

Bachelorarbeit

Ordinalzahlen und deren Anwendung
in der Topologie

Joel Gotsch

6. Dezember 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung in die Mengenlehre	2
1.1	Extensionalitätsaxiom	2
1.2	Aussonderungsaxiom	3
1.3	Leermengenaxiom	4
1.4	Paarbildungsaxiom	4
1.5	Vereinigungsmengenaxiom	4
1.6	Potenzmengenaxiom	5
1.7	Unendlichkeitsaxiom	5
1.8	Auswahlaxiom	6
1.9	Ersetzungsaxiom	8
1.10	Weitere Definitionen	9
2	Wichtige Ergebnisse aus der Mengenlehre	10
3	Topologie	12
3.1	Allgemeine Definitionen	12
3.2	Trennungsaxiome	14
3.3	Globale Kompaktheitseigenschaften	16
3.4	Lokale Kompaktheitseigenschaften	19
3.5	Metrische Räume	22
4	Beispiele	25
4.1	Ordnungstopologie	25
4.2	Closed Ordinal Space $[0, \Gamma]$	30
4.3	Open Ordinal Space $[0, \Gamma)$	31
4.4	Closed Ordinal Space $[0, \Omega]$	33
4.5	Open Ordinal Space $[0, \Omega)$	35
	Literatur	39

Motivation

Zum besseren Verständnis der Topologie sind (wie in der gesamten Mathematik) Gegenbeispiele zu naiven aber teils auch anschaulichen Annahmen gesucht und gefunden worden. Einige der interessantesten Gegenbeispiele verwenden hierbei die verschiedenen Mächtigkeiten von unendlichen Mengen. Zum Beschreiben dieser Unendlichkeiten haben sich in der Mathematik die Ordinal- und Kardinalzahlen durchgesetzt.

Diese Arbeit widmet sich Topologien, die mit Hilfe von Ordinalzahlen konstruiert werden und zielt darauf ab, das Verständnis für diese, und damit für die Topologie im Allgemeinen, zu verbessern.

1 Einführung in die Mengenlehre

Ordinalzahlen sind - wie Kardinalzahlen - Objekte der Mengenlehre. Die Idee der mengentheoretischen Betrachtungsweise stammt von Cantor. Dabei hat sich herausgestellt, dass die zunächst naive Mengenlehre zu Widersprüchen führt (z.B. ist die Menge aller Ordinalzahlen keine Menge). Zermelo hat dann ein Axiomenschema erstellt, das solche Widersprüche ausschließen soll. Fraenkel hat später ein Axiom hinzugefügt und zusammen mit dem Auswahlaxiom ergibt sich das sogenannte ZFC Axiomenschema. Im Folgenden wird die Kenntnis der elementaren logischen Verknüpfungen vorausgesetzt. Da es sich bei der Mengenlehre um eines der Grundkonstrukte der Mathematik handelt, wird in vielen Lehrbüchern an dieser Stelle eine möglichst einfache logische mathematische Sprache verwendet und die Restliche dann auf diese aufbauend erklärt. Es sei noch bemerkt, dass die Liste der ZFC Axiome in den Lehrbüchern nicht einheitlich ist. Wir übernehmen die Struktur aus dem Buch „Naive set theory“ von Paul Halmos (siehe [1]), man lasse sich vom Namen des Buches nicht verwirren, es handelt sich nicht um Cantors frühe Auffassung von Mengenlehre. Im Gegensatz zu Halmos, der alle ZFC Axiome sprachlich formuliert hat, werden wir hier jedoch mehr von der mathematischen Notation Gebrauch machen.

1.1 Extensionalitätsaxiom

Das Extensionalitätsaxiom besagt, dass zwei Mengen genau dann gleich sind, wenn sie die selben Elemente enthalten.

Axiom 1 (Extensionalitätsaxiom).

$$\forall A, B : A = B \Leftrightarrow \forall C : (C \in A \Leftrightarrow C \in B)$$

Bemerkung 1.1. Das scheint zunächst selbstverständlich, betrachtet man jedoch die Mengen

- $\{n \in \mathbb{N}, n > 2 : \exists x, y, z \in \mathbb{N} : x^n + y^n = z^n\}$
- $\{f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \text{ differenzierbar aber nicht stetig}\}$

so handelt es sich im ersten Fall um eine Menge von natürlichen Zahlen und im zweiten Fall um eine Menge von Funktionen. Beide Mengen sind leer und das Extensionalitätsaxiom besagt, dass sie somit gleich sind (die Existenz dieser Mengen wird erst durch das nächste Axiom gesichert).

Das Extensionalitätsaxiom ist offensichtlich auch für die Eindeutigkeit von Mengen ausschlaggebend.

1.2 Aussonderungsaxiom

Das Aussonderungsaxiom besagt, dass die Teilmengen einer Menge die mittels einer Eigenschaft ausgesondert werden, tatsächlich Mengen sind. Um dies technisch exakt zu formulieren benötigt man den Begriff des Prädikats aus der Logik. Für diese Arbeit ist es jedoch ausreichend den Weg von Halmos zu beschreiten und den Begriff der Bedingung zu verwenden.

Axiom 2.

Für alle Bedingungen S gilt: $\forall A : \exists B : \forall x : (x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge S(x))$

Die Menge B , die aufgrund des Extensionalitätsaxioms eindeutig ist, wird auch folgendermaßen notiert:

$$B = \{x \in A : S(x)\}$$

Bemerkung 1.2. Das Aussonderungsaxiom verhindert auch, dass „zu große“ Mengen existieren. So kann man nun ausschließen, dass die Gesamtheit aller Mengen eine Menge ist. Angenommen, die Menge aller Mengen A existiert. Dann müsste auch die Teilmenge B existieren mit der Bedingung $B = \{x \in A : x \notin x\}$. So eine Menge existiert aber nicht (Russelsches Paradoxon), daher kann auch A nicht existieren.

Lemma 1.3. Sei \mathcal{C} ein Mengensystem. Dann ist auch $\bigcap_{B \in \mathcal{C}} B$ eine Menge.

BEWEIS : Sei $A \in \mathcal{C}$. Wende das Aussonderungsaxiom für A und $S(x) = \exists B \in \mathcal{C} : x \in B$ an. Die dadurch erzeugte Menge ist genau $\bigcap_{B \in \mathcal{C}} B$. \square

Bemerkung 1.4. Insbesondere gilt, dass der Durchschnitt zweier Mengen A und B ebenfalls eine Menge ist. Man beachte auch, dass \mathcal{C} selbst keine Menge sein muss.

1.3 Leermengenaxiom

Das Leermengenaxiom garantiert die Existenz der leeren Menge.

Axiom 3.

$$\exists B : \forall A : A \notin B$$

Man kann das Axiom auch anders formulieren:

$$\exists B : \forall A : (A \in B \Leftrightarrow A \notin B)$$

Bemerkung 1.5. Wir nennen diese Menge B die leere Menge und notieren sie mit \emptyset . Die Eindeutigkeit der leeren Menge folgt aus dem Extensionalitätsaxiom. Dieses Axiom stellt nur sicher, dass es überhaupt eine Menge gibt und wir nicht über „das Nichts“ sprechen. Wenn irgendeine Menge existiert, so folgt aus dem Aussonderungsaxiom mit $S = (x \neq x)$ angewandt auf die existente Menge bereits die Existenz der leeren Menge.

1.4 Paarbildungsaxiom

Das Paarbildungsaxiom gewährleistet, dass zu je zwei Mengen die Menge existiert, die diese beiden Mengen als Elemente enthält.

Axiom 4.

$$\forall A, B : \exists C : \forall D : (D \in C \Leftrightarrow D = A \vee D = B)$$

Bemerkung 1.6. Die Menge C wird mit $\{A, B\}$ notiert. $\{A, A\}$ wird wiederum als $\{A\}$ geschrieben. Die Eindeutigkeit dieser Menge folgt abermals aus dem Extensionalitätsaxiom.

Oft wird in der Literatur noch das sogenannte Singletonaxiom angegeben, dass die Existenz der Menge $\{a\}$ garantiert, wenn a bereits eine Menge ist. Jedoch folgt dieses bereits aus dem Paarbildungsaxiom, wenn man in der obigen Notation sowohl $A = a$ als auch $B = a$ einsetzt, so erhält man die Menge, die als einziges Element a enthält und mit $\{a\}$ bezeichnet wird.

1.5 Vereinigungsmengenaxiom

Das Vereinigungsmengenaxiom besagt, dass zu jedem Mengensystem die Vereinigungsmenge der Mengen des Mengensystems existiert.

Axiom 5. Sei \mathcal{C} eine Menge von Mengen. Dann besagt das Vereinigungsmengenaxiom:

$$\exists B : (x \in B \Leftrightarrow \exists A : A \in \mathcal{C} \wedge x \in A)$$

Bemerkung 1.7. Diese Menge B wird auch mit $\bigcup \mathcal{C}$ oder $\bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$ notiert. Nun kann man auch die Vereinigung zweier Mengen bilden: Seien A und B Mengen. Nach dem Paarmengenaxiom existiert nun die Menge $\{A, B\}$. Für die Menge $\bigcup \{A, B\}$ schreiben wir auch $A \cup B$. Die Eindeutigkeit dieser Mengen folgt wieder aus dem Extensionalitätsaxiom.

Bemerkung 1.8. Eigentlich ist das Vereinigungsmengenaxiom etwas anders formuliert. Tatsächlich besagt das Axiom, dass eine Obermenge von B (Notation von oben) existieren muss. Mit Hilfe des Aussonderungsaxiom kann man dann jedoch wieder die Menge B bilden, die beiden Versionen des Vereinigungsmengenaxioms sind also äquivalent.

1.6 Potenzmengenaxiom

Um das Potenzmengenaxiom einfacher formulieren zu können, zunächst die Definition der Potenzmenge:

Definition 1.9. Die Gesamtheit aller Teilmengen $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X wird *Potenzmenge* von X genannt. In Zeichen: $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$

Das Potenzmengenaxiom besagt nun, dass für jede Menge X deren Potenzmenge tatsächlich eine Menge ist:

Axiom 6.

$$\forall X : \exists \mathcal{P}(X)$$

Bemerkung 1.10. Das Potenzmengenaxiom ist ein relativ starkes Axiom. Wie wir später sehen werden, ist die Mächtigkeit der Potenzmenge einer Menge X immer echt größer als die der Menge X . Somit garantiert das Potenzmengenaxiom die Existenz immer größerer Mengen. Auch wenn wir die Begriffe Unendlichkeit bzw. Endlichkeit noch nicht exakt formuliert haben, sei noch erwähnt, dass dieses Axiom noch nicht die Existenz unendlicher Mengen garantiert, da die Potenzmenge einer endlichen Menge wieder endlich ist.

Die Eindeutigkeit von $\mathcal{P}(X)$ folgt wie immer aus dem Extensionalitätsaxiom.

1.7 Unendlichkeitsaxiom

Das Unendlichkeitsaxiom garantiert die Existenz der Menge der natürlichen Zahlen. Um dies mengentheoretisch formulieren zu können müssen zunächst die natürlichen Zahlen in die Mengentheorie eingebettet werden. John von Neumann hat eine elegante Möglichkeit dafür gefunden.

Definition 1.11. Wir definieren

$$0 = \emptyset$$

und für jede Zahl n ihren *Nachfolger*, den wir mit n^+ notieren:

$$n^+ = \{n\} \cup n. \quad (1.1)$$

Sei A eine Menge die von jedem ihrer Elemente auch dessen Nachfolger enthält, für die also gilt:

$$\forall n \in A : n^+ \in A.$$

Eine solche Menge A nennen wir *Nachfolgermenge*.

Bemerkung 1.12. Nach dem Leermengenaxiom ist 0 eine Menge. Mit Induktion, Bemerkung 1.6 und dem Vereinigungsmengenaxiom zeigt man, dass alle nach dem obigen Prinzip gebildeten Mengen tatsächlich Mengen sind. Jede natürliche Zahl ist also als Menge darstellbar. Für die Existenz der Menge der natürlichen Zahlen benötigen wir jedoch noch ein Axiom. Es sei bemerkt, dass der Durchschnitt einer nichtleeren Familie von Nachfolgermengen wieder eine Nachfolgermenge ist.

Axiom 7.

$$\exists A : (\emptyset \in A \wedge \forall B : (B \in A \Rightarrow \{B\} \cup B \in A))$$

Bemerkung 1.13. Die Menge A kann größer sein als gewünscht. Für den strengen Beweis, dass die kleinste dieser Mengen existiert (das ist die Menge der natürlichen Zahlen), die wir im Folgenden mit ω bezeichnen, sei auf [1, Seite 61] verwiesen.

1.8 Auswahlaxiom

Da das Auswahlaxiom teilweise kontraintuitive Folgerungen liefert (hier sei im Besonderen das Banach-Tarski Paradoxon erwähnt), wird oft versucht den Beweis von Aussagen ohne dem Axiom zu führen. Das Axiom kann in verschiedenen Weisen formuliert werden, für die von uns gewählte Formulierung benötigen wir zunächst einige Definitionen. Zum Beispiel kann eine gewisse Reihenfolge von Elementen von Interesse sein. Aus dem Extensionalitätsaxiom erkennen wir aber, dass die Elemente einer Menge keine Reihenfolge haben. Abhilfe schaffen die sogenannten geordneten Paare.

Definition 1.14. Die Menge $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ wird mit (a, b) notiert und als *geordnetes Paar* bezeichnet.

Bemerkung 1.15. (a, b) ist tatsächlich eine Menge wenn a und b Mengen sind. Denn dann folgt nach dem Paarbildungsaxiom und Bemerkung 1.6, dass $\{a, b\}$ und $\{a\}$ Mengen sind. Nochmalige Anwendung des Paarbildungsaxioms liefert dann die gewünschte Menge. Man sieht leicht, dass gilt:

$$(a, b) = (x, y) \Leftrightarrow a = x \wedge b = y.$$

Definition 1.16. Für Mengen A und B heißt die Menge $\{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$ das kartesische Produkt von A und B und wird mit $A \times B$ notiert.

Bemerkung 1.17. $A \times B$ ist tatsächlich eine Menge, denn klarerweise gilt $\forall a \in A, b \in B : \{a\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$ und $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$ und daher $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Somit ist $A \times B$ jene Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ die mittels des Aussonderungsaxioms mit der in der Definition angegebenen Bedingung gebildet wird.

Um das kartesische Produkt auf mehr Mengen verallgemeinern zu können, benötigen wir zuerst die aufeinander aufbauenden Begriffe Relation, Funktion und Familie.

Definition 1.18. Eine *Relation* R ist eine Menge von geordneten Paaren. Für $(x, y) \in R$ schreibt man auch xRy . Man spricht von einer Relation auf einer Menge X , wenn $\forall (x, y) \in R : x \in X \wedge y \in X$.

Definition 1.19. Seien X und Y zwei Mengen. Eine *Funktion* f von X nach Y ist eine Relation für die gilt:

$$\forall x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in f \wedge ((x, z) \in f \Rightarrow y = z)$$

Außerdem soll f keine „unnötigen“ geordneten Paare beinhalten, also

$$\nexists (x, y) \in f : x \notin X.$$

Die Menge $\{y : \exists (x, y) \in f\}$ wird *Bildmenge* oder *Wertebereich* genannt und mit $f(X)$ oder $\text{ran}(f)$ notiert. Die Elemente der Bildmenge nennt man *Bilder*. Eine Funktion heißt *injektiv*, wenn für jedes $y \in f(X)$ höchstens ein $x \in X$ gibt mit $(x, y) \in f$. Eine Funktion heißt *surjektiv*, wenn es für jedes $y \in f(X)$ mindestens ein $x \in X$ gibt mit $(x, y) \in f$. Schließlich heißt f *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Bemerkung 1.20. Funktionen sind tatsächlich Mengen, denn für alle Paare gilt $(x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))$, der Beweis funktioniert wie in Bemerkung 1.17. Auch die Bildmenge ist aufgrund des Aussonderungsaxioms tatsächlich eine Menge.

Definition 1.21. Sei x eine Funktion von I nach X . Statt $x(i)$ schreiben wir auch x_i und statt der Funktion x schreibt man auch $(x_i)_{i \in I}$ und bezeichnet sie als *Familie*. Die Menge I heißt auch *Indexmenge*.

Sind die Bilder von x Mengen, so spricht man auch von einer *Mengenfamilie*.

Definition 1.22. Das *kartesische Produkt* oder auch *Kreuzprodukt* der Mengenfamilie $(X_i)_{i \in I}$ ist die Menge

$$\{(x_i)_{i \in I} : x_i \in X_i \forall i \in I\}$$

und wird mit $\prod_{i \in I} X_i$ notiert.

Sind alle X_i gleich einem X , dann schreibt man auch X^I .

Bemerkung 1.23. Da nach Bemerkung 1.20 Funktionen Mengen sind, sind auch Familien und im Speziellen Mengenfamilien Mengen. Nach dem Aussonderungssaxiom ist also auch das kartesische Produkt eine Menge. Dass diese nichtleer ist, sichert erst das nun folgende Auswahlaxiom.

Axiom 8. Sei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und es gelte $X_i \neq \emptyset \forall i \in I$. Dann gilt $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.

In Worten: Das kartesische Produkt einer nichtleeren Familie nichtleerer Mengen ist nichtleer.

1.9 Ersetzungsaxiom

Wir haben bereits gesehen, dass wir mit Hilfe des Unendlichkeitsaxioms sehr weit zählen können, nämlich in etwas, das wir mit den natürlichen Zahlen unseres Verständnisses gleichsetzen können. Das Ersetzungsaxiom gewährleistet, dass man sogar noch weiter zählen kann.

Axiom 9. Sei A eine Menge und $S(a, b)$ eine Aussage, sodass $\{b : S(a, b)\}$ für alle $a \in A$ gebildet werden kann. Dann existiert eine Funktion F mit Definitionsbereich A , sodass $F(a) = \{b : S(a, b)\} \forall a \in A$.

Bemerkung 1.24. Mit Hilfe des Ersetzungsaxioms kann jetzt zum Beispiel die Menge, die die Elemente $0, 1, \dots, \omega, \omega^+, (\omega^+)^+, \dots$ enthält (diese Menge wird mit $\omega * 2$ bezeichnet), gebildet werden:

Für jedes $n \in \omega$ kann man die rekursiv definierte Funktion

$$f_n(0) = \omega \text{ und } f_n(m^+) = (f_n(m))^+ \forall m^+ < n$$

erzeugen. Sei nun $S(n, x)$ die Aussage „ $n \in \omega \wedge x \in \text{ran}(f_n)$ “. Somit ist die Voraussetzung des Ersetzungsaxioms für $A = \omega$ erfüllt, und $\omega \cup \text{ran}(F) = \omega * 2$.

Nun kann so fortgesetzt werden und die Mengen $\omega * 3, \omega * 4, \dots$ konstruiert werden. Diese Folge kann wieder verwendet werden um ω^2 zu konstruieren. Weiter erhalten wir so $\omega^\omega, \omega^{(\omega^\omega)}, \dots$. Aus dieser Folge erhalten wir dann ϵ_0 , das Prozedere kann beliebig weitergeführt werden.

1.10 Weitere Definitionen

Definition 1.25. Sei R eine Relation auf einer Menge X . R heißt

1. *transitiv*, wenn gilt $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
2. *reflexiv*, wenn gilt $xRx \forall x \in X$
3. *antisymmetrisch*, wenn gilt $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
4. *total*, wenn gilt $\forall x, y \in X : xRy \vee yRx$

Eine transitive und reflexive Relation heißt *Semiordnung* auf X . Eine antisymmetrische Semiordnung auf X heißt *Halbordnung* auf X . Eine totale Halbordnung heißt *Totalordnung*.

Ist R eine Semiordnung auf X und $A \subseteq X$, so heißt $x \in A$ *minimales Element* oder *Minimum* von A , wenn $xRy \forall y \in A$ gilt. Ähnlich heißt ein $z \in X$ *untere Schranke* von A , wenn $zRy \forall y \in A$. Analog definiert man *maximales Element* (*Maximum*) und *obere Schranke* falls $yRx \forall y \in A$ bzw. $yRz \forall y \in A$. Ist R eine Totalordnung und hat jede nichtleere Teilmenge von X ein minimales Element, so heißt R Wohlordnung auf X .

Sei \triangleleft eine Totalordnung auf einer Menge X und \leq eine Totalordnung auf einer Menge Y . X und Y heißen *ähnlich*, wenn eine Bijektion f existiert, sodass $x \triangleleft y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$ für alle $x, y \in X$ gilt.

Bemerkung 1.26. Nicht jede Menge hat ein minimales Element, man betrachte zum Beispiel das offene Intervall $(0, 1)$ versehen mit der üblichen \leq -Relation.

Definition 1.27. Eine *Ordinalzahl* α ist eine Menge mit einer Wohlordnung $<$ mit der Eigenschaft, dass $\forall \zeta \in \alpha : \{\eta \in \alpha : \eta < \zeta\} = \zeta$.

Eine Ordinalzahl $\alpha \neq 0$, für die eine Ordinalzahl $\beta \in \alpha$ existiert, die $\alpha = \beta^+$ erfüllt (siehe 1.1, heißt *Nachfolgerzahl*, ansonsten *Limeszahl* oder *Grenzzahl*.

Bemerkung 1.28. Man sieht leicht ein, dass alle Elemente von ω , also auch ω selbst und die in Bemerkung 1.24 gebildeten Mengen Ordinalzahlen sind, die mit \in wohlgeordnet sind. Dabei sind zum Beispiel $\omega, \omega * 2, \omega^2$ Limeszahlen, hingegen $\omega^+, (\omega * 2)^+, (\omega^2)^+$ Nachfolgerzahlen.

2 Wichtige Ergebnisse aus der Mengenlehre

Satz 2.1 (Wohlordnungssatz). Jede Menge X kann wohlgeordnet werden.

BEWEIS : Siehe [1, Seite 88] □

Bemerkung 2.2. Obwohl weniger intuitiv (man kann zum Beispiel keine Wohlordnung auf \mathbb{R} konstruieren, der Satz liefert nur die Existenz), ist der Wohlordnungssatz äquivalent zum Auswahlaxiom.

Satz 2.3 (Abzählungssatz). Jede wohlgeordnete Menge ist zu genau einer Ordinalzahl ähnlich.

BEWEIS : Siehe [1, Seite 102] □

Bemerkung 2.4. Um die Größe von unendlichen Mengen anzugeben sind Ordinalzahlen jedoch nicht geeignet, viel mehr messen sie die Wohlordnung auf der Menge. Beispielsweise ist ω mit der Wohlordnung „ \in “ klarerweise ähnlich zu ω . Wählt man aber die Wohlordnung, die die „0“ hinten anstellt, so ist ω mit dieser Wohlordnung ähnlich zu ω^+ .

Definition 2.5. Eine Menge X heißt *gleichmächtig* zu einer Menge Y , wenn es eine Bijektion $f : X \mapsto Y$ gibt. Man schreibt dann $X \sim Y$. Ist X gleichmächtig zu einer Teilmenge von Y , so nennt man Y *mächtiger* als X und notiert dies mit $X \lesssim Y$. Gilt $X \lesssim Y$ aber nicht $Y \lesssim X$, so heißt Y *echt mächtiger* als X , wir notieren das mit $X \prec Y$. Dass diese Definition sinnvoll ist, zeigt der folgende Satz.

Satz 2.6 (Schröder-Bernsteinscher Satz). Aus $X \lesssim Y \wedge Y \lesssim X$ folgt bereits $X \sim Y$.

BEWEIS : Siehe [1, Seite 111] □

Satz 2.7 (Cantorsche Satz). Für jede Menge X gilt $X \prec \mathcal{P}(X)$.

BEWEIS : Siehe [1, Seite 116] □

Bemerkung 2.8. Insbesondere gilt für zwei Mengen X und Y immer $X \lesssim Y$ oder $Y \lesssim X$. Man kann diese ja nach Satz 2.1 wohlordnen und dann die nach Satz 2.3 ähnlichen Ordinalzahlen α und β miteinander vergleichen. Aus $\alpha < \beta$ folgt dann auch $X \lesssim Y$ (allerdings wie in Bemerkung 2.4 gezeigt nicht $X \prec Y$). Im Allgemeinen ist eine Menge zu vielen Ordinalzahlen gleichmächtig. Wir müssen also eine ausgezeichnete Ordinalzahl wählen.

Definition 2.9. Die kleinste zu einer Menge X gleichmächtigen Ordinalzahl heißt Kardinalzahl von X und wird mit $\text{card}(x)$ notiert.

Bemerkung 2.10. Wir wissen, dass es mindestens eine gleichmächtige Ordinalzahl gibt, doch dass es eine kleinste gibt, ist a priori nicht klar. Dazu zeigen wir zuerst, dass die Menge $M := \{\alpha : X \sim \alpha \wedge \alpha \text{ ist Ordinalzahl}\}$ existiert. Wir kennen bereits eine größere Ordinalzahl als die zu X mit beliebiger Wohlordnung ähnlichen, nämlich die zu $\mathcal{P}(X)$ mit beliebiger Wohlordnung ähnliche Ordinalzahl. Daher ist $\{\alpha : \alpha \lesssim X \wedge \alpha \text{ ist Ordinalzahl}\}$ eine Menge. Nach dem Aussonderungsaxiom ist also auch M eine Menge. Nach Bemerkung 2.8 ist M nichtleer. Auf M existiert auch eine natürliche Wohlordnung, nämlich \in , die ja für alle Ordinalzahlen eine Wohlordnung ist. Nach Definition der Wohlordnung existiert ein minimales Element, nämlich genau die gesuchte kleinste, zu X gleichmächtige Ordinalzahl.

Definition 2.11. Eine Menge X heißt *abzählbar*, wenn gilt $X \lesssim \omega$. Sie heißt *unendlich*, wenn gilt $\omega \lesssim X$. Sie heißt *abzählbar unendlich* wenn X abzählbar und unendlich ist, also $\omega \sim X$.

Satz 2.12. Sei I eine abzählbare Indexmenge und gelte $\forall i \in I : A_i$ ist abzählbar. Dann ist auch $\bigcup_{i \in I} A_i$ abzählbar.

BEWEIS : Siehe [1, Seite 115] □

Korollar 2.13. Sei I eine abzählbare Indexmenge und gelte $\forall i \in I : \alpha_i$ ist eine abzählbare Ordinalzahl. Dann existiert eine abzählbare Ordinalzahl β mit $\alpha_i < \beta \forall i \in I$.

BEWEIS : $\beta = (\bigcup_{i \in I} \alpha_i)^+$ erfüllt das Gewünschte. □

Korollar 2.14. Seien X, Y abzählbare Mengen. Dann ist $X \times Y$ abzählbar.

BEWEIS : $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\} = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times Y$ □

Bemerkung 2.15. Die kleinste nicht abzählbare Ordinalzahl wird mit Ω notiert. Dass Ω wohldefiniert ist, wird wie die Wohldefiniertheit der Kardinalzahlen gezeigt. die Kardinalzahl von ω wird gewöhnlich mit \aleph_0 und die von Ω mit \aleph_1 bezeichnet.

3 Topologie

3.1 Allgemeine Definitionen

Definition 3.1. Ein *topologischer Raum* ist ein Paar (X, τ) bestehend aus einer Menge X und einer Menge von Teilmengen τ von X , die folgende Bedingungen erfüllt:

- (i) Sei I eine beliebige Indexmenge und gelte $O_i \in \tau \forall i \in I$, dann folgt, dass auch $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$.
- (ii) Sei J eine endliche Indexmenge und gelte $O_j \in \tau \forall j \in J$, dann folgt, dass auch $\bigcap_{j \in J} O_j \in \tau$.
- (iii) $X \in \tau, \emptyset \in \tau$.

τ nennt man dann eine *Topologie* auf X , die Elemente von τ nennt man auch *offene Mengen*.

Sind τ_1 und τ_2 zwei Topologien auf X , so nennt man τ_1 *feiner* als τ_2 , wenn gilt $\tau_1 \supseteq \tau_2$, in diesem Fall nennt man τ_2 auch *gröber* als τ_1 .

Eine Menge C nennt man *abgeschlossen* (bezüglich der Topologie τ), falls gilt $C^c \in \tau$.

Sei $A \subseteq X$. Man nennt N_A *Umgebung* von A , wenn es eine Menge $O \in \tau$ gibt, die $A \subseteq O \subseteq N_A$ erfüllt. Oft ist A einelementig $A = \{x\}$, dann spricht man auch von einer *Umgebung* von x .

Eine *Subbasis* \mathcal{S} einer Topologie τ ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$, für die gilt, dass τ die größte Topologie ist, die \mathcal{S} enthält. Eine *Basis* \mathcal{B} einer Topologie τ ist eine Subbasis der Topologie τ , die (endlich) durchschnittsstabil ist, für die also gilt $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{B} \forall n \in \mathbb{N}$.

Eine *Umgebungsbasis* $\mathcal{U}(x)$ von $x \in X$ bezüglich τ ist eine Menge von Umgebungen von x , für die gilt: $O \in \tau \wedge x \in O \Rightarrow \exists N_O \in \mathcal{U}(x) : N_O \subseteq O$, jede offene Umgebung von x enthält also eine Menge aus der Umgebungsbasis.

Als *Abschluss* \overline{A}^τ der Menge A bezüglich τ bezeichnet man die kleinste abgeschlossene Obermenge von A . Diese kann geschrieben werden als $\bigcap_{C \in \tau: C \supseteq A} C$. Ist klar, bezüglich welcher Topologie der Abschluss zu verstehen ist, so schreibt man auch einfach \overline{A} . Als *Inneres* der Menge A bezeichnet man die größte offene Teilmenge von A . Sie wird mit A° notiert und kann analog zum Abschluss als $\bigcup_{O \in \tau: O \subseteq A} O$ angeschrieben werden.

Eine *offene Überdeckung* von $A \subseteq X$ ist eine Familie $(O_i)_{i \in I} : O_i \in \tau \forall i \in I$ und $\bigcup_{i \in I} O_i \supseteq A$.

Eine F_σ -Menge ist eine Menge, die als abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen geschrieben werden kann. Eine G_δ -Menge ist eine

Menge, die als abzählbarer Durchschnitt offener Mengen geschrieben werden kann.

Sei wieder τ eine Topologie auf einer Menge X und sei $Y \subseteq X$. Die Topologie $\tau|_Y = \{O \cap Y : O \in \tau\}$ heißt *Spurtopologie* von τ auf Y , oder die *von Y induzierte Topologie*. Eine Eigenschaft heißt *vererblich*, wenn sie, falls sie für (X, τ) gilt, auch für alle $\tau|_Y$ gilt, wobei $Y \subseteq X$ beliebig.

A und B heißen *disjunkt*, wenn $A \cap B = \emptyset$. Zwei Mengen A und B heißen *getrennt*, wenn $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. (X, τ) heißt *zusammenhängend*, wenn X nicht als Vereinigung von zwei getrennten Mengen geschrieben werden kann. A heißt *dicht in B* , wenn $\overline{A} = B$. A heißt *nirgends dicht*, wenn es keine nicht-leere Menge $B \in \tau$ gibt mit $B \subset \overline{A}$. C heißt *von erster Kategorie*, wenn C die Vereinigung von abzählbar vielen nirgends dichten Mengen ist und sonst *von zweiter Kategorie*.

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *separiert*, wenn X eine abzählbare dichte Teilmenge hat. (X, τ) erfüllt das *2. Abzählbarkeitsaxiom*, wenn er eine abzählbare Basis hat. Ein topologische Raum erfüllt das *1. Abzählbarkeitsaxiom*, wenn für jeden Punkt $p \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ existiert, das heißt für jede Umgebung N von p ein $i \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $U_i \subseteq N$.

Eine Funktion $f : (X, \tau) \mapsto (Y, \gamma)$ heißt *stetig*, wenn $f^{-1}(O) \in \tau \forall O \in \gamma$.

Lemma 3.2. Gegeben sei eine Funktion $f : (X, \tau) \mapsto (Y, \gamma)$. Es sind äquivalent:

- (i) f ist stetig.
- (ii) $f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen in τ für alle in γ abgeschlossenen A .
- (iii) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \forall A \subseteq X$.
- (iv) $\forall x \in X$ und für alle Umgebungen N von $f(x)$ existiert eine Umgebung U von x gibt mit $f(U) \subseteq N$.

BEWEIS : Siehe [2, Seite 143] □

Definition 3.3. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $B \subseteq X$. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von B , wenn

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) : (B \setminus \{x\}) \cap U \neq \emptyset$$

Die Menge aller Häufungspunkte von B wird mit B' bezeichnet. Gilt sogar $|(B \setminus \{x\}) \cap U| \geq \aleph_0$, so heißt x *ω -Häufungspunkt* von B .

Lemma 3.4. Sei X eine Menge und τ eine Topologie darauf. Für alle $A \subseteq X$ gilt $A' \cup A = \overline{A}$.

BEWEIS : Sei $x \in \overline{A}$. Angenommen x ist kein Häufungspunkt von A , also $\exists O \in \tau : x \in O \wedge O \cap A = \emptyset$. Dann ist auch $C := O^c \cap \overline{A}$ abgeschlossene Obermenge von A . Und da $x \notin C$ wäre sie echt kleiner als \overline{A} , ein Widerspruch zur Definition.

Sei $x \notin \overline{A}$. Also $\exists C^c \in \tau : A \subseteq C \wedge x \notin C$. Also gilt für $O = C^c : O \in \tau \wedge O \cap A = \emptyset \wedge x \in O$. Daher ist x kein Häufungspunkt von A . \square

Definition 3.5. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Ein Punkt $x \in X$ heißt *Grenzwert der Folge* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wenn gilt:

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) : \exists i \in \mathbb{N} : x_j \in U \quad \forall j \geq i$$

Ähnlich heißt $x \in X$ *Häufungspunkt der Folge* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wenn gilt:

$\forall U \in \mathcal{U}(x)$: Es liegen unendlich viele Folgenglieder in U .

Bemerkung 3.6. Wenn man die Menge der Folgenglieder einer Folge bildet, so stimmen die Definitionen von Häufungspunkt der Folge und Häufungspunkt eben dieser Menge nicht überein. Man zeigt leicht, wenn ein Punkt ω -Häufungspunkt der Menge ist, so ist er Häufungspunkt der Folge. Wenn ein Punkt Häufungspunkt der Folge ist, so ist er entweder ω -Häufungspunkt der Menge oder er tritt unendlich oft als Folgenglied auf.

3.2 Trennungsaxiome

Definition 3.7. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

Er heißt *T0*, wenn gilt:

$$\forall x \neq y \in X : \exists O \in \tau : (x \in O \wedge y \notin O) \vee (y \in O \wedge x \notin O)$$

Er heißt *T1*, wenn gilt:

$$\forall x \neq y \in X : (\exists O_x \in \tau : x \in O_x \wedge y \notin O_x) \wedge (\exists O_y \in \tau : y \in O_y \wedge x \notin O_y)$$

Er heißt *T2* oder auch *hausdorffsch*, wenn gilt:

$$\forall x \neq y \in X : (\exists O_x, O_y \in \tau : x \in O_x \wedge y \in O_y \wedge O_x \cap O_y = \emptyset)$$

Er heißt *T3*, wenn für jede abgeschlossene Menge A und jeden beliebigen Punkt $p \notin A$ gilt:

$$\exists O_A, O_p \in \tau : p \in O_p \wedge A \subseteq O_A \wedge O_A \cap O_p = \emptyset$$

Er heißt T_4 , wenn für zwei disjunkte abgeschlossene Mengen A und B gilt:

$$\exists O_A, O_B \in \tau : B \subseteq O_B \wedge A \subseteq O_A \wedge O_x \cap O_y = \emptyset$$

Er heißt T_5 , wenn für zwei getrennte Mengen A und B gilt:

$$\exists O_A, O_B \in \tau : B \subseteq O_B \wedge A \subseteq O_A \wedge O_x \cap O_y = \emptyset$$

Ein topologischer Raum heißt *regulär*, wenn er T_1 und T_3 ist, *normal*, wenn er T_1 und T_4 ist und *vollständig normal*, wenn er T_1 und T_5 ist. Ein normaler Raum, in dem jede abgeschlossene Menge eine G_δ -Menge ist, heißt *perfekt normal*.

Lemma 3.8. Es gilt:

- (i) In einem T_1 - Raum gilt für alle $x \in X$, dass $\{x\}$ abgeschlossen ist.
- (ii) $T_5 \Rightarrow T_4$
- (iii) perfekt normal \Rightarrow vollständig normal \Rightarrow normal \Rightarrow regulär $\Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$

BEWEIS :

- (i) Es gilt $\forall y \neq x \in X : \exists O_y : x \notin O_y \wedge y \in O_y$. Also $\{x\} = (\bigcup_{x \neq y \in X} O_y)^c$.
- (ii) trivial
- (iii) Die Implikationen $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ sind trivial.
Wegen (i) gelten klarerweise normal \Rightarrow regulär $\Rightarrow T_2$.
Wegen (ii) gilt vollständig normal \Rightarrow normal.
perfekt normal \Rightarrow vollständig normal: siehe [5]

□

Bemerkung 3.9. Die Definitionen insbesondere von T_4 , regulär und T_5 sind in der Literatur nicht eindeutig, die hier getroffene Konvention bezieht sich auf Counterexamples in Topology von Steen und Seebach [5]. Man kann auch zeigen, dass bereits T_0+T_3 schon T_2 impliziert, man kann regulär also auch als T_0+T_3 definieren.

3.3 Globale Kompaktheitseigenschaften

Hier werden verschiedene Formen von Kompaktheit definiert, die sich jeweils auf ganz X beziehen.

Definition 3.10. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung hat.

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *σ -kompakt*, wenn X Vereinigung höchstens abzählbar vieler in τ kompakter Mengen ist.

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *Lindelöf*, wenn jede offene Überdeckung von X eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt.

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *abzählbar kompakt*, wenn jede abzählbare offene Überdeckung $\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von X eine endliche Teilüberdeckung hat.

Bemerkung 3.11. Offensichtlich gilt: kompakt \Rightarrow σ -kompakt \Rightarrow Lindelöf sowie kompakt \Rightarrow abzählbar kompakt. Die Umkehrungen gelten im Allgemeinen nicht. Allerdings gilt kompakt \Leftrightarrow abzählbar kompakt + Lindelöf, wie leicht einzusehen ist. Erfüllt ein Raum das 2. Abzählbarkeitsaxiom, so ist er auch Lindelöf.

Lemma 3.12. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) A ist kompakt.
- (ii) $(A, \tau|_A)$ ist kompakt.
- (iii) Jede Familie bezüglich $\tau|_A$ abgeschlossener Teilmengen von A bei der jede endliche Teilfamilie nichtleeren Schnitt hat, hat nichtleeren Schnitt.

BEWEIS : Siehe [2, Seite 157]. □

Lemma 3.13. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) (X, τ) ist abzählbar kompakt.
- (ii) Jede abzählbar unendliche Menge hat einen ω - Häufungspunkt in X .
- (iii) Jede Folge hat einen Häufungspunkt in X .
- (iv) Jede abzählbare Familie abgeschlossener Mengen mit leerem Durchschnitt hat eine endliche Teilfamilie mit leerem Durchschnitt.

BEWEIS : (i) \Rightarrow (iv):

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie abgeschlossener Mengen mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Also $X \setminus (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = X$. Nach De Morgans Regel gilt $X = X \setminus (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = X \cap (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n)^c = X \cap (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c$.

Also ist $(A_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare offene Überdeckung von X .

Nach Voraussetzung existieren i_1, \dots, i_n , sodass $(A_{i_j}^c)_{j=1, \dots, n}$ bereits X überdeckt. Damit muss aber schon $\bigcap_{j=1}^n A_{i_j} = \emptyset$ gelten.

(iv) \Rightarrow (i):

Sei $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie offener Mengen mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n = X$.

Also $\emptyset = X \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n^c$. Nach Voraussetzung existieren i_1, \dots, i_n , sodass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (O_{i_j}^c)_{j=1, \dots, n} = \emptyset$. Damit muss aber schon $\bigcup_{j=1}^n O_{i_j} = X$ gelten.

(ii) \Rightarrow (iii):

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Sind alle bis auf endlich viele Folgenglieder gleich x , so ist x bereits Häufungspunkt. Andernfalls ist die Menge der Folgenglieder $\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ unendlich und hat nach Voraussetzung einen ω -Häufungspunkt in X . Es sind also in jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ unendlich viele Folgenglieder.

(iii) \Rightarrow (ii):

Sei eine abzählbar unendliche Menge gegeben. Wir fassen die Menge als Folge auf (in der jedes Element nur einmal vorkommt). Nach Voraussetzung hat diese Folge einen Häufungspunkt und nach Bemerkung 2.4 folgt, dass der Häufungspunkt der Folge auch ω -Häufungspunkt der Menge ist.

(ii) \Rightarrow (i):

Sei $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie offener Mengen mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n = X$. Angenommen $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hätte keine endliche Teilüberdeckung. Wir können also eine Folge mit disjunkten Folgengliedern $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so konstruieren, dass gilt: $x_n \notin \bigcup_{i=1}^n O_i$. Diese Folge kann keinen Häufungspunkt besitzen, da es für jeden Punkt x in X eine offene Menge der Familie gibt (oBdA O_k), sodass $x \in O_k$. Die Folge ist jedoch so konstruiert, dass nur $k-1$ Folgenglieder in O_k liegen können. Wir haben für alle x in X eine Umgebung gefunden sodass nur endlich viele Folgenglieder in dieser Umgebung liegen. Daher muss $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzen.

(i) \Rightarrow (ii):

Sei $S \subseteq X$ eine abzählbar unendliche Menge ohne ω -Häufungspunkt. Also gilt $\forall x \in X : \exists O_x : |O_x \cap S| < \aleph_0$. Sei \mathcal{F} die Menge aller endlichen Teilmengen von S . \mathcal{F} ist also abzählbar.

Wir definieren für $F \in \mathcal{F}$ $O_F := \bigcup \{O_x \mid O_x \cap S = F\}$.

Somit ist O_F eine abzählbare Überdeckung von S , da ja jedes Element x aus S in einem O_x enthalten ist und damit auch in $O_{O_x \cap S}$. Nun enthält jede end-

liche Vereinigung der O_F nach Konstruktion nur endlich viele Punkte aus S , was der Voraussetzung widerspricht. Da S beliebig war hat jede unendliche Menge einen ω - Häufungspunkt. \square

Definition 3.14. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

(X, τ) heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

(X, τ) heißt *schwach abzählbar kompakt*, wenn jede unendliche Menge einen Häufungspunkt hat.

(X, τ) heißt *pseudokompakt*, wenn jede stetige reellwertige Funktion beschränkt ist.

Bemerkung 3.15. Es gilt „ X abzählbar kompakt $\Rightarrow X$ pseudokompakt“. Dies sieht man ein, wenn man die Mengen $S_n := \{x \in X \mid |f(x)| < n\}$ betrachtet, wobei f eine stetige reellwertige Funktion ist. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also eine abzählbare Überdeckung von X für die es nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung S_{i_1}, \dots, S_{i_k} gibt. Somit ist f durch $\max\{i_1, \dots, i_k\}$ beschränkt.

Da überabzählbare Mengen abzählbare Teilmengen enthalten ist schwach abzählbar kompakt äquivalent dazu, dass jede unendliche Menge einen Häufungspunkt hat. Die selbe Argumentation zeigt auch, dass abzählbar kompakt äquivalent zu „jede unendliche Menge hat einen ω -Häufungspunkt in X “ ist. Folgenkompaktheit und schwache Kompaktheit sind mit abzählbarer Kompaktheit eng verwandt. Da der Grenzwert einer Teilfolge immer Häufungspunkt und weiters jeder ω -Häufungspunkt auch Häufungspunkt ist, gilt folgenkompakt \Rightarrow abzählbar kompakt \Rightarrow schwach abzählbar kompakt.

Im Allgemeinen gelten die Umkehrungen nicht, es gilt jedoch folgendes Lemma.

Lemma 3.16. Sei (X, τ) ein T1-Raum, dann gilt:

(X, τ) abzählbar kompakt $\Leftrightarrow (X, \tau)$ schwach abzählbar kompakt

BEWEIS : Es bleibt die Implikation „ (X, τ) schwach abzählbar kompakter T1-Raum $\Rightarrow (X, \tau)$ abzählbar kompakt“ zu zeigen:

Sei A eine abzählbar unendliche Menge in X . Nach Voraussetzung hat A einen Häufungspunkt x . Wir müssen also zeigen, dass x auch ω - Häufungspunkt von A ist.

Angenommen x wäre kein ω - Häufungspunkt von A . Es existiert also ein $O_x \in \mathcal{O}_X$ mit $x \in O_x$ sodass nur endlich viele Punkte von A in O_x liegen, seien diese Punkte $\{x_1, \dots, x_n\}$. Aufgrund der T1-Eigenschaft existieren offene Mengen O_{x_1}, \dots, O_{x_n} mit $x \in O_{x_i} \wedge x_i \notin O_{x_i} \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Somit ist $\bigcap_{i=1}^n O_{x_i}$

offen und nur x liegt im Schnitt dieser Menge mit A . Somit ist x aber kein Häufungspunkt von A . \square

Lemma 3.17. Ein topologischer Raum (X, τ) , der abzählbar kompakt ist und das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist folgenkompakt.

BEWEIS : Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Nach Lemma 3.13 hat diese einen Häufungspunkt $p \in X$. Sei $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von p (die wegen dem 1. Abzählbarkeitsaxiom existiert). Wir definieren jetzt induktiv eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die gegen p konvergiert.

Sei n_0 so, dass $x_{n_0} \in O_0$. Für $j \geq 1$ definiere n_j so, dass $x_{n_j} \in \bigcap_{l=0}^j O_l$ und $n_j \geq n_{j-1}$. Diese existieren, da in jeder offenen Umgebung von p unendlich viele Folgenglieder liegen müssen. Die Teilfolge $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen p , da $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis ist und daher für jede beliebige Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $i \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $O_i \subseteq U$. Daher gilt dann auch $\bigcap_{l=0}^j O_l \subseteq U$ für alle $j \geq i$. Und daher weiter $x_j \in U \forall j \geq i$. \square

Das folgende Diagramm fasst die Ergebnisse zusammen:

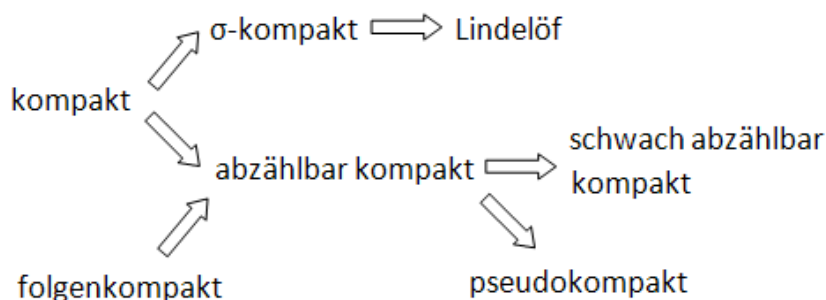


Abbildung 1: Zusammenhänge bei globalen Kompaktheitseigenschaften

3.4 Lokale Kompaktheitseigenschaften

Wir betrachten nun Formen der Kompaktheit, die sich nicht auf ganz X beziehen.

Definition 3.18. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt in X eine kompakte Umgebung besitzt.

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *stark lokal kompakt*, wenn jeder Punkt in X eine offene Umgebung besitzt deren Abschluss in einer kompakten Menge enthalten ist.

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt σ -*lokal kompakt*, wenn (X, τ) σ -kompakt und lokal kompakt ist.

Bemerkung 3.19. Da der Abschluss bezüglich τ jeder Teilmenge von X in X enthalten ist, folgt aus kompakt stark lokal kompakt. Aus stark lokal kompakt folgt klarerweise auch lokal kompakt. Trivialer Weise folgt auch aus σ -lokal kompakt die lokale Kompaktheit.

Für σ -lokal kompakt reicht es Lindelöf und lokal kompakt zu fordern. Aus der lokalen Kompaktheit folgt, dass es für alle $x \in X$ eine kompakte Umgebung K_x gibt. Die K_x° überdecken ganz X . Wegen Lindelöf gibt es also abzählbar viele $(K_{x_i}^\circ)_{i \in \mathbb{N}}$ die schon ganz X überdecken. Also ist X Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen $(K_{x_i})_{i \in \mathbb{N}}$.

In Hausdorff-Räumen ist stark lokal kompakt zu lokal kompakt äquivalent, da dort kompakte Mengen abgeschlossen sind. Somit ist gewährleistet, dass der Abschluss des Inneren einer kompakten Menge wieder in der kompakten Menge enthalten ist.

Die gezeigten Zusammenhänge der lokalen Kompaktheitseigenschaften werden in folgendem Diagramm zusammengefasst:

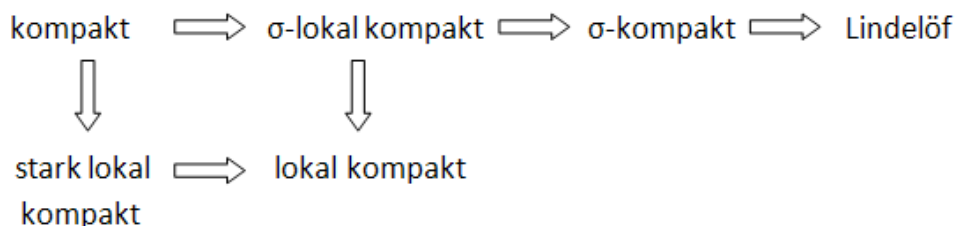


Abbildung 2: Zusammenhänge bei lokalen Kompaktheitseigenschaften

Definition 3.20. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

Sind $(O_i)_{i \in I}$ und $(D_k)_{k \in K}$ zwei Überdeckungen von X , so heißt $(D_k)_{k \in K}$ *feiner* als $(O_i)_{i \in I}$, wenn es zu jedem $k \in K$ einen Index $i \in I$ gibt, so dass $D_k \subset O_i$ gilt.

Das Mengensystem $(D_k)_{k \in K}$ wird dann *Verfeinerung* von $(O_i)_{i \in I}$ genannt.

Eine Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ von X heißt *punktendlich*, wenn jeder Punkt $p \in X$ nur in endlich vielen O_i liegt.

Eine Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ von X heißt *lokalendlich*, wenn es für jeden Punkt $p \in X$ eine Umgebung $U_p \in \mathcal{U}(p)$ gibt, die nur mit endlich vielen O_i nicht-leeren Schnitt hat.

Eine Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ von X heißt *irreduzibel*, wenn gilt: $\nexists i_0 \in I : (O_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ ist Überdeckung von X . Man kann aus der Überdeckung also kein Element entfernen ohne die Überdeckungseigenschaft zu verlieren.

Eine σ -*lokalendliche Basis* ist eine Basis, die aus einer abzählbaren Vereinigung von lokalendlichen Familien besteht.

Definition 3.21. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

(X, τ) heißt *parakompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine offene lokalendliche Verfeinerung hat.

(X, τ) heißt *metakompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine offene punktendliche Verfeinerung hat.

Bemerkung 3.22. klarerweise impliziert lokalendlich bereits punktendlich. Daher gilt auch parakompakt \Rightarrow metakompakt.

Ein kompakter topologischer Raum (X, τ) ist parakompakt: Jede offene Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ hat eine endliche Teilüberdeckung $(O_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$. Diese ist bereits eine lokalendliche Verfeinerung.

Diesen Sachverhalt kann man auch anders einsehen. Wir zeigen jetzt eine zu Kompaktheit äquivalente Definition:

Wenn jede offene Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ von X eine offene punktendliche Teilüberdeckung hat, ist X kompakt:

Sei O_{i_0} eine nichtleere Menge der offenen Überdeckung. Wir definieren eine weitere offene Überdeckung $U_i := O_i \cup O_{i_0}$. Sei $x \in O_{i_0}$, dann ist nach Konstruktion $x \in U_i \forall i \in I$. Nach Voraussetzung hat U_i eine punktendliche Teilüberdeckung, speziell liegt x nur in endlich vielen $U_{i_j}, j \in \{1, \dots, n\}$. Somit ist aber $(O_i)_{i \in \{0, 1, \dots, n\}}$ eine endliche Teilüberdeckung.

Die Umkehrungen der Implikationen gelten im Allgemeinen nicht, allerdings gilt folgendes Lemma:

Lemma 3.23. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Es gelten:

- (i) Ist (X, τ) abzählbar kompakt und metakompakt $\Leftrightarrow (X, \tau)$ ist kompakt.
- (ii) Ist (X, τ) abzählbar kompakt und parakompakt $\Leftrightarrow (X, \tau)$ ist kompakt.

BEWEIS : Da (i) schon (ii) impliziert, reicht es (i) zu zeigen:

Sei (X, τ) abzählbar kompakt und metakompakt und $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Sei weiters $(U_k)_{k \in K}$ eine offene punktendliche Verfeinerung von $(O_i)_{i \in I}$.

1. Schritt: Nun existiert eine irreduzible Teilüberdeckung $(U_j)_{j \in J}$ von $(U_k)_{k \in K}$ mit $J \subset K$:

Ordnen wir die Menge aller Teilüberdeckungen mit der Mengeneinklusion, so

ist der Durchschnitt einer Kette von Teilüberdeckungen wieder eine Teilüberdeckung (andernfalls wäre ein Element der Kette keine Teilüberdeckung, ein Widerspruch).

2. Schritt: Für alle $U_j, j \in J$ muss es nun ein x_j geben, dass nur in U_j liegt: Andersfalls können wir U_j aus der Teilüberdeckung entfernen und es wäre immer noch eine Teilüberdeckung, also wäre $(U_j)_{j \in J}$ nicht irreduzibel.

3. Schritt: J ist endlich:

Wäre J nicht endlich, wäre $\{x_j | j \in J\}$ eine unendliche Menge ohne ω -Häufungspunkt, da ja der Schnitt der offenen Menge U_j nur x_j ist.

Wir haben für jede beliebige offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung konstruiert, womit die Kompaktheit bewiesen ist.

Die Umkehrung wurde in den Bemerkungen 3.22 und 3.11 behandelt. \square

3.5 Metrische Räume

Definition 3.24. Eine *Metrik* auf X ist eine Funktion $d : X \times X \mapsto [0, \infty)$, die für alle $x, y, z \in X$ folgendes erfüllt:

- (i) $d(x, x) = 0$
- (ii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$
- (iv) $d(x, y) > 0$ für $x \neq y$

Bemerkung 3.25. Eine Metrik induziert auf einer Menge eine Topologie indem man als Basiselemente die offenen Kugeln $B_{p,\epsilon} = \{x \in X : d(x,p) < \epsilon\}$ wobei $p \in X$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Für festes p bilden die Kugeln mit den Radien $1/n$ $n \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Umgebungsbasis. Jeder durch eine Metrik induzierte topologische Raum erfüllt daher das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Man sagt ein topologischer Raum (X, τ) ist *metrisierbar*, wenn es eine Metrik auf X gibt, die τ erzeugt. Topologische Räume die von einer Metrik erzeugt sind haben mehr Struktur und viele Eigenschaften sind dann gleichbedeutend. Es sei auch erwähnt, dass wegen der speziellen Basiselemente die aus Analysis 1 bekannte ϵ -Definition für Stetigkeit äquivalent zur topologischen Definition ist.

Lemma 3.26. Sei (X, τ) ein topologischer Raum wobei τ von der Metrik d erzeugt wird. Dann gilt:

- (i) (X, τ) ist T2

- (ii) folgenkompakt \Leftrightarrow abzählbar kompakt \Leftrightarrow kompakt \Leftrightarrow schwach abzählbar kompakt
- (iii) separierend \Leftrightarrow Lindelöf \Leftrightarrow 2. Abzählbarkeitsaxiom

BEWEIS :

- (i) Seien $x \neq y \in X$. Dann sind $B_{x,d(x,y)/3}$ und $B_{y,d(x,y)/3}$ zwei disjunkte offene Mengen die x bzw. y enthalten.

- (ii) Nach Abbildung 1 und Lemma 3.16 reicht es zu zeigen:

1. abzählbar kompakt \Rightarrow folgenkompakt und 2. folgenkompakt \Rightarrow kompakt

1.: Sei also $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Nach Lemma 3.13 hat die Folge einen Häufungspunkt x . Sei $B_n = B_{x,1/n}$, in jedem B_n liegen also unendlich viele Folgenglieder. Wir wählen unsere Teilfolge so, dass $(x_{n_i}) \in B_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Da die B_i eine Umgebungsbasis von x sind und $B_i \subseteq B_j \forall i > j$ (und daher $x_{n_i} \in B_j \forall i > j$) ist x Grenzwert der Teilfolge $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$.

2.: Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Wir definieren $A_n = \{x \in X : \exists i \in I : B_{x,1/n} \subseteq U_i\}$. Es gilt offensichtlich $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$ da in jedem U_i ein Element aus der Basis $B_{x,1/n}$ enthalten sein muss.

Wir zeigen zuerst, dass es ein $j \in \mathbb{N}$ gibt für das bereits $A_j = \bigcup_{n=1}^j A_n = X$ gilt:

Angenommen es existiert nicht ein solches j . Wir definieren eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_k \in X \setminus A_k$. Wegen der Folgenkompaktheit existiert eine Teilfolge $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ die gegen ein y konvergiert. y kann aber in keinem A_n liegen, da nach Konstruktion höchstens n Folgenglieder von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (und damit auch von jeder Teilfolge) in A_n sind. Dies ist ein Widerspruch zu $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$.

Jetzt zeigen wir rekursiv, dass bereits endlich viele U_{i_1}, \dots, U_{i_m} ganz X überdecken:

Rekursionsanfang: $i_1 \in I$ beliebig

Induktionsschritt: Seien i_1, \dots, i_l gegeben. Falls $\bigcup_{k=1}^l U_{i_k} = X$ sind wir fertig, ansonsten wähle $z_l \in X \setminus \bigcup_{k=1}^l U_{i_k}$ beliebig. Wegen $X = A_j$ existiert nach Definition von A_j ein i_{l+1} mit $B_{z_l,1/j} \subseteq U_{i_{l+1}}$.

Würde das Rekursionsverfahren nicht nach endlich vielen Schritten abbrechen, so erhalten wir eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Nach Konstruktion gilt $d(z_i, z_k) \geq 1/j$ für $i \neq k$. Diese Folge kann also keine konvergente Teilfolge haben, ein Widerspruch zur Folgenkompaktheit.

(iii) Wir zeigen zunächst die Implikation „separierend \Rightarrow 2. Abzählbarkeitsaxiom“:

Sei A eine abzählbare dichte Teilmenge von X . Dann ist das Mengensystem $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{a \in A} \{B_{a,1/k}\}$ eine abzählbare Basis, da für jede offene Menge $U \in \tau$ ein $x \in X$ und $k \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $B_{x,1/k} \subseteq U$. Wegen der Dichtheit von A existiert ein $a \in A$ mit $a \in B_{x, \frac{1}{3k}}$. Wegen der Dreiecksungleichung gilt dann auch $B_{a, \frac{1}{3k}} \subseteq B_{x,1/k} \subseteq U$.

Die Implikation „2. Abzählbarkeitsaxiom \Rightarrow Lindelöf“ ist trivial (siehe Bemerkung 3.11)

Wir zeigen nun „Lindelöf \Rightarrow separierend“:

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Die Überdeckung $(B_{x,1/k})_{x \in X}$ hat eine abzählbare Teilüberdeckung $(B_{x_{k,j},1/k})_{j \in \mathbb{N}}$. Die Menge $\{x_{k,j} : k, j \in \mathbb{N}\}$ ist dann eine abzählbare, dichte Teilmenge: Sei $x \in X$ beliebig und $U = B_{x,1/n}$ ein Element aus der Umgebungsbasis von x . U ist also ein Element der Überdeckung $(B_{x,1/n})_{x \in X}$ und daher gibt es auch ein $j \in \mathbb{N}$ für das $x \in B_{x_{n,j},1/n}$ gilt. Daher gilt $d(x, x_{n,j}) < 1/n$ und daher ist auch $x_{n,j} \in B_{x,1/n} = U$. Daher hat jede Umgebung von x nichtleeren Schnitt mit $\{x_{k,j} : k, j \in \mathbb{N}\}$ und ist daher in dessen Abschluss. Daher gilt $\overline{\{x_{k,j} : k, j \in \mathbb{N}\}} = X$.

□

Bemerkung 3.27. Wegen Lemma 3.8 ist in metrischen Räumen jede einpunktige Menge abgeschlossen. Wir geben nun den Satz von Urysohn an, der hinreichende topologische Bedingungen für die Metrisierbarkeit angibt. Der Satz von Bing-Nagat-Smirnow gibt sogar äquivalenten topologische Bedingungen an, welche jedoch nicht immer gleich leicht zu zeigen sind, wie die Voraussetzungen für den Satz von Urysohn.

Satz 3.28 (Satz von Urysohn). Ein regulärer T_2 - Raum, der das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist metrisierbar.

BEWEIS : Siehe [4, Seite 246].

□

Satz 3.29 (Satz von Bing-Nagata-Smirnow). Ein topologischer Raum (X, τ) ist genau dann metrisierbar, wenn er regulär ist und eine σ -lokalendliche Basis hat.

BEWEIS : Siehe [3, Seite 128].

□

4 Beispiele

4.1 Ordnungstopologie

Wir wollen hier einige, für jede Ordnungstopologie gültige, Ergebnisse anführen. Sei X eine Menge mit einer Totalordnung \leq . Wir definieren die Relation $<$ auf X durch $x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$ für $x, y \in X$. Dann definieren wir τ als die von der Basis $\mathcal{B} := \{(a, b), (\perp, b), (a, \top) : a, b \in X\}$ erzeugte Topologie wobei $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$, $(\perp, b) = \{x \in X : x < b\}$, $(a, \top) = \{x \in X : a < x\}$. τ heißt dann *Ordnungstopologie* auf X . Man überlegt sich leicht, dass \mathcal{B} tatsächlich durchschnittsstabil ist. Die Elemente von \mathcal{B} nennt man offene Intervalle. Wie auf \mathbb{R} definiert man auch die Intervalle $(a, b]$, $[a, b)$ und $[a, b]$ indem man die entsprechenden Randelemente zu den offenen Intervallen hinzufügt.

Definition 4.1. Eine Menge A heißt *konvex*, wenn $\forall a < b \in A : \forall a < t < b : t \in A$. Eine Menge $C \subseteq X$ heißt unmittelbare Nachfolgermenge von $A \subseteq X$, wenn $\nexists p \in X : a < p < c \forall a \in A, c \in C$.

Bemerkung 4.2. Alle Intervalle sind konvexe Mengen, aber nicht umgekehrt. Als Beispiel sei die Menge \mathbb{Q} mit der gewöhnlichen $<$ Ordnung gegeben. Die Menge $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \wedge x^2 < 2\}$ ist konvex, aber kein Intervall, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Satz 4.3. Seien A und B zwei getrennte Teilmengen von X . Wir definieren $A^* := \{[a, b] : a, b \in A \wedge [a, b] \cap \overline{B} = \emptyset\}$ und $B^* := \{[a, b] : a, b \in B \wedge [a, b] \cap \overline{A} = \emptyset\}$. Es gilt:

- (i) (X, τ) ist T2.
- (ii) $\forall a, b \in X : [a, b], (\perp, a], [b, \top)$ sind abgeschlossen.
- (iii) Sind $A, B \subseteq X$ konvex und $A \cap B \neq \emptyset$ so ist $A \cup B$ konvex.
- (iv) $\forall A \subseteq X$ gilt $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ wobei $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und A_i konvex für alle $i \in I$. Wählt man die A_i maximal, so ist die Zerlegung eindeutig.
- (v) $A \subseteq A^*$ (analog folgt dann $B \subseteq B^*$).
- (vi) $A^* \cap B^* = \emptyset$.
- (vii) Es gilt $\overline{A^*} \subseteq A^* \cup \overline{A}$ (analog für B).
- (viii) A^* und B^* sind getrennt.
- (ix) (X, τ) ist T5.

(x) (X, τ) ist T3.

BEWEIS :

(i) Seien $x, y \in X$. Sei oBdA $x < y$.

Angenommen $(x, y) \neq \emptyset$. Sei $z \in (x, y)$. So sind $O_x := (\perp, z)$ und $O_y := (z, \top)$ zwei offene, disjunkte Mengen mit $x \in O_x$ und $y \in O_y$.

Ist $(x, y) = \emptyset$, so wähle $O_x := (\perp, y)$ und $O_y := (x, \top)$.

(ii) $[a, b] = ((\perp, a) \cup (b, \top))^c, (\perp, a] =$

(iii) Sei $p \in A \cap B$. Für $a, b \in A$ und $a, b \in B$ ist die Konvexitätsbedingung trivial. Sei also $a \in A \setminus B, b \in B \setminus A$ und oBdA $a < b$. Dann gilt auch $a < p < b$ und für $t \neq p$ mit $a < t < b$ gilt entweder $a < t < p$ und somit $t \in A$ oder aber $p < t < b$ und somit $t \in B$. In jedem Fall gilt $t \in A \cup B$.

(iv) Dass zumindest eine Zerlegung existiert, ist trivial, denn $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$. Für $p \in A$ definieren wir $\mathcal{S}_p := \{[a, b] : p \in [a, b] \wedge [a, b] \subseteq A\}$. Dann ist die größtmögliche konvexe Menge die p enthält und in A enthalten ist genau $A_p := \bigcup_{S \in \mathcal{S}_p} S$. A_p ist wegen (iii) wieder konvex, da p immer im Schnitt liegt.

Angenommen es gäbe eine größere konvexe Teilmenge C_p von A die p enthält, so wähle $x \in C_p \setminus A_p$. Wegen der Konvexität muss $[p, x] \subseteq A$ gelten und somit $[p, x] \in \mathcal{S}_p$ und daher auch $x \in A_p$, ein Widerspruch zur Annahme.

(v) Klar, da $\forall a \in A : [a, a] = \{a\} \subseteq A^*$.

(vi) Angenommen $p \in A^* \cap B^*$, dann müssen $[a, b] \subseteq A$ und $[c, d] \subseteq B$ existieren mit $p \in [a, b] \cap [c, d]$. Aber da a und b nach Konstruktion von A^* nicht in $[c, d]$ liegen können und umgekehrt c und d nicht in $[a, b]$ liegen können, muss $[a, b] \cap [c, d] = \emptyset$ gelten.

(vii) Sei $p \notin A^* \cup \overline{A}$, dann existiert ein offenes Basiselement (s, t) mit $p \in (s, t)$ und $(s, t) \cap A = \emptyset$. Angenommen $(s, t) \cap A^* \neq \emptyset$. Dann existiert also ein Intervall $[a, b] \subseteq A^*$ wobei $a, b \in A$. Da aber weder a noch b in (s, t) liegen können, muss $(s, t) \subseteq (a, b)$ gelten, und daher auch $p \in (a, b)$ und somit $p \in A^*$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss $(s, t) \cap A^* = \emptyset$ gelten. Wir haben also für $p \notin A^* \cup \overline{A}$ eine offene Umgebung (s, t) gefunden, die mit A^* leeren Schnitt hat, also gilt

$$\overline{A^*} \subseteq A^* \cup \overline{A}.$$

(viii) $\overline{A^*} \cap B^* \subseteq (A^* \cup \overline{A}) \cap B^* = (A^* \cap B^*) \cup (\overline{A} \cap B^*) = \emptyset$. Wobei die letzte Gleichheit gilt, da nach (vi) $A^* \cap B^* = \emptyset$ und nach Definition von B^* gilt auch $\overline{A} \cap B^* = \emptyset$.

(ix) Wir schreiben zunächst A^*, B^* und $(A^* \cup B^*)^c$ als Vereinigung seiner maximalen konvexen Teilmengen an (vergleiche mit (iv)). Sei also $A^* = \bigcup_{\delta \in \Delta} A_\delta, B^* = \bigcup_{\theta \in \Theta} B_\theta$ und $(A^* \cup B^*)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$. Wir definieren nun $M := \{A_\delta, B_\theta, C_\lambda : \delta \in \Delta, \theta \in \Theta, \lambda \in \Lambda\}$. Auf M existiert eine natürliche Totalordnung, da nach Konstruktion für alle $X, Y \in M$ gilt $X \cap Y = \emptyset$ und daher entweder $x < y \forall x \in X, y \in Y$ oder $y < x \forall x \in X, y \in Y$ entsprechend definieren wir im ersten Fall $X < Y$ und im zweiten Fall $Y < X$. Sei S_δ die Menge der oberen Schranken von A_δ , die nicht in A_δ sind. S_δ ist klarerweise konvex.

Wir zeigen jetzt, dass A_δ einen unmittelbaren Nachfolger $C_{\delta^+} \in \{C_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ in M hat, wenn $A_\delta \cap \overline{S_\delta} \neq \emptyset$. Analog folgt dies dann auch für B_θ . Dazu gehen wir in mehreren Schritten vor:

-) Es kann nur ein Punkt p in $A_\delta \cap \overline{S_\delta}$ liegen. Angenommen $q \neq p$ liegt ebenfalls im Schnitt. OBdA nehmen wir $q < p$ an. Da $A_\delta \cap S_\delta = \emptyset$ müssen p und q in $\overline{S_\delta} \setminus S_\delta$ liegen. Aber die Menge $[p, \top) \cap \overline{S_\delta}$ ist ebenfalls abgeschlossen, Obermenge von S_δ und enthält nicht q . Daher kann q auch nicht in $\overline{S_\delta}$ liegen, ein Widerspruch.

-) Sei nun $\{p\} = A_\delta \cap \overline{S_\delta}$. Wegen (viii) muss ein offenes Intervall $(x, y) \ni p$ existieren mit $(x, y) \cap \overline{B^*} = \emptyset$. Da (x, y) eine Umgebung $p \in \overline{S_\delta}$ ist, muss $(x, y) \cap S_\delta \neq \emptyset$ gelten. Da p in A_δ liegt muss $(x, p] \cap S_\delta = \emptyset$ sein. Also gilt $(p, y) \cap S_\delta \neq \emptyset$ also speziell $(p, y) \neq \emptyset$. Außerdem gilt offensichtlich $(p, y) \cap A_\delta = \emptyset$.

-) Wir zeigen jetzt, dass $(p, y) \cap A^* = \emptyset$ gilt.

Angenommen $(p, y) \cap A^* \neq \emptyset$, es existieren also $a, b \in A$ sodass $[a, b] \cap (p, y) \neq \emptyset$. Sei z ein Element des Durchschnitts. Dann wäre $A_\delta \cup [p, z)$ eine konvexe Menge, da p in beiden konvexen Mengen enthalten ist. Nach der obigen Überlegung wäre $A_\delta \cup [p, z)$ disjunkt zu B^* und damit eine echt größere konvexe Menge als A_δ die disjunkt zu B^* ist, ein Widerspruch zur Maximalität von A_δ .

Also ist insgesamt $(p, y) \cap (A^* \cup B^*) = \emptyset$ und wegen der Maximalität der konvexen Mengen C_λ muss es ein $\lambda \in \Lambda$ geben, sodass $(p, y) \subseteq C_\lambda$. Wir definieren $C_{\delta^+} := C_\lambda$.

-) Analog gehen wir für die Menge der unteren Schranken L_δ vor und definieren so C_{δ^-} falls $A_\delta \cap \overline{L_\delta} \neq \emptyset$. A_δ ist dann Nachfolgermenge von

C_{δ^-} . Analog definieren wir für B_θ C_{θ^+} und C_{θ^-} .

Wir definieren nun für eine Familie $(k_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ mit $k_\lambda \in C_\lambda \forall \lambda \in \Lambda$ beliebig. Falls $A_\delta \cap \overline{S_\delta} = p$, so existiert $k_{\delta^+} \in C_{\delta^+}$ und wir definieren $I_\delta := [p, k_{\delta^+})$, ansonsten $I_\delta := \emptyset$. Analog definieren wir $J_\delta := (k_{\delta^-}, q]$ wobei $q = A_\delta \cap \overline{L_\delta}$ falls der Schnitt nichtleer ist und $J_\delta := \emptyset$ sonst. Analog definieren wir I_θ und J_θ für B_θ mit der selben Familie $(k_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Weiters definieren wir $U_\delta := I_\delta \cup A_\delta \cup J_\delta$ und $V_\theta := I_\theta \cup B_\theta \cup J_\theta$.

Wir stellen zunächst fest, dass weder I_δ oder J_δ mit I_θ oder J_θ gemeinsamen Schnitt haben kann, denn für $\lambda \in \Lambda$ kann C_λ nur Nachfolgermenge von höchstens einer Menge sein, also $\nexists \delta \in \Delta : \exists \theta \in \Theta : C_{\delta^+} = C_{\theta^+}$. Daher $I_\theta \cap I_\delta = \emptyset \forall \delta \in \Delta, \theta \in \Theta$. Analog kann nur eine Menge Nachfolgermenge von C_λ sein. Daher $J_\theta \cap J_\delta = \emptyset \forall \delta \in \Delta, \theta \in \Theta$. Aufgrund der Tatsache, dass sowohl sowohl für $I_\lambda, J_\lambda, I_\theta$ als auch J_θ die selbe Folge k_λ verwendet wurde, muss aufgrund der Konstruktion schon $I_\alpha \cap J_\beta = \emptyset \forall \alpha = \beta \in \Delta \cup \Theta$. Somit sind auch U_δ und V_θ für alle $\delta \in \Delta$ und $\theta \in \Theta$ disjunkt.

Außerdem ist U_δ offen. Um das einzusehen betrachten wir die 4 Fälle:

1. $I_\delta = [p, k_{\delta^+}), J_\delta = (k_{\delta^-}, q]$: Dann ist $U_\delta = (k_{\delta^-}, k_{\delta^+})$ und damit offen.
2. $I_\delta = \emptyset, J_\delta = (k_{\delta^-}, q]$: Dann ist $U_\delta = (\overline{S_\delta} \cup (\perp, k_{\delta^-}])^c$ als Komplement einer abgeschlossenen Mengen offen. Um die behauptete Gleichheit zu zeigen, müssen wir beweisen, dass $\nexists q \in (\overline{S_\delta} \cup A_\delta)^c : a < q < s \forall a \in A_\delta, s \in \overline{S_\delta}$. Angenommen es existiert ein solches q . Dann wäre es eine echt größere Schranke von A_δ und daher in S_δ .
3. $I_\delta = [p, k_{\delta^+}), J_\delta = \emptyset$: Analog zu 2.
4. $I_\delta = \emptyset, J_\delta = \emptyset$: Dann ist $U_\delta = (\overline{S_\delta} \cup \overline{L_\delta})^c$ als Komplement einer abgeschlossenen Mengen offen. Die behauptete Gleichheit zeigt man wie in 2.

Analog zeigt man, dass auch V_θ offen ist. Klarerweise gilt $A_\delta \subseteq U_\delta$ und $B_\theta \subseteq V_\theta$.

Insgesamt haben wir also $A \subseteq A^* \subseteq \bigcup_{\delta \in \Delta} U_\delta =: O_A$ und $B \subseteq B^* \subseteq \bigcup_{\theta \in \Theta} V_\theta =: O_B, O_A \cap O_B = \emptyset$. Also ist (X, τ) T5.

(x) folgt aus (ix), da wegen (i) einpunktige Mengen abgeschlossen sind.

□

Satz 4.4. Sei \leq eine Totalordnung auf einer Menge X und sei τ die von \leq erzeugte Topologie auf X . Dann ist (X, τ) genau dann kompakt, wenn für jede nichtleere Teilmenge A von X die Menge der oberen Schranken S_A ein minimales Element und die Menge der unteren Schranken L_A ein maximales Element enthält.

BEWEIS : \Rightarrow : Angenommen S_A hat kein minimales Element. Wir definieren für $\alpha \in A$ und $\beta \in S_A$ die Mengen $P_\alpha := \{x \in X : x < \alpha\}$ und $S_\beta := \{x \in X : x > \beta\}$. Die Mengenfamilie $\mathcal{U} := \{P_\alpha, S_\beta : \alpha \in A, \beta \in S_A\}$ ist eine Überdeckung von X , denn für $x \in X$ gilt entweder $\exists \alpha \in A : x < \alpha$, in diesem Fall gilt $x \in P_\alpha$. Andernfalls gilt $\nexists \alpha \in A : x < \alpha$, also ist x eine obere Schranke. Da es keine kleinste obere Schranke gibt, muss es eine noch kleinere obere Schranke $\beta < x$ geben. Und somit $x \in S_\beta$. Hätte \mathcal{U} eine endliche Teilüberdeckung, so existieren endlich viele P_{α_i} die A überdecken (die S_β haben nach Konstruktion mit A immer leeren Schnitt). Also gilt für $\alpha_m := \max_i \alpha_i$, dass $\alpha_m \in A$ und $\alpha_m \geq \alpha \forall \alpha \in A$. α_m ist also eine obere Schranke, und zwar die kleinste, denn für jede kleinere obere Schranke wäre ja $\alpha_m \in A$ größer im Widerspruch zur Eigenschaft eine obere Schranke zu sein. Falls L_A kein maximales Element hat, geht man analog vor.

\Leftarrow : Da X selbst Teilmenge von sich ist, gibt es ein Element $a \in X$ mit $a \leq x \forall x \in X$, aus dem selben Grund hat X auch ein maximales Element m . Sei \mathcal{U} eine Überdeckung von X . Sei weiters S die Menge der y für die $[a, y]$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wir wollen $S = X$ zeigen (dann hat speziell $X = [a, m]$ eine endliche Teilüberdeckung). Sei α die kleinste obere Schranke von S . Und sei $U \in \mathcal{U}$ so, dass $\alpha \in U$.

Angenommen $\alpha \neq m$. Da U offen ist, existiert eine offene Menge $(x, y) \subseteq U$ mit $\alpha \in (x, y)$ (also $y < \alpha$).

Wir zeigen zuerst $U \subseteq S$: Angenommen $U \cap S \neq \emptyset$, sei p aus dieser Menge. Dann gibt es eine endliche Teilüberdeckung für $[a, p]$. Wenn man dieser Teilüberdeckung U hinzufügt, wird $[a, p] \cup U$ überdeckt (also auch $[a, \alpha]$), also $U \subseteq S$. Falls $U \cap S = \emptyset$, dann gilt offensichtlich $\nexists t : x < t < \alpha$ (Da α die kleinste obere Schranke von S ist wäre sonst $t \in S$ und damit der Schnitt nichtleer) und $x \in S$, sonst wäre α nicht die kleinste obere Schranke. Also hat $[a, x]$ eine endliche Teilüberdeckung. Fügt man dieser Teilüberdeckung U hinzu, so wird $[a, \alpha] \cup U$ überdeckt, also auch in diesem Fall $U \subseteq S$.

Wegen $\alpha \in U \subseteq S$ gilt sicherlich $[a, \alpha] \subseteq S$. Es muss sogar $[a, \alpha] = S$ gelten, da ja α eine obere Schranke von S ist. Wegen $(\alpha, y) \subseteq U \subseteq S$ muss $(\alpha, y) = \emptyset$ sein. Aber dann ist $y \in X$, da nur eine offene Menge die y enthält zur Überdeckung von $[a, \alpha]$ hinzugefügt werden muss. Damit wäre α keine obere Schranke von S . Daher muss insgesamt $\alpha = m$ gelten. Und somit $[0, m] \subseteq S$. Sei $V \in \mathcal{U}$ mit $m \in V$. Dann existiert eine offene Menge $(x, m] \subseteq V$. x muss aus S sein, da $x < m$. Fügt man also zur endlichen Teilüberdeckung von $[a, x]$ V hinzu, so hat man eine endliche Teilüberdeckung von X . \square

4.2 Closed Ordinal Space $[0, \Gamma]$

Sei $\Gamma \prec \Omega$ eine Limeszahl. Auf $X = \Gamma^+$ definieren wir eine Basis \mathcal{B} von τ indem wir alle Mengen der Form $(\alpha, \beta^+) = (\alpha, \beta] = \{x : \alpha < x < \beta^+\}$ für offen erklären (wobei $\alpha < \beta < \Gamma^+$).

Bemerkung 4.5. Man überzeugt sich leicht, dass falls $\beta \in X$ und $\beta \neq \Gamma$ auch $\beta^+ \in X$ gilt. Auch die Tatsache, dass \mathcal{B} durchschnittsstabil ist, ist leicht einzusehen.

Satz 4.6. Es gilt:

- (i) τ ist die Ordnungstopologie auf $[0, \Gamma]$.
- (ii) (X, τ) ist T2, T3 und T5 also vollständig normal.
- (iii) (X, τ) erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom.
- (iv) (X, τ) ist perfekt normal.
- (v) (X, τ) ist metrisierbar.
- (vi) (X, τ) ist kompakt.
- (vii) (X, τ) ist folgenkompakt.

BEWEIS :

- (i) $\forall 0 \leq \alpha \leq \beta < \Gamma^+ :$
 $(\alpha, \beta) = \bigcup_{\gamma^+ < \beta} (\alpha, \gamma]$
 $(\perp, \beta) = \bigcup_{\gamma^+ < \beta} (0, \gamma]$
 $(\alpha, \top) = \bigcup_{\gamma < \Gamma^+} (\alpha, \gamma]$
- (ii) Gilt nach (i) und Satz 4.3.
- (iii) Wir können die Basis \mathcal{B} mit einer Teilmenge von $\Gamma^+ \times \Gamma^+$ identifizieren indem wir das Paar (α, β) mit dem Intervall (α, β) identifizieren. $\Gamma^+ \times \Gamma^+$ is abzählbar (vergleiche Korollar 2.14).
- (iv) Nach (ii) bleibt zu zeigen, dass jede abgeschlossene Menge eine G_δ Menge ist. Es reicht zu zeigen, dass jedes $x \in X$ eine G_δ - Menge ist, denn jede (insbesondere abgeschlossene) Menge $A \subseteq X$ lässt sich als abzählbare Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} x_n$ darstellen (da X abzählbar ist). Sei für alle $x \in X : \{x\} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} O_j^x$. Dann ist $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \in \mathbb{N}} O_j^{x_n} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_j^{x_n}$ Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Mengen.
 Sei $x \in X$. Dann ist $\{x\} = \bigcap_{\alpha < x} (\alpha, x^+)$ ein abzählbarer Durchschnitt

offener Mengen (die Menge $\alpha < x$ ist Teilmenge von X und daher abzählbar). Daher gilt nach obiger Überlegung, dass jede abgeschlossene Menge eine G_δ -Menge ist (da wir nirgends die Abgeschlossenheit benötigen haben, haben wir sogar gezeigt, dass jede Menge eine G_δ -Menge ist).

- (v) Folgt aus (ii), (iii) und dem Satz von Urysohn (Satz 3.28).
- (vi) Nach Satz 4.4 müssen wir zeigen, dass jede nichtleere Teilmenge von X eine größte untere Schranke und eine kleinste obere Schranke besitzt. Sei $A \subseteq X$. Falls $\Gamma \in A$ ist Γ die kleinste obere Schranke. Andernfalls ist die Menge der oberen Schranken S_A nichtleer (da zumindest $\Gamma \in S_A$). Aufgrund der Wohlordnung hat die Menge S_A ein minimales Element, dieses ist dann die kleinste obere Schranke. Die größte untere Schranke ist das aufgrund der Wohlordnung existierende minimale Element von A .
- (vii) Aus (iii) folgt, dass (X, τ) das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Wegen (vi) mit Bemerkung 3.11 ist (X, τ) abzählbar kompakt. Aus Lemma 3.17 folgt damit die Folgenkompaktheit.

□

4.3 Open Ordinal Space $[0, \Gamma)$

Sei wieder $\Gamma < \Omega$ eine Limeszahl. Auf $X = \Gamma$ definieren wir eine Basis \mathcal{B} von τ indem wir alle Mengen der Form $(\alpha, \beta^+) = (\alpha, \beta] = \{x : \alpha < x < \beta^+\}$ für offen erklären (wobei $\alpha < \beta < \Gamma$).

Bemerkung 4.7. Man überzeugt sich leicht, dass falls $\beta \in X$ auch $\beta^+ \in X$ gilt. \mathcal{B} ist durchschnittsstabil, wie leicht einzusehen ist.

Satz 4.8. Es gilt:

- (i) τ ist die Ordnungstopologie auf $[0, \Gamma)$.
- (ii) (X, τ) ist T2, T3 und T5 also vollständig normal.
- (iii) (X, τ) erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom.
- (iv) (X, τ) ist perfekt normal.
- (v) (X, τ) ist metrisierbar.
- (vi) (X, τ) ist stark lokal kompakt.

- (vii) (X, τ) ist σ -lokal-kompakt.
- (viii) (X, τ) ist nicht schwach abzählbar kompakt.
- (ix) (X, τ) ist nicht pseudokompakt.

BEWEIS :

- (i) $\forall 0 \leq \alpha \leq \beta < \Gamma$:
 - $(\alpha, \beta) = \bigcup_{\gamma+\langle \beta \rangle} (\alpha, \gamma]$
 - $(\perp, \beta) = \bigcup_{\gamma+\langle \beta \rangle} (0, \gamma]$
 - $(\alpha, \top) = \bigcup_{\gamma < \Gamma} (\alpha, \gamma]$
- (ii) Gilt nach (i) und Satz 4.3.
- (iii) Wir können die Basis \mathcal{B} mit einer Teilmenge von $\Gamma \times \Gamma$ identifizieren indem wir das Paar (α, β) mit dem Intervall (α, β) identifizieren. $\Gamma \times \Gamma$ is abzählbar (vergleiche Korollar 2.14).
- (iv) Nach (ii) bleibt zu zeigen, dass jede abgeschlossene Menge eine G_δ Menge ist. Es reicht zu zeigen, dass jedes $x \in X$ eine G_δ - Menge ist, denn jede (insbesondere abgeschlossene) Menge $A \subseteq X$ lässt sich als abzählbare Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} x_n$ darstellen (da X abzählbar ist). Sei für alle $x \in X : \{x\} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} O_j^x$. Dann ist $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \in \mathbb{N}} O_j^{x_n} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_j^{x_n}$ Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Mengen.
 Da $\{x\} = \bigcap_{\alpha < x} (\alpha, x^+)$ ein abzählbarer Durchschnitt offener Mengen ist (die Menge $\alpha < x$ ist Teilmenge von X und daher abzählbar), gilt nach obiger Überlegung, dass jede abgeschlossene Menge eine G_δ - Menge ist (da wir nirgends die Abgeschlossenheit benötigt haben, haben wir auch gezeigt, dass sogar jede Menge eine G_δ - Menge ist).
- (v) folgt aus (ii), (iii) und dem Satz von Urysohn (Satz 3.28).
- (vi) Sei $p \in X$. So ist $[0, p^+) = [0, p]$ offene Umgebung von p . Wegen $[0, p^+) = (p, \top)^c$ ist sie auch abgeschlossen. Nach Lemma 3.12 und Satz 4.4 müssen wir also zeigen, dass $[0, p]$ eine größte untere Schranke und kleinste obere Schranke in $[0, p]$ hat. Diese sind genau 0 bzw. p .
- (vii) Wegen (vi) ist (X, τ) lokal kompakt. Wir müssen also noch die σ -Kompaktheit zeigen. Wie in (vi) gezeigt ist $[0, p]$ kompakt für alle $p \in X$. Da $[0, \Gamma)$ abzählbar ist und wegen $[0, \Gamma) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} [0, \alpha]$ ist (X, τ) σ -kompakt.
- (viii) Wegen Lemma 3.16 reicht es zu zeigen, dass (X, τ) nicht abzählbar kompakt ist. Wir bemerken dazu, dass (X, τ) die Spurtopologie von

$[0, \Gamma]$ mit der Ordnungstopologie aus dem letzten Beispiel ist. Da Γ eine abzählbare Umgebungsbasis $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $[0, \Gamma]$ hat, können wir eine gegen Γ konvergente Folge definieren indem wir $x_0 \in O_0 \setminus \{\Gamma\}$ beliebig fordern und induktiv $x_j \in \bigcap_{i=1}^j O_i \setminus \{\Gamma\}$ mit $x_j > x_{j-1}^+$ festsetzen. Die Mengen aus denen x_i gewählt werden, sind nichtleer, da dies nur der Fall sein kann, falls ein $O_j = \{\Gamma\}$ ist, aber da $\{\Gamma\}$ nicht offen ist, kann dies nicht der Fall sein. Die Folge konvergiert in $[0, \Gamma]$ gegen Γ , da für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ muss ein Element O_i aus der Umgebungsbasis existieren mit $O_i \subseteq U$ und daher auch $\bigcap_{l=1}^j O_l \subseteq U$ für alle $j \geq i$. Daher ist Γ der einzige Häufungspunkt der Folge in $[0, \Gamma]$. Die Mengen $O_i \setminus \{\Gamma\}$ aus der Konstruktion der Folge sind wegen $O_i \setminus \{\Gamma\} = O_i \cap [0, \Gamma)$ offen in $[0, \Gamma)$, daher kann die Folge auch hier analog konstruiert werden. Die Folge kann jedoch keinen Häufungspunkt in $[0, \Gamma)$ haben, da nach obiger Argumentation Γ der einzig mögliche Häufungspunkt wäre.

- (ix) Sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die in (viii) konstruierte Folge. Sei $O_0 = [0, x_0^+)$ und $O_j = (x_{j-1}, x_j^+)$ für $j > 0$. Wir erkennen (wir haben ja $x_j > x_{j-1}^+$ für $j > 0$ gefordert), dass O_j eine offene Umgebung von x_j für $j \in \mathbb{N}$ ist und $O_i \cap O_j = \emptyset \forall i \neq j \in \mathbb{N}$. Außerdem ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n = [0, \Gamma) = X$. Wir definieren $f(x) := n$ für $x \in O_n$. f ist wohldefiniert, da die O_i eine disjunkte Zerlegung von X bilden. f ist klarerweise unbeschränkt, denn für alle $C \in \mathbb{R}$ existiert ein $n > C \in \mathbb{N}$ und $f(x_n) = n > C$. f ist stetig, da das Urbild einer beliebigen Menge nur aus der Vereinigung von offenen Mengen bestehen kann (da f auf den Elementen einer offenen Zerlegung von X konstant ist).

□

Bemerkung 4.9. Das Beispiel zeigt, dass stark lokal kompakt und σ -lokal kompakt weder pseudokompakt noch schwach abzählbar kompakt implizieren, selbst wenn der Raum perfekt normal und abzählbar ist.

4.4 Closed Ordinal Space $[0, \Omega]$

Hierbei bezeichne Ω die kleinste überabzählbare Ordinalzahl (vergleiche Bemerkung 2.15). Auf $X = \Omega^+$ definieren wir eine Basis \mathcal{B} von τ indem wir alle Mengen der Form $(\alpha, \beta^+) = (\alpha, \beta] = \{x : \alpha < x < \beta^+\}$ für offen erklären (wobei $\alpha < \beta < \Omega^+$).

Bemerkung 4.10. Man überzeugt sich leicht, dass falls $\beta \in X$ und $\beta \neq \Omega$ auch $\beta^+ \in X$ gilt. Auch die Tatsache, dass \mathcal{B} durchschnittsstabil ist, ist leicht einzusehen.

Satz 4.11. Es gilt:

- (i) τ ist die Ordnungstopologie auf $[0, \Omega]$.
- (ii) (X, τ) ist T2, T3 und T5 also vollständig normal.
- (iii) (X, τ) erfüllt nicht das 1. Abzählbarkeitsaxiom.
- (iv) (X, τ) ist nicht perfekt normal.
- (v) (X, τ) ist nicht metrisierbar.
- (vi) (X, τ) ist kompakt.
- (vii) (X, τ) ist folgenkompakt.

BEWEIS :

- (i) $\forall 0 \leq \alpha \leq \beta < \Omega^+$:
 $(\alpha, \beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} (\alpha, \gamma]$
 $(\perp, \beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} (0, \gamma]$
 $(\alpha, \top) = \bigcup_{\gamma < \Omega^+} (\alpha, \gamma]$
- (ii) Gilt nach (i) und Satz 4.3
- (iii) Ω hat keine abzählbare Umgebungsbasis. Denn jede Umgebung von Ω muss zumindest ein Intervall der Form $(\alpha, \Omega^+) = [0, \alpha)^c$ enthalten. Sei also $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine solche Umgebungsbasis mit $[0, \alpha_i)^c \subseteq U_i$. Dann ist nach Korollar 2.13 gibt es eine abzählbare Ordinalzahl β mit $\beta > \alpha_i \forall i \in \mathbb{N}$. Daher gibt es keine Umgebung aus der Umgebungsbasis, die in der Umgebung (β^+, Ω^+) enthalten ist, ein Widerspruch zur Eigenschaft Umgebungsbasis zu sein.
- (iv) Wir wollen zeigen, dass $\{\Omega\} = [0, \Omega)^c$ keine G_δ -Menge ist. Wie in (iii) gezeigt, muss für jede abzählbare Menge von Umgebungen von Ω ein Intervall $(\beta^+, \Omega^+) \neq \{\Omega\}$ existieren, das im Durchschnitt aller Umgebungen enthalten ist.
- (v) Da jeder metrisierbare Raum das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (vergleiche Bemerkung 3.25), kann (X, τ) nicht metrisierbar sein.
- (vi) Nach Satz 4.4 müssen wir zeigen, dass jede nichtleere Teilmenge von X eine größte untere Schranke und eine kleinste obere Schranke besitzt. Sei $A \subseteq X$. Falls $\Omega \in A$ ist Ω die kleinste obere Schranke. Andernfalls ist die Menge der oberen Schranken S_A nichtleer (da zumindest

$\Omega \in S_A$). Aufgrund der Wohlordnung hat die Menge S_A ein minimales Element, dieses ist dann die kleinste obere Schranke.

Die größte untere Schranke ist das aufgrund der Wohlordnung existierende minimale Element von A .

(vii) Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X .

Angenommen, unendlich viele Folgenglieder sind gleich Ω . Dann definiere die Teilfolge von $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so, dass $y_{n_j} = \Omega$ für $j \in \mathbb{N}$. Diese Teilfolge konvergiert offenbar gegen Ω .

Andernfalls sind nur endlich viele Folgenglieder gleich Ω . Wir definieren dann die Folge $x_n = y_n$ falls $y_n \neq \Omega$ und $x_n = 0$ sonst. Es sind also alle Folgenglieder abzählbare Ordinalzahlen. Wegen (vi) und Bemerkung 3.11 ist (X, τ) abzählbar kompakt. Nach Lemma 3.13 hat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ daher einen Häufungspunkt p in X . Wegen Korollar 2.13 ist die Folge durch eine abzählbare Ordinalzahl beschränkt und daher kann p nicht Ω sein. Daher ist p eine abzählbare Ordinalzahl und hat daher die abzählbare Umgebungsbasis $(O_i)_{i \in \mathbb{N}} = \{(\alpha, p^+) : \alpha < p\}$. Wir konstruieren nun eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die gegen p konvergiert.

Sei n_0 so, dass $x_{n_0} \in O_0$. Für $j \geq 1$ definiere n_j so, dass $x_{n_j} \in \bigcap_{l=0}^j O_l$ und $n_j \geq n_{j-1}$. Diese existieren, da in jeder offenen Umgebung von p unendlich viele Folgenglieder liegen müssen. Die Teilfolge $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen p , da nach Voraussetzung $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis ist und daher für jede beliebige Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $i \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $O_i \subseteq U$. Daher gilt dann auch $\bigcap_{l=0}^j O_l \subseteq U$ für alle $j \geq i$. Und daher weiter $x_j \in U \forall j \geq i$.

□

4.5 Open Ordinal Space $[0, \Omega)$

Hierbei bezeichne Ω wieder die kleinste überabzählbare Ordinalzahl. Auf $X = \Omega$ definieren wir eine Basis \mathcal{B} von τ indem wir alle Mengen der Form $(\alpha, \beta^+) = (\alpha, \beta] = \{x : \alpha < x < \beta^+\}$ für offen erklären (wobei $\alpha < \beta < \Omega$).

Bemerkung 4.12. Man überzeugt sich leicht, dass falls $\beta \in X$ auch $\beta^+ \in X$ gilt. \mathcal{B} ist durchschnittsstabil, wie leicht einzusehen ist.

Satz 4.13. Es gilt:

- (i) τ ist die Ordnungstopologie auf $[0, \Omega)$.
- (ii) (X, τ) ist T2, T3 und T5 also vollständig normal.

- (iii) (X, τ) erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom.
- (iv) (X, τ) erfüllt nicht das 2. Abzählbarkeitsaxiom.
- (v) (X, τ) ist perfekt normal.
- (vi) (X, τ) ist stark lokal kompakt.
- (vii) (X, τ) ist folgenkompakt.
- (viii) (X, τ) ist nicht Lindelöf.
- (ix) (X, τ) ist nicht metakompakt.
- (x) (X, τ) ist nicht metrisierbar.

BEWEIS :

- (i) $\forall 0 \leq \alpha \leq \beta < \Omega$:
 $(\alpha, \beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} (\alpha, \gamma]$
 $(\perp, \beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} (0, \gamma]$
 $(\alpha, \top) = \bigcup_{\gamma < \Omega} (\alpha, \gamma]$
- (ii) Gilt nach (i) und Satz 4.3.
- (iii) Sei $p \in [0, \Omega)$. So ist p eine abzählbare Ordinalzahl. Daher ist die Menge $(O_i)_{i \in \mathbb{N}} = \{(\alpha, p^+) : \alpha < p\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis.
- (iv) Sei $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis von τ .
Wir zeigen zunächst, dass es mindestens ein $i \in \mathbb{N}$ und ein $\beta \in X$ geben muss, sodass $(\beta, \Omega) \subseteq O_i$. Angenommen es würde keine solche Menge geben. Wir bezeichnen mit S_i die Menge der oberen Schranken von O_i . Nach Voraussetzung sind also alle S_i nichtleer. Aufgrund der Wohlordnung haben alle S_i kleinste Elemente γ_i . Nach Korollar 2.13 existiert eine abzählbare Ordinalzahl $\beta \in X$ mit $\gamma_i < \beta \forall i \in \mathbb{N}$. Also existiert kein $i \in \mathbb{N}$ mit $O_i \subseteq (\beta, \Omega)$, ein Widerspruch zur Eigenschaft von $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Basis zu sein.
Sei $I = \{i \in \mathbb{N} : \exists \alpha_i : (\alpha_i, \Omega) \subseteq O_i\}$ und definiere für $i \in I$ ein fixes α_i mit $(\alpha_i, \Omega) \subseteq O_i$. Nach obiger Argumentation existiert ein $\beta \in X$ sodass für alle $j \in \mathbb{N} \setminus I$ β eine obere Schranke von O_j ist. Andererseits existiert wiederum wegen Korollar 2.13 eine abzählbare Ordinalzahl α , sodass $\alpha > \alpha_i \forall i \in I$. Sei $\lambda = \max(\alpha, \beta)$. Es existiert kein $i \in \mathbb{N}$ sodass $O_i \subseteq (\lambda, \Omega)$. Also kann $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$ keine Basis sein.

- (v) Nach (ii) bleibt zu zeigen, dass jede abgeschlossene Menge eine G_δ Menge ist. Sei $A \subseteq X$. Wir betrachten 2 Fälle:
1. Fall: Die Menge S_A der oberen Schranken von A ist nichtleer und hat daher (aufgrund der Wohlordnung) ein minimales Element $\alpha \in X$. Es reicht zu zeigen, dass jedes $x \in [0, \alpha^+)$ eine G_δ - Menge ist, denn dann lässt sich A als abzählbare Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} x_n$ darstellen (da $[0, \alpha^+)$ abzählbar ist). Sei für alle $x \in [0, \alpha^+)$: $\{x\} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} O_j^x$. Dann ist $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \in \mathbb{N}} O_j^{x_n} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_j^{x_n}$ Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Mengen.
Da $\{x\} = \bigcap_{\beta < x} (\beta, x^+)$ ein abzählbarer Durchschnitt offener Mengen ist (die Menge $\beta < x$ ist Teilmenge von $[0, \alpha)$ und daher abzählbar), ist A eine G_δ - Menge.
 2. Fall: S_A ist leer, A muss daher ein Intervall der Form (γ, Ω) enthalten. Wir trennen A in zwei Mengen auf: Sei $A_1 = \{x \in A : x < \gamma^+\}$ und $A_2 = \{x \in A : x > \gamma\}$. Offensichtlich sind A_1 und A_2 disjunkt und $A = A_1 \cup A_2$. A_1 ist durch α^+ nach oben beschränkt und daher eine G_δ -Menge (1. Fall). Nach Voraussetzung ist $A_2 = (\gamma, \Omega)$ und daher offen. Es existieren also abzählbar viele $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$, sodass $A_1 = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} O_i$. Also ist $A = A_1 \cup A_2 = (\bigcap_{i \in \mathbb{N}} O_i) \cup (\gamma, \Omega) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (O_i \cup (\gamma, \Omega))$ und daher eine G_δ - Menge.
- (vi) Sei $p \in X$. So ist $[0, p^+) = [0, p]$ offene Umgebung von p . Wegen $[0, p^+) = (p, \top)^c$ ist sie auch abgeschlossen. Nach Lemma 3.12 und Satz 4.4 müssen wir also zeigen, dass $[0, p]$ eine größte untere Schranke und kleinste obere Schranke in $[0, p]$ hat. Diese sind genau 0 bzw. p .
- (vii) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Alle Folgenglieder sind also abzählbare Ordinalzahlen. Im Beweis von Satz 4.11 (vii) haben wir gezeigt, dass jede Folge mit Werten in $[0, \Omega)$ eine gegen eine abzählbare Ordinalzahl p in $[0, \Omega]$ konvergente Teilfolge besitzt (also $p \in X$). Da τ die Spurtopologie der Ordnungstopologie auf $[0, \Omega]$ auf $[0, \Omega)$ ist (da ja $[0, \Omega)$ offen ist in der Ordnungstopologie auf $[0, \Omega]$), konvergiert diese Teilfolge auch in τ .
- (viii) Die Überdeckung $\{[0, \alpha) : \alpha < \Omega\}$ kann keine abzählbare Teilüberdeckung $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$ haben. Denn es müssten Mengen der Form $[0, \alpha_i)$ sein und wegen Korollar 2.13 gibt es dann eine abzählbare Ordinalzahl $\beta \in X$, sodass $\beta > \alpha_i \forall i \in \mathbb{N}$, also existiert kein $i \in \mathbb{N}$ mit $\beta \in O_i$. Daher ist $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$ keine Überdeckung.
- (ix) Wegen (viii) kann (X, τ) nicht kompakt sein (vergleiche Bemerkung 3.11). Wegen (vii) ist (X, τ) abzählbar kompakt (vergleiche Bemerkung 3.15). Wegen Lemma 3.23 kann (X, τ) nicht metakompakt sein.

(x) Wäre (X, τ) metrisierbar, so müsste nach Lemma 3.26 kompakt \Leftrightarrow folgenkompakt gelten. Wie in (ix) bemerkt, ist (X, τ) nicht kompakt, aber nach (vii) ist (X, τ) folgenkompakt.

□

Bemerkung 4.14. Das Beispiel zeigt, dass aus folgenkompakt im Allgemeinen nicht einmal Lindelöf folgt. Insbesondere folgt aus folgenkompakt nicht kompakt. Es zeigt auch, dass ein stark lokal kompakter Raum nicht Lindelöf sein muss.

Literatur

- [1] HALMOS, Paul R.: *Naive set theory*. Princeton, NJ : van Nostrand, 1960
- [2] KALTENBÄCK, Michael: *Vorlesungsskript aus Analysis 2*. Februar 2010
- [3] NAGATA, Jun-iti: A theorem for metrizable spaces. In: *Proceedings of the Japan Academy* 33 (1957), S. 128–130
- [4] PATTY, C. W.: *Foundations of Topology*. London : Jones and Bartlett Publishers, 2008
- [5] STEEN, Lynn A. ; SEEBACH, J. Arthur J.: *Counterexamples in Topology*. New York : Dover Publications, 1995