j : F_j \to \mathbb{C}^{\nu_j}$ als die eindeutige lineare Abbildung mit $U_j b_k^{(j)} = e_k^{(j)}$ für $k = 1, \dots \nu_j$, wobei $(e_k^{(j)})_{k=1}^{\nu_j}$ die Standardbasis im $\mathbb{C}^{\nu_j}$ beschreibt. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass die Abbildung $A_j := U_j T\big|_{F_j} U_j^{-1}$ die selben Eigenwerte wie $T\big|_{F_j}$ hat. Wegen Proposition 1.3.7 hat TP_j nur λ_j als Eigenwert, womit auch A_j nur λ_j als Eigenwert hat.

Nach Satz 8.7.10 in [2] gibt es eine invertierbare Matrix $Q_j := (q_{ik}^{(j)})_{i,k=1}^{\nu_j} \in \mathbb{C}^{\nu_j \times \nu_j}$ derart, dass $Q_j^{-1} A_j Q_j = J$, wobei $J \in \mathbb{C}^{\nu_j \times \nu_j}$ eine Matrix in Jordan-Normalform ist, also

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_j} \end{bmatrix}$$

mit

$$J_l = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{bmatrix}.$$

Setzen wir $\tilde{e}_k^{(j)} := \sum\limits_{i=1}^{\nu_j} q_{ik}^{(j)} b_i^{(j)} \in F_j$, so gilt wegen $A_j Q_j = Q_j J$ für $k > 1$

$$\begin{aligned}
T(\tilde{e}_k^{(j)}) &= \sum_{i=1}^{\nu_j} q_{ik}^{(j)} T(b_i^{(j)}) = \sum_{i=1}^{\nu_j} \sum_{l=1}^{\nu_j} q_{ik}^{(j)} a_{li}^{(j)} b_l^{(j)} = \sum_{l=1}^{\nu_j} \Big(\sum_{i=1}^{\nu_j} a_{li}^{(j)} q_{ik}^{(j)} \Big) b_l^{(j)} \\
&= \sum_{l=1}^{\nu_j} (\lambda_j q_{lk}^{(j)} + \alpha_{k-1}^{(j)} q_{lk-1}^{(j)}) b_l^{(j)} = \lambda_j \sum_{l=1}^{\nu_j} q_{lk}^{(j)} b_l^{(j)} + \alpha_{k-1}^{(j)} \sum_{l=1}^{\nu_j} q_{lk-1}^{(j)} b_l^{(j)} \\
&= \lambda_j \tilde{e}_k^{(j)} + \alpha_{k-1}^{(j)} \tilde{e}_{k-1}^{(j)},
\end{aligned}$$

wobei $\alpha_k^{(j)} \in \{0, 1\}$. Mit der selben Rechnung erhalten wir $T(\tilde{e}_1^{(j)}) = \lambda_j \tilde{e}_1^{(j)}$. Wir setzen $\tilde{e}_1 := \tilde{e}_1^{(1)}, \tilde{e}_2 := \tilde{e}_2^{(1)}, \ldots, \tilde{e}_{\nu_1} := \tilde{e}_{\nu_1}^{(1)}, \tilde{e}_{\nu_1+1} := \tilde{e}_1^{(2)}, \ldots$, und wenden das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren (vgl. Satz 11.5.7 in [2]) auf die Vektoren $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots$ an, indem wir $e_1 := \tilde{e}_1$ setzen und, falls $e_1, \ldots, e_{n-1}$ definiert sind, $e_n := \tilde{e}_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{(e_i, \tilde{e}_n)}{(e_i, e_i)} e_i$ für $n \in \{1, \ldots, \kappa\}$. Normieren wir diese Vektoren, so erhalten wir ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n=1}^{\kappa}$. Da $(e_i)_{i=1}^n$ und $(\tilde{e}_i)_{i=1}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ den selben Raum aufspannen, gibt es Skalare $c_{kj}, d_{kj} \in \mathbb{C}$ derart, dass

$$e_n = \sum_{k=1}^{n} a_{kn} \tilde{e}_k \quad \text{und} \quad \tilde{e}_n = \sum_{k=1}^{n} b_{kn} e_k.$$

Aus der Tatsache, dass $(e_n)_{i=1}^n$ und $(\tilde{e}_n)_{i=1}^n$ Basen der jeweiligen Räume sind, haben sie dort eine eindeutige Darstellung bezüglich der jeweils anderen Basis. Somit folgt aus

$$e_n = \sum_{k=1}^{n} a_{kn} \tilde{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_{kn} b_{ik} e_i = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=k}^{n} a_{in} b_{ki} \Big) e_k,$$

dass, $\sum\limits_{i=k}^{n} a_{in} b_{ki} = 0$ für $k < n$ und $a_{nn} b_{nn} = \sum\limits_{i=n}^{n} a_{in} b_{ni} = 1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
Te_n &= \sum_{k=1}^{n} a_{kn} T\tilde{e}_k = \sum_{k=1}^{n} a_{kn} (\lambda_k \tilde{e}_k + \alpha_{k-1} \tilde{e}_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{kn} \tilde{e}_k + \sum_{k=1}^{n} a_{kn} \alpha_{k-1} \tilde{e}_{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_{kn} b_{ik} \lambda_k e_i + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k-1} a_{kn} b_{ik-1} \alpha_{k-1} e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{nn} b_{in} \lambda_n e_i + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{k} a_{kn} b_{ik} \lambda_k e_i + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k-1} a_{kn} b_{ik-1} \alpha_{k-1} e_i \\
&= a_{nn} b_{nn} \lambda_n e_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_{kn} e_k = \lambda_n e_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_{kn} e_k
\end{aligned}$$

mit passenden $c_{kn} \in \mathbb{C}$, $1 \leq k < n \leq \kappa$. Schlussendlich gilt

$$(Te_n, e_n) = \lambda_n(e_n, e_n) + \sum_{k=1}^{n-1} c_{kn}(e_n, e_k) = \lambda_n$$

□

4.1.2 Satz (*Schur-Lalesco-Weyl*). Sei $T \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ mit nach ihrer Vielfachheit gezählten Eigenwerten $(\lambda_n)_{n=1}^{\kappa}$ und Singulärwerten $(\mu_n(T))_{n=1}^{\eta(T)}$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\kappa(T)} |\lambda_n(T)| \leq \sum_{n=1}^{\eta(T)} \mu_n(T) < +\infty$$

Beweis: Wir schreiben T wie in (3) in der Form

$$T = \sum_{j=1}^{\eta(T)} \mu_j(T)(\cdot, e_j)f_j.$$

Für eine Schur-Basis $(g_n)_{n=1}^{\kappa}$ von T gilt nach Lemma 4.1.1

$$\lambda_n = (Tg_n, g_n) = \sum_{k=1}^{\eta(T)} \mu_k(T)(g_n, e_k)(f_k, g_n). \tag{26}$$

Setzen wir $b_{kn} := (g_n, e_k)(f_k, g_n)$, so gilt nach Lemma 2.1.4 $\sum_{k=1}^{\eta(T)} |b_{kn}| \leq 1$ und $\sum_{n=1}^{\kappa} |b_{kn}| \leq 1$. Mit (26) folgt

$$\sum_{n=1}^{\kappa} |\lambda_n(T)| \leq \sum_{n=1}^{\eta(T)} \sum_{k=1}^{\kappa} |b_{kn}|\mu_k(T) \leq \sum_{k=1}^{\eta(T)} \mu_k(T),$$

wobei wir die Summen vertauschen dürfen, da alle Summanden nichtnegativ sind.

□

4.2 Der Satz von Lidskii

4.2.1 Bemerkung. Wir wiederholen eine abgeschwächte Version des Produktsatzes von Hadamard, Satz 4.1 in [7].
Sei f analytisch in $\mathbb{C}$ mit $f(0) = 1$ und Nullstellen $a_1, a_2, \ldots$. Gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante C_ε mit $|f(z)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|z|}$ und gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} < +\infty,$$

so folgt

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z}{a_n}),$$

wobei dieses Produkt lokal gleichmäßig konvergiert, also für jedes kompakte $K \subseteq \mathbb{C}$ gilt

$$\sup_{z\in K}\Big| f(z) - \prod_{k=1}^{n}(1 - \frac{z}{a_k})\Big| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Dieses Resultat wollen wir im nächsten Satz benutzen.

4.2.2 Satz. Für einen Spurklasse-Operator T mit Eigenwerten $(\lambda_j)_{j=1}^{\kappa}$, gezählt nach ihrer Vielfachheit, und ein $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\det(\mathcal{I} + zT) = \prod_{n=1}^{\kappa}(1 + z\lambda_j). \tag{27}$$

Beweis: Für $-z^{-1} \in \sigma(T)$ gilt wegen Satz 3.3.4 $\det(I + zT) = 0$. Wegen $-z^{-1} = \lambda_j$ für ein $j \in \{1, \dots, \kappa\}$ gilt (27).

Gelte umgekehrt $-z^{-1} \notin \sigma(T)$, also $\det(I + zT) \neq 0$; siehe Satz 3.3.4. Nach der Schur-Lalesco-Weyl-Ungleichung, Satz 4.1.2, gilt für $z_n = -\dfrac{1}{\lambda_n}$

$$\sum_{n=1}^{\kappa(T)} \frac{1}{|z_n|} = \sum_{n=1}^{\kappa(T)} |\lambda_n| < +\infty.$$

Somit können wir wegen Proposition 3.3.3 den Hadamard'schen Produktsatz auf die analytische Funktion $z \mapsto \det(I + zT)$ anwenden und erhalten

$$\det(I + zT) = \prod_{n=1}^{\kappa(T)}(1 - \frac{z}{z_n}) = \prod_{n=1}^{\kappa(T)}(1 + z\lambda_n).$$

□

4.2.3 Korollar (*Lidskii*)**.** Für $T \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ mit Eigenwerten $(\lambda_j)_{j=1}^{\kappa}$, gezählt nach ihrer Vielfachheit, gilt

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_{n=1}^{\kappa} \lambda_n(T).$$

Beweis: Nach Lemma 3.3.2 und Satz 4.2.2 gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\det(\mathcal{I} + zT) &= \prod_{n=1}^{\kappa}(1 + z\lambda_j) = 1 + \sum_{n=1}^{\kappa} \sum_{J\in\mathbb{N}^n_{\leq\kappa\uparrow}} \prod_{i=1}^{n} z\lambda_{j_i} \\ &= \sum_{n=0}^{\kappa}\Big(\sum_{J\in\mathbb{N}^n_{\leq\kappa\uparrow}} \prod_{i=1}^{n} \lambda_{j_i}\Big) z^n,\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus $\mathbb{N}^n_{\leq\kappa\uparrow} = \emptyset$ für $n > \kappa$ und $\sum_{J\in\mathbb{N}^0_{\leq\kappa\uparrow}} \prod_{i=1}^{0} \lambda_{j_i} = 1$ folgt. Es gilt daher

$$\sum_{n=0}^{\kappa} \Big(\mathrm{Tr}\big(\bigwedge^n T\big)\Big) z^n = \det(\mathcal{I} + zT) = \sum_{n=0}^{\kappa} \Big(\sum_{J\in\mathbb{N}^n_{\leq\kappa\uparrow}} \prod_{i=1}^{n} \lambda_{j_i}\Big) z^n.$$

Bilden wir die Ableitung der obigen Funktion und werten sie bei 0 aus, so erhalten wir

$$\mathrm{Tr}(T) = \mathrm{Tr}\big(\bigwedge^1 T\big) = \sum_{J\in\mathbb{N}^1_{\leq\kappa\uparrow}} \prod_{i=1}^{1} \lambda_{j_i} = \sum_{n=1}^{\kappa} \lambda_n.$$

□

Literatur

[1] I. Gohberg and S. Goldberg, N. Krupnik. Traces and Determinants of Linear Operators. Birkhäuser Verlag, 1991.

[2] H. Havlicek. Lineare Algebra für technische Mathematiker. Heldermann Verlag, 2012.

[3] M. Kaltenbäck. Fundament Analysis. Heldermann Verlag, 2014.

[4] M. Kaltenbäck. Analysis 3. Vorlesungsskript, 2018.

[5] M. Kaltenbäck. Funktionalanalysis 2. Vorlesungsskript, 2018.

[6] P. Lax. Functional Analysis. Wiley-Interscience, 2002.

[7] B. Simon. Notes on infinite determinants of hilbert space operators. Advances in Mathematics 24, 244-273, 1977.

[8] B. Simon. Basic Complex Analysis; A Comprehensive Course in Analysis Part 2A. American Mathematical Society, 2015.

[9] B. Simon. Operator Theory; A Comprehensive Course in Analysis, Part 4. American Mathematical Society, 2015.

[10] H. Woracek. Komplexe Analysis 1. Vorlesungsskript, 2015.

[11] H. Woracek and M. Kaltenbäck, M. Blümlinger. Funktionalanalysis 1. Vorlesungsskript, 2019.