POSITIV DEFINITE FUNKTIONEN IN HARMONISCHER ANALYSIS

GREGOR GANTNER

Inhaltsverzeichnis

Prolog	2
1. Elementare Eigenschaften	4
2. Konvergenzaussagen	7
3. Gemittelt positiv definite Funktionen	10
4. Extremal positiv definite Funktionen	13
5. Satz von Bochner	16
6. Pontrjagin-Dualität	24
7. Charaktergruppen von $\mathbb{T}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$	27
8. Appendix	29
8.1. Funktionialanalysis	29
8.2. lokalkompakte Gruppen	30
Literatur	35

Prolog

Diese Arbeit, die hauptsächlich auf dem ersten und zweiten Kapitel von [Sas94] basiert, gibt einen kleinen Einblick in die abstrakte Harmonische Analysis, wobei wir einen Zugang über positiv definite Funktionen wählen. Bevor wir also zu einigen Hauptresultaten der Harmonischen Analysis wie dem Satz von Bochner, dem Satz von Plancherel und der Pontrjagin-Dualität kommen, setzen wir uns mit positiv definiten Funktionen auseinander. Obwohl die Theorie positiv definiter Funktionen auch für nichtkommutative Gruppen formulierbar ist, werden wir uns in dieser Arbeit aus Bequemlichkeit ausschließlich mit kommutativen Gruppen auseinandersetzen.

Für diese Arbeit ist ein solides Grundwissen über Maße auf topologischen Räumen essentiell (siehe z.B. [Kal11a, Kapitel 17]). Außerdem sind elementare Kenntnisse von lokalkompakten Gruppen sehr empfehlenswert (siehe z.B. [Fol95]). Hier eine sehr kurze Zusammenfassung:

Definition. Eine Gruppe G, die mit einer Hausdorfftopologie versehen ist, heißt *topologische Gruppe*, wenn die Abbildungen $\cdot : G \times G \to G : (x,y) \mapsto xy$ und $^{-1} : G \to G : x \mapsto x^{-1}$ stetig sind. Wir sagen, dass eine Gruppe *lokalkompakt* ist, wenn sie topologisch ist und die Topologie, mit der sie versehen ist, lokalkompakt ist.

Satz. *Sei G eine kommutative lokalkompakte Gruppe. Dann gibt es ein bis auf eine multiplikative positive Konstante eindeutiges translationsinvariantes nichtnegatives nichtverschwindendes Radonmaß*[1] *λ. So ein Maß wird als Haarmaß der Gruppe bezeichnet, es ist positiv auf nichtleeren offenen Mengen und erfüllt $\lambda(B) = \lambda(-B)$ für alle Borelmengen B.*

Nun noch ein paar Bemerkungen zur mathematischen Ausdrucksweise in dieser Arbeit: Sind $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ Messräume, $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine messbare Abbildung und μ ein nichtnegatives oder ein komplexes Maß auf Ω_1, so schreiben wir für das transformierte Maß $\mu T^{-1} : \mathcal{A}_2 \to \mathbb{C} : A \mapsto \mu(T^{-1}(A))$. Ist $f : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ messbar, so besagt der allgemeine Transformationssatz aus der Maßtheorie, dass $f \circ T$ genau dann integrierbar bezüglich μ ist, wenn f bezüglich μT^{-1} integrierbar. In diesem Fall gilt

$$\int_{\Omega_1} f \circ T \,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega_2} f \,\mathrm{d}\mu T^{-1}.$$

Wenn in einer kommutativen lokalkompakten Gruppe G von „dem“ Haarmaß die Rede ist, so ist damit ein beliebiges aber festes Haarmaß gemeint, dieses schreiben wir als λ oder λ_G.

Ist $p \in [1, \infty)$, so setzen wir $L^p(G) := L^p(\lambda)$. Der Raum $L^\infty(G)$ bezeichnet nicht (so wie meistens) den Raum der messbaren fast überall beschränkten Funktionen, sondern den Raum der lokal fast überall beschränkten Funktionen (vgl. Definition 8.13), die entsprechende Norm wird mit $\|\cdot\|_\infty$ bezeichnet.

Sind $f \in L^p(G)$, $g \in L^q(G)$, $p \in [1, \infty]$ und $q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so setzen wir

$$f * g(x) := \int_G f(x+y)g(-y) \,\mathrm{d}\lambda(y)$$

[1] Ein Radonmaß auf einem lokalkompakten Hausdorffraum ist ein Borelmaß, das auf allen Borelmengen von außen regulär und auf allen offenen Mengen von innen regulär ist.

für $x \in G$. Man beachte, dass der Ausdruck wegen der Hölder'schen Ungleichung und Satz 8.16 existiert und beschränkt durch $\|f\|_p \|g\|_q$ ist, außerdem folgt aus dem allgemeinen Transformationssatz und $\lambda = \lambda(-\cdot)$, dass $f * g = g * f$. Wegen Lemma 8.7 ist $f * g$ stetig.

Wir nennen $f : G \to \mathbb{C}$ *gleichmäßig stetig*, wenn

$$\forall \epsilon > 0 : \exists U \in \mathcal{U}(e) : \forall x, y \in G : y - x \in U \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

Dabei bezeichnen wir in kommutativen Gruppen das neutrale Element für gewöhnlich mit e. Offenbar ist jede gleichmäßig stetige Funktion auch stetig.

Ist G eine kommutative Gruppe und $f : G \to \mathbb{C}$, so setzen wir $f^*(x) := \overline{f(-x)}$ für $x \in G$.

Ist X ein lokalkompakter Hausdorffraum, so bezeichnen wir mit $M(X)$ die Menge aller komplexen Borelmaße, deren Variation regulär ist. Mit $M_0^+(X)$ bezeichnen wir alle nichtnegativen Maße aus $M(X)$.

1. Elementare Eigenschaften

In diesem Abschnitt bezeichne G stets eine kommutative Gruppe. Wir definieren positiv definite Funktionen und leiten einige elementare Eigenschaften her.

Definition 1.1. Wir nennen eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ *positiv definit*, genau wenn

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(x_j - x_i) c_i \overline{c}_j \geq 0$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in G$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$. Wir definieren $P(G)$ als die Menge aller positiv definiten Funktionen auf G. Ist G sogar eine topologische Gruppe, so bezeichnen wir mit $P^c(G)$ die Menge der stetigen positiv definiten Funktionen und mit $P^1(G)$ die Menge der stetigen durch 1 beschränkten positiv definiten Funktionen.

Lemma 1.2. *Sei $f \in P(G)$. Dann ist $f(x) = f^*(x)$ und $|f(x)| \leq f(e)$ für alle $x \in G$.*

Beweis. Sei $c \in \mathbb{C}$ zunächst beliebig. In Definition 1.1 setzen wir $n = 2, x_1 = e, x_2 = x, c_1 = 1$ und $c_2 = c$. Dann erhalten wir

$$f(e)(1 + |c|^2) + f(x)\overline{c} + f(-x)c \geq 0.$$

Da $f(e)$ reell ist (setze in Definition 1.1 $n = 1, x_1 = e, c_1 = 1$), folgt, dass $f(x)\overline{c} + f(-x)c$ reell ist. Für $c = 1$ bzw. für $c = i$ sieht man somit, dass $\mathrm{Im}(f(x)+f(-x)) = 0$ bzw. $\mathrm{Im}(i(f(-x) - f(x))) = 0$ reell sind. Dies impliziert $f(-x) = \overline{f(x)}$.

Um die zweite Behauptung einzusehen, wählen wir c so, dass $f(x)\overline{c} = -|f(x)|$. Dann folgt

$$0 \leq f(e)(1 + |c|^2) + f(x)\overline{c} + f(-x)c = f(e)(1 + 1^2) - |f(x)| - |f(x)|.$$

□

Proposition 1.3. *Seien $f_1, f_2 \in P(G)$ und $p_1, p_2 \geq 0$. Dann sind auch $\overline{f_1}, f_1^*$, $\mathrm{Re} f_1, |f_1|^2$, $p_1 f_1 + p_2 f_2$ und $f_1 f_2$ positiv definit.*

Beweis. Dass $\overline{f_1}, f_1^*, p_1 f_1 + p_2 f_2$ positiv definit sind, folgt unmittelbar aus der Definition. Daraus folgt dann $\mathrm{Re} f_1 \in P(G)$. Das Produkt ist positiv definit wegen dem Produktsatz von Schur (vgl. [BR97, Seite 141]), der besagt, dass das komponentenweise Produkt von positiv semidefiniten Matrizen wieder positiv semidefinit ist. Somit ist auch $|f_1|^2 \in P(G)$. □

Proposition 1.4. *Ist $(f_i)_{i \in I}$ ein punktweise konvergentes Netz aus positiv definiten Funktionen, so ist der Grenzwert f ebenfalls positiv definit.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der Definition. □

Proposition 1.5. *Sei H ein Hilbertraum, $h \in H$ und $(U_x)_{x \in G}$ eine Familie unitärer Operatoren mit $U_x U_y = U_{x+y}$ und $U_x U_{-x} = I$ für $x, y \in G$, dann ist die Funktion*

$$f : G \to \mathbb{C} : x \mapsto (h, U_x h)$$

positiv definit.

Beweis. Seien $n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in G$ und $c_1, \ldots c_n \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(x_j - x_i) c_i \bar{c}_j = \sum_{i,j=1}^{n} (h, U_{x_j - x_i} h) c_i \bar{c}_j =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} (c_i U_{x_i} h, c_j U_{x_j} h) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i U_{x_i} h, \sum_{i=1}^{n} c_i U_{x_i} h \right) \geq 0.$$

□

Lemma 1.6. *Sei $f \in P(G)$.*

(1) *Dann ist $K : G \times G \to \mathbb{C} : (x, y) \mapsto f(x - y)$ die Kernfunktion eines eindeutigen kernreproduzierenden Hilbertraumes $H(f)$ (vgl. Definition 8.1).*
(2) *Jedes $g \in H(f)$ ist beschränkt durch $(g, g)^{1/2} f(e)$.*
(3) *Der Raum*

$$T(f) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i f(\cdot - x_i) : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{C}, x_i \in G \right\}$$

ist ein dichter Teilraum von $H(f)$.
(4) *Für $g, h \in T(f)$ mit $g = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\cdot - x_i)$ und $h = \sum_{j=1}^{m} b_j f(\cdot - y_j)$ gilt*

$$(g, h) = \sum_{i,j=1}^{n,m} f(y_j - x_i) a_i \bar{b}_j.$$

(5) *Ist $x \in G$, so ist die Abbildung $U_x : H(f) \to H(f) : g \mapsto g(\cdot - x)$ unitär und erfüllt $g(x) = (g, U_x f)$ für $g \in H(f)$.*
(6) *Für $x, y \in H(f)$ gilt $U_x U_y = U_{x+y}$. Außerdem ist $U_e = I$.*
(7) *Ist f sogar stetig, so ist die Abbildung $F_{g,h} : G \to \mathbb{C} : x \mapsto (g, U_x h)$ für $g, h \in H(f)$ stetig. Außerdem sind dann alle $g \in H(f)$ stetig.*

Beweis. Wegen Lemma 1.2 erfüllt K die Voraussetzungen von Satz 8.3, woraus die eindeutige Existenz von $H(f)$ folgt. Da K die Kernfunktion von $H(f)$ ist, folgt

$$|g(x)|^2 = |(g, \underbrace{K(\cdot, x)}_{=U_x f})|^2 \leq (g, g)(K(\cdot, x), K(\cdot, x)) = (g, g) K(x, x) = (g, g) f(e)$$

für $x \in G, g \in H(f)$.

Der Raum $T(f)$ ist gerade die lineare Hülle von $\{K(\cdot, x) : x \in G\}$. Damit folgt die Darstellung des Skalarproduktes auf $T(f)$ unmittelbar. Die Dichtheit von $T(f)$ folgt aus

$$\{K(\cdot, x) : x \in G\}^{\perp} = 0.$$

Für $x \in G$ ist die Abbildung $U_x|_{T(f)}$ wegen (4) isometrisch und kann somit isometrisch zu einer Abbildung $\tilde{U}_x$ auf $H(f)$ fortgesetzt werden. Ist $g \in H(f)$, so gibt es eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $T(f)$, die bezüglich $(\cdot, \cdot)$ gegen g konvergiert. Dies impliziert wegen (2) auch gleichmäßige Konvergenz gegen g. Da somit auch $(U_x g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $U_x g$ konvergiert, folgt $U_x g = \tilde{U}_x g$, denn $(U_x g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auch gleichmäßig gegen $\tilde{U}_x g$. Die Abbildung U_x ist also isometrisch und wegen $U_x U_{-x} = I$ invertierbar und somit unitär.

Sind $g, h \in T(f)$, so folgt aus (4), dass $F_{g,h}$ stetig ist. Sind $g, h \in H(f)$, so gibt es Folgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}, (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die bezüglich $(\cdot,\cdot)$ gegen g bzw. h konvergieren. Aus

$$\begin{aligned}|(g_n, U_x h_n) - (g, U_x h)| \leq \\ |(g_n, U_x h_n) - (g_n, U_x h)| + |(g_n, U_x h) - (g, U_x h)| \leq \\ \|g_n\|\|U_x h_n - U_x h\| + \|g_n - g\|\|U_x h\| = \\ \|g_n\|\|h_n - h\| + \|g_n - g\|\|h\|\end{aligned}$$

für alle $x \in G$ folgt die gleichmäßige Konvergenz von F_{g_n,h_n} gegen $F_{g,h}$. Damit ist $F_{g,h}$ stetig. Für $g \in H(f)$ ist $g = F_{g,f}$ stetig. □

Lemma 1.7. *Seien $f \in P(G), n \in \mathbb{N}, y_1, \dots, y_n \in G$ und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. Dann ist die Funktion*

$$x \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} f(y_j + x - y_i) c_i \bar{c}_j$$

positiv definit.

Beweis. Sei $(H(f), (\cdot,\cdot))$ der Hilbertraum aus Lemma 1.6. Dann gilt mit der Notation dieses Lemmas

$$x \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} f(y_j + x - y_i) c_i \bar{c}_j = (\sum_{i=1}^{n} c_i U_{y_i} f, \sum_{i=1}^{n} c_i U_{x+y_i} f).$$

Aus Lemma 1.5 folgt die Behauptung. □

Lemma 1.8. *Sei f eine positiv definite Funktion. Dann gilt:*

(1) $|\sum_{i,j=1}^{n,m} f(y_j - x_i) a_i \bar{b}_j|^2 \leq (\sum_{i,j=1}^{n} f(x_j - x_i) a_i \bar{a}_j)(\sum_{i,j=1}^{m} f(y_j - y_i) b_i \bar{b}_j)$ *für $n, m \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in G$ und $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{C}$*

(2) $|\sum_{i=1}^{n} f(x_i) a_i|^2 \leq f(e) \sum_{i,j=1}^{n} f(x_j - x_i) \bar{a}_i a_j$. *für $n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in G$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$*

(3) $|f(x) - f(y)|^2 \leq 2f(e)(f(e) - \mathrm{Re} f(y - x))$ *für $x, y \in G$.*

(4) $|f(e)f(x+y) - f(x)f(y)|^2 \leq (f(e)^2 - |f(x)|^2)(f(e)^2 - |f(y)|^2)$ *für $x, y \in G$.*

Beweis. Punkt (1) ist gerade die Cauchy-Schwarz Ungleichung des Skalarproduktes aus Lemma 1.6 angewandt auf die Funktionen $g := \sum_{i=1}^{n} a_i f(\cdot - x_i)$ und $h := \sum_{j=1}^{m} b_j f(\cdot - y_j)$.

Die Ungleichung (2) folgt aus (1), wenn man $m = 1, y_1 = e, b_1 = 1$ wählt, a_i durch $\bar{a}_i$ ersetzt und verwendet, dass f Hermite'sch ist (vgl. Lemma 1.2).

Die Ungleichung (3) ergibt sich aus (2), wenn man $n = 2, x_1 = x, x_2 = y, a_1 = 1, a_2 = -1$ wählt.

Um Punkt (4) einzusehen, sei zunächst $f(e) \neq 0$. Wir definieren die positiv definite Funktion $g := f/f(e)$ und betrachten die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & g(-x) & g(y) \\ g(x) & 1 & g(x+y) \\ g(-y) & g(-x-y) & 1 \end{pmatrix}$$

für $x, y \in G$. Diese ist wegen Definition 1.1 (setze $n = 3, x_1 = e, x_2 = -x, x_3 = y$) und Lemma 1.2 positiv semidefinit. Daher ist ihre Determinante nichtnegativ, das heißt

$$1 + g(-x)g(-y)g(x+y) + g(x)g(y)g(-x-y) - |g(x)|^2 - |g(y)|^2 - |g(x+y)|^2 \geq 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$|g(x+y)-g(x)g(y)|^2 \leq (1-|g(x)|^2)(1-|g(y)|^2).$$

Daraus folgt die Behauptung. Wenn $f(e)=0$, so ist wegen Lemma 1.2 $f=0$ und die Behauptung folgt ebenfalls. □

Korollar 1.9. *Sei f eine positiv definite Funktion auf einer kommutativen topologischen Gruppe. Ist f stetig bei e, so ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wegen Lemma 1.2 ist $\mathrm{Re} f(e) = f(e)$. Mit Lemma 1.8.3 ergibt sich somit die Behauptung unmittelbar. □

Lemma 1.10. *Sei G lokalkompakt und $f \in P^c(G)$. Sei V eine symmetrische Umgebung von e mit kompaktem Abschluss und $\chi := \chi_V \lambda(V)^{-1}$. Dann gilt*

$$|f(x) - f * \chi(x)|^2 \leq 2f(e)\lambda(V)^{-1} \int_V (f(e) - \mathrm{Re} f(y))\, \mathrm{d}\lambda(y)$$

für alle $x \in G$.

Beweis. Man beachte zunächst, dass die Faltung und alle auftretenden Integrale wegen Lemma 1.2 sinnvoll sind. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|f(x) - f*\chi(x)|^2 = \left| \int_G f(x)\chi(-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) - \int_G f(x+y)\chi(-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) \right|^2 &= \\
\lambda(V)^{-2} \left| \int_V \chi_V(y)[f(x) - f(x+y)]\,\mathrm{d}\lambda(y) \right|^2 &\leq \\
\lambda(V)^{-2} \int_V \chi_V^2(y)\,\mathrm{d}\lambda(y) \int_V |f(x) - f(x+y)|^2\,\mathrm{d}\lambda(y) &= \\
\lambda(V)^{-1} \int_V |f(x) - f(x+y)|^2\,\mathrm{d}\lambda(y)&.
\end{aligned}$$

Lemma 1.8.3 liefert nun die Behauptung. □

2. Konvergenzaussagen

In diesem Abschnitt bezeichne G stets eine kommutative lokalkompakte Gruppe. Wir beschäftigen uns mit dem Konvergenzverhalten positiv definiter Funktionen.

Lemma 2.1. *Sei $g \in L^1(G)$ und $(\phi_i)_{i\in I}$ ein Netz in $L^\infty(G)$ mit $\|\phi_i\|_\infty \leq C$ für alle $i \in I$, wobei $C > 0$. Falls das Netz in der schwach* Topologie von $L^\infty(G)$ (vgl. Satz 8.16) gegen ein $\phi \in L^\infty(G)$ konvergiert, so konvergiert $(g * \phi_i)_{i\in I}$ gegen $(g*\phi)$ gleichmäßig[2] auf jeder kompakten Teilmenge von G.*

Beweis. Für $h \in L^1(G)$ und $i \in I$ setzen wir

$$L(h) := \int_G h(y)\phi(-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) \text{ und } L_i(h) := \int_G h(y)\phi_i(-y)\,\mathrm{d}\lambda(y).$$

Dann sind L und L_i ($i \in I$) stetige lineare Funktionale auf $L^1(G)$. Aufgrund der Voraussetzungen gilt $\lim_{i\in I} L_i(h) = L(h)$ für $h \in L^1(G)$. Sind $h_1, h_2 \in L^1(G)$ und $i \in I$, so gilt

$$|L_i(h_1) - L_i(h_2)| \leq \|h_1 - h_2\|_1 \|\phi_i\|_\infty \leq C\|h_1 - h_2\|_1.$$

---

[2] Man beachte, dass die Faltung auf G stetig und beschränkt ist.

Somit ist $\{L_i : i \in I\}$ eine gleichgradig stetige Menge von Funktionen auf $L^1(G)$. Für ein kompaktes $K \subseteq L^1(G)$ können wir den Satz von Ascoli auf die Menge $\{L_i|_K : i \in I\}$ anwenden, denn die punktweise Beschränktheit folgt aus $L_i(h) \leq C\|h\|_1$ für $h \in L^1(G)$. Betrachtet man nun ein Teilnetz von $(L_i)_{i\in I}$, so besitzt dieses ein Teilnetz, welches aufgrund der punktweisen Konvergenz gleichmäßig auf K gegen L konvergiert. Daraus folgt schon die gleichmäßige Konvergenz des Netzes $(L_i)_{i\in I}$ auf K gegen L.

Sei nun $\tilde{K}$ eine kompakte Teilmenge von G. Wegen Lemma 8.7 ist die Menge $K := \{g(x + \cdot) : x \in \tilde{K}\}$ kompakt. Die gleichmäßige Konvergenz von $(g * \phi_i)_{i\in I}$ auf $\tilde{K}$ gegen $g*\phi$ folgt nun aus der gleichmäßigen Konvergenz von $(L_i)_{i\in I}$ auf K gegen L und den Gleichungen $(i \in I, x \in G)$

$$g * \phi_i(x) = \int_G g(x + y)\phi_i(-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = L_i(g(x + \cdot)) \text{ und } g * \phi(x) = L(g(x + \cdot)).$$

□

Proposition 2.2. *Ist $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz von positiv definiten stetigen Funktionen, das in der schwach* Topologie auf $L^\infty(G)$ gegen ein $f \in P^c(G)$ konvergiert und gilt $\lim_{i\in I} f_i(e) = f(e)$, so konvergiert das Netz gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von G gegen f.*

Beweis. Ist M eine Teilmenge von G, so schreiben wir $\|g\|_M := \sup_{x\in M} |g(x)|$ für Funktionen $g : G \to \mathbb{C}$.

Sei K eine kompakte Teilmenge von G und $\epsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit von f gibt es eine symmetrische e-Umgebung V mit kompaktem Abschluss, sodass

$$2f(e)\lambda(V)^{-1} \int_V [f(e) - \mathrm{Re} f(y)]\,\mathrm{d}\lambda(y) < \frac{\epsilon^2}{9}. \tag{2.1}$$

Wir setzen $\chi := \chi_V/\lambda(V)$. Für $i \in I$ gilt

$$\|f_i - f\|_K \leq \|f_i - f_i * \chi\|_G + \|f_i * \chi - f * \chi\|_K + \|f * \chi - f\|_G.$$

Wir schätzen nun jeden der drei Summanden ab. Wegen den Voraussetzungen an V folgt mit Lemma 1.10

$$\|f * \chi - f\|_G < \frac{\epsilon}{3}.$$

Da $(f_i)_{i\in I}$ in der schwach* Topologie gegen f konvergiert, wegen $\chi_V \in L^1(G)$ und wegen $\lim_{i\in I} f_i(e) = f(e)$ folgt mit Ungleichung (2.1) die Existenz eines $i_0 \in I$ mit

$$2f_i(e)\lambda(V)^{-1} \int_V [f_i(e) - \mathrm{Re} f_i(y)]\,\mathrm{d}\lambda(y) < \frac{\epsilon^2}{9}$$

für $i \geq i_0$. Wieder mit Lemma 1.10 erhält man

$$\|f_i - f_i * \chi\|_G < \frac{\epsilon}{3}$$

für $i \geq i_0$. Da $\|f_j\|_\infty = \sup_{i\in I} f_i(e)$ (vgl. Lemma 1.2) für $j \in I$, sehen wir mit Lemma 2.1, dass ein $j_0 \geq i_0$ mit

$$\|f_i * \chi - f * \chi\|_K < \frac{\epsilon}{3}, \quad i \geq j_0$$

existiert. Es folgt also $\|f_i - f\|_K < \epsilon$ für $i \geq j_0$. □

Korollar 2.3. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $P^c(G)$, die punktweise gegen ein $f \in P^c(G)$ konvergiert. Dann konvergiert die Folge auch gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von G gegen f.*

Beweis. Für $g \in L^1(G)$ gilt $|gf_n| \leq |g| \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(e)$. Mit dem Satz von Lebesgue folgt somit, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der schwach* Topologie von $L^\infty(G)$ gegen f konvergiert. Proposition 2.2 liefert die Behauptung. □

Lemma 2.4. *Sei $h \in L^2(G)$. Dann ist $h * h^*$ positiv definit.*

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$,$c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ und $x_1, \ldots, x_n$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \bar{c}_j \int_G h(x_j - x_i + y)\overline{h(y)}\,\mathrm{d}\lambda(y) = \sum_{i,j=1}^{n} c_i \bar{c}_j \int_G h(y - x_i)\overline{h(y - x_j)}\,\mathrm{d}\lambda(y) =$$

$$\int_G \left|\sum_{i=1}^{n} c_i h(y - x_i)\right|^2 \mathrm{d}\lambda(y) \geq 0.$$

□

Lemma 2.5. *Sei W eine Umgebung von e. Dann existiert ein $f \in P^c(G) \cap C_{00}^+(G)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subseteq W$ und $\int_G f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = 1$.*

Beweis. Wir wählen eine Umgebung V von e mit $V - V \subseteq W$ (dies ist möglich aufgrund der Stetigkeit von $(x, y) \mapsto x - y$) und ein von 0 verschiedenes $h \in C_{00}^+(G)$ mit Träger K in V (dies ist möglich aufgrund der Zerlegung der Eins- vgl. [Kal11a, Lemma 17.2.2]). Die Funktion $h*h^*$ ist nichtnegativ, stetig, laut Lemma 2.4 positiv definit und hat Träger in $K - K \subseteq V - V \subseteq W$. Außerdem ist die Funktion nicht die Nullfunktion, denn $h * h^*(e) = \|h\|_2^2 > 0$, und kann somit zu einem f mit den gewünschten Eigenschaften normiert werden. □

Korollar 2.6. *Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Umgebungsbasis von e und für jedes $i \in I$ sei $f_i \in P^c(G) \cap C_{00}^+(G)$ eine Abbildung mit $\int_G f_i(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = 1$ und $\operatorname{supp}(f_i) \subseteq U_i$. (Solche Funktionen existieren laut Lemma 2.5.) Versieht man I mit der Ordnung $i \geq j$, wenn $U_i \subseteq U_j$, so konvergiert $(f_i * g)_{i\in I}$ punktweise gegen g für jedes beschränkte $g \in C(G)$. Falls sogar $g \in C_{00}(G)$, so ist die Konvergenz gleichmäßig.*

Beweis. Für $x \in G$ und $i \in I$ gilt

$$|f_i * g(x) - g(x)| = \left|f_i * g(x) - \int_G f_i(y)g(x)\,\mathrm{d}\lambda(y)\right| =$$

$$\left|\int_G f_i(y)[g(x - y) - g(x)]\,\mathrm{d}\lambda(y)\right| \leq$$

$$\int_G f_i(y)|g(x - y) - g(x)|\,\mathrm{d}\lambda(y) \leq \sup_{y\in U_i} |g(x - y) - g(x)|.$$

Da g stetig ist, folgt $\lim_{i\in I} f_i * g(x) = g(x)$.

Ist g sogar in $C_{00}(G)$, so ist g gleichmäßig stetig (vgl. Proposition 8.6). Es gibt also zu jedem $\epsilon > 0$ ein $i_0 \in I$, sodass $|g(x - y) - g(x)| < \epsilon$ für $x \in G, -y \in U_{i_0}$. Mit obiger Ungleichung folgt somit die gleichmäßige Konvergenz. □

3. Gemittelt positiv definite Funktionen

In diesem Abschnitt bezeichne G stets eine kommutative lokalkompakte Gruppe. Wir definieren hier ein anderes Konzept von positiver Definitheit, von dem wir sehen werden, dass es eigentlich genau dem bis jetzt verwendeten entspricht.

Definition 3.1. Wir nennen $\phi \in L^\infty(G)$ *gemittelt positiv definit*[3], falls

$$\int_G \int_G \phi(y-x)h(x)\overline{h(y)}\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) \geq 0$$

für alle $h \in C_{00}(G)$.

Lemma 3.2. *Sei $f \in P^c(G), h \in L^1(G)$ und $H(f)$ wie in Lemma 1.6. Dann wird durch $g \mapsto h * g$ ein stetiger linearer Operator von $H(f)$*[4] *nach $H(f)$ definiert, dessen adjungierter Operator durch $g \mapsto h^* * g$ gegeben ist.*

Beweis. Wir verwenden die Notation aus Lemma 1.6. Sind $g_1, g_2 \in H(f)$, so wissen wir, dass die Abbildung $y \mapsto (g_1, U_{-y}g_2) = (U_y g_1, g_2)$ stetig und somit messbar ist und dass der Betrag der Abbildung durch $\|g_1\|\|g_2\|$ beschränkt ist. Durch

$$B_h(g_1, g_2) := \int_G (U_y g_1, g_2)h(y)\,\mathrm{d}\lambda(y), \quad g_1, g_2 \in H(f)$$

wird also eine stetige Bilinearform definiert. Sei A_h der Gram-Operator zu B_h (vgl. [WKB11, Proposition 3.2.6]), also jener eindeutige lineare stetige Operator von $H(f)$ nach $H(f)$ mit $(A_h g_1, g_2) = B_h(g_1, g_2)$ für alle $g_1, g_2 \in H(f)$. Für $g \in H(f)$ und $x \in G$ gilt

$$(A_h g)(x) = (A_h g, U_x f) = \int_G (U_y g, U_x f)h(y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_G g(x-y)h(y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = h * g(x).$$

Es folgt $A_h = h * (\cdot)$.

Wir berechnen nun die Adjungierte A_h^*. Für $g \in H(f)$ und $x \in G$ gilt

$$(A_h^* g)(x) = (A_h^* g, U_x f) = (g, A_h U_x f) = \overline{(A_h U_x f, g)} = \overline{\int_G (U_y U_x f, g)h(y)\,\mathrm{d}\lambda(y)} = \int_G g(x+y)\overline{h(y)}\,\mathrm{d}\lambda(y) = h^* * g(x).$$

□

Lemma 3.3. *Sei ϕ gemittelt positiv definit. Auf dem Raum $C_{00}(G)$ wird durch*

$$[h_1, h_2] := \int_G \int_G \phi(y-x)h_1(x)\overline{h_2(y)}\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y), \quad h_1, h_2 \in C_{00}(G)$$

eine positiv semidefinite Hermite'sche Sesquilinearform definiert. Es gilt

$$[h_1, h_2] = h_2^* * (h_1 * \phi)(e) = \overline{h_1^* * (h_2 * \phi)(e)} = \int_G \phi(x)(h_2^* * h_1)(-x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$$

für beliebige $h_1, h_2 \in C_{00}(G)$.

---

[3] Man beachte, dass der in der englischen Literatur verwendete Ausdruck „integrally positive definite" hier frei übersetzt wurde.

[4] Laut Lemma 1.6 ist jede Funktion aus $H(f)$ stetig und beschränkt.

Beweis. Seien $h_1, h_2 \in C_{00}(G)$ beliebig. Aus $[h_1 + ch_2, h_1 + ch_2] \geq 0$ für $c = 1$ bzw. $c = i$ folgt $\mathrm{Im}([h_1, h_2] + [h_2, h_1]), \mathrm{Im}(i[h_1, h_2] - i[h_2, h_1]) = 0$ und somit $[h_1, h_2] = \overline{[h_2, h_1]}$.

Die erste Gleichung des Lemmas sieht man unmittelbar

$$[h_1, h_2] = \int_G \overline{h_2(y)} \int_G \phi(y - x) h_1(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) \,\mathrm{d}\lambda(y) = h_2^* * (h_1 * \phi)(e).$$

Da die Form Hermite'sch ist, folgt $[h_1, h_2] = \overline{h_1^* * (h_2 * \phi)(e)}$. Mit dem bereits gezeigten und dem Satz von Fubini[5] sehen wir

$$\begin{aligned}[h_1, h_2] = h_2^* * (h_1 * \phi)(e) = \int_G \int_G h_2^*(y) h_1(-x - y) \phi(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) \,\mathrm{d}\lambda(y) =& \\ \int_G \phi(x) \int_G h_2^*(y) h_1(-x - y) \,\mathrm{d}\lambda(y) \,\mathrm{d}\lambda(x) =& \\ \int_G \phi(x) (h_1(-\cdot) * h_2^*(-\cdot))(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_G \phi(x)(h_2^* * h_1)(-x) \,\mathrm{d}\lambda(x).&\end{aligned}$$

□

Satz 3.4. *Eine Abbildung $\phi : G \to \mathbb{C}$ ist genau dann gemittelt positiv definit, wenn ein $f \in P^c(G)$ existiert, sodass $\phi = f$ lokal fast überall.*

Beweis. Die Rückrichtung folgt unmittelbar aus Lemma 3.2, denn für $h \in C_{00}(G)$ gilt

$$\begin{aligned}0 \leq (h * f, h * f) = (h^* * (h * f), f) = h^* * (h * f)(e) =& \\ \int_G \int_G \phi(y - x) h(x) \overline{h(y)} \,\mathrm{d}\lambda(x) \,\mathrm{d}\lambda(y).&\end{aligned}$$

Für die Hinrichtung sei ϕ o.B.d.A. nicht lokal fast überall 0. Wir betrachten den Raum

$$\tilde{T}(\phi) := \{h * \phi : h \in C_{00}(G)\}$$

bestehend aus stetigen Funktionen auf G. Für $g_1, g_2 \in \tilde{T}(\phi)$ mit $g_i = h_i * \phi$ für $i = 1, 2$ setzen wir

$$(g_1, g_2) := [h_1, h_2],$$

wobei $[\cdot, \cdot]$ die Form aus Lemma 3.3 ist. Wegen Lemma 3.3 gilt zudem

$$(g_1, g_2) = h_2^* * g_1(e) = \overline{h_1^* * g_2(e)}, \tag{3.1}$$

woraus die Wohldefiniertheit von $(\cdot, \cdot)$ folgt. Außerdem folgt aus dem Lemma, dass $(\cdot, \cdot)$ eine positiv semidefinite Hermite'sche Form ist. Für jedes $x \in G$ durch $g \mapsto g(\cdot - x)$ eine isometrische Abbildung U_x von $\tilde{T}(\phi)$ nach $\tilde{T}(\phi)$ definiert, denn für $h \in C_{00}(G)$ ist $U_x(h * \phi) = h(\cdot - x) * \phi$ und es gilt

$$\begin{aligned}(U_x(h * \phi), U_x(h * \phi)) = [h(\cdot - x), h(\cdot - x)] =& \\ \int_G \int_G \phi(y - z) h(z - x) \overline{h(y - x)} \,\mathrm{d}\lambda(z) \,\mathrm{d}\lambda(y) = [h, h] = (h * \phi, h * \phi).&\end{aligned}$$

[5] Man beachte, dass der Satz von Fubini nur σ-endliche Maße gilt. Das Haarmaß ist im Allgemeinen nicht σ-endlich. Da h_1 und h_2 kompakten Träger haben, wird aber jeweils nur über kompakte Mengen integriert.

Wir zeigen nun, dass $\tilde{T}(\phi)$ sogar ein Skalarproduktraum ist. Sei hierzu $(f_i)_{i\in I}$ wie in Korollar 2.6, $g \in \tilde{T}(\phi)$ und $x \in G$. Für $i \in I$ gilt wegen (3.1) und weil f_i Hermite'sch ist (vgl. Lemma 1.2), dass

$$(g, \underbrace{U_x(f_i * \phi)}_{f_i(\cdot - x)*\phi}) = g * (f_i(\cdot - x))^*(e) = \int_G g(-y)\overline{f_i(-x-y)}\,\mathrm{d}\lambda(x) = g * f_i(x).$$

Dies ergibt in Verbindung mit Korollar 2.6

$$\lim_{i\in I}(g, U_x f_i * \phi) = \lim_{i\in I} g * f_i(x) = g(x).$$

Da das Integral über die f_i gleich 1 ist, folgt

$$(f_i * \phi, f_i * \phi) = \int_G \int_G \phi(y-x) f_i(x)\overline{f_i(y)}\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) \leq \|\phi\|_\infty$$

für $i \in I$. Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung für positiv semidefinite Hermite'sche Formen folgt

$$|g(x)| = \lim_{i\in I} |(g, U_x(f_i * \phi))| \leq (g,g)^{1/2}\|\phi\|_\infty^{1/2}. \tag{3.2}$$

Diese Ungleichung impliziert die Definitheit.

Nun vervollständigen wir $\tilde{T}(\phi)$ zu einem Hilbertraum $\tilde{H}(\phi) \geq \tilde{T}(\phi)$. Für $x \in G$ sei E_x die stetige Fortsetzung von U_x auf $\tilde{H}(\phi)$. Diese ist unitär, da U_x den Raum $\tilde{T}(\phi)$ isometrisch und bijektiv in sich selbst abbildet. Ihre Inverse ist gerade E_{-x}. Wegen (3.2) gibt es eine eindeutige stetige Abbildung $\iota : \tilde{H}(\phi) \to C_b(G)$[6], sodass $\iota(g) = g$ für $g \in \tilde{T}(\phi)$. Die Abbildung $g \mapsto \iota(g)(e)$ auf $\tilde{H}(\phi)$ ist stetig und linear. Sei ϕ' jenes laut Fréchet-Riesz existierende $\phi' \in \tilde{H}(\phi)$ mit $(g, \phi') = \iota(g)(e)$ für alle $g \in \tilde{H}(\phi)$. Für $g \in \tilde{T}(\phi), x \in G$ gilt

$$\iota(g)(x) = \iota(E_{-x}g)(e) = (E_{-x}g, \phi') = (g, E_x\phi').$$

Da alle auftretenden Abbildungen stetig sind, gelten die Gleichungen auch für $g \in \tilde{H}(\phi)$. Insbesondere gilt $\iota(\phi')(x) = (\phi', E_x\phi')$. Wegen Proposition 1.5 ist $f := \iota(\phi') \in C(G)$ positiv definit.

Wegen (3.1) gilt für $h \in C_{00}(G)$ und $g_1 = h * \phi, g_2 \in \tilde{T}(\phi)$

$$(g_1, g_2) = \overline{(h^* * \iota(g_2)(e))}.$$

Die Abbildung $g \mapsto h^* * g$ ist auf $C_b(G)$ stetig und daher folgt die Gleichheit auch für $g_2 \in \tilde{H}(\phi)$. Damit folgt

$$h * \phi(e) = (h * \phi, \phi') = \overline{(h^* * \iota(\phi')(e))}$$

für alle $h \in C_{00}(G)$. Dies impliziert wegen der positiven Definitheit von $\iota(\phi')$ und der Dichtheit von $C_{00}(G)$ in $L^1(G)$ (vgl. [Kal11a, Lemma 17.1.17])

$$\int_G h\phi\,\mathrm{d}\lambda = \int_G h\iota(\phi')\,\mathrm{d}\lambda, \quad h \in L^1(G).$$

Daher ist $\phi = \iota(\phi')$ lokal fast überall. □

Korollar 3.5. *Die Menge $P^1(G)$ ist schwach* kompakt in $L^\infty(G)$.*

[6] Wir bezeichnen mit $C_b(G)$ die Menge aller stetigen beschränkten Funktionen von G nach $\mathbb{C}$ versehen mit der Supremumsnorm.

Beweis. Da $\|f\|_\infty = f(e) \leq 1$ für $f \in P^1(G)$, ist die Menge $P^1(G)$ beschränkt in $L^\infty(G)$. Wenn wir zeigen, dass $P^1(G)$ schwach* abgeschlossen ist, folgt mit dem Satz von Banach-Alaoglu die Behauptung. Sei also $(g_i)_{i\in I}$ ein Netz in $P^1(G)$, das schwach* gegen ein $g \in L^\infty(G)$ konvergiert. Für $h_1, h_2 \in C_{00}(G)$ und gemittelt positiv definites ϕ gilt laut Lemma 3.3

$$\int_G \int_G \phi(y-x)h_1(x)\overline{h_2(y)}\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_G \phi(x)(\underbrace{h_2^* * h_1}_{\in C_{00}(G)})(-x)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

Da g schwach* Grenzwert von laut Satz 3.4 gemittelt positiv definiten Funktionen ist, folgt somit, dass auch g gemittelt positiv definit ist. Mit dem gleichen Satz folgt auch die Existenz eines $f \in P^c(G)$ mit $f = g$ lokal fast überall. Es gilt $f(e) = \|f\|_\infty = \|g\|_\infty \leq 1$, denn

$$\left|\int_G gh\,\mathrm{d}\lambda\right| = \lim_{i\in I}\left|\int_G g_i h\,\mathrm{d}\lambda\right| \leq 1$$

für alle $h \in L^1(G)$ mit $\|h\|_1 = 1$. Damit stimmt g lokal fast überall mit einem $f \in P^1(G)$ überein. □

4. Extremal positiv definite Funktionen

In diesem Abschnitt bezeichne G stets eine kommutative topologische Gruppe.

Definition 4.1. Sei $f : G \to \mathbb{C}$. Wir nennen f *extremal positiv definit*, falls es ein Extremalpunkt von $P^1(G)$ ist, das heißt f lässt sich nicht als echte Konvexkombination zweier Elemente von $P^1(G)$ schreiben.

Proposition 4.2. *Die Funktionen* 0 *und* 1 *sind extremal positiv definit. Ist $f \in P^1(G)$ extremal, so folgt $f(e) = 0$ oder $f(e) = 1$.*

Beweis. Falls $0 = \lambda g + (1-\lambda)h$ mit $g, h \in P^1(G), \lambda \in (0,1)$, so folgt $0 = \lambda g(e) + (1-\lambda)h(e)$ und somit $g = h = 0$.

Dass 1 positiv definit ist, überprüft man unmittelbar. Falls $1 = \lambda g + (1-\lambda)h$ mit $g, h \in P^1(G), \lambda \in (0,1)$, so folgt $g = h$, denn 1 ist ein Extremalpunkt des Einheitskreises in $\mathbb{C}$.

Angenommen $f(e) \neq 0, 1$, dann folgt der Widerspruch $f = \frac{f}{f(e)} f(e) + 0 \cdot (1 - f(e))$. □

Lemma 4.3. *Sei G lokalkompakt. Dann gibt es zu jedem $f \in P^c(G)$ ein gegen f auf kompakten Mengen gleichmäßig konvergentes Netz aus Funktionen der Form*

$$p_1\phi_1 + \cdots + p_n\phi_n,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, $p_j \geq 0$ und ϕ_j extremal positiv definit ist für $j = 1, \ldots, n$.

Beweis. O.B.d.A. sei $f(e) = 1$. Laut Korollar 3.5 ist $P^1(G)$ eine schwach* kompakte Teilmenge von $L^\infty(G)$. Da $P^1(G)$ auch konvex ist, folgt aus dem Satz von Krein-Milman folgt, dass f schwach* Grenzwert eines Netzes $(f_i)_{i\in I}$ aus Funktionen der Form

$$f_i = \sum_{j=1}^{n_i} p_j^i \phi_j^i,$$

wobei $i \in I, n_i \in \mathbb{N}, p_j^i \geq 0$ und ϕ_j^i extremal positiv definit ist für $j = 1, \ldots, n_i$ und $\sum_{j=1}^{n_i} p_j^i = 1$. Es gilt

$$\|f_i\|_\infty = f_i(e) = \sum_{j=1}^{n_i} p_j^i \phi_j^i(e) \leq \sum_{j=1}^{n_i} p_j^i = 1$$

für $i \in I$. Daher gilt

$$1 = f(e) = \|f\|_\infty \leq \liminf_{i \in I} \|f_i\|_\infty \leq \limsup_{i \in I} \|f_i\|_\infty \leq 1,$$

denn $\int_G fg \,\mathrm{d}\lambda = \liminf_{i \in I} \int_G f_i g \,\mathrm{d}\lambda$ für $g \in L^1(G)$ mit $\|g\|_1 = 1$. Damit folgt $f(e) = \lim_{i \in I} f_i(e)$. Die Behauptung folgt nun aus Proposition 2.2. $\square$

Lemma 4.4. *Sei G lokalkompakt. Dann gibt es für alle $x \in G \setminus \{0\}$ eine extremal positiv definite Funktion ϕ, sodass $\phi(x) \neq 1$ und $\phi(e) = 1$.*

Beweis. Wegen Lemma 2.5 gibt es ein $f \in P^c(G)$ mit $f(e) = \|f\|_\infty \neq 0$ und $f(x) = 0$. Die Menge $\{e, x\}$ ist kompakt, daher gibt es wegen Lemma 4.3 extremal positiv definite Funktionen $\phi_1, \ldots, \phi_n$ und nichtnegative Zahlen $p_1, \ldots, p_n$, sodass $\sum_{i=1}^n p_i \phi_i(e) \neq \sum_{i=1}^n p_i \phi_i(x)$. Sei o.B.d.A. $\phi_1(e) \neq \phi_1(x)$. Wegen Proposition 4.2 ist $\phi_1(e) = 1$. $\square$

Definition 4.5. Ein stetiger Homomorphismus $\gamma : G \to \mathbb{T}$ heißt *Charakter*. Wir bezeichnen mit $\hat{G}$ die Menge aller Charaktere und versehen diese mit der punktweisen Multiplikation. Man erhält eine kommutative Gruppe[7].

Satz 4.6. *Die Menge der extremal positiv definiten Funktionen auf G ist genau $\hat{G} \cup \{0\}$.*

Beweis. Sei $f \in P^1(G) \setminus \{0\}$ extremal. Wegen Proposition 4.2 gilt $f(e) = 1$. Wählt man in Lemma 1.7 $n = 2, c_1 = 1, c_2 = c, y_1 = e, y_2 = y$, so sieht man, dass

$$f_c^y(x) := (1 + |c|^2) f(x) + \bar{c} f(x + y) + c f(x - y), \quad x \in G$$

für alle $y \in G, c \in \mathbb{C}$ positiv definit ist.

Für $c \in \mathbb{C}, y \in G$ gilt $f_c^y = f_c^y(e) f$. Um dies einzusehen, sei zunächst $f_c^y(e) \neq 0 \neq f_{-c}^y(e)$. Dann folgt die Behauptung aus

$$f = \frac{f_c^y + f_{-c}^y}{2(1 + |c|^2)} = \underbrace{\frac{f_c^y}{f_c^y(e)}}_{\in P^1(G)} \frac{f_c^y(e)}{2(1 + |c|^2)} + \underbrace{\frac{f_{-c}^y}{f_{-c}^y(e)}}_{\in P^1(G)} \frac{f_{-c}^y(e)}{2(1 + |c|^2)},$$

da f extremal ist und $\frac{f_c^y(e)}{2(1+|c|^2)} + \frac{f_{-c}^y(e)}{2(1+|c|^2)} = 1$. Ist $f_c^y(e) = 0$, so ist $f_c^y = 0$. Falls $f_{-c}^y(e) = 0$, so gilt

$$f = \frac{f_c^y + f_{-c}^y}{2(1 + |c|^2)} = \frac{f_c^y}{2(1 + |c|^2)}.$$

Wegen $f(e) = 1$ muss $f_c^y(e) = 2(1 + |c|^2)$ gelten, woraus auch hier die Behauptung folgt.

Daher gilt

$$2[\bar{c} f(x + y) + c f(x - y)] = f_c^y(x) - f_{-c}^y(x) = k(c, y) f(x)$$

[7] Man beachte, dass, obwohl $\hat{G}$ kommutativ ist, die Gruppenoperation multiplikativ geschrieben wird.

für beliebige $x \neq y \in G, c \in \mathbb{C}$, wobei $k(c,y) := f_c^y(e) - f_{-c}^y(e)$. Diese Gleichung impliziert

$$f(x+y) = \frac{1}{4}[k(1,y) + ik(i,y)]f(x).$$

Wählt man $x = e$, so folgt $f(y) = \frac{1}{4}[k(1,y) + ik(i,y)]$. Mit obiger Gleichung erhält man $f(x+y) = f(y)f(x)$ für alle $x, y \in G$. Wegen Lemma 1.2 ist $|f(x)|^2 = f(x)f(-x) = f(e) = 1$ für $x \in G$. Daher ist $f \in \hat{G}$.

Sei nun $\gamma \in \hat{G}$. Dann ist γ positiv definit, denn

$$\sum_{i,j=1}^{n} \gamma(x_j - x_i)c_i\overline{c}_j = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\gamma(x_i)}\gamma(x_j)c_i\overline{c}_j = \left|\sum_{i=1}^{n} \overline{\gamma(x_i)}c_i\right|^2 \geq 0$$

für $n \in \mathbb{N}, c_i \in \mathbb{C}, x_i \in G$ $(i = 1, \ldots, n)$. Außerdem ist $|\gamma| = 1$. Um die Extremalität zu zeigen, nehmen wir an, dass $\gamma = \lambda f_1 + (1-\lambda)f_2$ mit $\lambda \in (0,1)$, $f_1, f_2 \in P^1(G)$. Da die Elemente aus $\mathbb{T}$ Extremalpunkte des Einheitskreises in $\mathbb{C}$ sind, folgt $f_1 = f_2$. $\square$

Korollar 4.7. *Sei G lokalkompakt. Dann ist $\hat{G}$ punktetrennend, d.h. für alle $x, y \in G$ gibt es einen Charakter γ, sodass $\gamma(x) \neq \gamma(y)$.*

Beweis. Wegen Lemma 4.4 gibt es eine extremal positiv definite Funktion γ mit $\gamma(x-y) \neq 1$. Diese ist wegen Satz 4.6 ein Charakter. Somit folgt $\gamma(x) \neq \gamma(y)$. $\square$

Lemma 4.8. *Sei G lokalkompakt. Dann gilt:*

(1) *Die Menge $\hat{G} \cup \{0\}$ ist schwach* kompakt in $L^\infty(G)$.*
(2) *Auf $\hat{G}$ stimmt die schwach* Topologie mit der Topologie, die durch gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Mengen induziert wird [8], überein.*

Beweis. Um den ersten Punkt einzusehen, reicht es zu zeigen, dass $\hat{G} \cup \{0\}$ schwach* abgeschlossen ist. Dann kann man den Satz von Banach-Alaoglu anwenden, denn die Menge ist in $L^\infty(G)$ durch 1 beschränkt. Sei also$(\gamma_i)_{i\in I}$ ein Netz in $\hat{G} \cup \{0\}$, das schwach* gegen ein $\phi \in L^\infty(G)$ konvergiert. Sei o.B.d.A. $\phi \neq 0$. Wegen der Dichtheit von $C_{00}(G)$ in $L^1(G)$ existiert also ein $g \in C_{00}(G)$, sodass$\int_G g(y)\phi(-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = 1$. Mit Lemma 2.1 folgt, dass $(g * \gamma_i)_{i\in I}$ auf kompakten Mengen gleichmäßig gegen $g * \phi$ konvergiert. Es gilt

$$g * \gamma_i(x) = \int_G g(y)\gamma_i(x-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \gamma_i(x)\int_G g(y)\gamma_i(-y)\,\mathrm{d}\lambda(y)$$

für $i \in I, x \in G$. Wegen

$$\lim_{i\in I}\int_G g(y)\gamma_i(-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_G g(y)\phi(-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = 1$$

folgt, dass $(\gamma_i)_{i\in I}$ gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen $g*\phi$ konvergiert. Daher ist $g * \phi$ ein stetiger Homomorphismus von G nach $\mathbb{T}$, also in $\hat{G}$. Die gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Mengen von $(\gamma_i)_{i\in I}$ impliziert, dass $(\int_G \gamma_i h\,\mathrm{d}\lambda)_{i\in I}$ für alle $h \in C_{00}(G)$ gegen $\int_G (g * \phi)h\,\mathrm{d}\lambda$ konvergiert. Andererseits konvergiert dieses Netz auch gegen $\int_G \phi h\,\mathrm{d}\lambda$. Da $C_{00}(G)$ dicht in $L^1(G)$ ist, folgt, dass ϕ lokal fast überall mit $g * \phi \in \hat{G}$ übereinstimmt.

---

[8] Das ist gerade die Initialtopologie auf $\hat{G}$ mit den Initialabbildungen $\iota_K : \hat{G} \to C(K) : \gamma \mapsto \gamma|_K$, $K \subseteq G$ kompakt.

Wir beweisen den zweiten Punkt. Sei $(\gamma_i)_{i\in I}$ ein Netz in $\hat{G}$, das schwach* gegen ein $\gamma \in \hat{G}$ konvergiert. Wir wählen wieder $g \in C_{00}(G)$ so, dass $\int_G g(y)\gamma(-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = 1$. Wie im ersten Beweisteil sieht man, dass $(\gamma_i)_{i\in I}$ gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen $g * \gamma = \gamma$ konvergiert. Sei nun $(\gamma_i)_{i\in I}$ ein Netz in $\hat{G}$, das gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen ein $\gamma \in \hat{G}$ konvergiert. Es folgt, dass $(\int_G \gamma_i h\,\mathrm{d}\lambda)_{i\in I}$ für alle $h \in C_{00}(G)$ gegen $\int_G \gamma h\,\mathrm{d}\lambda$ konvergiert. Ist $(\gamma_{i_j})_{j\in J}$ ein beliebiges Teilnetz, so besitzt dieses wegen dem ersten Punkt ein Teilnetz $(\gamma_{i_{j_k}})_{k\in K}$, das schwach* gegen ein $\gamma_0 \in \hat{G}\cup\{0\}$ konvergiert. Somit haben wir

$$\int_G \gamma h\,\mathrm{d}\lambda = \int_G \gamma_0 h\,\mathrm{d}\lambda, \quad h \in C_{00}(G),$$

woraus $\gamma = \gamma_0$ folgt. Daher konvergiert $(\gamma_i)_{i\in I}$ schwach* gegen γ. □

Satz 4.9. *Sei G lokalkompakt. Dann ist $\hat{G}$ versehen mit der Topologie, die durch gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Mengen induziert wird, eine kommutative lokalkompakte Gruppe.*

Beweis. Dass $\hat{G}$ eine kommutative Gruppe ist, wissen wir bereits. Dass die Abbildungen $(\gamma_1,\gamma_2) \mapsto \gamma_1\gamma_2$ und $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ stetig sind, ist klar. Da $\hat{G}$ eine schwach* offene Teilmenge des laut dem ersten Punkt von Lemma 4.8 kompakten Hausdorffraumes $\hat{G}\cup\{0\}$ ist, ist G lokalkompakt bezüglich der schwach* Topologie. Mit dem zweiten Punkt von Lemma 4.8 folgt die Behauptung. □

5. Satz von Bochner

In diesem Abschnitt bezeichne G stets eine kommutative lokalkompakte Gruppe. Wir werden den Satz von Bochner beweisen und mit diesem und unserem Wissen über positiv definite Funktionen einige andere wichtige Aussagen der harmonischen Analysis herleiten.

Definition 5.1. Für $\mu \in M(G)$ definieren wir eine Funktion $\hat{\mu}$ auf $\hat{G}$ durch

$$\gamma \mapsto \int_G \overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Wir nennen $\hat{\mu}$ die *Fourier-Stieltjes Transformation* von μ. Falls μ bezüglich λ die Dichte $f \in L^1(G)$ hat, so schreiben wir auch $\hat{f}$ anstatt $\hat{\mu}$ und nennen $\hat{f}$ die *Fouriertransformation* von f.

Für $\mu \in M(\hat{G})$ definieren wir eine Funktion $\check{\mu}$ auf G durch[9]

$$x \mapsto \int_G \gamma(x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma).$$

Wir nennen $\check{\mu}$ die *inverse Fourier-Stieltjes Transformation* von μ. Falls μ bezüglich λ die Dichte $f \in L^1(\hat{G})$ hat, so schreiben wir auch $\check{f}$ anstatt $\check{\mu}$ und nennen $\check{f}$ die *inverse Fouriertransformation* von f.

Bemerkung 5.2. Man beachte, dass, obwohl λ im Allgemeinen nicht σ-endlich ist, die Dichte eines Maßes $\mu \in M(G)$ bis auf λ Nullmengen eindeutig ist. Sind nämlich $f, g \in L^1(G)$ zwei Dichten, so ist die Menge $\tilde{G} := f^{-1}(\{0\}^c)\cup g^{-1}(\{0\}^c)$ laut Lemma 8.10 σ-endlich. Die Abbildungen $f|_{\tilde{G}}$ und $g|_{\tilde{G}}$ stimmen fast überall überein und $f|_{\tilde{G}^c}$ stimmt überall mit $g|_{\tilde{G}^c}$ überein. Analoges gilt natürlich für $\mu \in M(\hat{G})$.

[9] Die Funktion $\gamma \mapsto \gamma(x)$ ist für $x \in G$ stetig und beschränkt auf $\hat{G}$.

Zu jedem $f \in L^1(G)$ gibt es offenbar ein komplexes Maß μ mit Dichte f bezüglich λ. Dabei ist μ sogar in $M(G)$. Dies folgt aus [Kal11a, Korollar 17.1.8], denn die Dichte von $|\mu|$ bezüglich λ ist gerade $|f|$ (dies gilt auch falls λ nicht σ-endlich ist, denn $f^{-1}(\{0\}^c)$ ist laut Lemma 8.10 σ-endlich). Daher haben wir die Fouriertransformation für alle $f \in L^1(G)$ definiert. Analoges gilt für die inverse Fouriertransformation.

Definition 5.3. Seien $f, g \in L^1(G)$ und seien $A := f^{-1}(\{0\}^c), B := g^{-1}(\{0\}^c)$. Es gilt

$$\int_{-B}\int_{A+B} |f(x+y)||g(-y)| \,\mathrm{d}\lambda(x) \,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_G\int_G |f(x+y)||g(-y)| \,\mathrm{d}\lambda(x) \,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_G\int_G |f(x)||g(y)| \,\mathrm{d}\lambda(x) \,\mathrm{d}\lambda(y) < \infty.$$

Wegen Lemma 8.10 sind A und B in σ-kompakten Mengen enthalten. Daher sind $-B, A+B$ σ-endlich. Wir können also den Satz von Fubini anwenden und sehen, dass eine λ Nullmenge N existiert, sodass

$$y \mapsto f(x+y)g(-y)$$

für $x \in N^c$ integrierbar ist.

$$G \to \mathbb{C} : x \mapsto \begin{cases} \int_G f(x+y)g(-y) \,\mathrm{d}\lambda(y) & \text{für } x \notin N \\ 0 & \text{für } x \in N \end{cases}$$

integrierbar ist. Die entsprechende Äquivalenzklasse in $L^1(G)$ bezeichnen wir mit $f * g$ und nennen sie die *Faltung*[10] von f und g.

Bemerkung 5.4. Für $f, g \in L^1(G)$ gilt offenbar $f*g = g*f$ und $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1\|g\|_1$. Außerdem ist $*$ assoziativ. Um dies zu sehen, können wir wegen obiger Ungleichung und der Dichtheit von $C_{00}(G)$ in $L^1(G)$ Abbildungen f, g, h o.B.d.A. in $C_{00}(G)$ wählen. Für fast alle $x \in G$ gilt wegen Fubini

$$\begin{aligned}(f*g)*h(x) &= \int_G\int_G f(x+y+z)g(-z)h(-y) \,\mathrm{d}\lambda(z) \,\mathrm{d}\lambda(y) = \\ &\int_G\int_G f(x+z)g(y-z)h(-y) \,\mathrm{d}\lambda(z) \,\mathrm{d}\lambda(y) = \\ &\int_G f(x+z)\int_G g(y-z)h(-y) \,\mathrm{d}\lambda(y) \,\mathrm{d}\lambda(z) = f*(g*h)(x).\end{aligned}$$

Proposition 5.5. *Seien $\mu, \nu \in M(G), f, g \in L^1(G)$ und $c \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

(1) $(\mu+\nu)\hat{} = \hat{\mu} + \hat{\nu}$
(2) $(c\mu)\hat{} = c\hat{\mu}$
(3) $(f*g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$
(4) $\left(\overline{\mu(-\cdot)}\right)\hat{} = \overline{\hat{\mu}}$
(5) $(\mu(-\cdot))\hat{} = \hat{\mu}(\bar{\cdot})$
(6) $\sup\{|\hat{\mu}(\gamma)| : \gamma \in \hat{G}\} \le \|\mu\|$

[10] Man beachte, dass falls zusätzlich $f \in L^p(G), g \in L^q(G)$ mit $p, q \in [1, \infty]$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ gilt, die gerade eingeführte Faltung mit der im Prolog eingeführten übereinstimmt.

Analoge Aussagen gelten für $\mu, \nu \in M(\hat{G}), f, g \in L^1(\hat{G})$ und die inverse Fourier-Stieltjes Transformation bzw. die inverse Fouriertransformation. Außerdem ergeben sich analoge Aussagen, wenn man statt Maßen Dichten betrachtet.

Beweis. Die Aussagen rechnet man unmittelbar nach. Wir beweisen exemplarisch den dritten Punkt. Wegen Fubini gilt für $\gamma \in \hat{G}$ und Nullmengen M und N

$$(f * g)\check{}(\gamma) = \int_{N^c} \int_G f(x+y)g(-y)\overline{\gamma(x)} \, \mathrm{d}\lambda_G(y) \, \mathrm{d}\lambda_G(x) = \int_{M^c} \int_G f(x)g(y)\overline{\gamma(x+y)} \, \mathrm{d}\lambda_G(x) \, \mathrm{d}\lambda_G(y) = \int_G f(x)\overline{\gamma(x)} \, \mathrm{d}\lambda_G(x) \int_G g(y)\overline{\gamma(y)} \, \mathrm{d}\lambda_G(y).$$

□

Proposition 5.6. *Die Funktionen $\hat{\mu}, \check{\nu}$ sind gleichmäßig stetig für alle $\mu \in M(G), \nu \in M(\hat{G})$.*

Beweis. Für kompakte Mengen $M \subseteq G$, definieren wir die stetige Abbildung $\iota_M : \hat{G} \to C(M) : \gamma \mapsto \gamma|_M$.

Sei $\mu \in M(G)$ ungleich 0, $\epsilon > 0$ und $K \subseteq G$ eine kompakte Menge mit $|\mu|(G \setminus K) < \frac{\epsilon}{4}$. Wir setzen

$$U := \{\gamma \in \hat{G} : |\gamma(x) - 1| < \frac{\epsilon}{2\|\mu\|}, \, x \in K\}.$$

Die Menge U ist gerade das Urbild der offenen Kugel um $1 \in C(K)$ mit Radius $\frac{\epsilon}{2\|\mu\|}$ unter der Abbildung ι_K und daher eine Umgebung von $1 \in \hat{G}$. Sind nun $\gamma, \phi \in \hat{G}$ mit $\gamma\phi^{-1} \in U$, so gilt

$$|\hat{\mu}(\gamma) - \hat{\mu}(\phi)| \leq \int_K \underbrace{|\overline{\gamma(x)} - \overline{\phi(x)}|}_{=|1-\gamma\phi^{-1}(x)|} \, \mathrm{d}|\mu|(x) + \int_{G \setminus K} 2 \, \mathrm{d}|\mu| < \epsilon.$$

Sei nun $\nu \in M(\hat{G})$ ungleich 0, $\epsilon > 0$, $K \subseteq \hat{G}$ eine kompakte Menge mit $|\nu|(\hat{G} \setminus K) < \frac{\epsilon}{4}$ und $L \subseteq G$ eine kompakte Umgebung von e. Die Menge $\iota_L(K) \subseteq C(L)$ ist kompakt bezüglich der Supremumsnorm und somit wegen dem Satz von Ascoli gleichgradig stetig auf L. Daher gibt es eine Umgebung $U \subseteq L$ von e mit

$$|\gamma(x) - 1| < \frac{\epsilon}{2\|\nu\|}, \quad x \in U, \gamma \in K.$$

Für alle $x, y \in G$ mit $y - x \in U$ erhalten wir

$$|\check{\nu}(x) - \check{\nu}(y)| \leq \int_K |\gamma(y-x) - 1||\gamma(x)| \, \mathrm{d}|\nu|(\gamma) + \int_{\hat{G} \setminus K} 2 \, \mathrm{d}|\nu| < \epsilon.$$

□

Satz 5.7. *Die Menge $L^1(G)\hat{}$ ist eine bezüglich der Supremumsnorm dichte Teilmenge von $C_0(\hat{G})$.*

Beweis. Sei $f \in L^1(G)$. Dann ist $\hat{f}$ die Einschränkung des schwach* stetigen linearen Funktionals

$$L(h) := \int_G f(x)\overline{h(x)} \, \mathrm{d}\lambda_G(x), \quad h \in L^\infty(G).$$

auf $\hat{G}$. Wegen Lemma 4.8 stimmt auf $\hat{G}$ die schwach* Topologie mit der Topologie, die durch gleichmäßige Konvergenz induziert wird, überein. Damit ist $\hat{f} \in C(\hat{G})$. Die Abbildung $L|_{\hat{G}\cup\{0\}}$ ist schwach* stetig bei 0. Es gibt also eine offene Nullumgebung U mit $|L(\gamma_0) - L(0)| < \epsilon$ für $\gamma_0 \in U$. Da $\hat{G} \cup \{0\}$ laut Lemma 4.8 schwach* kompakt ist, ist auch die Menge $\hat{G} \cup \{0\} \setminus U \subseteq \hat{G}$ schwach* kompakt und damit kompakt bezüglich der Topologie, die durch gleichmäßige Konvergenz induziert wird. Also gilt $\hat{f} \in C_0(G)$.

Die Menge $L^1(G)\hat{}$ ist wegen Proposition 5.5 also eine Unteralgebra von $C_0(G)$, die unter komplexer Konjugation abgeschlossen ist. Außerdem ist sie nirgends verschwindend, denn für $\gamma \in \hat{G}$ ist $\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\lambda_G(x)$ nicht für alle $f \in L^1(G)$ gleich 0, denn $0 \neq \gamma \in L^\infty(G)$. Sie ist auch punktetrennend, denn sind $\gamma_1 \neq \gamma_2 \in \hat{G}$, so ist $\int_G f\overline{\gamma_1}\,\mathrm{d}\lambda_G$ nicht für alle $f \in L^1(G)$ gleich $\int_G f\overline{\gamma_2}\,\mathrm{d}\lambda_G$. Mit einer Variante des Satzes von Stone-Weierstraß (vgl. [Kal09, Korollar 12.10.8]) folgt die Behauptung. □

Satz 5.8. *Die inverse Fourier-Stieltjes Transformation ist injektiv.*

Beweis. Wegen der Linearität genügt es zu zeigen, dass wenn $\check{\mu} = 0$ auch $\mu = 0$ gilt. Sei $f \in L^1(G)$ beliebig. Da laut Lemma 8.10 $f^{-1}(\{0\}^c)$ in einer σ-kompakten Menge enthalten ist, können wir den Satz von Fubini anwenden

$$\int_{\hat{G}} \hat{f}\,\mathrm{d}\mu = \int_{\hat{G}}\int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\lambda_G(x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma) =$$
$$\int_G f(x)\int_{\hat{G}} \overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\mu(\gamma)\,\mathrm{d}\lambda_G(x) = \int_G f(x)\check{\mu}(-x)\,\mathrm{d}\lambda_G(x) = 0.$$

Mit Satz 5.7 folgt $\int_{\hat{G}} g\,\mathrm{d}\mu = 0$ für alle $g \in C_0(G)$. Wegen dem Satz von Riesz-Markov ist $\mu = 0$. □

Satz 5.9 (Satz von Bochner)**.** *Die inverse Fourier-Stieltjes Transformation bildet $M_0^+(\hat{G})$ bijektiv auf $P^c(G)$ ab.*

Beweis. Sei $\mu \in M_0^+(\hat{G})$. Wegen Satz 5.7 ist die Funktion $\check{\mu}$ (gleichmäßig) stetig auf G. Sind nun $n \in \mathbb{N}, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}, x_1 \dots, x_n \in G$, so gilt

$$\sum_{i,j=1}^n c_i\bar{c}_j\check{\mu}(x_j - x_i) = \sum_{i,j=1}^n c_i\bar{c}_j \int_{\hat{G}} \gamma(x_j - x_i)\,\mathrm{d}\mu(\gamma) = \int_{\hat{G}} \left|\sum_{i=1}^n c_i\overline{\gamma(x_i)}\right|^2 \mathrm{d}\mu(\gamma) \geq 0.$$

Also ist $\check{\mu} \in P^c(G)$.

Sei nun o.B.d.A. $f \in P^1(G)$. Für jedes $h \in L^1(G)$ ist das lineare Funktional $L_h : L^\infty(G) \to \mathbb{C} : g \mapsto \int_G gh\,\mathrm{d}\lambda_G$ stetig bezüglich der schwach* Topologie. Die Menge $P^1(G)$ ist konvex und wegen Korollar 3.5 kompakt in dieser Topologie Die Menge ihrer Extremalpunkte $\hat{G} \cup \{0\}$ ist wegen Lemma 4.8 abgeschlossen. Wegen Satz 8.5 ist f der Schwerpunkt eines Maßes $\mu_0 \in M_0^+(\hat{G} \cup \{0\})$ und daher gilt

$$L_h(f) = \int_{\hat{G}\cup\{0\}} L_h(\gamma_0)\,\mathrm{d}\mu_0(\gamma_0)$$

für alle $h \in L^1(G)$. Wegen Lemma 8.10 ist der Satz von Fubini anwendbar, womit wir

$$\int_G fh \,\mathrm{d}\lambda_G = \int_{\hat{G}\cup\{0\}} \int_G \gamma_0(x)h(x)\,\mathrm{d}\lambda_G(x)\,\mathrm{d}\mu_0(\gamma_0) = \int_G \int_{\hat{G}\cup\{0\}} \gamma_0(x)\,\mathrm{d}\mu_0(\gamma_0)h(x)\,\mathrm{d}\lambda_G(x)$$

für $h \in L^1(G)$ erhalten. Sei μ die Einschränkung von μ_0 auf die Borelmengen von $\hat{G}$. Offenbar ist dann $\mu \in M_0^+(\hat{G})$ und es gilt

$$\check{\mu}(x) = \int_{\hat{G}\cup\{0\}} \gamma_0(x)\,\mathrm{d}\mu_0(\gamma_0), \quad x \in G.$$

Daher gilt

$$\int_G fh\,\mathrm{d}\lambda_G = \int_G \check{\mu}h\,\mathrm{d}\lambda_G, \quad h \in L^1(G),$$

woraus wegen der Stetigkeit von f und $\check{\mu}$ folgt, dass $f = \check{\mu}$. □

Bemerkung 5.10. Aus dem Satz von Bochner folgt unmittelbar, dass das Bild von $M(\hat{G})$ unter der inversen Fourier-Stieltjes Transformation gerade die lineare Hülle von $P^c(G)$ ist.

Lemma 5.11. *Zu jeder kompakten Menge $K \subseteq \hat{G}$ existiert eine Funktion $g \in P^c(G) \cap C_{00}^+(G)$, sodass $\hat{g}$ positiv auf K ist.*

Beweis. Sei $\gamma \in K$ beliebig. Da $0 \neq \gamma \in L^\infty(G)$ und $C_{00}(G)$ dicht in $L^1(G)$ liegt, folgt die Existenz eines $h_\gamma \in C_{00}(G)$ mit $\hat{h}_\gamma(\gamma) = \int_G h_\gamma\overline{\gamma}\,\mathrm{d}\lambda_G \neq 0$. O.B.d.A. sei $h_\gamma \geq 0$ (man kann ja gegebenenfalls den Positivteil bzw. den Negativteil des Realteiles bzw. des Imaginärteiles von h_γ betrachten). Laut Lemma 2.4 ist $h_\gamma * h_\gamma^*$ positiv definit. Außerdem gilt $(h_\gamma * h_\gamma^*)\hat{} = |\hat{h}_\gamma|^2 \geq 0$. Der Funktionswert von γ ist positiv. Sei nun U_γ eine Umgebung von γ, sodass $(h_\gamma * h_\gamma^*)\hat{}(U_\gamma) > 0$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\gamma_i}$. Daher hat $g := \sum_{i=1}^n h_{\gamma_i} * h_{\gamma_i}^*$ die gewünschten Eigenschaften. □

Lemma 5.12. *Es gilt:*

1. *Für beliebige $f \in \operatorname{span}(P^c(G)) \cap L^1(G)$ gilt $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$. Falls sogar $f \in P^c(G) \cap L^1(G)$, so ist $\hat{f} \geq 0$.*
2. *Zu einem Haarmaß λ_G auf G gibt es ein eindeutiges Haarmaß $\lambda_{\hat{G}}$ auf $\hat{G}$, sodass*
$$\forall f \in \operatorname{span}(P^c(G)) \cap L^1(G) : f = (\hat{f})\check{}.$$
3. *Wählt man das Haarmaß $\lambda_{\hat{G}}$ wie in (2) und ist $f \in \operatorname{span}(P^c(G)) \cap L^1(G)$, so ist $\hat{f}\,\mathrm{d}\lambda_{\hat{G}} \in M(\hat{G})$ jenes eindeutige Maß, dessen inverse Fourier-Stieltjes Transformation f ist.*

Beweis. Sei λ_G ein Haarmaß auf G. Laut dem Satz von Bochner gibt es zu jedem $f \in \operatorname{span}(P^c(G))$ ein $\mu_f \in M(\hat{G})$ mit $f = \check{\mu}_f$, welches wegen der Injektivität der inversen Fourier-Stieltjes Transformation eindeutig ist. Zunächst beweisen wir

$$\hat{g}\,\mathrm{d}\mu_f = \hat{f}\,\mathrm{d}\mu_g, \quad f, g \in \operatorname{span}(P^c(G)) \cap L^1(G). \tag{5.1}$$

Diese Maße sind wegen [Kal11a, 17.3.5] in $M(G)$. Für jedes $h \in L^1(G)$ gilt wegen dem Satz von Fubini, welcher dank Lemma 8.10 anwendbar ist, dass

$$h * f(e) = \int_G h(x) f(-x) \, \mathrm{d}\lambda_G(x) = \int_G \int_{\hat{G}} h(x)\gamma(-x) \, \mathrm{d}\mu_f(\gamma) \, \mathrm{d}\lambda_G(x) =$$
$$\int_{\hat{G}} \int_G h(x)\overline{\gamma(x)} \, \mathrm{d}\lambda_G(x) \, \mathrm{d}\mu_f(\gamma) = \int_{\hat{G}} \hat{h} \, \mathrm{d}\mu_f.$$

Daher haben wir für alle $h \in L^1(G)$

$$\int_{\hat{G}} \hat{h}\hat{g} \, \mathrm{d}\mu_f = ((h * g) * f)(e) = ((h * f) * g)(e) = \int_{\hat{G}} \hat{h}\hat{f} \, \mathrm{d}\mu_g.$$

Mit Satz 5.7 und der Eindeutigkeitsaussage im Satz von Riesz-Markov folgt (5.1).

Für ein beliebiges $\phi \in C_{00}(\hat{G})$ wählen wir eine laut Lemma 5.11 existente Funktion $g \in P^c(G) \cap C_{00}(G)$, sodass $\hat{g}$ auf $\operatorname{supp}(\phi)$ positiv ist. Wir setzen

$$I(\phi) := \int_{\operatorname{supp}(\phi)} \frac{\phi(\gamma)}{\hat{g}(\gamma)} \, \mathrm{d}\mu_g(\gamma).$$

Dabei ist $I(\phi)$ unabhängig von der Wahl von g. Ist nämlich $f \in P^c(G) \cap C_{00}(G)$, sodass $\hat{f}$ positiv auf $\operatorname{supp}(\phi)$, dann gilt wegen (5.1)

$$\int_{\operatorname{supp}(\phi)} \frac{\phi(\gamma)}{\hat{g}(\gamma)} \, \mathrm{d}\mu_g(\gamma) = \int_{\operatorname{supp}(\phi)} \frac{\phi(\gamma)}{\hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma)} \hat{f}(\gamma) \, \mathrm{d}\mu_g(\gamma) = \int_{\operatorname{supp}(\phi)} \frac{\phi(\gamma)}{\hat{f}(\gamma)} \, \mathrm{d}\mu_f(\gamma).$$

Aus dieser Unabhängigkeit folgt unmittelbar, dass I ein positives lineares Funktional ist. Außerdem ist $I \neq 0$. Um dies zu sehen, sei $0 \neq f \in P^c(G) \cap C_{00}(G)$ wie in Lemma 2.5. Dann ist wegen der Eindeutigkeit der inversen Fourier-Stieltjes Transformation $\mu_f \neq 0$. Wegen dem Riesz'schen Darstellungssatz aus [Kal11a] folgt die Existenz eines $\phi \in C_{00}(\hat{G})$ mit $\int_{\hat{G}} \phi \, \mathrm{d}\mu_f \neq 0$. Ist $g \in P^c(G) \cap C_{00}(G)$, sodass $\hat{g}$ positiv auf dem Träger von ϕ ist, so gilt wegen (5.1)

$$I(\phi\hat{f}) = \int_{\operatorname{supp}(\phi)} \frac{\phi(\gamma)\hat{f}(\gamma)}{\hat{g}(\gamma)} \, \mathrm{d}\mu_g(\gamma) = \int_{\operatorname{supp}(\phi)} \phi(\gamma) \, \mathrm{d}\mu_f(\gamma) \neq 0.$$

Nun zeigen wir, dass I translationsinvariant ist. Seien $\phi \in C_{00}(\hat{G})$ und $\gamma_0 \in \hat{G}$ fest und sei $g \in P^c(G) \cap C_{00}(G)$ so, dass $\hat{g}$ positiv auf der Menge $\overline{\gamma}_0 \cdot \operatorname{supp}(\phi)$ ist. Wir setzen $f := \gamma_0 g$. Wegen $\hat{g}(\gamma) = \hat{f}(\gamma_0\gamma)$ für $\gamma \in \hat{G}$ ist $\hat{f}$ positiv auf $\operatorname{supp}(\phi)$. Ist $T : \hat{G} \to \hat{G} : \gamma \mapsto \gamma_0\gamma$ und $\nu_g := \mu_g T^{-1}$, so gilt

$$\check{\nu}_g(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x) \mathrm{d}\nu_g(\gamma) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\gamma_0(x) \, \mathrm{d}\mu_g(\gamma) = \gamma_0(x)g(x) = f(x) = \check{\mu}_f(x)$$

für alle $x \in G$ und somit $\nu_g = \mu_f$. Es folgt

$$\int_{\hat{G}} \psi(\gamma_0\gamma) \, \mathrm{d}\mu_g(\gamma) = \int_{\hat{G}} \psi(\gamma) \, \mathrm{d}\mu_f(\gamma), \quad \psi \in C_{00}(\hat{G}).$$

Ist nun $\phi_0(\gamma) := \phi(\gamma_0\gamma)$ für $\gamma \in \hat{G}$ und $K := \mathrm{supp}(\phi)$, so gilt folglich

$$I(\phi_0) = \int_{\overline{\gamma}_0 K} \frac{\phi(\gamma_0\gamma)}{\hat{g}(\gamma)} \,\mathrm{d}\mu_g(\gamma) = \int_{\hat{G}} \underbrace{\frac{\phi|_K}{\hat{f}|_K}\Big|^{\hat{G}}}_{\in C_{00}(\hat{G})} (\gamma_0\gamma) \,\mathrm{d}\mu_g =$$

$$\int_{\hat{G}} \frac{\phi|_K}{\hat{f}|_K}\Big|^{\hat{G}} (\gamma) \,\mathrm{d}\mu_f(\gamma) = \int_K \frac{\phi(\gamma)}{\hat{f}(\gamma)} \,\mathrm{d}\mu_f(\gamma) = I(\phi).$$

Dabei bezeichnen wir für eine Menge $M \subseteq \hat{G}$ und eine Funktion $\chi : M \to \mathbb{C}$ den Ausdruck $\chi|^{\hat{G}}$ als jene Abbildung auf $\hat{G}$ mit $(\chi|^{\hat{G}})|_M = \chi$ und $(\chi|^{\hat{G}})|_{M^c} = 0$. Also ist I ein translationsinvariantes positives lineares Funktional auf $C_{00}(\hat{G})$, das nicht 0 ist.

Mit dem Riesz'schen Darstellungssatz aus [Kal11a] folgt

$$I(\phi) = \int_{\hat{G}} \phi \,\mathrm{d}\lambda_{\hat{G}}, \quad \phi \in C_{00}(\hat{G}) \tag{5.2}$$

für ein eindeutiges Haarmaß $\lambda_{\hat{G}}$. Sei nun $\phi \in C_{00}(\hat{G})$ beliebig, $g \in P^c(G) \cap C_{00}(G)$ so, dass $\hat{g}$ positiv auf $\mathrm{supp}(\phi)$ und $f \in \mathrm{span}(P^c(G)) \cap L^1(G)$. Es gilt wegen (5.1) und (5.2)

$$\int_{\hat{G}} \phi(\gamma) \,\mathrm{d}\mu_f(\gamma) = \int_{\mathrm{supp}(\phi)} \frac{\phi(\gamma)\hat{f}(\gamma)}{\hat{g}(\gamma)} \,\mathrm{d}\mu_g(\gamma) = I(\phi\hat{f}) = \int_{\hat{G}} \phi(\gamma)\hat{f}(\gamma) \,\mathrm{d}\lambda_{\hat{G}}(\gamma).$$

Lemma 8.11 ergibt nun $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$ und

$$\hat{f} \,\mathrm{d}\lambda_{\hat{G}} = \mathrm{d}\mu_f. \tag{5.3}$$

Daraus folgt

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x) \,\mathrm{d}\mu_f(\gamma) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\hat{f}(\gamma) \,\mathrm{d}\lambda_{\hat{G}}(\gamma) = (\hat{f})\check{}(x), \quad x \in G.$$

Falls sogar $f \in P^c(G) \cap L^1(G)$ gilt, so ist wegen Bochner $\mu_f \geq 0$. Aus der Stetigkeit von $\hat{f}$, aus (5.3) und aus der Tatsache, dass $\lambda_{\hat{G}}(O) \neq 0$ für alle nichtleeren und offenen $O \subseteq \hat{G}$, folgt $\hat{f} \geq 0$.

Wegen Lemma 2.5 gibt es ein von 0 verschiedenes $f \in P^c(G) \cap L^1(G)$, womit die Eindeutigkeit des Haarmaßes auf $\hat{G}$ mit im Lemma geforderter Eigenschaft folgt. □

Im restlichen Abschnitt wählen wir das Haarmaß auf der Charaktergruppe von G stets wie in Lemma 5.12. Also so, dass $f = (\hat{f})\check{}$ für alle $f \in P^c(G) \cap L^1(G)$ gilt.

Satz 5.13 (Satz von Plancherel)**.** *Es existiert eine eindeutige bijektive Isometrie $\mathcal{F} : L^2(G) \to L^2(\hat{G})$, sodass $\mathcal{F}$ und $\hat{}$ auf $L^1(G) \cap L^2(G)$ übereinstimmen. Dabei wird $\mathcal{F}$ als* Fouriertransformation *auf $L^2(G)$ bezeichnet.*

Beweis. Sei $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$, dann ist wegen Lemma 2.4 $f := g * g^* \in P^c(G) \cap L^1(G)$ und $\hat{f} = |\hat{g}|^2$. Wegen Lemma 5.12 ist $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$ und daher $\hat{g} \in L^2(\hat{G})$. Außerdem gilt wegen diesem Lemma

$$\int_G |g|^2 \,\mathrm{d}\lambda_G = g * g^*(e) = f(e) = \int_{\hat{G}} \gamma(e)\hat{f}(\gamma) \,\mathrm{d}\lambda_{\hat{G}}(\gamma) = \int_{\hat{G}} |\hat{g}|^2 \mathrm{d}\lambda_{\hat{G}}.$$

Das heißt $\|g\|_2 = \|\hat{g}\|_2$. Da $L^1(G) \cap L^2(G)$ dicht in $L^2(G)$ liegt, kann die Abbildung $g \mapsto \hat{g}$ eindeutig isometrisch auf $L^2(G)$ zu einer Abbildung $\mathcal{F}$ fortgesetzt werden.

Nun zeigen wir, dass die Menge $L := \mathcal{F}(L^1(G) \cap L^2(G))$ dicht in $L^2(\hat{G})$ ist. Sei hierzu $\psi \in L^2(\hat{G})$ orthogonal auf L. Da $L^1(G) \cap L^2(G)$ translationinvariant ist, ist L für beliebige $x \in G$ invariant unter Multiplikation mit $\gamma \mapsto \gamma(x)$. Daher ist für $\phi \in L$

$$\int_{\hat{G}} \gamma(x)\phi(\gamma)\overline{\psi(\gamma)}\,\mathrm{d}\lambda_{\hat{G}}(\gamma) = 0, \quad x \in G.$$

Wegen $\phi\overline{\psi} \in L^1(\hat{G})$ ist obiger Ausdruck gerade $(\phi\overline{\psi})\check{}(x)$. Da die inverse Fouriertransformation injektiv ist, folgt $\phi\overline{\psi} = 0$ fast überall für alle $\phi \in L$.

Die Abbildung $\psi \in L^2(\hat{G})$ verschwindet laut Lemma 8.10 außerhalb einer σ-kompakten Menge $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, wobei K_n für $n \in \mathbb{N}$ eine kompakte Teilmenge von $\hat{G}$ ist. Wegen Lemma 5.11 gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\phi_n \in L$, das auf K_n positiv ist. Somit folgt $\psi = 0$ auf K_∞^c, $\phi_n\overline{\psi} = 0$ fast überall und deshalb $\psi = 0$ fast überall auf K_n für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher ist $\psi = 0$ fast überall. Wir haben also $L^\perp = \{0\}$, woraus folgt, dass L dicht in $L^2(\hat{G})$ ist. Da $\mathcal{F}$ isometrisch ist, folgt $\mathcal{F}(L^2(G)) = L^2(\hat{G})$. □

Satz 5.14. *Es existiert eine eindeutige bijektive Isometrie von $L^2(\hat{G})$ nach $L^2(G)$, sodass die Isometrie und $\check{}$ auf $L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$ übereinstimmen. Diese Abbildung ist genau die Inverse zu der Abbildung aus dem Satz von Plancherel, sie wird als* inverse Fouriertransformation auf $L^2(\hat{G})$ *bezeichnet.*

Beweis. Sei $\phi \in L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$. Für $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$ ist dann wegen Fubini

$$\int_G \check{\phi}\overline{g}\,\mathrm{d}\lambda_G = \int_G \int_{\hat{G}} \phi(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}\lambda_{\hat{G}}(\gamma)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\lambda_G(x) =$$
$$\int_{\hat{G}} \phi(\gamma) \int_G \overline{g(x)}\gamma(x)\,\mathrm{d}\lambda_G(x)\,\mathrm{d}\lambda_{\hat{G}}(\gamma) = \int_{\hat{G}} \phi\overline{\hat{g}}\,\mathrm{d}\lambda_{\hat{G}}.$$

Wegen dem Satz von Plancherel gilt somit

$$\left|\int_G \overline{\check{\phi}} g\,\mathrm{d}\lambda_G\right| = \left|\int_{\hat{G}} \phi\overline{\hat{g}}\,\mathrm{d}\lambda_{\hat{G}}\right| \le \|\phi\|_2\|\hat{g}\|_2 = \|\phi\|_2\|g\|_2.$$

Daher ist $g \mapsto \int_G \overline{\check{\phi}} g\,\mathrm{d}\lambda_G$ ein bezüglich $\|\cdot\|_2$ stetiges lineares Funktional auf $L^1(G) \cap L^2(G)$, das eindeutig auf $L^2(G)$ fortgesetzt werden kann. Die Fortsetzung entspricht dann einem eindeutigen $\psi \in L^2(G)$. Es gilt also

$$\int_G \overline{\check{\phi}} g\,\mathrm{d}\lambda_G = \int_G \psi g\,\mathrm{d}\lambda_G, \quad g \in L^1(G) \cap L^2(G).$$

Wir können also Lemma 8.12 anwenden und sehen, dass $\overline{\check{\phi}} = \psi \in L^2(G)$ fast überall. Mit dem Satz von Plancherel und obigen Gleichungen folgt für $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$

$$\int_{\hat{G}} \mathcal{F}(\check{\phi})(\gamma)\overline{\hat{g}(\gamma)}\,\mathrm{d}\lambda_{\hat{G}}(\gamma) = \big(\mathcal{F}(\check{\phi}), \mathcal{F}(g)\big)_2 = \big(\check{\phi}, g\big)_2 =$$
$$\int_G \check{\phi}(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\lambda_G(x) = \int_{\hat{G}} \phi(\gamma)\overline{\hat{g}(\gamma)}\,\mathrm{d}\lambda_{\hat{G}}(\gamma).$$

Da die Menge $L = \mathcal{F}(L^1(G) \cap L^2(G))$ aus dem Beweis vom Satz von Plancherel dicht in $L^2(\hat{G})$ ist, folgt

$$\phi = \mathcal{F}(\check{\phi}), \quad \phi \in L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G}) \tag{5.4}$$

und daher $\|\phi\|_2 = \|\check{\phi}\|_2$. Daher ist die Abbildung $\phi \mapsto \check{\phi}$ isometrisch von $L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$ nach $L^2(G)$ und kann daher eindeutig zu einer Abbildung $\mathcal{G}$ fortgesetzt werden. Es gilt wegen (5.4)

$$\phi = \mathcal{F}(\mathcal{G}(\phi)), \quad \phi \in L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G}).$$

Wegen der Stetigkeit der betrachteten Abbildungen gilt diese Gleichung auch für $\phi \in L^2(\hat{G})$. Daher ist $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{-1}$. □

6. Pontrjagin-Dualität

In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit G stets eine kommutative lokalkompakte Gruppe. Wir definieren die Evaluierungsfunktion ι durch $\iota(x)(\gamma) := \gamma(x)$ für $x \in G, \gamma \in \hat{G}$. Man überprüft unmittelbar, dass $\iota(x) \in \hat{\hat{G}}$. Wir werden beweisen, dass G vermöge ι mit $\hat{\hat{G}}$ identifiziert werden kann. Natürlich kann man eine entsprechende Evaluierungsfunktion auch auf $\hat{G}$ definieren. Diese bildet dann $\hat{G}$ nach $\hat{\hat{\hat{G}}}$ ab und wir bezeichnen sie ebenfalls mit ι.

Lemma 6.1. *Die Mengen*

$$\mathcal{B}_{\hat{G}} := \{\hat{f}^{-1}(\{0\}^c) : f \in L^1(G)\} \text{ bzw. } \mathcal{B}_G := \{\check{\phi}^{-1}(\{0\}^c) : \phi \in L^1(\hat{G})\}$$

bilden Basen der Topologien auf $\hat{G}$ bzw. G.

Beweis. Wir wählen o.B.d.A. $\lambda_{\hat{G}}$ wie in Lemma 5.12. Da $\hat{f}$ und $\check{\phi}$ für $f \in L^1(G), \phi \in L^1(\hat{G})$ stetig sind, sind die Elemente der beiden Mengen offen. Die Mengen sind translationsinvariant, denn ist $\gamma_0 \in \hat{G}$ und $x_0 \in G$, so gilt für $f \in L^1(G), \phi \in L^1(\hat{G})$ und alle $\gamma \in \hat{G}, x \in G$

$$(\overline{\iota(x_0)}\phi)\check{}(x) = \check{\phi}(x - x_0) \quad \text{und} \quad (f\gamma_0)\hat{}(\gamma) = \hat{f}(\overline{\gamma_0}\gamma).$$

Daher reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{B}^1_{\hat{G}} := \{V \in \mathcal{B}_{\hat{G}} : 1 \in V\}$ und $\mathcal{B}^e_G := \{V \in \mathcal{B}_G : e \in V\}$ Umgebungsbasen von 1 bzw. e sind. Sei also $W \subseteq G$ eine Umgebung von e. Dann gibt es wegen Lemma 2.5 ein $f \in P^c(G) \cap C_{00}(G)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subseteq W$ und $f(e) > 0$. Wir setzen $\phi := \hat{f}$. Wegen Lemma 5.12 gilt $\check{\phi} = f$ und somit $e \in \check{\phi}^{-1}(\{0\}^c) \subseteq W$.

Sei nun $W \subseteq \hat{G}$ eine Umgebung von 1 und U eine symmetrische Umgebung von 1 mit $U \cdot U \subseteq W$. Wir wählen eine von 0 verschiedene Funktion $\phi \in C_{00}(\hat{G})$ mit $\operatorname{supp}(\phi) \subseteq U$. Dann gilt $\operatorname{supp}(\phi * \phi^*) \subseteq W$. Wir setzen $f := (\phi * \phi^*)\check{} = |\check{\phi}|^2$. Wegen Satz 5.14 ist $f \in L^2(G)$, $\check{\phi} \in L^2(G)$ und daher $f \in L^1(G)$. Aus diesem Satz folgt auch $\hat{f} = \phi * \phi^*$, denn $\phi * \phi^* \in C_{00}(\hat{G}) \subseteq L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$ und $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Daher gilt $\hat{f}^{-1}(\{0\}^c) \subseteq W$ und $\hat{f}(1) = \|\phi\|_2 > 0$, womit $1 \in \hat{f}^{-1}(\{0\}^c)$. □

Lemma 6.2. *Ist Y eine lokalkompakte Untergruppe einer topologischen Gruppe X und ist Y dicht in X, so gilt $X = Y$.*

Beweis. Wir wählen eine in Y offene Y-Umgebung W von e mit kompakten Y-Abschluss Z. Somit ist Z auch der X-Abschluss von W. Zu W gibt es eine in X offene Menge V, sodass $Y \cap V = W$. Wir zeigen, dass $V \subseteq Y$. Sei hierzu $p \in V$ und sei U eine offene X-Umgebung von p. Dann ist $U \cap V$ eine nichtleere in X offene

Menge und daher ist $(U \cap V) \cap Y \neq \emptyset$. Da U beliebig war, folgt $p \in Z$. Es gilt also $V \subseteq Z \subseteq Y$.

Für $x \in X$ enthält die in X offene Menge Vx^{-1} ein $y \in Y$. Da Y eine Untergruppe ist, gilt $x \in y^{-1}V \subseteq Y$. □

Satz 6.3 (Pontrjagin-Dualität)**.** *Die Evaluierungsabbildung $\iota : G \to \hat{\hat{G}}$ ist ein isomorpher Homöomorphismus.*

Beweis. Offenbar ist ι ein Homomorphismus. Die Injektivität folgt aus Korollar 4.7. Wir zeigen, dass $\iota(G)$ dicht in $\hat{\hat{G}}$ liegt. Falls es nicht dicht läge, so würde wegen Lemma 6.1 ein $\phi \in L^1(\hat{G})$ existieren mit $\|\phi\|_1 \neq 0$ und $\hat{\phi}^{-1}(\{0\}^c) \cap \iota(G) = \emptyset$. Es gilt

$$\check{\psi}(x) = \int_{\hat{G}} \psi(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}\lambda_{\hat{G}}(\gamma) = \hat{\psi}(\iota(-x)), \quad \psi \in L^1(\hat{G}) \tag{6.1}$$

und daher folgt für $\phi = \psi$, dass $\check{\phi} = 0$. Wegen 5.8 ist $\phi = 0$ fast überall, im Widerspruch zu unserer Annahme.

Wir definieren nun die Mengen

$$\check{\mathcal{B}} := \{\check{\phi}^{-1}(\{0\}^c) : \phi \in L^1(\hat{G})\} \quad \text{und} \quad \hat{\mathcal{B}} := \{\hat{\phi}^{-1}(\{0\}^c) : \phi \in L^1(\hat{G})\}.$$

Wegen Lemma 6.1 sind $\check{\mathcal{B}}$ bzw. $\hat{\mathcal{B}}$ topologische Basen von G bzw. von $\hat{\hat{G}}$. Wegen (6.1) gilt für $\psi \in L^1(\hat{G})$ und $\chi = \psi(-\cdot)$

$$\iota(\check{\psi}^{-1}(\{0\}^c)) = (\hat{\chi}^{-1}(\{0\}^c)) \cap \iota(G)$$

und somit

$$\iota(\check{\mathcal{B}}) = \hat{\mathcal{B}} \cap \iota(G).$$

Daher ist ι ein isomorpher Homöomorphismus von G nach $\iota(G)$. Also ist $\iota(G)$ eine lokalkompakte dichte Untergruppe von $\hat{\hat{G}}$. Aus Lemma 6.2 folgt $\iota(G) = \hat{\hat{G}}$. □

Bemerkung 6.4. Wegen der Pontrjagin-Dualität ist $\lambda_G \iota^{-1}$ offenbar ein Haarmaß auf $\hat{\hat{G}}$.

Proposition 6.5. *Es gelten folgende Aussagen:*

(1) *Für $\mu \in M(\hat{G})$ ist*

$$\check{\mu}(x) = \hat{\mu}(\iota(-x)), \quad x \in G.$$

(2) *$\mu \in M(G)$ genau wenn $\nu = \mu\iota^{-1} \in M(\iota(G))$ und*

$$\hat{\mu}(\gamma) = \hat{\nu}(\iota(\gamma)), \quad \gamma \in \hat{G}.$$

(3) *$\mu \in M(\hat{G})$ genau wenn $\nu = \mu\iota^{-1} \in M(\iota(\hat{G}))$ und*

$$\check{\mu}(x) = \check{\nu}(\iota(x)), \quad x \in G.$$

Analoge Aussagen gelten, wenn man statt Maßen Dichten betrachtet. Dabei muss man in (2) bzw. (3) das Haarmaß auf $M(\iota(G))$ bzw. auf $M(\iota(\hat{G}))$ gleich $\lambda_G\iota^{-1}$ bzw. gleich $\lambda_{\hat{G}}\iota^{-1}$ wählen.

Beweis. Wir betrachten nur die Aussagen über Maße, die Aussagen über Dichten ergeben sich unmittelbar daraus.

(1) Für $x \in G$ gilt
$$\check{\mu}(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma) = \int_{\hat{G}} \overline{\iota(-x)(\gamma)}\,\mathrm{d}\mu(\gamma).$$
(2) Die Äquivalenz ist klar. Für $\gamma \in \hat{G}$ gilt
$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_{G} \overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\iota(G)} \overline{\Gamma(\gamma)}\,\mathrm{d}\nu(\Gamma).$$
(3) Die Äquivalenz ist klar. Für $x \in G$ gilt
$$\check{\mu}(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma) = \int_{\hat{G}} \iota(\gamma)(\iota(x))\,\mathrm{d}\mu(\gamma) = \int_{\iota(\hat{G})} \Delta(\iota(x))\,\mathrm{d}\nu(\Delta).$$
$\square$

Proposition 6.6. *Ist das Haarmaß auf $\hat{G}$ wie in Lemma 5.12, also so, dass $(\hat{f})\check{} = f$ für jedes $f \in \operatorname{span}(P^c(G)) \cap L^1(G)$, so ist $\lambda_G \iota^{-1}$ ebenfalls wie in Lemma 5.12, also so, dass $(\hat{f})\check{} = f$ für jedes $f \in \operatorname{span}(P^c(\hat{G})) \cap L^1(\hat{G})$*

Beweis. Sei das Haarmaß auf $M(\iota(G))$ bzw. auf $M(\iota(\hat{G}))$ gleich $\lambda_G \iota^{-1}$ bzw. gleich $\lambda_{\hat{G}} \iota^{-1}$. Da die Gleichung wegen Lemma 5.12 zumindest bis auf eine von f unabhängige positive multiplikative Konstante gilt, reicht es für ein von 0 verschiedenes $f \in P^c(\hat{G}) \cap L^1(\hat{G})$ die Gleichung $(\hat{f})\check{} = f$ zu zeigen. Wir wählen $f \in P^c(\hat{G}) \cap C_{00}^+(\hat{G})$ ungleich 0. So eine Funktion existiert laut Lemma 2.5. Dann ist $\hat{f} \in L^1(\iota(G))$. Aufgrund von Proposition 6.5 und Proposition 5.5 gilt
$$(\hat{f})\check{} = \hat{\hat{f}}(\iota(\cdot)) = (\check{f}(\iota^{-1}(\cdot)))\hat{}(\iota(\cdot)) = (\check{f}(-\cdot))\hat{}(\cdot) = (\check{f})\check{}.$$
Da $(\hat{f})\check{}$ laut Lemma 5.12 bis auf eine positive multiplikative Konstante mit f übereinstimmt, liegt es in $L^1(\hat{G})$. Somit können wir auf obige Gleichung die inverse Fouriertransformation anwenden und erhalten $((\hat{f})\check{})\check{} = ((\check{f})\check{})\check{}$. Es gilt $\check{f} \in L^1(G)$, und da f nichtnegativ ist, folgt aus dem Satz von Bochner auch $\check{f} \in P^c(G)$. Aufgrund unserer Wahl des Haarmaßes auf $\hat{G}$ folgt also $((\hat{f})\check{})\check{} = ((\check{f})\check{})\check{} = \check{f}$ und daher wegen der Injektivität der inversen Fouriertransformation $(\hat{f})\check{} = f$. $\square$

Im Rest dieses Abschnittes wählen wir das Haarmaß auf $\hat{G}$ stets wie in Lemma 5.12 und die Haarmaße auf $\iota(G)$ bzw. auf $\iota(\hat{G})$ gleich $\lambda_G \iota^{-1}$ bzw. $\lambda_{\hat{G}} \iota^{-1}$. Wegen obiger Proposition sind alle erwähnten Haarmaße wie in Lemma 5.12.

In Abschnitt 5 haben wir einige Sätze nur für die Fourier(-Stieltjes) Transformation bzw. für die inverse Fourier(-Stieltjes) Transformation formuliert. Mithilfe der Pontrjagin Dualität und obiger Propositionen lassen sich nun leicht Analogien beweisen.

Korollar 6.7. *Die Menge $L^1(\hat{G})\check{}$ ist eine bezüglich der Supremumsnorm dichte Teilmenge von $C_0(G)$.*

Beweis. Man sieht leicht, dass die durch $F(f)(\iota(x)) := f(-x)$ für $f \in C_0(G)$ und $x \in G$ definierte lineare Abbildung bezüglich der Supremumsnorm isometrisch und bijektiv in den $C_0(\iota(G))$ abbildet. Wegen Proposition 6.5 und Satz 5.7 ist $L^1(\hat{G})\check{} = F^{-1}(L^1(\hat{G})\hat{}) \subseteq C_0(G)$. Außerdem besagt Satz 5.7, dass $L^1(\hat{G})\hat{}$ dicht in $C_0(\iota(G))$ ist, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Korollar 6.8. *Die Fourier-Stieltjes Transformation ist injektiv.*

Beweis. Sei $\mu \in M(G)$ mit $\hat{\mu} = 0$. Wir setzen $\nu := \mu(\iota^{-1}(\cdot))$. Dann ist $\nu \in M(\iota(G))$ und $\hat{\nu} = 0$. Wegen $0 = \hat{\nu}(\iota(\cdot^{-1})) = \check{\nu}$ und Satz 5.8 folgt $\nu = 0$ und damit $\mu = 0$. □

Korollar 6.9. *Die Fourier-Stieltjes Transformation bildet $M_0^+(G)$ bijektiv auf $P^c(\hat{G})$ ab.*

Beweis. Die Injektivität folgt aus Korollar 6.8. Wegen dem Satz von Bochner bildet die inverse Fourier-Stieltjes Transformation $M_0^+(\iota(G))$ bijektiv auf $P^c(\hat{G})$ ab. Sei $\mu \in M_0^+(G)$ und $\nu := \mu(\iota^{-1}(\cdot)) \in M_0^+(\iota(G))$, dann ist $\hat{\mu} = \hat{\nu}(\iota(\cdot)) = \check{\nu}(\cdot^{-1}) \in P^c(\hat{G})$.

Ist $\phi \in P^c(\hat{G})$, so gibt es ein $\nu \in M_0^+(\iota(G))$ mit $\check{\nu} = \phi$. Wir setzen $\mu := \nu(\iota(\cdot)) \in M_0^+(G)$. Dann gilt $\hat{\mu} = \hat{\nu}(\iota(\cdot)) = \check{\nu}(\cdot^{-1}) = \phi(\cdot^{-1})$ und daher $(\mu(-\cdot))\hat{} = \phi$. □

Bemerkung 6.10. Aus diesem Korollar folgt unmittelbar, dass das Bild von $M(G)$ unter der Fourier-Stieltjes Transformation gerade die lineare Hülle von $P^c(\hat{G})$ ist.

Die inverse Fouriertransformation ist in einem gewissen Sinne tatsächlich invers zur Fouriertransformation (vgl. [Fol95, Seite 102,103]).

Satz 6.11. *Für alle $f \in L^1(G)$ mit $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$ gilt $(\hat{f})\check{} = f$ fast überall.*

Beweis. Laut Bemerkung 6.10 ist $\hat{f} \in \operatorname{span}(P^c(\hat{G}))$. Wegen dem Satz von Bochner existiert ein $\mu_{\hat{f}} \in M(\iota(G))$ so, dass $\check{\mu}_{\hat{f}} = \hat{f}$. Dieses ist aufgrund der Injektivität der inversen Fourier-Stieltjes Transformation eindeutig. Wegen Proposition 6.5 und Proposition 5.5 gilt

$$\check{\mu}_{\hat{f}} = \hat{f} = (f(\iota^{-1}(\cdot)))\check{}(\iota(\cdot)) = (f(\iota^{-1}(\cdot)))\check{}(\bar{\cdot}) = (f(-\iota^{-1}(\cdot)))\check{}.$$

Daher ist $\mathrm{d}\mu_{\hat{f}} = f(-\iota^{-1}(\cdot))\,\mathrm{d}\lambda_G\iota^{-1}$. Wegen Lemma 5.12 ist $\mathrm{d}\mu_{\hat{f}} = \hat{\hat{f}}\,\mathrm{d}\lambda_G\iota^{-1}$. Damit folgt $\hat{\hat{f}} = f(-\iota^{-1}(\cdot))$ fast überall. Die linke Seite ist laut Bemerkung 6.10 eine Linearkombination positiv definiter stetiger Funktionen, womit f fast überall die Linearkombination positiv definiter stetiger Funktionen. Mit Lemma 5.12 folgt $(\hat{f})\check{} = f$ fast überall. □

Korollar 6.12. *Für alle $f \in L^1(\hat{G})$ mit $\check{f} \in L^1(G)$ gilt $(\check{f})\hat{} = f$.*

Beweis. Wegen Proposition 6.5 ist $\hat{f} \in L^1(\iota(G))$. Aufgrund von Proposition 6.5 und Proposition 5.5 gilt

$$(\hat{f})\check{} = \hat{\hat{f}}(\iota(\bar{\cdot})) = (\check{f}(\iota^{-1}(\bar{\cdot}))\check{}(\iota(\bar{\cdot})) = (\check{f}(-\cdot))\check{}(\bar{\cdot}) = (\check{f})\hat{}.$$

Der erste Ausdruck ist laut Satz 6.11 fast überall f. □

7. Charaktergruppen von $\mathbb{T}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$

Abschließend wollen wir die Charaktergruppen von $\mathbb{T}$,$\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$ bestimmen.

Lemma 7.1. *Sei G eine kompakte kommutative Gruppe. Ist Γ eine punktetrennende Untergruppe von $\hat{G}$, so ist $\Gamma = \hat{G}$.*

Beweis. Angenommen $\gamma_0 \in \hat{G} \setminus \Gamma$. Die lineare Hülle von $\Gamma \subseteq \mathbb{C}^G$

$$A := \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i\gamma_i : n \in \mathbb{N}, c_i \in \mathbb{C}, \gamma_i \in \Gamma, i = 1, \ldots, n \right\}$$

erfüllt die Voraussetzungen von Stone-Weierstraß und daher existiert eine gleichmäßig gegen γ_0 konvergente Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A. Wegen dem Satz von Lebesgue gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_G p_n\overline{\gamma}_0 \,\mathrm{d}\lambda = \int_G \gamma_0\overline{\gamma}_0 \,\mathrm{d}\lambda = \lambda(G) \neq 0$$

Nun ist aber $\int_G p_n\overline{\gamma}_0 \,\mathrm{d}\lambda = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn für $\gamma \in \Gamma$ ist $\gamma_1 := \gamma\overline{\gamma}_0 = \gamma\gamma_0^{-1} \notin \Gamma$ und damit ungleich 1. Daher gibt es ein $y \in G$ mit $\gamma_1(y) \neq 1$, womit aus

$$\int_G \gamma_1(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_G \gamma_1(x+y)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \gamma_1(y)\int_G \gamma_1(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$$

$\int_G \gamma_1 \,\mathrm{d}\lambda = 0$ folgt. □

Proposition 7.2. *Die Charaktergruppe von $\mathbb{T}$ besteht genau aus Funktionen der Form $z \mapsto z^n$, wobei $n \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Dass Funktionen dieser Form Charaktere sind, ist klar. Diese Funktionen bilden eine punktetrennende Untergruppe von $\hat{\mathbb{T}}$ und sind wegen Lemma 7.1 schon alle Charaktere. □

Proposition 7.3. *Die Charaktergruppe von $\mathbb{Z}$ besteht genau aus Funktionen der Form $n \mapsto z^n$, wobei $z \in \mathbb{T}$.*

Beweis. Dass Funktionen dieser Form Charaktere sind, ist klar. Ist γ ein Charakter und $z := \gamma(1) \in \mathbb{T}$, so ist $\gamma(n) = z^n$. □

Bemerkung 7.4. Man sieht leicht, dass die Abbildung $\Phi : \mathbb{Z} \to \hat{\mathbb{T}} : n \mapsto (\cdot)^n$ ein isomorpher Homöomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach $\hat{\mathbb{T}}$ ist. Außerdem ist $\Psi : \mathbb{T} \to \hat{\mathbb{Z}} : z \mapsto z^{(\cdot)}$ ein isomorpher Homöomorphismus von $\mathbb{T}$ nach $\hat{\mathbb{Z}}$.

Proposition 7.5. *Die Charaktergruppe von $\mathbb{R}$ besteht genau aus Funktionen der Form $x \mapsto \exp(ixy)$, wobei $y \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Dass Funktionen dieser Form Charaktere sind, ist klar. Sei γ ein Charakter auf $\mathbb{R}$ und $A := \{x \in \mathbb{R} : \gamma(x) = 1\}$. Dann ist A eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{R}$. Wir definieren $b := \inf(\{x \in A : x > 0\})$, wobei $\inf(\emptyset) = 0$.

Falls $b > 0$ gilt, ist $A = \{kb : k \in \mathbb{Z}\}$ und $\gamma(x+b) = \gamma(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher wird durch $\tilde{\gamma}(e^{ix}) := \gamma(\frac{xb}{2\pi})$ für $x \in \mathbb{R}$ ein Charakter auf $\mathbb{T}$ definiert. Laut Proposition 7.2 existiert ein $n \in \mathbb{Z}$, sodass $e^{ixn} = \tilde{\gamma}(e^{ix}) = \gamma(\frac{xb}{2\pi})$ für $x \in \mathbb{R}$.

Falls $b = 0$ gilt und A nicht nur 0 enthält, so ist $A = \mathbb{R}$. Um dies zu sehen, sei $y \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ und $z \in A$ mit $0 < z < \epsilon$. Es gibt ein $N \in \mathbb{Z}$, sodass $|Nz - y| < \epsilon$. Da A eine Untergruppe ist, ist $Nz \in A$. Wegen der Abgeschlossenheit von A folgt $y \in A$. Somit ist $\gamma(x) = e^{ix0}$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$.

Falls nun $A = \{0\}$, so enthält die zusammenhängende Menge $S_\epsilon := \gamma([0,\epsilon])$ für $\epsilon > 0$ nicht nur 1. Wir wählen ϵ so klein, dass $\{-1\}$ nicht in S_ϵ liegt. Dann können wir die auf $\mathbb{T} \setminus \{-1\}$ definierte Funktion arg auf S_ϵ anwenden und erhalten ein Intervall $I \subseteq (-\pi,\pi)$, das nicht nur 0 enthält. Sei $m \in \mathbb{Z}$ so, dass $\frac{1}{m} \in I$. Dann ist $e^{i\frac{1}{m}} \in S_\epsilon$ und somit gleich $\gamma(r)$ für ein $r \in (0,\epsilon]$. Es folgt $\gamma(mr) = \gamma(r)^m = 1$ im Widerspruch zu $A = \{0\}$. □

Bemerkung 7.6. Man sieht leicht, dass die Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}} : y \mapsto e^{i(\cdot)y}$ ein isomorpher Homöomorphismus von $\mathbb{R}$ nach $\hat{\mathbb{R}}$ ist. Somit entspricht die Fouriertransformation aus Abschnitt 5 gerade der klassischen.

8. Appendix

8.1. **Funktionialanalysis.** Wir geben einen kleinen Einblick in die Theorie kernreproduzierender Hilberträume und in Choquet-Theorie.

Definition 8.1. Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathbb{C}^\Omega$ mit der punktweisen Multiplikation und der punktweisen Addition versehen. Ein Hilbertraum $H \leq \mathbb{C}^\Omega$ heißt *kernreproduzierender Hilbertraum* auf Ω, falls die Abbildung

$$\iota(x) : H \to \mathbb{C} : f \mapsto f(x)$$

für alle $x \in \Omega$ stetig ist. Laut Fréchet-Riesz existiert für $x \in \Omega$ ein eindeutiges $k_x \in H$, sodass $\iota(x)(f) = (f, k_x)$ für alle $f \in H$. Dann heißt die Abbildung

$$K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C} : (x, y) \mapsto (k_y, k_x) = k_y(x)$$

die Kernfunktion.

Bemerkung 8.2. In der Situation obiger Definition gilt für die Kernfunktion

$$K(x, y) = \overline{K(y, x)} \tag{8.1}$$

für $x, y \in \Omega$. Sind $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in \Omega, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, so gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(x_j, x_i) c_i \overline{c}_j \geq 0, \tag{8.2}$$

denn

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(x_j, x_i) c_i \overline{c}_j = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i k_{x_i}, \sum_{j=1}^{n} c_j k_{x_j} \right).$$

Satz 8.3. *Sei Ω eine nichtleere Menge und $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ eine Abbildung mit (8.1) und (8.2). Dann gibt es genau einen kernreproduzierenden Hilbertraum H mit zugehöriger Kernfunktion K.*

Beweis. Siehe z.B. [Kal11b]. □

Definition 8.4. Sei X ein lokalkonvexer Raum, K eine kompakte Teilmenge und μ ein reguläres Wahrscheinlichkeitsmaß auf K. Wir sagen, dass ein Punkt $x \in X$ der[11] *Schwerpunkt* von μ ist, falls für jedes stetige lineare Funktional $f \in X'$

$$f(x) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu$$

gilt.

Mit dieser Definition erhält man mit dem Satz von Krein-Milman folgendes Resultat(vgl. [Phe01, Seite 5]).

Satz 8.5. *Sei X ein lokalkonvexer Raum und K eine kompakte konvexe Teilmenge. Dann gibt es zu jedem Punkt $x \in K$ ein reguläres Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf dem Abschluss der Exremalpunkte $\overline{\mathrm{ex}(K)}$, sodass x der Schwerpunkt von μ ist.*

[11] Schwerpunkte sind eindeutig, da X' punktetrennend ist.

Beweis. Sei $x \in K$ und $L := \overline{\mathrm{ex}(K)}$. Wegen dem Satz von Krein-Milman gibt es ein Netz $(y_i)_{i\in I}$ in der konvexen Hülle von L, das gegen x konvergiert. Die Elemente des Netzes haben also folgende Form $y_i = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^i x_j^i$ mit $n_i \in \mathbb{N}, \lambda_j^i > 0, \sum_{i=1}^{n_i} \lambda_j^i = 1$ und $x_j^i \in L$ für $i \in I$. Für $i \in I$ ist y_i Schwerpunkt des regulären Wahrscheinlichkeitsmaßes auf L

$$\mu_i := \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^i \delta_{x_j^i}.$$

Dabei ist, für $z \in L$, δ_z das Diracmaß auf L zum Punkt z.

Die regulären komplexen Maße auf L entsprechen laut dem Satz von Riesz-Markov dem topologischen Dualraum von $C_0(L)(= C(L)$, da L kompakt ist). Insbesondere entsprechen die regulären Wahrscheinlichkeitsmaße genau jenen Funktionalen Φ mit $\|\Phi\| \le 1$, $\Phi(1) = 1$ und $\Phi(f) \ge 0$ für alle nichtnegativen $f \in C_0(L)$ (vgl. [Kal11a, Satz 17.3.6]). Versieht man den Dualraum von $C_0(L)$ also mit der schwach* Topologie, so ist die Menge der regulären Wahrscheinlichkeitsmaße in der Operatornorm beschränkt und schwach* abgeschlossen. Um dies einzusehen, sei $(\nu_j)_{j\in J}$ ein Netz aus regulären Wahrscheinlichkeitsmaßen, das schwach* gegen ein $\nu \in M(L)$ konvergiert. Offenbar ist dann $|\int_L f \,\mathrm{d}\nu| \le 1$ für normiertes $f \in C_0(L)$, $\int_L 1 \,\mathrm{d}\nu = 1$ und $\int_L f \,\mathrm{d}\nu \ge 0$ für nichtnegatives $f \in C_0(L)$. Somit ist die Menge aller regulären Wahrscheinlichkeitsmaße wegen dem Satz von Banach-Alaoglu schwach* kompakt.

Wir können das Netz $(y_i)_{i\in I}$ daher o.B.d.A. so wählen, dass $(\mu_i)_{i\in I}$ schwach* gegen ein reguläres Wahrscheinlichkeitsmaß μ konvergiert. Ist nun $f \in X'$, so ist $f|_L \in C_0(L)$ und daher gilt:

$$f(x) = \lim_{i\in I} f(y_i) = \lim_{i\in I} \int_L f \,\mathrm{d}\mu_i = \int_L f \,\mathrm{d}\mu$$

Das bedeutet gerade, dass x der Schwerpunkt von μ ist.

□

8.2. **lokalkompakte Gruppen.**

In diesem Unterabschnitt, der größtenteils auf Kapitel 2 von [Fol95] basiert, bezeichnet G stets eine kommutative lokalkompakte Gruppe.

Proposition 8.6. *Sei $f \in C_{00}(G)$, dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Findet sich in fast jedem Buch über lokalkompakte Gruppen, siehe z.B. [Fol95, Proposition 2.6]. □

Lemma 8.7. *Sei $p \in [1,\infty)$ und $f \in L^p(G)$, dann ist die Abbildung $x \mapsto f(x+\cdot)$ von G nach $L^p(G)$ stetig.*

Beweis. Sei $x \in G$, $\epsilon > 0$ und f zunächst in $C_{00}(G)$. Mit K bezeichnen wir den Träger von f. Wir wählen ein $U \in \mathcal{U}(e)$, sodass $|f(b) - f(a)| < \epsilon$, falls $a, b \in G, b - a \in U$. Dann ist $x + U$ eine Umgebung von x. Ist nun $y \in x + U$, so gilt

$$\int_G |f(x+z) - f(y+z)|^p \,\mathrm{d}\lambda(z) \le \lambda(K - x \cup K - y)\epsilon^p \le 2\lambda(K)\epsilon^p.$$

Damit ist obige Abbildung stetig bei x.

Ist nun $f \in L^p$ beliebig, so wissen wir, dass es ein $g \in C_{00}(G)$ gibt mit $\|f - g\|_p < \epsilon$. Wir wählen nun eine Umgebung U von x, sodass für $y \in U$ die Ungleichung

$\|g(x+\cdot)-g(y+\cdot)\|_p < \epsilon$ gilt. Damit lässt sich $\|f(x+\cdot)-f(y+\cdot)\|_p$ wie folgt abschätzen

$$\|f(x+\cdot)-g(x+\cdot)\|_p + \|g(x+\cdot)-g(y+\cdot)\|_p + \|g(y+\cdot)-f(y+\cdot)\|_p < 3\epsilon.$$

□

Lemma 8.8. *Es gibt eine abgeschlossene offene und σ-kompakte Untergruppe H von G.*

Beweis. Sei U eine symmetrische kompakte Umgebung von e. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir das kompakte $U_n := U + \cdots + U$ mit n Summanden und $H := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Dann ist H eine σ-kompakte Untergruppe. Sei nun $x \in H$, also $x \in U_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann ist $x + U \subseteq U_{n+1}$ eine in H enthaltene Umgebung von x. Damit ist H offen. Daher ist auch die Nebenklasse $x + H$ für alle $x \in G$ offen. Die Menge $G \setminus H$ ist die Vereinigung aller von H verschiedenen Nebenklassen und als solche offen. □

Proposition 8.9. *Sei H eine Untergruppe von G wie in Lemma 8.8, Y eine Teilmenge von G, die von jeder Nebenklasse von H genau ein Element enthält und E eine Borelmenge. Ist $E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(y_i + H)$, wobei $y_i \in Y$ für $i \in \mathbb{N}$, dann ist $\lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E \cap (y_i + H))$. Ist $E \cap y + H \neq \emptyset$ für überabzählbar viele $y \in Y$, so ist $\lambda(E) = \infty$.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus der σ-Additivität von λ. Für den zweiten Fall können wir aufgrund der Regularität von außen o.B.d.A. annehmen, dass E offen ist. Ist $y \in Y$ so, dass die offene Menge $E \cap y + H$ nichtleer ist, so hat diese positives Maß. Da es überabzählbare viele solche y gibt, folgt die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$, sodass für unendlich viele $y \in Y$ gilt $\frac{1}{n} < \lambda(E \cap y + H)$. Daher ist $\lambda(E) = \infty$. □

Lemma 8.10. *Sei $f \in L^p(G)$ mit $p \in [1, \infty)$. Dann verschwindet f außerhalb einer σ-kompakten Menge.*

Beweis. Wir setzen $A_n := (|f|^p)^{-1}((\frac{1}{n}, \infty))$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$f^{-1}(\{0\}^c) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Da $|f|^p$ integrierbar ist, folgt, dass $\lambda(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen Proposition 8.9 ist daher A_n für $n \in \mathbb{N}$ in einer σ-kompakten Menge enthalten. □

Lemma 8.11. *Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\mu \in M(G)$. Falls*

$$\int_G \phi \,\mathrm{d}\mu = \int_G \phi f \,\mathrm{d}\lambda, \quad \phi \in C_{00}^+(G),$$

so ist $f \in L^1(G)$ und $f \,\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\mu$.

Beweis. Da Real- und Imaginärteil separat betrachtet werden können, seien o.B.d.A. f und μ reellwertig. Sei $K \subseteq f^{-1}((0,\infty))$ kompakt und $\phi \in C_{00}(G)$ eine Funktion mit Werten in $[0,1]$ und Träger in der offenen Menge $f^{-1}((0,\infty))$, sodass $\phi = 1$ auf K. Dann ist

$$\int_K f \,\mathrm{d}\lambda \leq \int_G \phi f \,\mathrm{d}\lambda = \int_G \phi \,\mathrm{d}\mu \leq |\mu|(G).$$

Ist nun $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \subseteq f^{-1}((0,\infty))$ mit einer Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsender kompakter Mengen, so gilt wegen dem Satz von Beppo Levi und obiger Ungleichung

$$\int_{K_\infty} f \,\mathrm{d}\lambda \leq |\mu|(G).$$

Ist nun $F \subseteq f^{-1}((0,\infty))$ mit $\lambda(F) < \infty$, so existiert wegen der Regularität von innen ein σ-kompaktes $K_\infty \subseteq F$ mit $\lambda(F \setminus K_\infty) = 0$. Daraus folgt mit obiger Ungleichung

$$\int_F f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{K_\infty} f \,\mathrm{d}\lambda \leq |\mu|(G).$$

Daher ist f über jedes σ-endliche $F_\infty \subseteq f^{-1}((0,\infty))$ integrierbar, denn wegen dem Satz von Beppo Levi gilt

$$\int_{F_\infty} f \,\mathrm{d}\lambda \leq |\mu|(G).$$

Nun ist aber $f^{-1}((0,\infty)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$, wobei $O_n := f^{-1}((\frac{1}{n},\infty))$ für $n \in \mathbb{N}$, σ-endlich, denn jedes O_n hat endliches Maß: Angenommen es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\lambda(O_n) = \infty$. Da O_n offen ist, ist es regulär von innen. Es gibt also eine σ-kompakte Menge $K_\infty \subseteq O_n \subseteq f^{-1}((0,\infty))$ mit $\lambda(K_\infty) = \infty$. Damit folgt der Widerspruch

$$|\mu|(G) \geq \int_{K_\infty} f \,\mathrm{d}\lambda \geq \int_{K_\infty} \frac{1}{n} \,\mathrm{d}\lambda = \infty.$$

Daher ist der Positivteil von f integrierbar. Ersetzt man in obigen Überlegungen f durch $-f$ und μ durch $-\mu$, so erhält man auch die Integrierbarkeit des Negativteiles von f. Insgesamt ist also $f \in L^1(G)$.

Wegen [Kal11a, Korollar 17.1.8] ist $f \,\mathrm{d}\lambda \in M(G)$. Sei $K \subseteq G$ kompakt und $\epsilon > 0$. Wir wählen ein offenes $O \supseteq K$, sodass $\int_{O\setminus K} \mathrm{d}|\mu| < \epsilon$ und $\int_{O\setminus K} |f| \,\mathrm{d}\lambda < \epsilon$, und ein $\phi \in C_{00}(G)$ mit Werten in $[0,1]$ und Träger in O, sodass $\phi = 1$ auf K. Aus der Voraussetzung des Lemmas erhält man mit der Dreiecksungleichung $|\int_K \phi f \,\mathrm{d}\lambda - \int_K \phi \,\mathrm{d}\mu| < 2\epsilon$ und da ϵ beliebig war somit $\int_K f \,\mathrm{d}\lambda = \int_K \mathrm{d}\mu$. Aus der Regularität der betrachteten Maße und da K beliebig war folgt $f \,\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\mu$. □

Lemma 8.12. *Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $g \in L^p(G)$ für ein $p \in [1,\infty)$. Falls für alle kompakten $K \subseteq G$*

$$\int_K f \,\mathrm{d}\lambda = \int_K g \,\mathrm{d}\lambda,$$

so ist $f = g$ fast überall.

Beweis. Sei H eine Untergruppe von G wie in Lemma 8.8, Y eine Teilmenge von G, die von jeder Nebenklasse von H genau ein Element enthält. Die Funktionen f und g stimmen auf jeder kompakten Menge K fast überall überein, denn $f|_K - g|_K \in L^2(\lambda|_K)$ steht orthogonal auf die in $L^2(\lambda|_K)$ dichte (vgl. [Kal11a, Korollar 17.1.3]) Menge $\operatorname{span}(\{\chi_{\tilde{K}} : \tilde{K} \subseteq K \text{ kompakt}\})$. Damit stimmen f und g auf jeder σ-kompakten Menge fast überall überein.

Laut Lemma 8.10 ist $g^{-1}(\{0\}^c)$ eine σ-endliche Menge und wegen Lemma 8.9 ist sie somit in $\bigcup_{y\in L} y + H$, wobei $L \subseteq Y$ abzählbar ist, enthalten. Hier stimmen f und g fast überall überein. Ist nun $y \in L^c$, so ist f fast überall 0 auf $y + H$ und wegen der Stetigkeit von f und der Offenheit von $y + H$ sogar überall. Damit stimmen f

und g fast überall auf $\bigcup_{y\in L} y+H$ und überall auf $\bigcup_{y\in L^c} y+H$ überein. Daraus folgt die Behauptung. □

Für ein nicht σ-endliches Maß μ stimmt der topologische Dualraum von $L^1(\mu)'$ im Allgemeinen nicht mit $L^\infty(\mu)$ überein. Für lokalkompakte Gruppen versehen mit dem Haarmaß kann man das Resultat durch Umdefinition von $L^\infty(\mu)$ retten (vgl. [Fol95, Seite 45,46]).

Definition 8.13. Wir nenen $E \subseteq G$ *lokale Borelmenge*, wenn $E \cap F$ Borel für alle Borelmengen F mit $\lambda(F) < \infty$ ist. Eine lokale Borelmenge E ist eine *lokale Nullmenge*, falls $\lambda(E \cap F) = 0$ für alle Borelmengen F mit $\lambda(F) < \infty$ ist. Eine Aussage über Punkte von G gilt *lokal fast überall*, falls die Menge aller Punkte, für die die Aussage nicht gilt, in einer lokalen Nullmenge enthalten ist. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ist *lokal messbar*, falls $f^{-1}(A)$ eine lokale Borelmenge für jede Borelmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ ist. Wir definieren $L^\infty(G)$ als den Raum aller lokal messbaren Funktionen, die lokal fast überall beschränkt sind, faktorisiert nach dem Raum aller lokal messbaren Funktionen, die lokal fast überall 0 sind. Für $f \in L^\infty(G)$ definieren wir

$$\|f\|_\infty := \inf\{c \geq 0 : |f| \leq c \text{ lokal f.ü.}\}.$$

Dabei sieht man leicht, dass das Infimum ein Minimum ist (man beachte hierzu $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in G : |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{n}\} = \{x \in G : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$) und $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $L^\infty(G)$ ist. Ist G σ-endlich, so stimmen obige Definitionen gerade mit den klassischen überein.

Bemerkung 8.14. Ist $f \in C(G)$ beschränkt, so ist es auch lokal fast überall beschränkt. Es gilt $\sup_{x\in G}|f(x)| = \|f\|_\infty$. Dabei ist $\geq$ klar und $\leq$ folgt aus der Tatsache, dass $|f| \leq \|f\|_\infty$ lokal fast überall die Ungleichung überall impliziert. Aus dieser Gleichheit folgt, dass zwei stetige lokal fast überall übereinstimmende Funktionen auf G gleich sind.

Lemma 8.15. *Sei H eine beliebige Untergruppe von G wie in Lemma 8.8. Dann ist $E \subseteq G$ eine lokale Borelmenge genau dann, wenn $E \cap (y+H)$ für alle $y \in G$ eine Borelmenge ist. Ist $E \subseteq G$ eine lokale Borelmenge, so ist es genau dann eine lokale Nullmenge, wenn $\lambda(E \cap (y+H)) = 0$ für alle $y \in G$. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ist lokal messbar genau dann, wenn $f|_{y+H}$ für alle $y \in G$ messbar ist.*

Beweis. Wegen der σ-Kompaktheit von H sind die Hinrichtungen jeweils klar. Die Rückrichtungen folgen aus der Tatsache, dass jede Borelmenge F mit endlichem Maß in einer abzählbaren Vereinigung von Nebenklassen von H liegt (vgl. Proposition 8.9). □

Satz 8.16. *Für jedes $f \in L^\infty(G)$ ist*

$$\Phi_f : L^1(G) \to \mathbb{C} : g \mapsto \int_G fg \, \mathrm{d}\lambda$$

ein wohldefiniertes[12] *beschränktes lineares Funktional. Die Abbildung*

$$f \mapsto \Phi_f$$

ist eine lineare, bijektive und isometrische Abbildung von $L^\infty(G)$ nach $L^1(G)'$.

[12] Das heißt fg ist messbar und integrierbar.

Beweis. Sei H eine Untergruppe von G wie in Lemma 8.8, Y eine Teilmenge von G, die von jeder Nebenklasse von H genau ein Element enthält und $g \in L^1(G)$ beliebig. Aus Lemma 8.10 folgt, dass $g^{-1}(\{0\}^c)$ σ-endlich ist und aus Proposition 8.9, dass $g^{-1}(\{0\}^c) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(y_n + H)$, wobei $y_n \in Y$ für $n \in \mathbb{N}$. Daher gilt

$$fg = \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{y_n+H}\,g.$$

Wegen Lemma 8.15 ist fg messbar. Die Integrierbarkeit von fg gilt, weil $\{x \in G : |f(x)| > \|f\|_\infty\} \cap g^{-1}(\{0\}^c)$ eine Nullmenge ist. Daher ist Φ_f ein wohldefiniertes beschränktes lineares Funktional mit $\|\Phi_f\| \le \|f\|_\infty$.

Ist nun $\Phi \in L^1(G)'$, so ist $\phi_y : L^1(\lambda|_{y+H}) \to \mathbb{C} : g \mapsto \Phi(g|^G)$ für alle $y \in Y$ in $L^1(\lambda|_{y+H})'$. Dabei bezeichnen wir für eine Menge $M \subseteq G$ und eine Funktion $g : M \to \mathbb{C}$ den Ausdruck $g|^G$ als jene Abbildung auf G mit $(g|^G)|_M = g$ und $(g|^G)|_{M^c} = 0$. Da alle Nebenklassen von H σ-endlich sind, folgt aus dem klassischen Ergebnis für jedes $y \in Y$ die Existenz eines $f_y \in L^\infty(\lambda|_{y+H})$ mit

$$\phi_y(g) = \int_{y+H} g f_y \,\mathrm{d}\lambda, \quad g \in L^1(y+H) \tag{8.3}$$

und $\|f_y\|_\infty = \|\phi_y\| \le \|\Phi\|$. Wir definieren $f(x) := f_y(x)$ für $y \in Y$ und $x \in y + H$. Wegen Lemma 8.15 ist f dann lokal messbar und lokal fast überall beschränkt, denn für alle $y \in Y$ hat

$$\{x \in G : |f| > \|\Phi\|\} \cap (y + H) \subseteq \{x \in y + H : |f| > \|f_y\|_\infty\}$$

Maß 0. Es gilt also $f \in L^\infty(G)$ mit $\|f\|_\infty \le \|\Phi\|$.

Sei $g \in L^1(G)$. Dann ist $g^{-1}(\{0\}^c) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} y_n + H$, wobei $y_n \in Y$ für $n \in \mathbb{N}$. Wie oben folgt, dass fg messbar und integrierbar ist. Wegen der Stetigkeit von Φ, (8.3) und dem Satz von Lebesgue gilt

$$\Phi(g) = \Phi\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{y_n+H}\,g\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{y_n}(g|_{y_n+H}) =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{y_n+H} fg \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} y_n+H} fg \,\mathrm{d}\lambda = \int_G fg \,\mathrm{d}\lambda.$$

Wir haben also gezeigt dass $f \mapsto \Phi_f$ eine surjektive Abbildung nach $L^1(G)'$ ist, die offenbar linear ist.

Sie ist auch injektiv. Seien hierzu $f, \tilde{f} \in L^\infty(G)$ mit $\Phi_f = \Phi_{\tilde{f}}$. Dann gilt für $y \in Y$

$$\int_{y+H} f(x)g(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{y+H} \tilde{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}\lambda(x), \quad g \in L^1(y+H)$$

und da $y + H$ σ-endlich ist, folgt $f = \tilde{f}$ fast überall auf $y + H$. Mit Lemma 8.15 folgt sogar $f = \tilde{f}$ lokal fast überall.

Die Isometrie ergibt sich nun unmittelbar aus obigen Überlegungen. Ist nämlich $f \in L^\infty(G)$, so haben wir schon am Anfang gesehen, dass $\|\Phi_f\| \le \|f\|_\infty$. Für die andere Ungleichung wenden wir die Konstruktion von oben mit $\Phi = \Phi_f$ an und erhalten ein $\tilde{f}$ mit $\Phi_f = \Phi_{\tilde{f}}$ und $\|\tilde{f}\|_\infty \le \|\Phi_f\|$. Wegen der Injektivität ist aber $f = \tilde{f}$. □

Literatur

[BR97] R. B. Bapat and T. E. S. Raghavan. *Nonnegative matrices and applications*, volume 64 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Fol95] Gerald B. Folland. *A course in abstract harmonic analysis*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[Kal09] Michael Kaltenbäck. *Analysis 2*. Vorlesungsskript der TU Wien, November 2009.

[Kal11a] Michael Kaltenbäck. *Analyis 3*. Vorlesungsskript der TU Wien, August 2011.

[Kal11b] Michael Kaltenbäck. *Funktionalanalysis 2*. Vorlesungsskript der TU Wien, September 2011.

[Phe01] Robert R. Phelps. *Lectures on Choquet's theorem*, volume 1757 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2001.

[Sas94] Zoltán Sasvári. *Positive definite and definitizable functions*, volume 2 of *Mathematical Topics*. Akademie Verlag, Berlin, 1994.

[WKB11] Harald Woracek, Michael Kaltenbäck, and Martin Blümlinger. *Funktionalanalysis 1*. Vorlesungsskript der TU Wien, Juni 2011.