Der Holomorphiebegriff für Clifford-Algebra-wertige Funktionen

Bachelorarbeit aus Analysis

Jonathan Gantner

0725250

Betreuer: Ao. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Michael Kaltenbäck

18. Januar 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Eine Funktion $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt holomorph, wenn sie in jedem Punkt komplex differenzierbar ist – das heißt, wenn für jeden Punkt $z \in G$ der Grenzwert

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existiert. Holomorphe Funktionen haben eine Reihe starker Eigenschaften, die in der Funktionentheorie untersucht werden. Clifford-Algebren des Typs $Cl(n)$ stellen Verallgemeinerungen der komplexen Zahlen dar, in denen nicht nur eine, sondern gleich mehrere imaginäre Einheiten definiert sind. Es stellt sich nun die Frage, ob sich auch für Funktionen von $Cl(n)$ nach $Cl(n)$ ein Holomorphie-Begriff finden lässt, der ähnlich starke Eigenschaften mit sich bringt, wie der im Komplexen. Ziel dieser Arbeit ist es diesen zu erarbeiten.

Kapitel 2 gibt dazu eine kurze Einführung in Clifford-Algebren, die dem Leser deren algebraische Struktur näher bringen und Unterschiede zu den komplexen Zahlen aufzeigen soll und hält sich dabei stark an [3]. Kapitel 3 enthält eine Einführung in Differentialformen, die sich als nützliches Werkzeug bei der Definition von Holomorphie in $Cl(n)$ erweisen und es ermöglichen, viele Resultate über holomorphe Funktionen auf besonders einfache Art zu beweisen. Dieses Kapitel basiert hauptsächlich auf [4] und [2]. Schließlich definieren wir in den letzten beiden Kapiteln 4 und 5, die sich wieder stark an [3] halten den Begriff der Clifford-Holomorphie und zeigen einige wichtige Eigenschaften Clifford-holomorpher Funktionen. Der Abschnitt über die Definition der Clifford-Holomorphie über einen Differenzenquotienten ist [5] entnommen.

2 Clifford-Zahlen

Der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ lässt sich bekanntermaßen durch Definition der komplexen Einheit $i = \sqrt{-1}$ zu dem algebraisch abgeschlossenen Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erweitern. Es stellt sich nun die Frage, was passiert, wenn man statt einer einzigen gleich mehrere komplexe Einheiten $i_1, i_2, \ldots, i_n$ einführt, die alle die Gleichung $i_j^2 = -1$ erfüllen. Ein solches Zahlensystem lässt sich nicht mehr als Körper realisieren, sondern nur noch als Algebra[1].

Wir betrachten nun den $\mathbb{R}^{n+1}$, der von der kanonischen Basis $\{e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ aufgespannt wird – also die Menge aller Linearkombinationen der Form $\sum_{i=0}^n x_i e_i$ mit $x_i \in \mathbb{R}$. Unser Ziel ist es, diesen zu einer Algebra zu erweitern, in der e_0 das bezüglich der Multiplikation neutrale Element ist und folgende Beziehungen erfüllt sind:[2]

$$e_i e_j = -e_j e_i \qquad i \neq j \text{ und } i, j \in \{1, \ldots, n\} \tag{2.1}$$

$$e_i^2 = -1 \qquad i = \{1, \ldots, n\}. \tag{2.2}$$

Dazu betrachten wir den 2^n-dimensionalen reellen Vektorraum $Cl(n)$, der von der Basis $(e_A)_{A \subset \{1,\ldots,n\}}$ aufgespannt wird. Das heißt

$$Cl(n) := \left\{ \sum_{A \in \mathcal{P}_n} x_A e_A : x_A \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei $\mathcal{P}_n$ die Potenzmenge von $\{1, \ldots, n\}$ bezeichnet. Um auf diesem Vektorraum eine Multiplikation zu erklären, definieren wir zunächst für zwei Basis-Elemente

$$e_A e_B = (-1)^{\#(A \cap B)} (-1)^{p(A,B)} e_{A \triangle B}, \tag{2.3}$$

wobei $\#M$ die Mächtigkeit einer Menge M bezeichnet und $p(A, B) = \sum_{j \in B} \#\{i \in A : i > j\}$ ist, und setzen diese Abbildung bilinear zu einer Abbildung $Cl(n) \times Cl(n) \to Cl(n)$ fort. Man überprüft elementar, dass (2.3) assoziativ ist. Insbesondere ist damit auch die Fortsetzung assoziativ, sodass $Cl(n)$ versehen mit diesem Produkt zu einer Algebra wird.

Definition 2.1 (Clifford Algebra)**.** *$Cl(n)$ versehen mit der durch* (2.3) *definierten Multiplikation heißt Clifford-Algebra. Die Elemente von $Cl(n)$ heißen hyperkomplexe oder Clifford-Zahlen.*

Da $ae_0 \cdot be_0 = abe_0$ gilt, könne wir $\mathbb{R}$ mittels $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}e_0$ als Unteralgebra betrachten. Statt $e_\emptyset$ schreiben wir deshalb auch 1. Setzt man außerdem

$$e_i := e_{\{i\}} \text{ für } i = 1, \ldots, n \qquad \text{und} \qquad e_0 := e_\emptyset,$$

so gelten in $Cl(n)$ die Identitäten (2.1) und (2.2). Weiters ist e_0 das neutrale Element bezüglich der Multiplikation. Da für $\emptyset \neq A = \{i_1 < \ldots < i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$

$$e_A = e_{i_1} \ldots e_{i_k} \tag{2.4}$$

gilt, sehen wir auch, dass $Cl(n)$ von den Elementen $e_0, e_1, \ldots, e_n$ erzeugt wird, also die kleinste Algebra ist, die $e_0, \ldots, e_1$ enthält und (2.1) sowie (2.2) erfüllt.

Etwas anschaulicher als durch (2.3) lässt sich das Produkt zweier Basiselemente e_A und e_B mit $A = \{a_1 < \ldots < a_k\}$ und $B = \{b_1 < \ldots < b_l\}$ durch Ausnützen der Assoziativität mittels (2.4) und wiederholtem Anwenden der Identitäten (2.1) und (2.2) berechnen. Es ist $p(A, B)$ nämlich genau jene Anzahl von Vertauschungen, die nötig sind um $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l)$ aufsteigend anzuordnen, und $\#(A \cap B)$ die Anzahl der Elemente, die sich wegen (2.2) gegenseitig auslöschen. Für $A = \{2, 3\}$ und $B = \{1, 2, 5\}$ erhalten wir so beispielsweise

$$e_A e_B = e_2 e_3 e_1 e_2 e_5 = -e_2 e_1 e_3 e_2 e_5 = e_2 e_1 e_2 e_3 e_5 = -e_1 e_2 e_2 e_3 e_5 = e_1 e_3 e_5,$$

---

[1] Eine Algebra ist ein Vektorraum V, der mit einer Multiplikation versehen ist – also mit einer bilinearen Abbildung $\cdot : V \times V \to V$, die assoziativ ist, für die also gilt $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ für alle $x, y, z \in V$. Statt $x \cdot y$ schreibt man oft nur xy.

[2] (Allgemeine) Clifford-Algebren können alternativ auch mittels einer quadratischen Form $Q(x)$ auf $\mathbb{R}^n$ eingeführt werden, indem das Produkt durch die Bedingung $x^2 = Q(x)$ festgelegt wird. In unserem Fall wäre die entsprechende Form $Q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2$. Einsetzen von e_i ergibt $e_i^2 = Q(e_i) = -1$ und Einsetzen von $e_i + e_j$ in Q liefert die Vertauschungsregel $e_i e_j = e_i e_j$ und motiviert so die geforderten Bedingungen an das Produkt.

Umgekehrt lässt sich jeder Clifford-Algebra mittels $Q(x) = x \cdot x$ eine entsprechende quadratische Form zuordnen. Für Details siehe [1].

was wegen $p(A,B) = \sum_{j\in\{1,2,5\}} \#\{i \in \{2,3\} : i > j\} = 2+1+0 = 3$ und

$$e_A e_B = (-1)^{\#(A\cap B)}(-1)^{p(A,B)} e_{A\triangle B} = (-1)^1(-1)^3 e_{\{1,3,5\}} = e_{\{1,3,5\}}$$

genau dem Ergebnis von (2.3) entspricht.

Triviale Beispiele für Clifford-Algebren sind die reellen Zahlen $\mathbb{R} = Cl(0)$ oder die komplexen Zahlen $\mathbb{C} = Cl(1)$. Ein weiteres bekanntes Beispiel sind die Quaternionen $\mathbb{H} = \{x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3 : x_i \in \mathbb{R}\}$ mit den komplexen Einheiten i, j und k, die folgende Beziehung erfüllen:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Die Multiplikation ergibt sich auch hier durch formales Ausmultiplizieren und Anwenden dieser Identitäten. Setzt man $i = e_1$, $j = e_2$ und $k = e_1e_2$ so kann man $\mathbb{H}$ als Clifford-Algebra $Cl(2)$ identifizieren. Insbesondere lässt sich in diese Clifford-Algebra auch $\mathbb{C}$ in natürlicher Weise einbetten, indem man die komplexe Zahl $x_0 + ix_1$ mit dem Element $x_0 + ix_1$ von $\mathbb{H}$ identifiziert.

Definition 2.2. *Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\bar{\cdot} : Cl(n) \to Cl(n)$, die durch die Beziehungen*

$$\begin{aligned} &(i) && \overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x} \\ &(ii) && \overline{e_i} = -e_i \quad i \in \{1,\dots,n\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

definiert ist, heißt Clifford-Konjugation.

Die Clifford-Konjugation ist eine Möglichkeit die komplexe Konjugation auf Clifford-Zahlen zu verallgemeinern. Sie ist durch die geforderte $\mathbb{R}$-Linearität zusammen mit den Bedingungen (2.5) für alle e_A mit $A \in \mathcal{P}_n$ und damit auch auf ganz $Cl(n)$ wohldefiniert.

Die lineare Hülle $span\{e_A : \ |A| = k\}$ bildet den $\binom{n}{k}$-dimensionalen Teilraum Cl_n^k von $Cl(n)$. Seine Elemente werden für $k \geq 1$ als k-Vektoren bezeichnet. $Sc(x) := x_\emptyset$ heißt auch Skalarteil von $x = \sum_{A\in\mathcal{P}_n} x_A e_A$.

Es sei $[\cdot]_k$ die Projektion von $Cl(n)$ auf Cl_n^k, das heißt

$$[x]_k := \sum_{|A|=k} x_A e_A.$$

Dann lässt sich jedes Element $x \in Cl(n)$ schreiben als

$$x = [x]_0 + [x]_1 + [x]_2 + \ldots + [x]_n.$$

Lemma 2.3. *Es gilt*

$$x \mapsto \overline{x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} [x]_k = [x]_0 - [x]_1 - [x]_2 + [x]_3 + [x]_4 - \ldots .$$

Für $x \in Cl_n^k$ gilt insbesondere

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x && \textit{falls } k \equiv 0,3 \pmod 4 \\ \overline{x} &= -x && \textit{falls } k \equiv 1,2 \pmod 4 \end{aligned}$$

Beweis. Da die Abbildung linear ist, reicht es, die Werte der Basis-Vektoren zu betrachten. Für diese gilt:

$$\begin{aligned} \overline{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}} &= \overline{e_{i_k}}\,\overline{e_{i_{k-1}}}\cdots\overline{e_{i_1}} = \\ &= (-1)^k e_{i_k}e_{i_{k-1}}\ldots e_{i_1} = \\ &= (-1)^k(-1)^{k-1} e_{i_1}e_{i_k}e_{i_{k-1}}\cdots e_{i_2} = \\ &= (-1)^k(-1)^{k-1}(-1)^{k-2} e_{i_1}e_{i_2}e_{i_k}e_{i_{k-1}}\cdots e_{i_3} = \\ &= \ldots = (-1)^{\sum_{j=1}^k j} e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} \end{aligned}$$

Dabei ist der Exponent $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$ genau dann gerade, wenn k oder $k+1$ Vielfache von 4 sind – also für $k \equiv 0,3 \pmod 4$ – und ungerade für $k \equiv 1,2 \pmod 4$. Somit folgt die Aussage des Lemmas.

□

Die algebraische Struktur der Menge Clifford-Zahlen ist die einer Algebra, die wesentlich schwächer ist als die eines Körpers. Abgesehen von den Spezialfällen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ ist die Multiplikation in $Cl(n)$ nicht kommutativ, wie man bereits an (2.1) sieht. Es gilt vielmehr das folgende Resultat:

Lemma 2.4. *Das Zentrum*[3] *der Algebra $Cl(n)$ besteht für gerade n aus den reellen Zahlen $\mathbb{R} \cong span\{e_0\}$ und für ungerade n aus der linearen Hülle von e_0 und $e_1 e_2 \cdots e_n$.*

Beweis. Da die Multiplikation bilinear ist, reicht es, für jedes $x \in Cl(n)$ die Kommutativität mit den Basis-Elementen zu überprüfen, um zu zeigen, dass es im Zentrum liegt. e_0 kommutiert als neutrales Element klarerweise mit allen Elementen aus $Cl(n)$. Wegen $e_i e_j = -e_j e_i$ für $i \neq j$ gilt

$$e_1 e_2 \cdots e_n \cdot e_i = (-1)^{n-1} e_i \cdot e_1 e_2 \cdots e_n \tag{2.6}$$

da e_i mit $n-1$ Faktoren $e_j \neq e_i$ vertauscht werden muss. Damit folgt für ungerades n, dass $e_1 e_2 \cdots e_n$ mit den Erzeugenden e_i kommutiert. Für ein beliebiges Basis-Element $e_A = e_{i_1} \cdots e_{i_j}$ erhält man daraus zusammen mit der Assoziativität der Multiplikation die Vertauschbarkeit von e_A mit $e_1 e_2 \cdots e_n$, indem man jeden Faktor einzeln vertauscht. Wegen der Bilinearität der Multiplikation liegt mit e_0 auch jedes skalare Vielfache bzw. mit e_0 und $e_1 e_2 \cdots e_n$ auch jede Linearkombination von e_0 und $e_1 e_2 \cdots e_n$ im Zentrum von $Cl(n)$.

Für gerades n folgt aus (2.6), dass $e_1 e_2 \cdots e_n$ mit jedem der erzeugenden Elemente $e_j, j = 1, \ldots, n$ antikommutiert, d.h. dass $e_j \cdot e_1 e_2 \cdots e_n = -e_1 e_2 \cdots e_n \cdot e_j$ gilt. Für ein beliebiges Basis-Element $e_A = e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ mit $1 \leq k < n$ existiert ebenfalls zumindest ein e_j, das mit e_A antikommutiert. Man wähle einfach $j \notin A$ falls k ungerade ist und $j \in A$ falls k gerade ist, dann folgt wie oben $e_A e_j = -e_j e_A$.

Ist nun $x = \sum_{A \in \mathcal{P}_n} x_A e_A$ mit $x_{A'} \neq 0$ für ein $A' \neq \emptyset$ falls n gerade ist, bzw. für ein $\emptyset \neq A' \subsetneq \{1, \ldots, n\}$, falls n ungerade ist, so sei e_j so, dass $e'_A e_j = -e_j e'_A$ gilt. Wäre x ein Element des Zentrums von $Cl(n)$, so wäre

$$x = -(e_j e_j)x = -e_j x e_j = \sum_{A \in \mathcal{P}_n} x_A(-e_j) e_A e_j = \sum_{A \in \mathcal{P}_n \setminus \{A'\}} \pm x_A e_A - x_{A'} e_{A'}.$$

Das ist aber ein Widerspruch, denn die Darstellung bezüglich der Basis $(e_A)_{A \in \mathcal{P}_n}$ ist eindeutig. Also kann so ein x kein Element des Zentrums von $Cl(n)$ sein, sodass dieses tatsächlich nur aus der linearen Hülle von e_0 bzw. e_0 und $e_1 e_2 \cdots e_n$ besteht. □

Neben der fehlenden Kommutativität zeigt sich die schwächere algebraische Struktur von $Cl(n)$ auch darin, dass die Existenz multiplikativer Inverser nicht für alle Elemente gegeben ist:

Lemma 2.5. *Für $n \geq 3$ enthält $Cl(n)$ Nullteiler, das heiß es gibt $x, y \in Cl(n)$ mit $x, y \neq 0$ und $x \cdot y = 0$.*

Beweis. Im Fall $n \geq 3$ gilt wegen $e_{\{123\}}^2 = 1$

$$(1 + e_{\{123\}})(1 - e_{\{123\}}) = 1 + e_{\{123\}} - e_{\{123\}} - e_{\{123\}}^2 = 0.$$

□

Für ein Element $x \in Cl(n)$ ist sein Betrag analog zu $\mathbb{C}$ definiert als

$$|x| = \sqrt{\sum_{A \in \mathcal{P}_n} x_A^2}$$

$Cl(n)$ kann damit als euklidischer Raum der Dimension 2^n angesehen werden. Es bezeichne $[x \cdot y]$ das Skalarprodukt auf diesem Raum. Im Gegensatz zu $\mathbb{C}$ gilt aber im Allgemeinen nicht $|x| = x\overline{x}$.

Lemma 2.6. *Mit $Sc(x) = [x]_0$ gilt:*

(i) Für $x, y \in Cl(n)$ gilt die Beziehung

$$Sc(\overline{x}y) = Sc(x\overline{y}) = [x \cdot y]$$

und damit insbesondere

$$|x|^2 = Sc(\overline{x}x) = Sc(x\overline{x})$$

[3]Das Zentrum einer Algebra besteht aus jenen Elementen, die mit allen anderen Elementen kommutieren.

(ii) Für sogenannte Paravektoren — das sind Clifford-Zahlen die nur aus Skalarteil und 1-Vektor bestehen — gilt sogar die aus $\mathbb{C}$ bekannte Identität

$$|x|^2 = \overline{x}x = x\overline{x} \tag{2.7}$$

(iii) Wenn y der Beziehung $y\overline{y} = |y|^2$ genügt, dann gilt

$$|xy| = |yx| = |x|\,|y|$$

für alle $x \in Cl(n)$. Insbesondere gilt das, wenn y ein Paravektor ist.

Beweis. Die Menge $\{\pm e_A : A \in \mathcal{P}_n\}$ versehen mit der Clifford-Multiplikation ist eine Gruppe, denn das Produkt zweier Basiselemente ist wieder ein solches — gegebenenfalls mit negativem Vorzeichen. Weiters ist die Multiplikation assoziativ, e_0 das neutrale Element und aus (2.3) folgt mit $k = |A|$ wegen $p(A, A) = \sum_{j=0}^{k-1} j = \frac{k(k-1)}{2}$, dass $\overline{e_A}$ das inverse Element zu e_A und damit $-\overline{e_A}$ das inverse Element zu $-e_A$ ist. Mit Lemma 2.3 ist nämlich

$$\begin{aligned} e_A \cdot \overline{e_A} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} e_A \cdot e_A = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} (-1)^{\#(A \cap A)} (-1)^{p(A,A)} e_{A \triangle A} = \\ = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} (-1)^k (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} e_0 = (-1)^{k(k+1)} e_0 = e_0. \end{aligned}$$

Also sind alle Gruppenaxiome erfüllt.

Es ist weiters

$$\begin{aligned} \overline{x}y = \sum_{A,B \in \mathcal{P}_n} x_A y_B \, \overline{e_A} \, e_B = \sum_{C \in \mathcal{P}_n} \left(\sum_{\overline{e_A}\, e_B = \pm e_C} \pm x_A y_B \right) e_C = \\ = \sum_{\overline{e_A}\, e_B = \pm e_0} \pm x_A y_B e_0 + \sum_{C \neq \emptyset} \left(\sum_{\overline{e_A}\, e_B = \pm e_C} \pm x_A y_B \right) e_C, \end{aligned}$$

wobei wegen der Gruppeneigenschaft $\overline{e_A}\, e_B = \pm e_0$ genau für $A = B$ und nur mit positivem Vorzeichen $+e_0$ gilt. Denn ist $\overline{e_A} e_B = -e_0$ so folgt nach den bisherigen Überlegungen $e_B = -e_A$ – wir summieren aber nur über die positiven Basis-Elemente. Daraus folgt

$$Sc(\overline{x}y) = \sum_{A \in \mathcal{P}_n} x_A y_A = (x, y)$$

Die Aussage für $x\overline{y}$ folgt analog — also ist (i) bewiesen.

Um (ii) zu zeigen, sei $x = x_0 + \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ein Paravektor. Dann ist $\bar{x} = x_0 - \sum_{i=1}^n x_i e_i$ und wegen $e_i e_j = -e_j e_i$ für $i \neq j$ und $e_i^2 = -1$ gilt

$$\overline{x}x = x_0^2 - \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \, e_i e_j = x_0^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j (e_i e_j + e_j e_i) = |x|^2.$$

Analog folgt $x\bar{x} = |x|^2$.

Für (iii) rechnen wir nach:

$$|xy|^2 = Sc(xy\overline{xy}) = Sc(xy\overline{y}\overline{x}) = Sc(x\bar{x}|y|^2) = |y|^2 Sc(x\bar{x}) = |x|^2|y|^2.$$

Analog folgt die Gleichheit für $|yx|$. □

Auch wenn multiplikative Inverse in $Cl(n)$ nicht für alle Elemente existieren, so garantiert Lemma 2.6 deren Existenz zumindest für die oben genannten Paravektoren. Für diese gilt nämlich offensichtlich

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}. \tag{2.8}$$

Neben den $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ nehmen auch die oben vorgestellten Quaternionen $\mathbb{H}$ eine Sonderstellung unter den Clifford-Algebren ein, denn hier gilt (2.8) für alle $x \in \mathbb{H}$, wie man leicht nachrechnet. Insbesondere sind in $\mathbb{H}$ also bis auf die Kommutativität der Multiplikation alle Körperaxiome erfüllt — die Quaternionen bilden damit eines der bekanntesten Beispiele für einen Schiefkörper.

3 Differentialformen

Ein nützliches Hilfsmittel bei der Definition von Clifford-Holomorphie sind Differentialformen – insbesondere lassen sich einige der in Abschnitt 5 vorgestellten Eigenschaften holomorpher Funktionen mit ihrer Hilfe besonders einfach beweisen. Um Differentialformen definieren zu können, benötigen wir zunächst jedoch ein grundlegendes Verständnis für alternierende Abbildungen.

3.1 Alternierende Abbildungen

Es bezeichne S_p die Menge aller Permutationen von $\{1, \ldots, p\}$ — also die Menge aller bijektiven Selbstabbildungen dieser Menge. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass sich jede Abbildung $\sigma \in S_p$ als Produkt von Transpositionen — also Abbildungen, die nur zwei Elemente der Grundmenge vertauschen und alle anderen auf sich selbst abbilden — darstellen lässt. Das Vorzeichen $\operatorname{sgn}(\sigma)$ einer Permutation σ ist $+1$ oder -1, je nachdem, ob sie das Produkt einer geraden oder einer ungeraden Anzahl von Transpositionen ist.

Definition 3.1. *Es seien V und W zwei normierte Vektorräume über $\mathbb{R}$.*

(i) Eine Abbildung $f : V^p \to W$ heißt p-fach multilinear oder p-linear, wenn sie in jedem Argument linear ist. Die Menge aller stetigen p-fach multilinearen Abbildungen bezeichnen wir mit $L_p(V, W)$. Für $p = 0$ setzen wir $L_0(V, W) = W$.

(ii) Eine Abbildung $f \in L_p(V, W)$ heißt alternierend, wenn für jede Permutation $\sigma \in S_p$ gilt

$$\sigma \star f(x_1, \ldots, x_p) := f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) f(x_1, \ldots, x_p). \tag{3.1}$$

Die Menge aller p-linaren alternierenden Abbildungen von V nach W bezeichnen wir mit $A_p(V, W)$.

Klarerweise sind auch $L_p(V, W)$ und $A_p(V, W)$ Vektorräume über $\mathbb{R}$. Sind V und W mit einer Norm versehen, so wird auf $L_p(V, W)$ analog zum Raum der linearen Abbildungen $L_1(V, W)$ durch

$$||f|| := \sup_{||x_i||_V = 1} ||f(x_1, \ldots, x_p)||_W$$

eine Norm definiert. Es ist, wie man leicht nachprüft, $||f||$ die kleinste Konstante M, sodass für alle $(x_1, \ldots, x_p) \in V^p$ gilt

$$||f(x_1, \ldots, x_p)||_W \leq M ||x_1||_V ||x_2||_V \cdots ||x_p||_V$$

Genau wie im Fall linearere Abbildungen, lässt sich zeigen, dass $(L_p(V, W), ||.||)$ vollständig ist, falls W es ist.

$A_p(V, W)$ ist ein bezüglich dieser Norm abgeschlossener Teilraum von $L_p(V, W)$. Ist nämlich $f \in L_p(V, W)$ Grenzwert einer Folge $f_n \in A_p(V, W)$, so konvergieren für feste $x_1, \ldots, x_p$ die Funktionswerte $f_n(x_1, \ldots, x_p)$ gegen $f(x_1, \ldots, x_p)$. Damit folgt aber für eine beliebige Permutation $\sigma \in S_p$

$$\begin{aligned} \sigma \star f(x_1, \ldots, x_p) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) &= \lim_{n \to \infty} f_n(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = \\ &= \lim_{n \to \infty} \operatorname{sgn}(\sigma) f_n(x_1, \ldots, x_p) = \operatorname{sgn}(\sigma) f(x_1, \ldots, x_p). \end{aligned}$$

Also ist f alternierend.

Lemma 3.2. *Eine Abbildung $f \in L_p(V, W)$ ist genau dann alternierend, wenn gilt $f(x_1, \ldots, x_p) = 0$, falls die x_i linear abhängig sind.*

Beweis. Es sei f alternierend und es seien $x_1, \ldots, x_p$ linear unabhängig, sodass $x_i = \sum_{j \in \{1,\ldots,p\} \setminus \{i\}} \alpha_j x_j$ für ein $i \in \{1, \ldots, p\}$. Wegen der Multilinearität von f gilt dann

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_p) &= f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \alpha_j x_j, x_{i+1}, \ldots, x_p) = \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \alpha_j f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_p). \end{aligned}$$

Somit reicht es zu zeigen, dass $f(x_1,\dots,x_p)=0$, falls $x_i=x_j$ für zwei Indizes $i\neq j$. In diesem Fall sei τ_{ij} jene Transposition, die die Indizes i und j vertauscht. Dann folgt

$$f(x_1,\dots,x_p)=f(x_{\tau_{ij}(1)},\dots,x_{\tau_{ij}(p)})=-f(x_1,\dots,x_p).$$

Also muss $f(x_1,\dots,x_p)=0$ gelten.

Gilt umgekehrt $f(x_1,\dots,x_p)=0$ für linear abhängige x_i, dann betrachten wir zunächst eine beliebige Transposition τ_{ij}. Für feste $x_k\in V$ mit $k\in\{1,\dots,p\}\backslash\{i,j\}$ und variable $x_i,x_j\in V$ setzen wir

$$\hat f(x_i,x_j):=f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_p).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}0=\hat f(x_i+x_j,x_i+x_j)&=\\ &=\hat f(x_i,x_i)+\hat f(x_i,x_j)+\hat f(x_j,x_i)+\hat f(x_j,x_j)=\hat f(x_i,x_j)+\hat f(x_j,x_i).\end{aligned}$$

Also folgt

$$\tau_{ij}\star f(x_1,\dots,x_p)=\hat f(x_j,x_i)=-\hat f(x_i,x_j)=\operatorname{sgn}(\tau_{ij})f(x_1,\dots,x_p).$$

Also ist (3.1) für jede Transposition erfüllt. Für beliebige Permutationen $\sigma,\pi\in S_p$ gilt nun aber

$$(\pi\sigma)\star f=\pi\star(\sigma\star f),\tag{3.2}$$

denn mit der Schreibweise $\hat x_i=x_{\pi(i)}$ gilt

$$\begin{aligned}\pi\star(\sigma\star f)(x_1,\dots,x_p)&=\sigma\star f(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(p)})=\sigma\star f(\hat x_1,\dots,\hat x_p)=\\ &=f(\hat x_{\sigma(1)},\dots,\hat x_{\sigma(p)})=f(x_{\pi(\sigma(1))},\dots,x_{\pi(\sigma(p))})=(\pi\sigma)\star f(x_1,\dots,x_p)\end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion sieht man nun leicht, dass die Gleichheit in (3.1) auch für Produkte aus endlich vielen Transpositionen stimmt. Da aber jede Permutation $\sigma\in S_p$ als Produkt endlich vieler Transpositionen dargestellt werden kann, gilt (3.1) für alle $\sigma\in S_p$. Also ist f alternierend.

□

Ist der Zielraum W sogar eine Algebra, so wollen wir die Menge aller alternierenden Abbildungen von V nach W mit einer Multiplikation versehen. Für zwei Funktionen $f\in L_p(V,W)$ und $g\in L_q(V,W)$ betrachten wir dazu zunächst die Abbildung

$$f\bullet g\,(x_1,\dots,x_{p+q}):=f(x_1,\dots,x_p)\cdot g(x_{p+1},\dots x_{q+1}).$$

Analog dazu können wir auch für einen beliebigen Vektorraum W, der nicht zwangsläufig eine Algebra sein muss, und für zwei Abbildungen $f\in L_p(V,\mathbb{R})$ und $g\in L_q(V,W)$ die Abbildung

$$f\bullet g\,(x_1,\dots,x_{p+q}):=f(x_1,\dots,x_p)\cdot g(x_{p+1},\dots x_{q+1})$$

definieren. In diesem Fall schreiben wir auch einfach nur fg an Stelle von $f\bullet g$.

Offensichtlich ist die Funktion $f\bullet g$ ein Element von $L_{p+q}(V,W)$ — allerdings ist sie im Allgemeinen nicht alternierend, selbst wenn f und g es sind. Um dieses Problem zu beseitigen, definieren wir einen Antisymmetrisierungs-Operator.

Definition 3.3. *Es seien V und W reelle Vektorräume. Für $f\in L_p(V,W)$ definieren wir*

$$\operatorname{Alt}(f):=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\operatorname{sgn}(\sigma)\,\sigma\star f.$$

Der Operator $\operatorname{Alt}: f\mapsto\operatorname{Alt}(f)$ *heißt Antisymmetrisierungs-Operator oder Alternator.*

Lemma 3.4. Alt *ist eine Projektion von $L_p(V,W)$ auf $A_p(V,W)$.*

Beweis. Für $\sigma \in S_p$ ist $f \mapsto \sigma \star f$ offensichtlich eine lineare Abbildung von $L_p(V,W)$ nach $L_p(V,W)$ – also ist auch Alt als Linearkombination solcher Abbildungen eine lineare Abbildung von $L_p(V,W)$ nach $L_p(V,W)$.

Weiters gilt für $\pi \in S_p$ wegen (3.2) und wegen $\operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\pi\sigma)$

$$\pi \star \operatorname{Alt}(f) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \pi \star (\sigma \star f) = \frac{1}{k!} \operatorname{sgn}(\pi) \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\pi\sigma)\, (\pi\sigma) \star f = \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{Alt}(f),$$

denn $\sigma \to \pi\sigma$ ist eine Bijektion von S_p auf sich selbst. Also ist $\operatorname{Alt}(f)$ alternierend. Schließlich gilt für $f \in A_p(V,W)$ wegen $\operatorname{sgn}(\sigma)\,\sigma \star f = f$ und $|S_p| = p!$

$$\operatorname{Alt}(f) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \sigma \star f = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} f = f.$$

Insbesondere folgt $\operatorname{Alt} \circ \operatorname{Alt} = \operatorname{Alt}$ mit $\operatorname{Alt}(L_p(V,W)) = A_p(V,W)$. Also ist Alt eine Projektion von $L_p(V,W)$ auf $A_p(V,W)$.

□

Ist $I \subsetneq \{1,\dots,p\}$ so kann man auch

$$\operatorname{Alt}_I(f) = \frac{1}{(\#I)!} \sum_{\sigma \in S_{p,I}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \sigma \star f$$

definieren, wobei $S_{p,I}$ die Menge jener Permutationen bezeichnet, die nur Indizes aus I vertauschen – für die also gilt $\sigma|_{\{1,\dots,p\}\setminus I} = \operatorname{id}|_{\{1,\dots,p\}\setminus I}$. Genau wie in Lemma 3.4 sieht man, dass Alt_I eine Projektion auf jenen Teilraum von $L_p(V,W)$ ist, der aus allen in den Indizes I alternierenden Funktionen besteht. Alternierend in den Indizes I heißt dabei genau, dass $\sigma \star f = \operatorname{sgn}(\sigma) f$ für alle $\sigma \in S_{p,I}$.

Lemma 3.5. *Es gilt*

$$\operatorname{Alt}_I \circ \operatorname{Alt} = \operatorname{Alt} \circ \operatorname{Alt}_I = \operatorname{Alt}.$$

Beweis. Für jedes $f \in L_p(V,W)$ ist $\operatorname{Alt}(f)$ als alternierende Funktion sicher auch in den Indizes I alternierend. Also gilt klarerweise $\operatorname{Alt}_I \circ \operatorname{Alt} = \operatorname{Alt}$, da ja Alt_I genau die Projektion auf den Teilraum der Funktionen mit dieser Eigenschaft ist.

Umgekehrt gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Alt} \circ \operatorname{Alt}_I(f) &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \sigma \star \operatorname{Alt}_I f = \\
&= \frac{1}{p!(\#I)!} \sum_{\sigma \in S_p} \sum_{\pi \in S_{p,I}} \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\pi)\, \sigma \star (\pi \star f) = \\
&= \frac{1}{(\#I)!p!} \sum_{\pi \in S_{p,I}} \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma\pi)(\sigma\pi) \star f = \\
&\overset{*}{=} \frac{1}{(\#I)!} \sum_{\pi \in S_{p,I}} \operatorname{Alt}(f) = \operatorname{Alt}_I \circ \operatorname{Alt}(f) = \operatorname{Alt}(f),
\end{aligned}$$

wobei die mit $*$ gekennzeichnete Gleichheit wieder deshalb gilt, weil für festes π die Abbildung $\sigma \mapsto \pi\sigma$ eine Bijektion von S_p auf sich selbst ist.

□

Definition 3.6 (Dachprodukt)**.** *Es sei W eine $\mathbb{R}$-Algebra, $f \in A_p(V,W)$ und $g \in A_q(V,W)$ oder W ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $f \in A_p(V,\mathbb{R})$ und $g \in A_q(V,W)$. Dann ist ihr Dachprodukt $f \wedge g$ definiert als*

$$f \wedge g := \frac{(p+q)!}{p!q!} \operatorname{Alt}(f \bullet g) \tag{3.3}$$

Der Faktor $\frac{(p+q)!}{p!q!}$ ist dabei notwendig, um die Assoziativität des Dachprodukts zu garantieren. Ausgeschrieben als Summe hat das Dachprodukt die Form

$$f \wedge g\,(x_1, \ldots, x_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) \cdot g(x_{\sigma(p+q)}, \ldots, x_{\sigma(q+1)}) \tag{3.4}$$

Lemma 3.7. *Es gilt:*

(i) Das Dachprodukt ist eine bilineare Abbildung von $A_p(V,W) \times A_q(V,W)$ nach $A_{p+q}(V,W)$ bzw. von $A_p(V,\mathbb{R}) \times A_q(V,W)$ nach $A_{p+q}(V,W)$.

(ii) Das Dachprodukt ist assoziativ, d.h. für $f \in A_p(V,\mathbb{R})$, $g \in A_q(V,\mathbb{R})$ und $h \in A_r(V,W)$ gilt:

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h).$$

Ist W eine Algebra, so gilt dies auch für $f \in A_p(V,W)$, $g \in A_q(V,W)$ und $h \in A_r(V,W)$ oder $f \in A_p(V,\mathbb{R})$, $g \in A_q(V,W)$ und $h \in A_r(V,W)$.

Beweis. Da $f \bullet g$ $(p+q)$-linear und Alt eine Projektion von $L_{p+q}(V,W)$ auf den Teilraum der alternierenden Abbildungen ist, gilt offensichtlich $f \wedge g \in A_{p+q}(V,W)$. Die Bilinearität folgt ebenfalls sofort aus der Definition, da $\bullet$ eine bilineare Operation und Alt linear ist. Die Assoziativität folgt aus Lemma 3.5. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
(f \wedge g) \wedge h &= \frac{(p+q+r)!}{(p+q)!r!} \operatorname{Alt}((f \wedge g) \bullet h) = \\
&= \frac{(p+q+r)!}{(p+q)!r!} \operatorname{Alt}\left(\frac{(p+q)!}{p!q!} \operatorname{Alt}(f \bullet g) \bullet h\right) = \\
&= \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!} \operatorname{Alt} \circ \operatorname{Alt}_{\{1,\ldots,p+q\}}(f \bullet g \bullet h) = \\
&= \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!} \operatorname{Alt}(f \bullet g \bullet h) = \\
&= \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!} \operatorname{Alt} \circ \operatorname{Alt}_{\{p+1,\ldots,p+q+r\}}(f \bullet g \bullet h) = \\
&= \frac{(p+q+r)!}{p!(q+r)!} \operatorname{Alt}\left(f \bullet \frac{(q+r)!}{q!r!} \operatorname{Alt}(g \bullet h)\right) = f \wedge (g \wedge h).
\end{aligned}$$

□

Man beachte, dass $f \wedge g$ auch in dem Fall definiert ist, dass f oder g Elemente von $A_0(V,W) = W$ bzw. $A_0(V,\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ sind. Das Dachprodukt ist dann nichts anderes als die Multiplikation mit der entsprechenden Konstanten aus W bzw. $\mathbb{R}$. Sind f und g beide lineare Abbildungen – also Elemente aus $L_1(V,W) = A_1(V,W)$ bzw. $L_1(V,\mathbb{R}) = A_1(V,\mathbb{R})$ – so gilt

$$f \wedge g\,(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot g(x_2) - f(x_2) \cdot g(x_1) \tag{3.5}$$

Für alternierende Abbildungen höheren Grades, wird diese Formel allerdings ziemlich unhandlich. In dem für uns im Folgenden interessanten Fall, dass V endlich-dimensional ist und sich nach Wahl einer Basis mit dem $\mathbb{R}^n$ identifizieren lässt, exisitert jedoch eine einfache kanonische Darstellungsweise für Elemente aus $A_p(V,W)$. Zunächst zeigen wir:

Lemma 3.8. *Ist W eine $\mathbb{R}$-Algebra und sind $f_1, \ldots, f_n \in A_1(V,W) = L_1(V,W)$ so gilt*

$$f_1 \wedge \ldots \wedge f_n\,(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, f_1(x_{\sigma(1)}) \cdots f_n(x_{\sigma(n)}) \tag{3.6}$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Für $n = 2$ folgt die Behauptung direkt aus (3.5). Gilt nun (3.6) für ein $n \in \mathbb{N}$, so folgt mit der Summendarstellung (3.4) des Dachprodukts

$$\begin{aligned}
f_1 \wedge \ldots \wedge f_{n+1}\,(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= (f_1 \wedge \ldots \wedge f_n) \wedge f_{n+1}\,(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) f_1 \wedge \ldots \wedge f_n\,(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \cdot f_{n+1}(x_{\sigma(n+1)}) = \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\sigma) f_1(x_{\sigma\pi(1)}) \cdots f_n(x_{\sigma\pi(n)}) \cdot f_{n+1}(x_{\sigma(n+1)}) = \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\sigma) f_1(x_{\sigma\pi(1)}) \cdots f_n(x_{\sigma\pi(n)}) \cdot f_{n+1}(x_{\sigma(n+1)}) =
\end{aligned}$$

Ist nun aber $\pi \in S_n$, so ist $\sigma \to \sigma\pi$ eine Bijektion von S_{n+1} in sich selbst, wobei π mit jenem Element von S_{n+1} identifiziert wird, das eingeschränkt auf $\{1, \ldots, n\}$ gerade π ergibt und $n+1$ auf sich selbst abbildet. Insbesondere gilt dann wieder $\operatorname{sgn}(\sigma\pi) = \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\sigma)$. Somit ist aber die innere Summe unabhängig von π und mit $\tilde{\sigma} = \sigma\pi$ folgt wegen $\#S_n = n!$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tilde{\sigma} \in S_{n+1}} \operatorname{sgn}(\tilde{\sigma}) f_1(x_{\tilde{\sigma}(1)}) \cdots f_{n+1}(x_{\tilde{\sigma}(n+1)}) = \\
&= \sum_{\tilde{\sigma} \in S_{n+1}} \operatorname{sgn}(\tilde{\sigma}) f_1(x_{\tilde{\sigma}(1)}) \cdots f_{n+1}(x_{\tilde{\sigma}(n+1)}).
\end{aligned}$$

□

Betrachtet man die rechte Seite von (3.6), so erkennt man die Determinante jener $n \times n$-Matrix, bei der in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte das Element $f_i(x_j)$ steht, womit für $W = \mathbb{R}$ gilt:

$$f_1 \wedge \ldots \wedge f_n\,(x_1, \ldots, x_n) = \det\left(f_i(x_j)\right)_{i,j=1,\ldots,n}. \tag{3.7}$$

Sind also insbesondere die f_i die Komponenten-Funktionen einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ so ist $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n\,(x_1, \ldots, x_n)$ nichts anderes als das n-dimensionale (orientierte) Volumen des von den Vektoren $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ aufgespannten Parallel-Epipeds.

Es habe nun der Vektorraum V endliche Dimension n, sodass er sich nach Wahl einer Basis mit dem $\mathbb{R}^n$ identifizieren lässt. Für $i = 1, \ldots, n$ bezeichne e_i den i-ten kanonischen Basisvektor und u_i die i-te kanonische Koordinatenform.

Lemma 3.9. *Zu jeder p-linearen alternierenden Abbildung $f \in A_p(\mathbb{R}^n, W)$ existieren eindeutige Konstanten $c_{i_1 \ldots i_p} \in W$ mit $1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n$, sodass gilt*

$$f = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n} c_{i_1 \ldots i_p} u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_p}. \tag{3.8}$$

Beweis. Bezeichnet $x_i^{[j]}$ die j-te Koordinate des Vektors x_i, so gilt für jede multilineare Abbildung $f \in L_p(\mathbb{R}^n, W)$

$$\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_p) &= \sum_{i_1=1}^{n} x_1^{[i_1]} f(e_{i_1}, x_2, \ldots, x_p) \\
&= \sum_{i_1, i_2=1}^{n} x_1^{[i_1]} x_2^{[i_2]} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, x_p) \\
&= \ldots = \sum_{i_1, \ldots, i_p=1}^{n} x_1^{[i_1]} \cdots x_p^{[i_p]} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Eine multilineare Abbildung ist also eindeutig bestimmt durch die Werte

$$c_{i_1 \ldots i_p} = f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \tag{3.10}$$

der Funktion auf den p-Tupeln der Basisvektoren. Umgekehrt lässt sich durch Vorgabe der Werte $c_{i_1,\dots,i_p}$ durch (3.10) und (3.9) eindeutig eine multilineare Abbildung definieren. Eine Funktion $f \in L_p(\mathbb{R}^n, W)$ ist nun genau dann alternierend, wenn für jede Permutation $\sigma \in S_p$ gilt

$$c_{\sigma(i_1)\dots\sigma(i_p)} = f(e_{\sigma(i_1)}, \dots, e_{\sigma(i_p)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = \operatorname{sgn}(\sigma) c_{i_1\dots i_p}.$$

Insbesondere ist dann $c_{i_1\dots i_p} = 0$, falls zwei der $i_1, \dots, i_p$ übereinstimmen. Wenn man nun all jene Terme zusammenfasst, die durch eine Permutation von p verschiedenen Zahlen $i_1, \dots, i_p$ auseinander hervorgehen, erhält man

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_p) &= \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} x_1^{[i_1]} \cdots x_p^{[i_p]} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} c_{i_1\dots i_p} \left(\sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) x_1^{[\sigma(i_1)]} \cdots x_p^{[\sigma(i_p)]} \right). \end{aligned}$$

Wegen Lemma 3.6 gilt aber

$$u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_p}(x_1, \dots, x_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) x_1^{[\sigma(i_1)]} \cdots x_p^{[\sigma(i_p)]},$$

also folgt

$$f = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} c_{i_1\dots i_p} u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_p}$$

Umgekehrt ist klar, dass nach Vorgabe der $c_{i_1\dots i_p}$ durch (3.8) eine alternierende Abbildung festgelegt wird.

□

Aus Lemma 3.9 folgt insbesondere $A_p(\mathbb{R}^k, W) = \{0\}$ f+r $p > n$, da die rechte Seite von (3.8) dann die leere Summe ist. Außerdem hat für $p = n$ jedes $f \in A_p(\mathbb{R}^n, W)$ die Form

$$f = c\, u_1 \wedge \dots \wedge u_n$$

mit $c \in W$.

Hat insbesondere W endliche Dimension m, so lässt sich $A_p(\mathbb{R}^n, W)$ mit dem $\mathbb{R}^s$ mit $s = \binom{n}{p} \cdot m$ indentifizieren, da es $\binom{n}{p}$ verschiedene Konstanten $c_{i_1,\dots,i_p}$ gibt und jede dieser Konstanten durch m Koordinaten beschrieben werden kann. Entsprechend lässt sich dann $L_p(\mathbb{R}^n, W)$ mit dem $\mathbb{R}^s$ identifizieren, wobei $s = n^p m$.

3.2 Differentialformen im $\mathbb{R}^n$

Im Folgenden sei Wein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum von endlicher Dimension m.

Definition 3.10 (Differentialform)**.** *Es sei G eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Eine Abbildung*

$$\omega_p : G \to A_p(\mathbb{R}^n, W)$$

heißt Differentialform vom Grad p (kurz p-Differentialform) mit Werten in W. Die Menge aller solcher Differentialformen bezeichnen wir mit $\Omega_p(G, W)$.

Für $x \in G$ ist $\omega_p(x)$ also ein Element aus $A_p(\mathbb{R}^n, W)$. Mit $\omega_p(x)[\xi_1, \dots, \xi_p]$ wollen wir den Wert dieser Funktion an der Stelle $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ mit $\xi_i \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen. Weiters ist ω_p in dem Spezialfall $p = 0$ wegen $A_0(\mathbb{R}^n, W) = W$ nichts anderes als eine Funktion von $\mathbb{R}^n$ nach W.

Definition 3.11 (Dachprodukt von Differentialformen)**.** *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen. Weiters sei $\omega_p \in \Omega_p(G, \mathbb{R})$ und $\omega_q \in \Omega_q(G, W)$ oder $\omega_p \in \Omega_p(G, W)$, $\omega_q \in \Omega_q(G, W)$ und W zusätzlich eine Algebra. Dann heißt die Differentialform $\omega_p \wedge \omega_q \in \Omega_{p+q}(G, W)$, die definiert ist durch*

$$\omega_p \wedge \omega_q(x) := \omega_p(x) \wedge \omega_q(x),$$

Dachprodukt von ω_p und ω_q. Offensichtlich gilt $\omega_p \wedge \omega_q \in \Omega_{p+q}(G, W)$.

Analog lassen sich natürlich auch die Operationen $\mathrm{Alt}(\omega_p)$ und $\omega_p \bullet \omega_q$ usw. durch punktweise Anwedung für Differentialformen erklären.

Die Eigenschaften des Dachprodukts von alternierenden Abbildungen vererben sich natürlich auf jenes von Differentialformen – insbesondere ist das Dachprodukt von Differentialformen bilinear und assoziativ. Weiters erhalten wir aus Lemma 3.8 sofort die folgende kanonische Darstellung einer Differentialform.

Korollar 3.12. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und es bezeichne dx_i die konstante 1-Differentialform, die jedem $x \in G$, die i-te Koordinatenform $u_i \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ zuordnet. Dann lässt sich jede p-Differentialform ω_p in eindeutiger Weise schreiben als*

$$\omega_p(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} c_{i_1 \ldots i_p}(x)\ dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}, \tag{3.11}$$

wobei die Koeffizienten $c_{i_1 \ldots i_p}(x)$ Funktionen von G nach W sind.

Wählt man für W eine Basis und stellt ω_p in den entsprechenden Koordinaten dar, so haben die einzelnen Komponentenfunktionen ebenfalls die Gestalt (3.11), *wobei aber die Koeffizientenfunktionen $c_{i_1 \ldots i_p}(x)$ Werte in $\mathbb{R}$ haben.*

Da W als normierter Raum endlicher Dimension vollständig ist, sind gemäß der zu Beginn von Abschnitt 3.1 angestellten Überlegungen sowohl $(L_p(\mathbb{R}^n, W), ||.||)$ als auch $(A_p(\mathbb{R}^n, W), ||.||)$ ebenfalls vollständig. Also ist folgende Definition sinnvoll:

Definition 3.13. *Eine Differentialform $\omega_p \in \Omega_p(G, W)$ heißt k-mal stetig differenzierbar, wenn sie als Abbildung von $G \subset \mathbb{R}^n$ in den Banachraum $A_p(V, W)$ k-mal stetig differenzierbar im Sinne der mehrdimensionalen Analysis ist. Die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren Differentialformen aus $\Omega_p(G, W)$ bezeichnen wir mit $\Omega_p^{(k)}(G, W)$.*

Die Ableitung ω_p' einer stetig differenzierbaren Differentialform der Form (3.11) – also jene Funktion, die jedem $x \in G$ die lineare Abbildung $\omega_p'(x)[\xi] = \frac{\partial}{\partial \xi}\omega_p(x)$ zuweist – hat nun genau die Form $\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} c'_{i_1 \ldots i_p}(x)\ dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$. Es gilt nämlich[4]

$$\begin{aligned} \omega_p(x+h) - \omega_p(x) - \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} c'_{i_1 \ldots i_p}(x)[h]\ dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} = \\ = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \Big(c_{i_1 \ldots i_p}(x+h) - c_{i_1 \ldots i_p}(x) - c'_{i_1 \ldots i_p}(x)[h] \Big)\ dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} = \\ = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} o(||h||)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} = o(||h||) \end{aligned}$$

und somit $\omega_p'(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} c'_{i_1 \ldots i_p}(x)\ dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$. Es ist klarerweise ω_p' eine Abbildung von G nach $L_1(\mathbb{R}^n, A_p(\mathbb{R}^n, W)) \subset L_1(\mathbb{R}^n, L_p(\mathbb{R}^n, W))$. Jedes $\omega \in L_1(\mathbb{R}^n, L_p(\mathbb{R}^n, W))$ kann nun aber mittels der Identifikation

$$\omega[\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_p] := \omega(\xi_0)[\xi_1, \ldots, \xi_p]$$

auch als Element von $L_{p+1}(\mathbb{R}^n, W)$ interpretiert werden, da ω natürlich sowohl in der Variable ξ_0 als auch in den Variablen $\xi_i, i = 1, \ldots, n$ linear ist. Insbesondere können wir ω_p' damit auch als Abbildung von G nach $L_{p+1}(\mathbb{R}^n, W)$ auffassen:

$$\omega_p'(x)[\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_p] := \omega_p'(x)[\xi_0]\,[\xi_1, \ldots, \xi_p]. \tag{3.12}$$

Diese Überlegung funktioniert natürlich auch, falls ω_p keine Differentialform – also keine Abbildung von G nach $A_p(\mathbb{R}^n, W)$ – sondern nur eine stetig differenzierbare Abbildung von G nach $L_p(\mathbb{R}^n, W)$ ist.

Als nächstes wollen wir den in der Theorie von Differentialformen fundamentalen Begriff der äußeren Ableitung einführen. Motiviert wird dieser, durch Satz 3.32 – den Satz von Stokes –, der eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung darstellt.

[4]Eine Funktion $g(h)$ wird in der Landau-Notation als $o(1)$ bezeichnet, wenn sie für $h \to 0$ gegen 0 konvergiert. Ist das Produkt $ko(1)$ mit einer anderen Funktion k erklärt, so schreibt man einfach $o(k)$. Wegen $\frac{f}{k} = \frac{ko(1)}{k} = o(1)$ gilt für eine Funktion $f = o(k)$ also genau dann, wenn $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{k(h)} = 0$.

Definition 3.14 (äußere Ableitung)**.** *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\omega_p \in \Omega_p^{(k)}(G,W)$ mit $k \geq 1$. Dann heißt die $p+1$-Differentialform $d\omega_p$, die definiert ist durch*

$$d\omega_p(x) := (p+1)\mathrm{Alt}(\omega_p'(x)) \tag{3.13}$$

äußere Ableitung von ω_p.

Lemma 3.15. *Es gilt:*

(i) Die äußere Ableitung
$$d : \omega_p \mapsto d\omega_p$$
ist eine lineare Abbildung und bildet p-Differentialformen der Klasse C^k auf $p+1$-Differentialformen der Klasse C^{k-1} ab.

(ii) Für zwei Differentialformen $\omega_p \in \Omega_p^{(k)}(G,\mathbb{R})$ und $\omega_q \in \Omega_q^{(k)}(G,W)$ erfüllt die äußere Ableitung die Leibniz-Regel
$$d(\omega_p \wedge \omega_q) = (d\omega_p) \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge (d\omega_q).$$
Ist W sogar eine Algebra, so gilt dies auch für $\omega_p \in \Omega_p^{(k)}(G,W)$ und $\omega_q \in \Omega_q^{(k)}(G,W)$

Beweis. (i) folgt sofort aus der Defintion. Da sowohl die Differentiation als auch Alt lineare Operationen sind, ist natürlich auch die äußere Ableitung als deren Hintereinanderausführung linear. Da sich beim Differenzieren die Differentiationsordnung um 1 verringert und Alt diese nicht verändert, ist ω_p' $k-1$-mal stetig differenzierbar. Weiters lässt sich $\omega_p'(x)$ gemäß (3.12) als $p+1$-lineare Abbildung auffassen und deren Projektion $\mathrm{Alt}(\omega_p')$ liegt klarerweise in $A_{p+1}(\mathbb{R}^n,W)$. Also ist in Summe $d\omega_p \in \Omega_{p+1}^{(r-1)}(G,W)$.

Um (ii) zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass jede bilineare Abbildung $B : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar ist und die Ableitung im Punkt (x,y) die folgende Form hat:

$$B'(x,y)[(\xi_1,\xi_2)] = B(\xi_1,y) + B(x,\xi_2). \tag{3.14}$$

Es gilt nämlich wegen der Bilinearität mit $h = (h_1,h_2)$

$$\begin{aligned} B(x+h_1,y+h_2) - B(x,y) &= B(h_1,y) + B(x,h_2) + B(h_1,h_2) \\ &= B(h_1,y) + B(x,h_2) + o(||h||), \end{aligned}$$

denn wenn $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ wie üblich mit der Produkt- oder der Maximumsnorm versehen ist, gilt

$$B(h_1,h_2) \leq ||B||\,||h_1||\,||h_2|| \leq ||B||\,||h||^2 = o(||h||).$$

Betrachtet man nun die Abbildung $\omega_p \bullet \omega_q$ mit $\omega_p \in \Omega_p^{(k)}(G,W)$ und $\omega_q \in \Omega_q^{(k)}(G,W)$, so lässt sich diese als Verkettung $\omega_p \bullet \omega_q = f \circ g$ der Funktionen

$$f : \begin{cases} A_p(\mathbb{R}^n,W) \times A_q(\mathbb{R}^n,W) & \to & L_{p+q}(\mathbb{R}^n,W) \\ (\varphi_p,\varphi_q) & \mapsto & \varphi_p \bullet \varphi_q \end{cases} \quad \text{und} \quad g : \begin{cases} G & \to & A_p(\mathbb{R}^n,W) \times A_q(\mathbb{R}^n,W) \\ x & \mapsto & (\omega_p(x),\omega_q(x)) \end{cases}$$

darstellen. Aus (3.14) folgt $f'(\varphi_p,\varphi_q)[(\xi_p,\xi_q)] = f(\xi_p,\varphi_q) + f(\varphi_p,\xi_q)$ und klarerweise gilt $g'(x) = (\omega_p'(x),\omega_q'(x))$. Aus der Kettenregel $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \circ g'(x)$ folgt damit

$$(\omega_p \bullet \omega_q)'(x) = \omega_p'(x) \bullet \omega_q(x) + \omega_p(x) \bullet \omega_q'(x)$$

bzw.

$$\begin{aligned} (\omega_p \bullet \omega_q)'(x)[\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{p+q}] &= (\omega_p \bullet \omega_q)'(x)[\xi_0]\,[\xi_1,\ldots,\xi_{p+q}] = \\ &= \big(\omega_p'(x)[\xi_0] \bullet \omega_q(x) + \omega_p(x) \bullet \omega_q'(x)[\xi_0]\big)\,[\xi_1,\ldots,\xi_{p+q}] = \\ &= \omega_p'(x) \bullet \omega_q(x)[\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{p+q}] + \omega_p(x) \bullet \omega_q'(x)[\xi_{\tau(0)},\xi_{\tau(1)},\ldots,\xi_{\tau(p+q)}] = \\ &= \Big(\omega_p' \bullet \omega_q + \tau \star (\omega_p \bullet \omega_q')\Big)(x)[\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{p+q}], \end{aligned}$$

wobei $\tau \in \tilde{S}_{p+q+1}$ jene Permutation bezeichnet, die die Elemente

$$(0, 1, \dots, p, p+1, \dots, p+q) \qquad \text{zu} \qquad (1, \dots, p, 0, p+1, \dots, p+q)$$

umordnet. Es ist $\tau = \tau_{p-1,p}\tau_{p-2,p-1}\dots\tau_{0,1}$, wobei $\tau_{i,i+1}$ wieder jene Transposition bezeichnet, die nur die Indizes i und $i+1$ vertauscht. Damit folgt wegen der Linearität der Ableitung

$$\begin{aligned}
(\omega_p \wedge \omega_q)'(x)[\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p+q}] &= \left(\frac{(p+q)!}{p!q!}\mathrm{Alt} \circ (\omega_p \bullet \omega_q)\right)'(x)[\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p+q}] = \\
&= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma)(\omega_p \bullet \omega_q)'(x)[\xi_0, \xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)}] = \\
&= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma)\Big(\omega_p' \bullet \omega_q + \tau \star (\omega_p \bullet \omega_q')\Big)(x)[\xi_0, \xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)}] \\
&= \frac{(p+q)!}{p!q!}\mathrm{Alt}_{\{1,\dots,p+q\}} \circ \Big(\omega_p' \bullet \omega_q + \tau \star (\omega_p \bullet \omega_q')\Big)(x)[\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p+q}]
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wegen Lemma 3.5 und wegen $\mathrm{sgn}(\tau) = (-1)^p$ weiter

$$\begin{aligned}
d(\omega_p \wedge \omega_q) &= (p+q+1)\,\mathrm{Alt} \circ (\omega_p \wedge \omega_q)' = \\
&= \frac{(p+q+1)!}{p!q!}\,\mathrm{Alt} \circ \mathrm{Alt}_{\{1,\dots,p+q\}} \circ (\omega_p' \bullet \omega_q + \tau \star (\omega_p \bullet \omega_q')) = \\
&= \frac{(p+q+1)!}{p!q!}\,\mathrm{Alt} \circ (\omega_p' \bullet \omega_q) + \frac{(p+q+1)!}{p!q!}\mathrm{Alt} \circ (\tau \star (\omega_p \bullet \omega_q')) = \\
&= \frac{(p+q+1)!}{p!q!}\,\mathrm{Alt} \circ (\omega_p' \bullet \omega_q) + (-1)^p\frac{(p+q+1)!}{p!q!}\,\mathrm{Alt} \circ (\omega_p \bullet \omega_q')
\end{aligned}$$

Für den ersten Summanden gilt dabei

$$\begin{aligned}
&\frac{(p+q+1)!}{p!q!}\mathrm{Alt} \circ (\omega_p' \bullet \omega_q) = \\
&= \frac{(p+q+1)!}{(p+1)!q!}\mathrm{Alt} \circ \Big((p+1)\mathrm{Alt}_{\{0,\dots,p\}} \circ (\omega_p' \bullet \omega_q)\Big) = \\
&= \frac{(p+q+1)!}{(p+1)!q!}\mathrm{Alt} \circ (d\omega_p \bullet \omega_q) = d\omega_p \wedge \omega_q
\end{aligned}$$

Analog sieht man, dass $\frac{(p+q+1)!}{p!q!}\mathrm{Alt} \circ (\omega_p \bullet \omega_q') = \omega_p \wedge d\omega_q$. Insgesamt erhält man also

$$d(\omega_p \wedge \omega_q) = d\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_q.$$

□

Lemma 3.16. *Für eine stetig differenzierbare 0-Differentialform f, also eine Funktion mit Werten in W, stimmt die äußere Ableitung mit dem aus der reellen Analysis bekannten totalen Differential überein, d.h. es gilt*

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Insbesondere gilt deshalb für eine stetig differenzierbare Funktion f

$$f(x+h) - f(x) = df[h] + o(||h||). \tag{3.15}$$

Beweis. Da jede lineare Abbildung bereits alternierend ist, stimmt Alt auf $L_1(\mathbb{R}^n, W)$ mit der Identität überein. Also gilt

$$df = \mathrm{Alt} \circ f' = f'.$$

Wegen $df(x)[e_i] = f'(x)[e_i] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ gilt dann mit (3.8) und (3.10)

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i.$$

Die Gleichung (3.15) ist dann einfach die Definition der Ableitung aus der reellen Analysis.

□

Bezeichnet x_i die Einschränkung der i-ten Koordinatenform auf das betrachtete Gebiet, so ist die Abbildung x_i' genau die Abbildung, die jedem Punkt $x \in G$ die i-te Koordinatenform zuordnet, das heißt es gilt $d(x_i) = dx_i$. Unsere Notation ist also konsistent.

Weiters gilt die folgende Fundamentaleigenschaft der äußeren Differentiation:

Lemma 3.17. *Es sei $\omega_p \in \Omega_p^{(k)}(G, W)$ mit $k \geq 2$. Dann gilt*

$$d(d\omega_p) = 0. \tag{3.16}$$

Beweis. Aus der Linearität der Ableitung folgt für $\phi \in C^1(G, L_{p+1}(\mathbb{R}^n, W))$

$$(\mathrm{Alt} \circ \phi)'(x)[\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p+1}] = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{\sigma \in S_{p+1}} \mathrm{sgn}(\sigma) \phi'(x)[\xi_0, \xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p+1)}] =$$

$$= \frac{1}{(p+1)!} \sum_{\substack{\sigma \in \tilde{S}_{p+2} \\ \sigma(0)=0}} \mathrm{sgn}(\sigma) \phi'(x)[\xi_{\sigma(0)}, \xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p+1)}] = \mathrm{Alt}_{\{1,\ldots,p+1\}}(\phi'(x))[\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p+1}],$$

wobei $\tilde{S}_{p+2}$ die symmetrische Gruppe der Menge $\{0, 1, \ldots, p+1\}$ bezeichnet. Wegen Lemma 3.5 gilt deshalb für ω_p

$$\begin{aligned} d(d\omega_p)(x) &= (p+2)\mathrm{Alt} \circ d\omega_p' = \\ &= (p+2)\mathrm{Alt} \circ \big((p+1)\mathrm{Alt} \circ (\omega_p')\big)' = \\ &= (p+2)(p+1)\mathrm{Alt} \circ \mathrm{Alt}_{\{1,\ldots,p+1\}} \circ \omega_p'' = \\ &= (p+2)(p+1)\mathrm{Alt} \circ \omega_p'' \end{aligned}$$

wobei $\omega_p(x)''$ die zweite Ableitung von ω_p an der Stelle x bezeichnet, die sich mittels (3.12) als Element von $L_{p+2}(\mathbb{R}^n, W)$ auffassen lässt. Es gilt dann also

$$\omega_p''(x)[\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p+1}] = \frac{\partial^2}{\partial \xi_0 \partial \xi_1} \omega_p(x)[\xi_2, \ldots, \xi_{p+1}].$$

Da aber nach dem Satz von Schwarz die Differentiationsreihenfolge vertauscht werden darf, ist ω_p'' in den ersten beiden Indizes symmetrisch. Es bezeichne nun τ_{01} die Permutation, die nur diese ersten beiden Indizes vertauscht. Dann lässt sich $\tilde{S}_{p+2}$ disjunkt zerlegen in die Menge $\tilde{S}_{p+2}^+$ aller Permutationen σ mit $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ und die Menge $\tilde{S}_{p+2}^-$ aller Permutationen mit negativem Vorzeichen. Es ist nun aber offensichlich $\tilde{S}_{p+2}^- = \{\sigma\tau_{01} : \sigma \in \tilde{S}_{p+2}^+\}$, sodass wegen der Symmetrie von ω_p'' in den ersten beiden Indizes folgt

$$d(d\omega_p)(x) = (p+2)(p+1)\mathrm{Alt}(\omega_p''(x)) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \tilde{S}_{p+2}} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma \star \omega_p''(x) =$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \tilde{S}_{p+2}^+} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma \star \omega_p''(x) + \mathrm{sgn}(\sigma\tau)(\sigma\tau) \star \omega_p''(x) =$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \tilde{S}_{p+2}^+} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma \star \omega_p''(x) - \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)\, \sigma \star (\tau \star \omega_p'')(x) =$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \tilde{S}_{p+2}^+} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma \star \omega_p''(x) - \mathrm{sgn}(\sigma)\, \sigma \star \omega_p''(x) = 0.$$

□

Insbesondere folgt mit diesem Lemma für eine p-Differentialform ω_p, dass $d\omega_p = 0$ eine notwendige Bedingung für die Existenz einer $p-1$-Differentialform ω_{p-1} mit $d\omega_{p-1} = \omega_p$ ist. Der Vollständigkeit halber wollen wir noch den folgenden Satz anführen, der zeigt, dass in vielen Fällen $d\omega_p = 0$ sogar eine hinreichende Bedingung dafür ist, jedoch ohne einen Beweis zu liefern. Ein solcher findet sich beispielsweise in [2, S. 47 ff.].

Satz 3.18 (Lemma von Poincaré). *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet*[5]*. Genügt eine Differentialform $\omega_p \in \Omega_p^{(n)}(G, W)$ mit $n \geq 1$ der Gleichung $d\omega_p = 0$, so ist sie im Fall $p = 0$ konstant und für $p > 0$ existiert eine Differentialform ω_{p-1} vom Grad $p - 1$ mit*

$$d\omega_{p-1} = \omega_p.$$

Bevor wir nun zur Integrationstheorie übergehen, wollen wir noch – ohne auf die Hintergründe näher einzugehen – einen Operator für Differentialformen definieren, der bei der Definition holomorpher Funktionen nützlich sein wird.

Definition 3.19 (Hodge-Sternoperator). *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $0 \leq p \leq n$. Für $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ mit $i_1 < \ldots < i_p$ seien $i_{p+1}, \ldots, i_n$ so, dass $\{i_{p+1}, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\} \backslash \{i_1, \ldots, i_p\}$ und $i_{p+1} < \ldots < i_n$. Weiters sei σ jene Permutation, die $(1, \ldots, n)$ zu $(i_1, \ldots, i_n)$ umordnet. Dann definieren wir:*

$$(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p})^* := \operatorname{sgn}(\sigma)\, dx_{i_{p+1}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_n}.$$

Der Hodge-Stern-Operator ist nun definiert als

$$.^* \begin{cases} \Omega_p(G, W) & \to \quad \Omega_{n-p}(G, W) \\ \quad \omega_p & \mapsto \quad \omega_p^* := \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} a_{i_1 \ldots i_p}(x)\, (dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge dx_{i_p})^* \end{cases},$$

wobei $\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} a_{i_1 \ldots i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ die kanonische Darstellung der Differentialform aus Korollar 3.12 ist.

Insbesondere gilt

$$dx_i^* = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

denn um $\{1, \ldots, n\}$ zu $\{i, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$ zu permutieren, sind $i - 1$ Vertauschungen notwendig. Für die entsprechende Permutation gilt also $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{i-1}$. Bildet man nun wieder das Dachprodukt mit dx_i, so erhält man:

$$dx_i \wedge dx_i^* = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \qquad \text{und} \qquad dx_i^* \wedge dx_i = (-1)^{n-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \tag{3.17}$$

da im ersten Fall wieder $i - 1$ und im zweiten Fall $n - i$ Permutationen notwendig sind, um die dx_i innerhalb des Dachprodukts in aufsteigende Reihenfolge zu bringen. Diese Identitäten werden wir an einigen Stellen benötigen.

Es bezeichne $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \Omega_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ die Identität auf $\mathbb{R}^n$. Die äußere Ableitung $dx \in \Omega_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ hat dann die Form $dx = \sum_{i=1}^n e_i dx_i$. Eine für uns bedeutsame Differentialform, ist die Form dx^*. Wertet man sie aus, so erhält man wegen Lemma 3.6 mit $h_i = (h_{i1}, \ldots, h_{in})^T \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} dx^*[h_1, \ldots, h_{n-1}] &= \sum_{i=1}^n e_i\, dx_i^*[h_1, \ldots, h_{n-1}] = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} e_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n[h_1, \ldots, h_{n-1}] = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} e_i \sum_{\sigma \in S_{p,i}} \operatorname{sgn}(\sigma) h_{\sigma(1),1} \cdots h_{\sigma(i-1),i-1} h_{\sigma(i+1),i+1} \cdots h_{\sigma(n-1),n-1} = \\ &= \det \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \\ h_{1,1} & \ldots & h_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n,1} & \ldots & h_{n,n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[5]Ein Gebiet heißt sternförmig, wenn es einen Punkt $x_0 \in G$ gibt, sodass für jedes $x \in G$ die Verbindungsstrecke zwischen x und x_0 – also $tx + (1-t)x_0$ mit $t \in [0, 1]$ – in G liegt.

Dabei ist die Determinante formal nach der ersten Zeile zu entwickeln. Die Differentialform dx^* entspricht damit dem aus der linearen Algebra bekannten Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^n$:

$$\bigtimes_{i=1}^{n-1} h_i := dx^*[h_1, \ldots, h_{n-1}].$$

Bildet man nun das Skalarprodukt dieses Vektors mit einem beliebigen Vektor $a \in \mathbb{R}^n$, so erhält man – wie man durch ausmultiplizieren leicht sieht – die Determinante jener Matrix, in der die e_i durch die Komponenten von a ersetzt wurden:

$$\left[a \cdot \bigtimes_{i=1}^{n-1} h_i\right] = \det \begin{pmatrix} a^T \\ h_1^T \\ \vdots \\ h_{n-1}^T \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Insbesondere steht $dx^*[h_1, \ldots, h_{n-1}]$ deshalb orthogonal auf alle h_i, denn die Determinante einer Matrix mit linear abhängigen Zeilen ist null.

Lemma 3.20 (Lagrange-Identität)**.** *Es sei $h_i \in \mathbb{R}^n$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und*

$$h := \bigtimes_{i=1}^{n-1} h_i.$$

Dann gilt

$$|h|^2 = \det([h_i \cdot h_j])_{i,j=1,\ldots,n-1} \tag{3.19}$$

Beweis. Nach den oben angestellten Überlegungen gilt:

$$([h \cdot h])^2 = \det \begin{pmatrix} h^T \\ h_1^T \\ \cdots \\ h_{n-1}^T \end{pmatrix} \det(h, h_1, \ldots, h_{n-1}) = \det \begin{pmatrix} [h \cdot h] & [h \cdot h_1] & \cdots & [h \cdot h_n] \\ [h_1 \cdot h] & [h_1 \cdot h_1] & \cdots & [h_1 \cdot h_n] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [h_n \cdot h] & [h_n \cdot h_1] & \cdots & [h_n \cdot h_n] \end{pmatrix}.$$

Wegen $[h_i \cdot h] = 0$ folgt bei Entwicklung nach der ersten Zeile

$$|h|^4 = ([h \cdot h])^2 = |h|^2 \det([h_i \cdot h_j]).$$

□

3.3 Integration und Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

Eine fundamentale Bedeutung haben Differentialformen, da sie die Definition eines koordinatenunabhängigen Integralbegriffs von Funktionen auf Mannigfaltigkeiten ermöglichen. Da die exakte Formulierung dieser Integrationstheorie den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, wird sie hier nur soweit dargelegt, wie für ein grundlegendes Verständnis erfordlich ist. Einige Resultate werden deshalb ohne Beweis angeführt – zu finden sind diese beispielsweise in [4] oder [6].

Zunächst wollen wir einen sinnvollen Integralbegriff für Differentialformen auf dem $\mathbb{R}^n$ definieren. Aus Lemma 3.11 folgt, dass es im $\mathbb{R}^n$ im Wesentlichen nur eine Differentialform vom Grad n gibt, nämlich

$$\omega_n(x) = f(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots, dx_n.$$

Für $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$ schreiben wir in Zukunft auch kurz $d\sigma$. Identifiziert man $d\sigma$ mit dem n-dimensionalen Volumenelement der Lebesgue-Integration, so lässt sich das Integral einer Differentialform folgendermaßen definieren:

Definition 3.21. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\omega_n = f d\sigma \in \Omega_n(G, \mathbb{R})$. Ist f integrierbar im Sinne von Lebesgue, so ist das Integral von ω_n definiert als*

$$\int_G \omega_n := \int_G f(x) d\lambda_n(x),$$

wobei λ_n das n-dimensionale Lebesuge-Maß bezeichnet.
Hat $\omega_n = f d\sigma$ Werte in $Cl(n)$, so definieren wir $\int_G \omega_n$ komponentenweise. Mit $f(x) = \sum_{A\in\mathcal{P}_n} f_A(x)e_A$ gilt also

$$\int_G \omega_n = \sum_{A\in\mathcal{P}_n} e_A \int_G f_A(x)d\lambda_n(x).$$

Ist nicht klar, nach welcher Variable integriert werden soll, so schreiben wir Integrationsvariable in den Index: $d\sigma_x$.

Für die Integration über Mannigfaltigkeiten spielen Koordinatenwechsel eine fundamentale Rolle. Es ist daher entscheidend zu wissen, wie sich Differentialformen unter solchen Variablenwechseln verhalten.

Definition 3.22 (Rücktransport)**.** *Es seien $G \subset \mathbb{R}^n$ und $H \subset \mathbb{R}^m$ offen. Weiters sei $\varphi \in C^{k+1}(H,G)$ eine $(k+1)$-mal stetig differenzierbare Abbildung von H nach G. Ist $\omega_p \in \Omega_p^{(k)}(G,W)$, dann heißt die Differentialform $\varphi^\dagger\omega_p \in \Omega_p^{(k)}(H,W)$, die definiert ist durch*

$$\varphi^\dagger\omega_p(y)[\xi_1,\dots,\xi_p] := \omega_p(\varphi(y))[\varphi'(y)[\xi_1],\dots,\varphi'(y)[\xi_p]],$$

Rücktransport von ω_p unter φ.

Man sieht leicht, dass $\varphi^\dagger\omega_p$ tatsächlich ein Element aus $\Omega_p^{(k)}(H,W)$ und diese Definition somit sinnvoll ist. Die Multilinearität und Alterniertheit von $\varphi^\dagger\omega_p(y)$ ergeben sich aus der von $\omega_p(\varphi(y))$ und der Linearität von $\varphi'(y)$. Die Differenzierbarkeit folgt leicht aus der Kettenregel – insbesondere ist es deshalb auch notwendig $\varphi \in C^{k+1}(H,G)$ zu fordern um $\varphi^\dagger\omega_p \in C^{(k)}(H,W)$ zu erhalten.

Lemma 3.23. *Sind $H \subset \mathbb{R}^m$, $H' \subset \mathbb{R}^l$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : H \to G$ sowie $\psi : H' \to H$ $k+1$-mal stetig differenzierbar, so gilt für $\omega_p \in \Omega_p^{(k)}(G,W)$*

$$\psi^\dagger(\varphi^\dagger\omega_p) = (\varphi\circ\psi)^\dagger\omega_p$$

Beweis. Es gilt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}\psi^\dagger(\varphi^\dagger\omega_p)(y)[\xi_1,\dots,\xi_p] &= \varphi^\dagger\omega_p(\psi(y))[\psi'(y)\xi_1,\dots,\psi'(y)\xi_p] = \\ &= \omega_p(\varphi(\psi(y)))[\varphi'(\psi(y))\psi'(y)\xi_1,\dots,\varphi'(\psi(y))\psi'(y)\xi_p] = \\ &= \omega_p(\varphi\circ\psi(y))](\varphi\circ\psi)'(y)\xi_1,\dots,(\varphi\circ\psi)'(y)\xi_p] \\ &= (\varphi\circ\psi)^\dagger\omega_p(y)[\xi_1,\dots,\xi_p]\end{aligned}$$

□

Offenbar ist die Abbildung $\varphi^\dagger : \Omega_p^{(k)}(G,W) \to \Omega_p(k)(H,W)$ linear. Zudem gilt:

Lemma 3.24. *Der Rücktransport von Differentialformen ist verträglich mit dem Dachprodukt und der äußeren Ableitung, das heißt für zwei Differentialformen $\omega_p \in \Omega_p^{(k)}(G,W)$ und $\omega_q \in \Omega_q^{(k)}(G,W)$ und eine Abbildung $\varphi \in C^{k+1}(H,G)$ gilt:*

$$\varphi^\dagger(\omega_p \wedge \omega_q) = \varphi^\dagger(\omega_p) \wedge \varphi^\dagger(\omega_q)$$

und

$$\varphi^\dagger(d\omega_p) = d(\varphi^\dagger\omega_p).$$

Beweis. Mit der Darstellung (3.4) des Dachprodukts folgt

$$\begin{aligned}\varphi^\dagger(\omega_p\wedge\omega_q)(y)[\xi_1,\dots,\xi_{p+q}] &= \omega_p\wedge\omega_q(\varphi(y))[\varphi'(y)\xi_1,\dots,\varphi'(y)\xi_{p+q}] = \\ = \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}} \omega_p(\varphi(y))[\varphi'(y)\xi_{\sigma(1)},\dots,\varphi'(y)\xi_{\sigma(p)}] &\cdot \omega_q(\varphi(y))[\varphi'(y)\xi_{\sigma(p+1)},\dots,\varphi'(y)\xi_{\sigma(p+q)}] = \\ = \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}} \varphi^\dagger\omega_p(y)[\xi_{\sigma(1)},\dots,\xi_{\sigma(p)}] &\cdot \varphi^\dagger\omega_q(y)[\xi_{\sigma(p+1)},\dots,\xi_{\sigma(p+q)}] = \\ &= (\varphi^\dagger\omega_p \wedge \varphi^\dagger\omega_q)(y)[\xi_1,\dots,\xi_p].\end{aligned}$$

Für die äußere Ableitung gilt:

$$\begin{aligned}
d(\varphi^\dagger\omega_p(y))[\xi_0,\xi_1,\dots\xi_p] &= \frac{p+1}{(p+1)!}\sum_{\sigma\in\tilde{S}_p}(\varphi^\dagger\omega_p(y))'[\xi_{\sigma(0)},\xi_{\sigma(1)},\dots,\xi_{\sigma(p)}] = \\
&\overset{*}{=} \frac{p+1}{(p+1)!}\sum_{\sigma\in\tilde{S}_p}\omega_p(\varphi(y))[\varphi'(y)\xi_{\sigma(0)},\varphi'(y)\xi_{\sigma(1)},\dots,\varphi'(y)\xi_{\sigma(p)}] = \\
&= d\omega_p(\varphi(y))[\varphi'(y)\xi_0,\varphi'(y)\xi_1,\dots,\varphi'(y)\xi_p] = \varphi^\dagger\omega_p(y)[\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_1]
\end{aligned}$$

Die mit $*$ gekennzeichnete Gleichheit folgt dabei, da nach der Kettenregel gilt

$$(\omega_p\circ\varphi)'(y) = \omega_p'(\varphi(y))\varphi'(y),$$

sodass vor dem Parameter ξ_0 ebenfalls die Ableitungsmatrix von φ steht.

□

Wir betrachten nun insbesondere den Spezialfall, dass $\omega_p\in\Omega_p(G,W)$ eine p-Differentialform auf einer offenen Teilmenge G des $\mathbb{R}^p$ und $\varphi\in C^{k+1}(H,G)$ ein C^{k+1}-Diffeomorphismus ist – also eine bijektive, in beide Richtungen $k+1$-mal stetig differenzierbare Funktion von $H\subset\mathbb{R}^p$ nach G. Dann ergibt sich aus

$$\omega_p(x) = c(x)\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_p$$

wegen der Verträglichkeit des Rücktransports mit dem Dachprodukt und der äußeren Ableitung

$$\begin{aligned}
\varphi^\dagger\omega_p(y) &= c(\varphi(y))\,d\varphi^\dagger x_1\wedge\ldots\wedge d\varphi^\dagger x_p = \\
&= c(\varphi(y))\,d\varphi_1\wedge\ldots\wedge d\varphi_p\,,
\end{aligned}$$

denn $\varphi^\dagger x_i = x_i\circ\varphi$ ist genau die i-te Kompontentenfunktion φ_i. Nun ist aber $d\varphi_i = \sum_{j=1}^p \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}dy_j$, also folgt aus der Linearität des Dachprodukts

$$\begin{aligned}
\varphi^\dagger\omega_p &= c\circ\varphi\sum_{j_1=1}^p\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_{j_1}}\,(dy_{j_1}\wedge d\varphi_2\wedge\ldots\wedge d\varphi_p) = \ldots = \\
&= c\circ\varphi\sum_{j_1,\dots,j_p=1}^p\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_{j_1}}\cdots\frac{\partial\varphi_p}{\partial y_{j_p}}dy_{j_1}\wedge\ldots\wedge dy_{j_p}\overset{*}{=} \\
&= c\circ\varphi\sum_{\sigma\in S_p}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_{\sigma(1)}}\cdots\frac{\partial\varphi_p}{\partial y_{\sigma(p)}}dy_{\sigma(1)}\wedge\ldots\wedge dy_{\sigma(p)} = \\
&= c\circ\varphi\sum_{\sigma\in S_p}\frac{\partial\varphi_{\sigma(1)}}{\partial y_1}\cdots\frac{\partial\varphi_{\sigma(p)}}{\partial y_p}\,\mathrm{sgn}(\sigma)\,dy_1\wedge\ldots\wedge dy_p,
\end{aligned}$$

wobei die mit $*$ gekennzeichnet Gleichheit folgt, da das Dachprodukt null ist, wenn zwei der Indizes j_i übereinstimmen. Nun ist aber $\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)\frac{\partial\varphi_{\sigma(1)}}{\partial y_1}\cdots\frac{\partial\varphi_{\sigma(p)}}{\partial y_p}$ genau die Funktionaldeterminante von φ und wir erhalten

$$\varphi^\dagger\omega_p = c(\varphi(y))\det\varphi'(y)\;dy_1\wedge\ldots\wedge dy_p, \tag{3.20}$$

die klassische aus der Analysis bekannte Transformationsformel. Da es sich bei Integralen von Differentialformen jedoch um orientierte Integrale handelt, fehlt hier der Betrag der Funktionaldeterminante. Insbesondere gilt also für orientierungserhaltende Diffeomorphismen φ – also solchen mit positiver Funktionaldeterminante:

$$\int_H\varphi^\dagger\omega_p = \int_G\omega_p. \tag{3.21}$$

Dieser Zusammenhang wird später die Defintion des Integrals auf einer Mannigfaltigkeit motivieren.

Definition 3.25 (Mannigfaltigkeit)**.** *(i) Eine Teilmenge $M_p\subset\mathbb{R}^n$ heißt p-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, wenn es zu jedem Punkt $x\in M_p$ eine offene Umgebung U von x in M_p versehen mit der Spurtopologie und einen Homöomorphismus $\varphi: H\to U$ gibt – das heißt eine bijektive,* *in beide Richtungen stetige Abbildung – , wobei H eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^p$ ist. φ wird in diesem Fall Einbettung von M_p genannt, das Paar (U, ψ) mit $\psi = \varphi^{-1} : U \to H$ heißt dann Karte von M_p. Eine Menge $\mathfrak{A} = (U_i, \psi_i)_{i \in I}$ von Karten von M_p heißt Atlas der Mannigfaltigkeit, wenn $\bigcup_{i \in I} U_i = M_p$ ist.*

(ii) *Eine p-dimensionale Mannigfaltigkeit M_p im $\mathbb{R}^n$ zusammen mit einem Atlas $\mathfrak{A}$ heißt k-mal stetig differenzierbar, wenn jede zu $\mathfrak{A}$ gehörende Einbettung $\varphi : H \to U$ der Mannigfaltigkeit k-mal stetig differenzierbar als Abbildung von H in den $\mathbb{R}^n$ ist und deren Ableitung φ' immer maximalen Rang hat, d.h. wenn $\operatorname{rang} \varphi'(x) = p$ für alle $x \in U$ gilt. Man spricht dann auch von einer glatten Mannigfaltigkeit.*

(iii) *Zu zwei Karten (U_1, ψ_1) und (U_2, ψ_2) mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ ist der zugehörige Kartenwechsel $\mathcal{X}_{1,2}$ folgendermaßen definiert:*

$$\mathcal{X}_{1,2} : \begin{cases} \psi_1(U_1 \cap U_2) & \to \psi_2(U_1 \cap U_2) \\ t & \mapsto \psi_2 \circ \varphi_1(t) \end{cases}.$$

Ist eine Mannigfaltigkeit k-mal stetig differenzierbar, so lässt sich zeigen, dass auch jeder ihrer Kartenwechsel k-mal stetig differenzierbar ist.

(iv) *Eine Teilmenge $M_p \subset \mathbb{R}^n$ heißt p-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand im $\mathbb{R}^n$, wenn die Karten statt in den $\mathbb{R}^p$ in den Halbraum $\mathcal{H}^p = \{t \in \mathbb{R}^p : t_1 \geq 0\}$ versehen mit der Spurtopologie abbilden, wenn also die zu einer Karte gehörige Menge H eine relativ offene Menge von $\mathcal{H}^p$ ist.*
Die Menge aller Punkte x, für die eine Karte (U, ψ) mit $\psi(x) \in \partial\mathcal{H}^p := \{t \in \mathcal{H}^p : t_1 = 0\}$ existiert, heißt dann Rand ∂M_p der Mannigfaltigkeit.

Die Definition von ∂M_p ist sinnvoll – man kann sich nämlich überlegen, dass jeder Punkt $p \in M_p$, der von einer Karte auf einen Punkt $t \in \partial\mathcal{H}^p$ abgebildet wird, auch von jeder anderen Karte auf einen solchen abgebildet wird. Insbesondere ist der Rand einer p-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit selbst eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Dimension $p - 1$. Um ihn zu beschreiben betrachte man zum Beispiel die Funktion $\iota : \mathbb{R}^{p-1} \to \partial\mathcal{H}^p$, die $(t_2, \ldots, t_p)$ auf $(0, t_2, \ldots, t_p)$ abbildet. Für jede Einbettung φ, die Randpunkte beschreibt, ist $\varphi \circ \iota$ dann eine Einbettung von ∂M_p.

Das klassische Beispiel einer Mannigfaltigkeit mit Rand ist eine n-dimensionale abgeschlossene Kugel im $\mathbb{R}^n$ – ihr Rand ist dann genau die Kugeloberfläche. Weiters lässt sich jede offene Menge O des $\mathbb{R}^n$ als n-dimensionale Mannigfaltigkeit auffassen. Um diese zu beschreiben reicht schon eine einzige Einbettung: die Identität eingeschränkt auf O. Es lässt sich jedoch nicht jede offene Menge zu einer Mannigfaltigkeit mit Rand erweitern – man denke beispielsweise an zwei Kugeln, deren Ränder sich in genau einem Punkt berühren. In diesem Berührungspunkt ist es dann sicher nicht möglich ∂M als $n-1$-dimensionale Mannigfaltigkeit zu beschreiben. Außerdem ist zu beachten, dass für $p < n$ der Rand ∂M_p sicher nicht mit dem topologischen Rand $\overline{M_p} \backslash M_p^\circ$ von M_p im $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt, wobei $\overline{M_p}$ den Abschluss und M_p° das Innere von M_p bezeichnet. M_p enthält in diesem Fall nämlich keine einzige offene Menge, sodass $M_p^\circ = \emptyset$ gilt, und M_p somit ganz in seinem topologischen Rand enthalten ist.

Definition 3.26 (Tangentialraum)**.** *Es sei M_p eine p-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, $x \in M_p$ und $\varphi : H \to U$ eine Einbettung von M_p mit $\varphi(t) = x$. Dann heißt $T_x M_p := \varphi'(t)\mathbb{R}^p = \{\varphi'(t)y : y \in \mathbb{R}^p\}$ Tangentialraum von M_p im Punkt x.*

Der Tangentialraum ist wohldefiniert – für zwei Einbettungen φ_1 und φ_2 mit $\psi_i = \varphi_i^{-1}$ sind nämlich sowohl der Kartenwechsel $\mathcal{X}_{1,2} = \psi_2 \circ \varphi_1$ als auch der Kartenwechsel $\mathcal{X}_{2,1} = \psi_1 \circ \varphi_2$ stetig differenzierbar, sodass immer gilt $\det \mathcal{X}_{1,2}' \neq 0$. Also ist $\mathcal{X}_{1,2}'(t_1)$ bijektiv und es folgt mit $\varphi_1(t_1) = x = \varphi_2(t_2)$

$$\varphi_1'(t_1)\mathbb{R}^p = (\varphi_2 \circ \psi_2 \circ \varphi_1)'(t_1)\mathbb{R}^p = (\varphi_2 \circ \mathcal{X}_{1,2})'(t_1)\mathbb{R}^p = \varphi_2'(\mathcal{X}_{1,2}(t_1))\mathcal{X}_{1,2}'(t_1)\mathbb{R}^p = \varphi_2'(t_2)\mathbb{R}^p.$$

Insbesondere wechselt die Funktionaldeterminate eines Kartenwechsels $\mathcal{X}$ wegen $\det \mathcal{X}' \neq 0$ nicht das Vorzeichen – es gilt stattdessen immer entweder $\det \mathcal{X}' > 0$ oder $\det \mathcal{X}' < 0$. Also lassen sich die Kartenwechsel in zwei Gruppen einteilen lassen: solche, die Orientierung des Tangentialraums im Sinne der linearen Algebra ändern, und solche, die sie erhalten. Ist es nun möglich eine Mannigfaltigkeit so durch Karten zu beschreiben, dass alle Kartenwechsel, die Orientierung des Tangentialraums erhalten, so spricht man von einer orientierbaren Mannigfaltigkeit.

Definition 3.27. *Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit heißt orientierbar, wenn es einen Atlas $\mathfrak{A}$ der Mannigfaltigkeit gibt, sodass für alle Kartenwechsel $\mathcal{X}$ stets $\det \mathcal{X}' > 0$ gilt. Der Atlas $\mathfrak{A}$ heißt dann orientiert.*

Satz 3.28. *Der Rand ∂M_p einer p-dimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit M_p ist ebenfalls orientierbar.*

Klarerweise ist in einem Punkt $x \in \partial M_p$ der Tangentialraum von $T_x \partial M_p$ ein Teilraum von $T_x M_p$. Ist φ eine Einbettung mit $\varphi(t) = x$ und e_1 der erste kanonische Basisvektor des $\mathbb{R}^p$, so gilt sogar $T_x M_p = \varphi'(t)(e_1) \oplus T_x \partial M_p$, wobei $\oplus$ die direkte Summe bezeichnet. Ist nun ϑ eine Einbettung von ∂M_p mit $\vartheta(s) = x$ und $\xi_2, \ldots, \xi_p$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^{p-1}$, so sagen wir, dass ∂M_p so orientiert ist, dass die Normale an ∂M_p nach außen zeigt, wenn die Basis $(\varphi'(t)(-e_1), \vartheta'(s)\xi_2, \ldots, \vartheta'(s)\xi_p)$ von $T_x M_p$ die Gleiche Orientierung hat wie die Basis $(\varphi'(t)e_1, \ldots, \varphi'(t)e_p)$.

Das berühmteste Beispiel einer nicht orientierbaren Mannigfaltigkeit ist das Möbiusband, das entsteht, wenn man einen Streifen Papier einmal verdreht und dann zusammenklebt. Setzt man, anschaulich gesprochen, einen Normalvektor an dessen Rand, der von der Fläche weg zeigt und bewegt ihn entlang des Randes, bis man wieder an dem ursprünglichen Punkt angekommen ist, so zeigt dieser in die Fläche hinein. Für das Möbiusband ist es also tatsächlich nicht möglich Begriffe wie „innen“ oder „außen“ sinnvoll zu definieren.

Differentialformen, deren Definitionsbereich eine Manngifaltigkeit enthält, lassen sich nun über diese Mannigfaltigkeiten integrieren. Zunächst definieren wir dazu:

Definition 3.29 (Integral über ein Kartengebiet)**.** *Es sei M_p eine orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension p im $\mathbb{R}^n$ und (U, ψ) eine Karte mit $\varphi = \psi^{-1} : H \subset \mathbb{R}^p \to U$. Weiters sei ω_p eine stetige Differentialform vom Grad p in einem Gebiet $M_p \subset G \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist deren Integral über das Kartengebiet U definiert als*

$$\int_U \omega_p := \int_H \varphi^\dagger \omega_p = \int_H \omega_p(\varphi(t))[\varphi'(t)[e_1], \ldots, \varphi'(t)[e_p]].$$

Diese Definition ist sinnvoll, da sie unabhängig von der Wahl der Karte (U, ψ) ist. Ist nämlich $(U, \tilde{\psi})$ eine andere Karte und $\mathcal{X} = \psi \circ \tilde{\varphi}$ der entsprechende Kartenwechsel, so folgt wegen (3.21) und Lemma 3.23:

$$\int_{\tilde{H}} \tilde{\varphi}^\dagger \omega_p = \int_{\tilde{H}} (\varphi \circ \mathcal{X})^\dagger \omega_p = \int_{\tilde{H}} \mathcal{X}^\dagger \varphi^\dagger \omega_p = \int_H \varphi^\dagger \omega_p.$$

Um nun das Integral über eine ganze Mannigfaltigkeit zu definieren, benötigen wir folgenden Satz:

Satz 3.30 (Zerlegung der Eins)**.** *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $(U_i)_{i \in I}$ eine endliche Überdeckung von K aus offenen Mengen $U_i \subset \mathbb{R}^n$. Dann existieren Funktionen $f_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ der Klasse C^∞, sodass gilt:*

(i) $\operatorname{supp}(f_i) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \neq 0\}} \subset U_i$ *für alle $i \in I$*

(ii) $\sum_{i \in I} f_i(x) \leq 1$ *für alle $x \in \mathbb{R}^n$*

(iii) $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$ *für alle $x \in K$.*

Die Familie $(f_i)_{i \in I}$ heißt dann Zerlegung der Eins.

Definition 3.31 (Integral über eine Mannigfaltigkeit)**.** *Es sei M_p eine orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension p im $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{A}$ ein orientierter Atlas von M_p und w_p eine stetige p-Differentialform in einer Umgebung O von M_p. Weiters existiere eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$, sodass* $\operatorname{supp}(\omega_p) \cap M_p \subset K \subset O$ *ist.*
Dann sei $\widetilde{U}_i, i \in I$ eine endliche Überdeckung von K, sodass für jedes $i \in I$ die Menge $U_i := \widetilde{U}_i \cap M_p$ Definitionsgebiet einer Karte aus $\mathfrak{A}$ ist. Es sei weiters f_i eine entsprechende Zerlegung der Eins, sodass $w_p(x) = \sum_{i \in I} f_i(x) w_p(x)$ für alle $x \in K$ und $\operatorname{supp}(f_i \omega_p) \subset \tilde{U}_i$ für alle $i \in I$ gilt. Dann ist das Integral von ω_p über M_p definiert als

$$\int_{M_p} w_p := \sum_{i \in I} \int_{U_i} f_i \omega_p.$$

Auch diese Definition ist unabhängig von den gewählten Karten – denn für eine andere Wahl der Mengen V_j und eine Zerlegung der Eins mit Funktionen g_j folgt nach den vorigen Überlegungen

$$\sum_{j\in J}\int_{V_j} g_j\omega_p = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\int_{U_i\cap V_j} f_i g_i \omega_p = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\int_{U_i\cap V_j} f_i g_i \omega_p = \sum_{i\in I}\int_{Ui} f_i\omega_p.$$

Als wichtiges Beispiel wollen wir die $n-1$- Differentialform dx^* über eine $n-1$- Mannigfaltigkeit M_{n-1} im $\mathbb{R}^n$ integrieren. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass die Mannigfaltigkeit durch eine einzige Einbettung $\varphi : H \to M_{n-1}$ beschrieben wird. Mit dem Rücktransport erhalten wir dann

$$\int_{M_{n-1}} dx^*(t) = \int_H \varphi^\dagger dx^*(t) = \int_H dx^*(\varphi(t))[\varphi'(t)e_1,\ldots,\varphi'(t)e_{n-1}]d\sigma_t = \int_H \left(\bigtimes_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t)\right)d\sigma_t.$$

Da in $\left(\bigtimes_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t)\right)$ das Kreuzprodukt aus allen $n-1$ Tangentialvektoren gebildet wird, steht dieses orthogonal auf den Tangentialraum – es stellt also genau die Normale auf die betrachtet Mannigfaltigkeit dar. Daher ist dx^* das orientierte Oberflächenelement bei der Integration über die Mannigfaltigkeit, das wir in diesem Zusammenhang auch mit

$$do := \left(\bigtimes_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t)\right)d\sigma_t = \left(\bigtimes_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t)\right)dt_1\wedge\ldots\wedge dt_n \tag{3.22}$$

bezeichnen wollen. Wegen Lemma 3.19 folgt

$$\left|\bigtimes_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t)\right|^2 = \det\left(\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(t)\right]_{i,j=1,\ldots,n-1}\right) = \det((\varphi'(t))^T\varphi'(t)).$$

Also entspricht die Integration nach $|dx^*|$ bzw. nach $|do| := \left|\bigtimes_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t)\right| d\sigma_t$ tatsächlich der Integration nach dem aus Analysis bekannten Oberflächenmaß:

$$\int_{M_{n-1}}|dx^*| := \int_H |do| = \int_H \left|\bigtimes_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t)\right| d\sigma_t = \int_H \sqrt{\det((\varphi'(t))^T\varphi'(t))}\,d\lambda_{n-1}(t).$$

Nun wollen wir konkret das Oberflächenelement der Einheitskugel betrachten – wobei wir diese der übersichtlicheren Notation wegen in den $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $x = (x_0,\ldots,x_n)$ statt in den $\mathbb{R}^n$ einbetten. Wir betrachten also die Oberfläche $\partial U_1(0)\subset\mathbb{R}^{n+1}$ der Kugel mit Radius 1 um den Ursprung. Diese kann durch die folgende Einbettung

$$x : \begin{cases} (-\pi,\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})^{n-1}\subset\mathbb{R}^n & \to \quad \mathbb{R}^{n+1} \\ \begin{pmatrix} t_1\\ \vdots \\ t_n\end{pmatrix} & \mapsto \quad \begin{pmatrix}\cos t_n\cdots\cos t_2\cos t_1\\ \cos t_n\cdots\cos t_2\sin t_1\\ \cos t_n\cdots\sin t_2\\ \vdots\\ \cos t_n\sin t_{n-1}\\ \sin t_n\end{pmatrix}\end{cases}$$

beschrieben werden (tatsächlich benötigt man noch eine zweite Einbettung um die Mannigfaltigkeit vollständig zu beschreiben – das soll uns an dieser Stelle aber nicht stören, da der unparametrisierte Bereich Oberflächenmaß Null hat und bei der Integration somit nicht ins Gewicht fällt). Dafür können wir auch kurz

$$x_i = \cos t_n\cdots\cos t_{i+1}\sin t_i \qquad \text{für } i = 0,\ldots,n$$

scheiben, wobei wir $t_0 = \frac{\pi}{2}$ setzen. Daraus ergibt sich für $i\in\{0,\ldots,n\}$ und $j\in\{1,\ldots,n\}$

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j} = \begin{cases} 0 & \text{für } j < i\\ \cos t_n\cdots\cos t_i & \text{für } j = i\\ -\cos t_n\cdots\cos t_{j+1}\sin t_j\cos t_{j-1}\cdots\cos t_{i+1}\sin t_i & \text{für } j > i\end{cases}.$$

Es folgt nun

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\partial x}{\partial t_j}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_j}\right] &= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right)^2 = \\
&= \sum_{i=0}^{j-1}\Big(\cos^2 t_n\cdots\cos^2 t_{j+1}\sin^2 t_j\cos^2 t_{j-1}\cdots\cos^2 t_{i+1}\sin^2 t_i\Big)+ \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \cos^2 t_n\cdots\cos^2 t_j = \\
&= \sum_{i=0}^{j-1}\Big(\cos^2 t_n\cdots\cos^2 t_{j+1}\sin^2 t_j\cos^2 t_{j-1}\cdots\cos^2 t_{i+1}(1-\cos^2 t_i)\Big)+ \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \cos^2 t_n\cdots\cos^2 t_j = \\
&= -\cos^2 t_n\cdots\cos^2 t_{j+1}\sin^2 t_j\cos^2 t_{j-1}\cdots\cos^2 t_{i+1}\cos^2 t_0 + \\
&\qquad + \cos^2 t_n\cdots\cos^2 t_{j+1}(1-\cos^2 t_j) + \cos^2 t_n\cdots\cos^2 t_j \overset{t_0=\pi/2}{=} \\
&= \cos^2 t_n\cdots\cos^2 t_{j+1}.
\end{aligned}
$$

Insbesondere steht hier im Fall $j = n$ das leere Produkt mit dem Wert 1. Für $j \neq k$, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $j < k$ annehmen, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\partial x}{\partial t_j}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_k}\right] &= \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\frac{\partial x_i}{\partial t_k} = \\
&= \left(\sum_{i=0}^{j-1}\cos^2 t_n\cdots\cos t_k\sin t_k\dots\sin t_j\cos t_j\dots\cos^2 t_{i-1}\sin^2 t_i\right) - \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \cos^2 t_n\cdots\cos t_k\sin t_k\dots\cos^2 t_j = \\
&= \left(\sum_{i=0}^{j-1}\cos^2 t_n\cdots\cos t_k\sin t_k\dots\sin t_j\cos t_j\dots\cos^2 t_{i-1}(1-\cos^2 t_i)\right) - \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \cos^2 t_n\cdots\cos t_k\sin t_k\dots\cos^2 t_j = \\
&= -\cos^2 t_n\cdots\cos t_k\sin t_k\dots\sin t_j\cos t_j\dots\cos^2 t_0 + \cos^2 t_n\cdots\cos t_k\sin t_k\dots\cos^2 t_j - \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \cos^2 t_n\cdots\cos t_k\sin t_k\dots\cos^2 t_j \overset{t_0=\pi/2}{=} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir mit Lemma 3.20 aus (3.22)

$$
|do| = \sqrt{\det\left(\left[\frac{\partial x}{\partial t_i}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_j}\right]\right)}\,d\sigma_t = \prod_{i=1}^{n}(\cos t_n\cdots\cos t_{i+1})\ d\sigma_t = \cos t_2\cos^2 t_3\cdots\cos^{n-1} t_n\ d\sigma_t.
$$

Um später die Übersichtlichkeit zu bewahren, definieren wir

$$
W_n(t) := \cos t_2\cos^2 t_3\cdots\cos^{n-1} t_n.
$$

Es gilt dann also $|do| = W_n(t)\,d\sigma_t = W_n(t)\,dt_1\wedge\ldots\wedge dt_n$.

Betrachten wir nun den Übergang zu Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^{n+1}$, so lässt sich jeder Punkt $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ darstellen durch

$$
y(r,t) = rx(t) \quad \text{mit } t = (t_1,\ldots,t_n),
$$

wobei x die Einbettung von $\partial U_1(0)$ ist. Wenn wir zu den Koordinaten $(r, t_1, \ldots, t_n)$ übergehen wollen, benötigen wir die Funktionaldeterminante

$$
J := \det\frac{\partial(y_0, y_1, \ldots, y_n)}{\partial(r, t_1, \ldots, t_n)}.
$$

Es gilt nun

$$\frac{\partial y}{\partial r} = x \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial y}{\partial t_i} = r\frac{\partial x}{\partial t_i}.$$

Wegen $[x \cdot x] = 1$ folgt außerdem

$$[x \cdot \frac{\partial x}{\partial t_i}] = 0, \tag{3.23}$$

sodass sich für J mit $h_i := \frac{\partial x}{\partial t_i}$ ergibt:

$$J^2 = r^{2n} \det \begin{pmatrix} x^T \\ h_1^T \\ \vdots \\ h_n^T \end{pmatrix} \det(x, h_1, \ldots, h_n) = r^{2n} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [h_1 \cdot h_1] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [h_n \cdot h_n] \end{pmatrix} = r^{2n} W_n^2.$$

Um nun noch das Vorzeichen von J zu bestimmen, kann man etwa die Werte $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 0$ wählen und erhält dann genau die Einheitsmatrix. Also ist J positiv und wir erhalten mit der Transformationsformel (3.20)

$$d\sigma_y = J(r,t)\, d\sigma_{(r,t)} = r^n W_n(t)\, d\sigma_{(r,t)} = r^n W_n(t)\, dr \wedge dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n. \tag{3.24}$$

Betrachten wir nun noch $\partial U_r(0)$ – also den Rand einer Kugel mit Radius r – so lässt sich diese durch $y(t) = rx(t)$ beschreiben. Also folgt $\frac{\partial y}{\partial t_i} = r\frac{\partial x}{\partial t_i}$, sodass die Integration nach dy^* der Integration nach

$$do_y = \left(\bigtimes_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial t_i}(t) \right) d\sigma_t = r^n \left(\bigtimes_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial t_i}(t) \right) d\sigma_t = r^n x(t) W_n(t) d\sigma_t = r^n x \, |do_x| \tag{3.25}$$

entspricht. Denn wegen (3.23) steht $x(t)$ orthogonal auf alle $\frac{\partial x}{\partial t_i}(t)$ und ist deshalb parallel zu $\bigtimes_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial t_i}(t)$. Wegen (3.18) gilt außerdem $\left[x(t) \cdot \bigtimes_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial t_i}(t)\right] = J(t) > 0$ – also zeigen beide Vektoren in dieselbe Richtung. Aus $|x(t)| = 1$ folgt damit

$$\left(\bigtimes_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial t_i}(t) \right) = \left| \bigtimes_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial t_i}(t) \right| x(t) = W_n(t) x(t).$$

Insbesondere sei noch darauf hingewiesen, dass x genau die äußere Normale auf $\partial U_r(0)$ ist, wenn man die ganze Kugel $U_r(0)$ als Mannigfaltigkeit auffasst – denn $x, \frac{\partial x}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial t_1}$ hat die positive Determinante J und ist somit gleich orientiert wie der $\mathbb{R}^n$, wie es bei der Orientierung des Rands einer Mannigfaltigkeit verlangt ist.

Zuletzt sei noch ein zentraler Satz der Analysis angeführt, der eine Verallgemeinerung des Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Differentialformen darstellt und zentrales Hilfmittel beim Beweis einiger Eigenschaften holomorpher Funktionen sein wird:

Satz 3.32 (Satz von Stokes)**.** *Es sei M_{p+1} eine orientierbare, beschränkte glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $p+1$ mit hinreichend glattem Rand ∂M_{p+1}, der so orientiert ist, dass die Normale nach außen zeigt. Weiters sei ω_p eine in einer Umgebung von M_{p+1} definierte Differentialform vom Grad p. Dann gilt*

$$\int_{\partial M_{p+1}} \omega_p = \int_{M_{p+1}} d\omega_p.$$

4 Holomorphe Funktionen

4.1 Holomorphie in $\mathbb{C}$

Definition 4.1. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine Funktion von G nach $\mathbb{C}$. Dann heißt f im Punkt $z \in G$ komplex differenzierbar, wenn der Grenzwert*

$$f'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{4.1}$$

existiert. $f'(z)$ heißt dann komplexe Ableitung von f im Punkt z.

Ist f in jedem Punkt $z \in G$ komplex differenzierbar, so heißt f holomorph.

Für komplex differenzierbare Funktionen gelten die üblichen Differentiationsregeln – die Beweise verlaufen analog zu denen im Reellen.

Wie im Reellen ist komplexe Differenzierbarkeit von f in einem Punkt z äquivalent dazu, dass sich f durch seine Ableitung approximieren lässt.

Korollar 4.2. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ist genau dann an der Stelle $z \in G$ differenzierbar, wenn es eine komplexe Zahl α gibt mit*

$$f(z+h) = f(z) + \alpha h + o(h). \tag{4.2}$$

Die Zahl α stimmt in diesem Fall mit $f'(z)$ überein.

Beweis. Gilt (4.2), so folgt, wenn man diese Gleichung durch h dividiert

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \alpha + o(1)$$

und für $h \to 0$ erhält man $\alpha = f'(z)$. Ist Umgekehrt f komplex differenzierbar in z, so gilt wegen (4.1)

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) + o(1).$$

Multiplizieren mit h und Addieren von f(z) ergibt

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(h)$$

□

Identifiziert man $\mathbb{C}$ mittels $z = x+iy$ mit dem $\mathbb{R}^2$ und schreibt $f(z) = u(z)+iv(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ als stetig differenzierbare Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ mit $u = \mathrm{Re} f$ und $v = \mathrm{Im} f$, so lässt sich $df = f'$ als Element von von $\Omega_1(G, \mathbb{C})$ bzw. für $G = \mathbb{C}$ als Element von $\Omega_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ auffassen und es gilt:

$$df = du + idv = (u_x + iv_x)dx + (u_y + iv_y)dy. \tag{4.3}$$

Fasst man die Identität und die komplexe Konjugation mittels

$$z = x + iy \qquad \overline{z} = x - iy \tag{4.4}$$

als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{C}$ auf, so folgt außerdem

$$dz = dx + idy \qquad d\overline{z} = dx - idy \tag{4.5}$$

als Elemente von $\Omega_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. Daraus ergibt sich

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\overline{z}) \qquad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\overline{z}). \tag{4.6}$$

Setzt man zusätzlich

$$\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \qquad \partial_{\overline{z}} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y), \tag{4.7}$$

wobei ∂_x und ∂_y die partiellen Ableitungen nach x bzw. y bezeichnen, so lässt sich Gleichung (4.3) umformen zu

$$\begin{aligned} df &= \frac{1}{2}(u_x + iv_x)(dz + d\overline{z}) + \frac{1}{2i}(u_y + iv_y)(dz - d\overline{z}) = \\ &= \frac{1}{2}(u_x - iu_y + i(v_x - iv_y))dz + \frac{1}{2}(u_x + iu_y + i(v_x + iv_y))d\overline{z}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also

$$df = (\partial_z u + i\partial_z v)dz + (\partial_{\overline{z}} u + i\partial_{\overline{z}} v)d\overline{z} \tag{4.8}$$

bzw.

$$df = (\partial_z f)dz + (\partial_{\overline{z}} f)d\overline{z}. \tag{4.9}$$

Dadurch wird die Abhängigkeit der komplexen Funktion f von z und $\overline{z}$ formal ausgedrückt. Das ermöglicht es nun, eine zur Holomorphie äquivalente Eigenschaft komplexer Funktionen anzugeben, mit deren Hilfe wir diesen Begriff auch auf $Cl(n)$-wertige Funktionen verallgemeinern werden. Um eine einheitliche Notation auch für diesen Fall zu ermöglichen, führen wir dazu zunächst die Bezeichnungen

$$\partial := 2\partial_z \qquad \text{und} \qquad \bar{\partial} := 2\partial_{\overline{z}}$$

ein.

Satz 4.3 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen)**.** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine reell stetig differenzierbare Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\bar{\partial} f = 2\partial_{\overline{z}} f = u_x - v_y + i(u_y + v_x) = 0 \tag{4.10}$$

bzw.

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$$

erfüllt.

Beweis. Da mit $f = u + iv$ auch u und v reell stetig differenzierbar sind, gilt mit $h = h_1 + ih_2$

$$\begin{aligned} u(x+h_1, y+h_2) - u(x,y) &= u_x(x,y)h_1 + u_y(x,y)h_2 + o(h) \\ v(x+h_1, y+h_2) - v(x,y) &= v_x(x,y)h_1 + v_y(x,y)h_2 + o(h) \end{aligned}$$

Mit $z = x + iy$ erhält man durch Multiplizieren der zweiten Gleichung mit i und Addieren beider Gleichungen

$$f(z+h) - f(z) = (u_x(z) + iv_x(z))h_1 + (u_y(z) + iv_y(z))h_2 + o(h)$$

und wegen $h_1 = \frac{1}{2}(h + \overline{h})$ und $h_2 = \frac{1}{2i}(h - \overline{h})$ ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= \frac{1}{2}(u_x(z) - iu_y(z) + i(v_x(z) - iv_y(z)))h + \\ &\quad + \frac{1}{2}(u_x(z) + iu_y(z) + i(v_x(z) + iv_y(z)))\overline{h} + o(h) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_z u(z) + i\partial_z v(z))h + \frac{1}{2}(\partial_{\overline{z}} u(z) + \partial_{\overline{z}} v(z))\overline{h} + o(h). \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also

$$f(z+h) - f(z) = \partial_z f(z)h + \partial_{\overline{z}} f(z)\overline{h} + o(h) \tag{4.11}$$

Erfüllt f nun (4.10), so ergibt sich

$$f(z+h) - f(z) = \partial_z f(z)h + o(h),$$

was wegen Lemma 4.2 äquivalent zur komplexen Differenzierbarkeit von f an der Stelle z mit $f'(z) = \partial_z f(z)$ ist.

Ist umgekehrt f holomorph, so gibt es wieder wegen Lemma 4.2 zu $z \in G$ eine Zahl $f'(z) \in \mathbb{C}$ mit

$$f(z+h) - f(z) = f'(z)h + o(h).$$

Wegen (4.11) muss aber gelten

$$f'(z) = \partial_z f(z) + \partial_{\overline{z}} f(z)\frac{\overline{h}}{h} + o(1).$$

Mit $h = |h|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ folgt deshalb

$$\begin{aligned} f'(z) &= \partial_z f(z) + \partial_{\overline{z}} f(z)\frac{|h|(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))}{|h|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))} + o(1) = \\ &= \partial_z f(z) + \partial_{\overline{z}} f(z)(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))^2 + o(1) \end{aligned}$$

Der rechte Term verschwindet für $h \to 0$. Da aber $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2$ beliebige Werte auf der Einheitskreislinie annehmen kann und die Terme $f'(z)$ und $\partial_z f(z)$ nicht von h abhängen, muss offensichtlich $\partial_{\overline{z}} f(z) = 0$ gelten – also ist (4.10) erfüllt.

□

Ist eine f eine stetig differenzierbare Funktion von $G \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, dann hat die reelle Ableitungsmatrix die Form

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}.$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen besagen nun, dass die Funktion f genau dann holomorph ist, wenn ihre Ableitungsmatrix die Gestalt

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix}$$

hat – wenn sie sich also mittels der Identifikation

$$z = \begin{pmatrix} \mathrm{Re} z & -\mathrm{Im} z \\ \mathrm{Im} z & \mathrm{Re} z \end{pmatrix}$$

als komplexe Zahl interpretieren lässt. Das ist aber genau die Definition von komplexer Differenzierbarkeit.

Eine andere Interpretation des Begriffs der Holomorphie geht von Gleichung (4.11) aus:

$$f(z + h) - f(z) = \partial_z f(z)h + \partial_{\overline{z}} f(z)\overline{h} + o(h).$$

Wegen $\partial_{\overline{z}} f(z) = 0$ entfällt die Abhängigkeit von $\overline{h}$, sodass holomorphe Funktionen als echte Funktionen einer komplexen Variable anstatt als komplexwertige Funktion zweier reeller Variablen angesehen werden können.

Wie wir gesehen haben, ist komplexe Differenzierbarkeit bzw. Holomorphie eine deutlich stärkere Forderung an eine Funktion als reelle Differenzierbarkeit. Im Wesentlichen liegt das daran, dass h in $\mathbb{C}$ nicht nur entlang von Geraden sondern auf beliebige Weise gegen null streben kann. Im Gegenzug haben holomorphe Funktionen eine Reihe interessanter Eigenschaften, die wir teilweise später im Kontext Clifford-holomorpher Funktionen beweisen werden. So ist eine einmal komplex differenzierbare Funktion bespielsweise auch gleich unendlich oft komplex differenzierbar. Außerdem konvergiert die Taylorreihe jeder holomorphen Funktion, sodass sie sich um jeden Punkt in eine Potenzreihe entwickeln lässt. Ein weiterer interessanter Aspekt ist, dass die Werte einer holomorphen Funktion im Inneren einer Kreisscheibe $U_r(w)$ durch die Funktionswerte an deren Rand vorgegeben sind und sich durch die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial U_r(w)} \frac{f}{\zeta - z} d\zeta \tag{4.12}$$

für $z \in U_r(w)$ ermitteln lassen. $\partial U_r(w)$ ist dabei der positiv orientierte Rand von $U_r(w)$, also die Kurve $t \mapsto w + re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$.

4.2 Holomorphie in $Cl(n)$

Da die Cliffordalgebra $Cl(n)$ eine Verallgemeinerung von $\mathbb{C}$ darstellt, stellt sich die Frage, ob sich auch der Begriff der Holomorphie auf Funktionen mit Werten in $Cl(n)$ verallgemeinern lässt – und ob mit ihm entsprechend starke Eigenschaften verbunden sind wie in $\mathbb{C}$. Im Idealfall lässt sich ein Begriff finden, der alle drei Zugänge zur Definition holomorpher Funktionen verallgemeinert: die Existenz des Grenzwerts eines Differentialquotienten bzw. die Linearisierbarkeit der Funktion, die Erfüllung verallgemeinerter Cauchy-Riemannscher Differentialgleichungen und die Entwickelbarkeit als Taylorreihe.

Es gilt jedoch das folgende Resultat:

Satz 4.4. *Es seit G ein Gebiet in $\mathbb{H}$ und $f : G \to \mathbb{H}$ eine reell stetig differenzierbare Funktion. Existiert für alle $x \in G$ der Grenzwert*

$$'f(z) := \lim_{h\to 0} h^{-1}(f(x+h) - f(x)),$$

dann existieren $a, b \in \mathbb{H}$, sodass f die Form

$$f(x) = a + xb$$

hat.

Beweis. Wählt man für h speziell die Zuwächse h_0, $h_1 i$, $h_2 j$ und $h_3 k$ und lässt diese gegen Null gehen, so folgt wegen $i^{-1} = -i$, $j^{-1} = -j$ und $k^{-1} = -k$

$$'f = \partial_0 f = -i\partial_1 f = -j\partial_2 f = -k\partial_3 f, \tag{4.13}$$

wobei $\partial_i = \partial/\partial_i,\ i = 0, 1, 2, 3$ die jeweilige partielle Ableitung nach den reellen Variablen bezeichnet. Zerlegen wir f nun in seine Komponentenfunktionen, so lassen sich diese folgendermaßen zusammenfassen:

$$f(x) = f_0(x) + if_1(x) + jf_2(x) + kf_3(x) = f_0(x) + if_1(x) + j(f_2(x) - if_3(x))$$

Betrachten wir $\mathbb{C}$ als Unteralgebra von $\mathbb{H}$ und definieren die komplexwertigen Funktionen $F_1(x) := f_0(x) + if_1(x)$ und $F_2(x) := f_2(x) - if_3(x)$, so lässt sich f schreiben als

$$f(x) = F_1(x) + jF_2(x)$$

und (4.13) geht über in

$$\partial_0(F_1 + jF_2) = -i\partial_1(F_1 + jF_2) = -j\partial_2(F_1 + jF_2) = -k\partial_3(F_1 + jF_2)$$

bzw.

$$\partial_0 F_1 + j\partial_0 F_2 = -i\partial_1 F_1 + ji\partial_1 F_2 = -j\partial_2 F_1 + \partial_2 F_2 = ji\partial_3 F_1 + i\partial_3 F_2$$

Da 1 und j linear unabhängig sind, muss also gelten

$$\begin{aligned} \partial_0 F_1 = -i\partial_1 F_1 = \partial_2 F_2 = i\partial_3 F_2 \\ \partial_0 F_2 = i\partial_1 F_2 = -\partial_2 F_1 = i\partial_3 F_1. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Fasst man diese Gleichungen auf geeignete Weise zusammen, so erhält man

$$\begin{aligned} (\partial_0 + i\partial_1)F_1 = (\partial_2 - i\partial_3)F_2 = 0 \\ (\partial_0 - i\partial_1)F_2 = (\partial_2 + i\partial_3)F_1 = 0 \end{aligned}$$

Mit $z_1 = x_0 + ix_1$ und $z_2 = x_2 + ix_3$ lässt sich das schreiben als

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{z}_1} F_1 = \partial_{z_2} F_2 = 0 \\ \partial_{z_1} F_2 = \partial_{\overline{z}_2} F_1 = 0 \end{aligned}$$

und mit (4.10) folgt daraus, dass F_1 holomorph von den beiden komplexen Variablen z_1 und z_2 abhängt, während F_2 holomorph bezüglich den beiden komplex konjugierten Variablen $\overline{z}_1$ und $\overline{z}_2$ ist. Da holomorphe Funktionen aber beliebig oft stetig partiell differenzierbar sind, sind F_1 und F_2 bezüglich der

Variablen x_0 und x_1 bzw. x_2 und x_3 beliebig oft stetig differenzierbar. Es existieren also alle Ableitungen der Form $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_n} F_1$ und $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_n} F_2$ mit $i_1, \ldots, i_n \in \{0,1\}$ oder $i_1, \ldots, i_n \in \{2,3\}$. Aus (4.14) folgt damit sogar die Existenz gemischter partieller Ableitungen zweiter Ordnung sowie deren Stetigkeit, denn es ist $\partial_0\partial_2 F_1 = \partial_0(-\partial_0 F_2) = -\partial_0^2 F_2$, $\partial_0\partial_3 F_1 = \partial_0(\partial_1 F_2) = \partial_0\partial_1 F_2$ usw. Also sind F_1 und F_2 zweimal stetig differenzierbar als Funktionen von $G \subset \mathbb{R}^4$ nach $\mathbb{C}$.

Aus (4.14) folgt außerdem auch

$$\begin{aligned} (\partial_0 - i\partial_1)F_1 &= -2i\partial_1 F_1 = 2\partial_2 F_2 = (\partial_2 + i\partial_3)F_2 \\ (\partial_2 - i\partial_3)F_1 &= -2i\partial_3 F_1 = -2i\partial_1 F_2 = -(\partial_0 + i\partial_1)F_2. \end{aligned}$$

Da nach dem Satz von Schwarz die Differentiationsreihenfolge vertauscht werden kann, gilt damit

$$\begin{aligned} (\partial_0 - i\partial_1)^2 F_1 &= (\partial_0 - i\partial_1)(\partial_2 + i\partial_3)F_2 = (\partial_2 + i\partial_3)(\partial_0 - i\partial_1)F_2 = 0 \\ (\partial_2 - i\partial_3)^2 F_1 &= -(\partial_2 - i\partial_3)(\partial_0 + i\partial_1)F_2 = -(\partial_0 + i\partial_1)(\partial_2 - i\partial_3)F_2 = 0. \end{aligned}$$

Zusätzlich verschwinden auch noch die gemischten Ableitungen

$$(\partial_0 - i\partial_1)(\partial_2 - i\partial_3)F_1 = -(\partial_0 - i\partial_1)(\partial_0 + i\partial_1)F_2 = -(\partial_0 + i\partial_1)(\partial_0 - i\partial_1)F_2 = 0,$$

sodass man in Summe

$$\partial_{z_1}^2 F_1 = \partial_{z_2}^2 F_1 = \partial_{z_1}\partial_{z_2} F_1 = 0$$

erhält. Das bedeutet aber, dass die ersten Ableitungen von F_1 konstant sind und F_1 somit nur linear von z_1 und z_2 abhängt. Auf analoge Weise folgt dies auch für F_2. In Summe treten also alle Veränderlichen in f nur linear auf – es gilt also

$$f(x) = a + \sum_{k=0}^{3} b_k x_k$$

mit $a, b_0, \ldots, b_3 \in \mathbb{H}$.

Aus (4.13) ergibt sich zusätzlich

$$b_0 = -ib_1 = -jb_2 = -kb_3$$

und man erhält

$$f(x) = a + (x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3)b_0 = a + xb_0.$$

□

Insbesondere folgt damit, dass die Forderung der Existenz des Grenzwerts des Differnzenquotienten bzw. die Forderung der Linearisierbarkeit der Form

$$f(x+h) = f(x) + h\,'f(x) + o(h)$$

schon in $\mathbb{H}$ kein sinnvoller Zugang mehr für eine Definition der Holomorphie ist. Denn die einzigen Funktionen, für die so eine Linearisierung möglich ist, sind die, die ohnehin schon linear sind. Ein entsprechendes Resultat gilt natürlich auch, falls in (4.4) der rechtsseitige Differenzenquotient an Stelle des linksseitigen verwendet wird.

Um dennoch einen sinnvollen Holomorphie-Begriff auf $Cl(n)$ zu entwickeln, wollen wir versuchen einen zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen analogen Zugang zu wählen, indem wir die Unabhängigkeit des Differentials von der konjugierten Variable fordern. Wir betrachten im Folgenden Funktionen mit Werten in $Cl(n)$, die in einem Gebiet des $\mathbb{R}^{n+1}$ definiert sind. Die Variable x wird dabei mit dem Paravektor $x = x_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in Cl(n)$ identifiziert.[6] Da die Multiplikation in $Cl(n)$ nicht kommutativ ist, gestaltet sich die Herleitung der passenden Darstellung des Differentials etwas komplizierter als in $\mathbb{C}$. Die reellwertigen Differentialformen dx_i vertauschen zwar mit Elementen aus $Cl(n)$, Clifford-wertige Größen wie df oder dx jedoch nicht. Insbesondere muss deshalb auch zwischen links- und rechts-holomorphen Funktionen unterschieden werden. Wir werden jedoch meist nur den Fall

[6]Im Fall der Quaternionen $\mathbb{H} = Cl(2)$ lässt sich sogar ein sinnvoller Holomorphiebegriff für Funktionen $f : G \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definieren. Schreibt man $i = e_1$, $j = e_2$ und $k = e_3$, so hat der Operator $\bar\partial$ dann die Form $\bar\partial = \partial_0 + \partial_1 i + \partial_2 j + \partial_3 k = \partial_0 + \sum_{k=1}^{3} \partial_i\, e_k$. Die Beweise zu den vorgestellten Resultaten verlaufen in diesem Fall analog.

links-holomorpher Funktionen näher betrachten, denn die Argumentationen verlaufen im Fall rechts-holomorpher Funktionen meist analog.

Das Differential einer stetig differenzierbaren Funktion $f : G \subset \mathbb{R}^{n+1} \to Cl(n)$ ist ein Element aus $\Omega_1(G, Cl(n))$ und lässt sich wegen Lemma 3.16 darstellen als

$$df = \partial_0 f\, dx_0 + \sum_{k=1}^{n} \partial_k f\, dx_k = dx_0\, \partial_0 f + \sum_{k=1}^{n} dx_k\, \partial_k f. \tag{4.15}$$

Aus

$$dx = dx_0 + \sum_{k=1}^{n} e_k\, dx_k \qquad \text{und} \qquad d\bar{x} = dx_0 - \sum_{k=1}^{n} e_k\, dx_k$$

ergibt sich durch Multiplikation mit e_j von links bzw. rechts

$$dx_0 = \frac{1}{2}(dx + d\bar{x}) \qquad \text{sowie} \qquad dx_j = \frac{1}{2}(e_j\, d\bar{x} - dx\, e_j), \quad j = 1, \ldots, n$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} df &= \partial_0 f \frac{1}{2}(dx + d\bar{x}) + \sum_{k=1}^{n} \partial_k f \frac{1}{2}(e_k\, d\bar{x} - dx\, e_k) = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_0 f + \sum_{k=1}^{n} \partial_k\, f\, e_k) d\bar{x} + \frac{1}{2}(\partial_0 f\, dx - \sum_{k=1}^{n} \partial_k f\, dx\, e_k). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Alternativ kann man auch von $dx_j = \frac{1}{2}(d\bar{x}\, e_j - e_j\, dx)$ ausgehen und erhält dann

$$\begin{aligned} df &= \frac{1}{2}(dx + d\bar{x})\partial_0 f + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(d\bar{x}\, e_k - e_k\, dx)\partial_k f = \\ &= d\bar{x}\, \frac{1}{2}(\partial_0 f + \sum_{k=1}^{n} e_k\, \partial_k f) + \frac{1}{2}(dx\, \partial_0 f + \sum_{k=1}^{n} e_k\, dx\, \partial_k f), \end{aligned} \tag{4.17}$$

was später einer Unterscheidung in rechts- und links-holomorphe Funktionen entsprechen wird. Vergleicht man diese Ausdrücke mit (4.9) – dem entsprechenden Ausdruck in $\mathbb{C}$ – so sieht man, dass auch hier das Differential der komplex-konjugierten Variable $d\bar{x}$ isoliert werden konnte und der Vorfaktor ein Differentialoperator des Typs

$$\bar{\partial} = \partial_0 + \sum_{k=1}^{n} \partial_k\, e_k$$

ist, der eine Verallgemeinerung des entsprechenden komplexen Operators $\bar{\partial} = 2\partial_{\bar{z}}$ darstellt. Dabei muss natürlich unterschieden werden, ob der Operator nach links oder nach rechts wirkt:

$$\bar{\partial} f := \partial_0 f + \sum_{k=1}^{n} e_k\, \partial_k f \qquad \text{bzw.} \qquad f\bar{\partial} := \partial_0 f + \sum_{k=1}^{n} \partial_k f\, e_k.$$

Im Gegensatz zum komplexen Fall konnten der formal konjugierte Operator

$$\partial := \partial_0 - \sum_{k=1}^{n} \partial_k\, e_k$$

und das Differential der Variable x jedoch nicht isoliert werden, sondern treten nur verschränkt mit einander auf. Ein weiteres Problem ist, dass die Variable x im Gegensatz zu der Situation in $\mathbb{C}$ der Gleichung $\bar{\partial} x = 0$ nicht genügt, was bei der Entwicklung der Funktion in eine Taylorreihe problematisch ist. Um dennoch einen sinnvollen Holomorphie-Begriff zu entwickeln liegt es darum nahe, die dafür nicht geeignete Variable x durch Ausdrücke zu ersetzen, die diese Gleichung erfüllen. Diese Idee führt auf die so genannten Fueter-Variablen

$$z_k := -\frac{1}{2}(e_k x + x e_k) = x_k - x_0 e_k \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n. \tag{4.18}$$

Diese genügen nun der Bedingung $\bar{\partial} z_k = z_k \bar{\partial} = 0$:

$$\bar{\partial} z_k = \partial_0(x_k - x_0 e_k) + \sum_{j=1}^{n} e_j\, \partial_j(x_k - x_0 e_k) = -\partial_0 x_0 e_k + e_k \partial_k x_k = -e_k + e_k = 0$$

$$z_k \bar{\partial} = \partial_0(x_k - x_0 e_k) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j(x_k - x_0 e_k)\, e_j = -\partial_0 x_0 e_k + \partial_k x_k\, e_k = -e_k + e_k = 0$$

Die scheinbar willkürliche Wahl der Variablen z_k wird zu einem späteren Zeitpunkt legitimiert werden, wenn wir die Taylorreihen-Entwicklung betrachten. Dann treten diese Terme in natürlicher Weise auf. Wegen $dx_k = dz_k + dx_0 e_k$ folgt aus (4.15)

$$df = (f\bar{\partial})dx_0 + \sum_{k=1}^{n} (\partial_k f) dz_k = (\bar{\partial} f) dx_0 + \sum_{k=1}^{n} dz_k (\partial_k f) \tag{4.19}$$

Verlangen wir nun $f\bar{\partial} = 0$ bzw. $\bar{\partial} f = 0$ so entspricht das der Approximierbarkeit durch eine Funktion der Form

$$l(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k z_k \qquad \text{bzw.} \qquad l(x) = \sum_{k=1}^{n} z_k a_k \tag{4.20}$$

mit $a_k \in Cl(n)$. Eine Approximation dieser Art lässt sich mit Hilfe der Fueter-Variablen sogar als Differenzenquotient erklären. Dazu betrachten wir die z_k nun als Komponenten des hyperkomplexen Vektors

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

und bezeichnen die Menge aller solcher Vektoren mit $\mathbb{F}^n$, das heißt

$$\mathbb{F}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) : z_k = x_k - x_0 e_k \text{ mit } x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Betrachten wir das karthesische Produkt

$$Cl(n) \times \ldots \times Cl(n) = Cl(n)^n = \{(u_1, \ldots, u_n) : u_i \in Cl(n)\}$$

und versehen es mit der komponentenweisen Addition und der Multiplikation mit Skalaren aus $Cl(n)$ von links bzw. rechts, also den Abbildungen

$$u + v := (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$$
$$\lambda u := (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n) \qquad \text{bzw.} \qquad u\lambda := (u_1 \lambda, \ldots, u_n \lambda),$$

so wird es zu einem unitären, freien Links- bzw. Rechts-Modul[7] über $Cl(n)$ mit der kanonischen Basis $\{s_k : k = 1 \ldots, n\}$, wobei die s_k genau jene Elemente der Form $(0, \ldots, 0, e_0, 0, \ldots, 0)$ sind, die nur an der Stelle k den Eintrag e_0 haben.

Trivialerweise ist $\mathbb{F}^n$ eine Teilmenge von $Cl(n)$ – da für $\lambda \notin \mathbb{R}$ aber nicht gilt, dass λu bzw. $u\lambda$ wieder in $\mathbb{F}^n$ liegt, bildet sie jedoch keinen Untermodul von $Cl(n)$. Allerdings ist $\mathbb{F}^n$ unter der Addition und der Multiplikation mit reellen Skalaren (sowohl von links als auch von rechts) abgeschlossen und somit ein $\mathbb{R}$-Vektorraum – und als solcher sogar isomorph zum $\mathbb{R}^{n+1}$. Offensichtlich ist nämlich die Abbildung

$$\iota : \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} & \to \quad \mathbb{F}^n \\ (x_0, \ldots, x_n)^T & \mapsto \quad (z_1, \ldots, z_n)^T = (x_1 - x_0 e_1, \ldots, x_n - x_0 e_n)^T \end{cases}$$

[7] Ein Modul ist eine Verallgemeinung des Konzepts eines Vektorraums, wenn die zugrunde liegende Menge der Skalare R nicht mehr die Struktur eines Körpers, sondern nur noch die eines Rings trägt, wenn also die Multiplikation nicht zwangsläufig kommutativ und die Existenz multiplikativer Inverser nicht garantiert ist. Ein Links-Modul ist dann eine Menge M versehen mit einer Addition, sodass $(M, +)$ eine abelsche Gruppe ist, und einer Multiplikation mit Skalaren von links – also einer Abbildung $\cdot : R \times M \to M$, die $r_1 \cdot (r_2 \cdot m) = (r_1 \cdot r_2) \cdot m$ sowie $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$ und $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$ erfüllt. Gilt zusätzlich $1 \cdot m$ für alle $m \in M$, so heißt der Modul unitär. Der Modul heißt frei, wenn es eine linear unabhängige Teilmenge des Moduls gibt, die diesen erzeugt – das heißt, dass eine Teilmenge $\{e_i, i \in I\}$ von M existiert, sodass für jede endliche Teilmenge $J \subset I$ gilt, dass aus $0 = \sum_{i \in J} r_i \cdot e_i$ für alle $i \in J$ $r_i = 0$ folgt, und sich jedes $m \in M$ als Linearkombination der Form $\sum_{i \in J} r_i \cdot e_i$ darstellen lässt. Die Menge $\{e_i, i \in I\}$ heißt dann Basis von M. Entsprechend ist ein Rechts-Modul definiert, wobei die Multiplikation mit Skalaren hier von rechts erfolgt.

bijektiv und es gilt für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\iota(\lambda x + y) = \begin{pmatrix} (\lambda x_1 + y_1) - (\lambda x_0 + y_0)e_1 \\ \vdots \\ (\lambda x_n + y_n) - (\lambda x_0 + y_0)e_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 - x_0 e_1 \\ \vdots \\ x_n - x_0 e_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 - y_0 e_1 \\ \vdots \\ y_n - y_0 e_n \end{pmatrix} = \lambda\iota(x) + \iota(y).$$

Also ist ι auch linear und somit ein Isomorphismus von $\mathbb{R}^{n+1}$ nach $\mathbb{F}^n$. Somit können wir f nun als Funktion eines n-dimensionalen, hyperkomplexen an Stelle eines $n+1$-dimensionalen rellen Vektors auffassen, sodass wir für die Linearisierung eine links- bzw. rechts-$Cl(n)$-lineare Abbildung[8] $Cl(n)^n \to Cl(n)$ bzw. $\mathbb{F}^n \to Cl(n)$ statt einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $\mathbb{R}^{n+1} \to Cl(n)$ suchen.

Ist eine Funktion $l : Cl(n)^n \to Cl(n)$ links-linear, so folgt wie im Fall von Vektorräumen aus

$$l(u) = l(\sum_{k=1}^{n} u_k s_k) = \sum_{k=1}^{n} u_k l(s_k),$$

dass sie sich in eindeutiger Weise darstellen lässt als

$$l(u) = u_1 a_1 + \ldots + u_n a_n$$

mit $a_k \in Cl(n)$. Entsprechend folgt für eine rechts-lineare Funktion, dass sie sich eindeutig in der Form

$$l(u) = a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n$$

darstellen lässt. Insbesondere gilt das natürlich auch für jede links- bzw. rechts-$Cl(n)$-lineare Abbildung von $\mathbb{F}^n$ nach $Cl(n)$. Wechselt man nun wieder zu der ursprünglichen Darstellung von $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $x = x_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k$, so folgt mit (4.18), dass

$$l(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x_k - x_0 e_k) \qquad \textit{bzw.} \qquad l(x) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_0\ e_k)a_k$$

haben muss, was genau (4.20) entspricht. Das führt zu folgender Definition:

Definition 4.5 (Clifford-Holomorphie)**.** *Es sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet und $f : G \to Cl(n)$ reell stetig differenzierbar. Dann heißt f rechts-Clifford-holomorph in G, wenn für jeden Punkt $x \in G$ Clifford-Zahlen $a_k(x) \in Cl(n)$ existieren, sodass für $h = h_0 + \sum_{k=1}^{n} h_k e_k$ mit $h \to 0$ gilt*

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x)(h_k - h_0 e_k) + o(h)$$

bzw. links-Clifford-holomorph, wenn gilt

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} (h_k - h_0 e_k)a_k(x) + o(h). \tag{4.21}$$

Wenn keine Verwechslung zu Befürchten ist, sprechen wir auch nur von Holomorphie bzw. Links- oder Rechts-Holormorphie. Wir erhalten nun sofort die Gleichwertigkeit dieser Definition zur Erfüllung verallgemeinerter Cauchy-Riemannscher Differentialgleichungen:

Satz 4.6 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen in $Cl(n)$)**.** *Es sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und f eine reell stetig differenzierbare Funktion von G nach $Cl(n)$. Dann ist f genau dann rechts- bzw. links-holomorph, wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$f\bar{\partial} = 0 \qquad \textit{bzw.} \qquad \bar{\partial} f = 0$$

erfüllt sind.

[8] Sind M und N zwei Links-Module über einem Ring R, so heißt eine Abbildung $l : M \to N$ links-R-linear, wenn für alle $\lambda, \mu \in R$ und alle $m, n \in M$ gilt $l(\lambda m + \mu n) = \lambda l(m) + \mu l(n)$. Dem entsprechend heißt sie rechts-R-linear, wenn M und N Rechts-Module sind und für alle $\lambda, \mu \in R$ und alle $m, n \in M$ gilt $l(m\lambda + n\mu) = l(m)\lambda + l(n)\mu$.

Beweis. Wir beschränken uns hier auf links-holomorphe Funktionen – für rechts-holomorphe verläuft der Beweis analog. Mit Lemma (3.15) und (4.19) gilt

$$f(x+h) - f(x) = df[h] + o(h) = (\bar{\partial} f)(x)h_0 + \sum_{k=1}^{n} (h_k - h_0 e_k)(\partial_k f)(x) + o(h).$$

Ist $\bar{\partial} f = 0$, so steht die gesuchte Approximation direkt da. Ist umgekehrt f links-holomorph, so muss $a_k(x) = \partial_k f(x)$ gelten, denn für $h_0 = 0$ sind die h_k von einander unabhängige Variablen, deren Koeffizienten eindeutig bestimmt sind. Ein Vergleich mit (4.21) zeigt, dass

$$0 = (\bar{\partial} f)h_0 + o(h)$$

gelten muss, was aber nur für $\bar{\partial} f = 0$ möglich ist. □

Clifford-Holomorphie lässt sich auch sehr einfach durch Differentialformen charakterisieren:

Satz 4.7. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet und $f : G \to Cl(n)$ reell stetig differenzierbar. Dann ist f genau dann links-holomorph, wenn gilt*

$$d(dx^* f) = 0,$$

und genau dann rechts-holomorph, wenn gilt

$$d(f dx^*) = 0.$$

Beweis. Wir zeigen wieder nur die Aussage für links-holomorphe Funktionen, der Beweis für rechts-holomorphe Funktionen verläuft analog. Mit $d\sigma = dx_0 \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ gilt

$$d(dx^* f) = d(dx^* \wedge f) = dx^* \wedge df = \sum_{j,k=0}^{n} e_j dx_j^* \wedge (\partial_k f) dx_k =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} e_j (\partial_k f) dx_j^* \wedge dx_j = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} e_j (\partial_j f) d\sigma = (-1)^n (\bar{\partial} f) d\sigma$$

da das Dachprodukt verschwindet, wenn zwei der dx_j übereinstimmen, und wegen (3.17) gilt, dass $dx_i^* \wedge dx_i = (-1)^n d\sigma$. Damit gilt $d(dx^* f) = 0$ genau dann, wenn $\bar{\partial} f = 0$ ist – und das ist nach Satz 4.6 äquivalent dazu, dass f links-holomorph ist. □

5 Eigenschaften holomorpher Funktionen

Mit dem im letzten Abschnitt entwickelten Holomorphiebegriff lassen sich nun tatsächlich viele Eigenschaften holomorpher Funktionen in $\mathbb{C}$ verallgemeinern. Exemplarisch wollen wir hier einige von ihnen beweisen, wobei wir diese oft nur für links-holomorphe Funktionen zeigen werden. Für rechts-holomorphe Funktionen gelten die entsprechenden Resultate natürlich auch – die Beweise verlaufen dann analog.

5.1 Der Cauchysche Integralsatz

Ein zentrales Hilfsmittel wird dabei das folgende Resultat sein, das eine einfache Folgerung aus dem Satz von Stokes darstellt.

Satz 5.1 (Satz von Gauß in $Cl(n)$)**.** *Es sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet mit hinreichend glattem Rand ∂G, der so orientiert ist, dass die Flächennormale nach außen zeigt. Weiters seien $f, g \in C^1(\overline{G}, Cl(n))$. Dann ist $f dx^* g = f \wedge dx^* \wedge g \in \Omega_n(G, Cl(n))$ und es gilt*

$$\int_{\partial G} f dx^* g = \int_G ((f\bar{\partial})g + f(\bar{\partial} g)) d\sigma.$$

Beweis. Nach der Produktregel für die äußere Ableitung 3.15 (ii) gilt wegen $d(dx^*) = 0$

$$d(f dx^* g) = df \wedge dx^* g + (-1)^n f dx^* \wedge dg.$$

Außerdem gilt wieder wegen (3.17) und da $dx_j \wedge dx_k^* = 0$ für $k \neq j$

$$df \wedge dx^* = \sum_{j,k=0}^{n} \partial_j f \, dx_j \wedge e_k dx_k^* = \sum_{j=0}^{n} \partial_j f \, e_j dx_j \wedge dx_j^* = \sum_{j=0}^{n} \partial_j f \; e_j d\sigma = (f\bar{\partial}) d\sigma$$

und

$$dx^* \wedge dg = \sum_{j,k=0}^{n} e_j dx_j^* \wedge \partial_k g \, dx_k = \sum_{k=0}^{n} e_k \partial_k g \, dx_k^* \wedge dx_k = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} e_k \partial_k g \, d\sigma = (-1)^n \bar{\partial} g \, d\sigma.$$

Mit dem Satz von Stokes folgt nun

$$\int_{\partial G} f dx^* g = \int_G d(f dx^* g) = \int_G ((f\bar{\partial})g + f(\bar{\partial} g)) d\sigma$$

□

Aus dem Satz von Gauß folgt nun sofort:

Satz 5.2 (Integralsatz von Cauchy in $Cl(n)$)**.** *Es sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein beschränktes Gebiet mit einem hinreichend glatten Rand ∂G, der so orientiert ist, dass die Flächennormale nach außen zeigt. Weites seien $f, g \in C^1(\overline{G}, Cl(n))$ und f in G rechts- und g in G links-holomorph. Dann gilt*

$$\int_{\partial G} f \, dx^* \, g = 0 \tag{5.1}$$

Eine Art Umkehrung des Integralsatz von Cauchy stellt der Satz von Morera dar, der zeigt, dass die Gültigkeit von (5.1) gleichbedeutend zur Holomorphie der jeweiligen Funktion ist:

Satz 5.3 (Satz von Morera in $Cl(n)$)**.** *Es sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet und $f \in C^1(G, Cl(n))$. Gilt für alle Kugeln $U_r(x) \subset G$*

$$\int_{\partial U_r(x)} dy^* f(y) = 0,$$

so ist f in G links-holomorph.

Beweis. Es sei x ein beliebiger Punkt in G. Dann folgt aus Satz 5.1

$$0 = \int_{\partial U_r(x)} dy^* f(y) = \int_{U_r(x)} \bar{\partial} f(y) d\sigma_y.$$

Da $\bar{\partial} f$ stetig und daher auf einer kompakten Umgebung von x beschränkt ist, folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$0 = \lim_{r \to 0} \frac{1}{V_r} \int_{U_r(x)} \bar{\partial} f(y) d\sigma = \lim_{r \to 0} \int_{U_1(0)} \frac{1}{r^{n+1} V_1} r^{n+1} \bar{\partial} f(ry + x) d\sigma = \bar{\partial} f(x),$$

wobei V_r das $n+1$-dimensionale Volumen einer Kugel mit Radius r bezeichnet. Also folgt mit Satz 4.6, den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dass f links-holomorph ist.

□

5.2 Die Cauchysche Integralformel

Als nächstes wollen wir ein zur Integralformel von Cauchy (4.12) analoges Resultat zeigen.

Definition 5.4. *Die im $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ definierte Funktion*

$$E_n(x) = \frac{1}{\sigma_n} \frac{\bar{x}}{|x|^{n+1}}$$

heißt Cauchy-Kern, wobei σ_n die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnet.

Lemma 5.5. *Der Cauchy-Kern ist links- und rechts-holormorph.*

Beweis. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\bar\partial \frac{\bar x}{|x|^{n+1}} &= \sum_{i=0}^n e_i \partial_i (\bar x \frac{1}{|x|^{n+1}}) = \sum_{i=0}^n e_i \left((\partial_i \bar x) \frac{1}{|x|^{n+1}} + \bar x \, \partial_i \left((|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} \right) \right) = \\
&= (\bar\partial \bar x) \frac{1}{|x|^{n+1}} + \sum_{i=0}^n e_i \bar x \left(- \frac{n+1}{2} (|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}-1} \partial_i |x|^2 \right) = \\
&\overset{*}{=} (\bar\partial \bar x) \frac{1}{|x|^{n+1}} - \frac{n+1}{2} (|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}-1} \left(\sum_{i=1}^n e_i \partial_i |x|^2 \right) \bar x = \\
&= (\bar\partial \bar x) \frac{1}{|x|^{n+1}} - \frac{n+1}{2} (|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}-1} (\bar\partial |x|^2) \bar x,
\end{aligned}
$$

wobei die mit * gekennzeichnete Gleichheit gilt, da $-\frac{n+1}{2}(|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}-1}$ und $\partial_i |x|^2$ reelle Größen sind und deshalb mit e_i und $\bar x$ kommutieren. Wegen

$$
\bar\partial \bar x = \sum_{k=0}^n e_k \bar e_k = n+1 \qquad \text{und} \qquad \bar\partial |x|^2 = 2 \sum_{k=0}^n x_k e_k = 2x
$$

folgt

$$
\bar\partial \frac{\bar x}{|x|^{n+1}} = (n+1) \frac{1}{|x|^{n+1}} - \frac{n+1}{2} \frac{2x\bar x}{|x|^{n+1}|x|^2} = 0,
$$

da für Paravektoren $x\bar x = |x|^2$ gilt. Also ist E_n links-holomorph. Die Rechts-Holomorphie folgt analog. □

Satz 5.6 (Formel von Borel-Pompeiu in $Cl(n)$)**.** *Es sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand, der so orientiert ist, dass die Flächennormale nach außen zeigt. Dann gilt für jedes $f \in C^1(\overline{G}, Cl(n))$*

$$
\int_{\partial G} E_n(y-x) dy^* f(y) - \int_G E_n(y-x)(\bar\partial f)(y) d\sigma_y = \begin{cases} f(x), & x \in G \\ 0, & x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \overline{G} \end{cases}.
$$

Beweis. Sei zuerst $x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \overline{G}$. Dann ist $E_n(y-x)$ rechts-holomoroph in $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{x\}$ – also insbesondere auch in G. Aus dem Satz von Gauß und den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt deshalb

$$
\int_{\partial G} E_n(y-x) dy^* f(y) = \int_G (E_n \bar\partial)(y-x) f(y) + E_n(y-x)(\bar\partial f)(y) d\sigma_y = \int_G E_n(y-x)(\bar\partial f)(y) d\sigma_y
$$

bzw.

$$
\int_{\partial G} E_n(y-x) dy^* f(y) - \int_G E_n(y-x)(\bar\partial f)(y) d\sigma_y = 0.
$$

Ist nun $x \in G$, so betrachten wir zunächst G ohne der Kugel $U_\varepsilon(x)$, also das Gebiet $G_\varepsilon := G \backslash \overline{U_\varepsilon(x)}$ mit dem Rand $\partial G_\varepsilon = \partial G \cup -\partial U_\varepsilon(x)$. Das Minus soll dabei andeuten, dass $\partial U_\varepsilon(x)$ so orientiert ist, dass die Normale ins Innere von $U_\varepsilon(x)$ – also ins Äußere von G_ε – zeigt. Wir wenden nun wieder den Satz von Gauß an und erhalten, da $E_n(x)$ in G_ε rechts-holomorph ist,

$$
\int_{\partial G} E_n(y-x) dy^* f(y) - \int_{\partial U_\varepsilon(x)} E_n(y-x) dy^* f(y) = \int_{G_\varepsilon} E_n(y-x)(\bar\partial f)(y) d\sigma_y.
$$

Für das zweite Integral erhalten wir nach (3.25) mit $\tilde y = \frac{y-x}{|y-x|}$

$$
\int_{\partial U_\varepsilon(x)} E_n(y-x) dy^* f(y) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial U_\varepsilon(x)} \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{n+1}} \frac{y-x}{|y-x|} f(y) \varepsilon^n |do_{\tilde y}| = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial U_1(0)} f(x + \varepsilon \tilde y) |do_{\tilde y}|.
$$

Nun folgt aber aufgrund der Stetigkeit von f

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sigma_n}\int_{\partial U_1(0)} f(x+\varepsilon\tilde{y})|do_{\tilde{y}}| = \frac{1}{\sigma_n}\int_{\partial U_1(0)} |do_{\tilde{y}}|f(x) = f(x).$$

Das Gebietsintegral über G_ε konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen das Gebietsintegral über G, obwohl $E_n(y-x)$ dann singulär ist. In Kugelkoordinaten mit $y - x = rt$ mit $||t|| = 1$ gilt nämlich wegen (3.24)

$$E_n(y-x) = \frac{1}{\sigma_n}\frac{\bar{t}}{r^n} \qquad \text{und} \qquad d\sigma_y = r^n W_n(t) d\sigma_{(r,t)},$$

sodass sich die Singulariät weghebt und das Integral konvergiert:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{G_\varepsilon} E_n(y-x)(\bar{\partial}f)(y)d\sigma_y = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{G_\varepsilon - x} E_n(y)(\bar{\partial}f)(y+x)d\sigma_y =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{G_\varepsilon - x} E_n(rt)(\bar{\partial}f)(rt+x)r^n W_n(t)d\sigma_{(r,t)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{G_\varepsilon - x}\frac{1}{\sigma_n}\frac{\bar{t}}{r^n}(\bar{\partial}f)(rt+x)r^n W_n(t)d\sigma_{(r,t)} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{G_\varepsilon - x}\frac{\bar{t}}{\sigma_n}(\bar{\partial}f)(rt+x)W_n(t)d\sigma_{(r,t)} = \int_{G-x}\frac{\bar{t}}{\sigma_n}(\bar{\partial}f)(rt+x)W_n(t)d\sigma_{(r,t)}.$$

□

Aus der Formel von Borel-Pompeiu folgt nun sofort die Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel:

Satz 5.7 (Integralformel von Cauchy in $Cl(n)$)**.** *Es sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand und nach außen orientierter Normale. Ist $f \in C^1(\overline{G}, Cl(n))$ links-holomorph, so gilt*

$$\int_{\partial G} E_n(y-x)dy^* f(y) = \begin{cases} f(x), & x \in G \\ 0, & x \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\overline{G} \end{cases}. \tag{5.2}$$

Mit Hilfe der Integralformel von Cauchy lässt sich nun zeigen, dass jede holomorphe Funktion unendlich oft differenzierbar ist und ihre partiellen Ableitungen selbst wieder holomorph sind. Zunächst ist aber noch ein wenig Vorarbeit nötig.

Definition 5.8. *Mit dem Multiindex $\boldsymbol{k} = (k_0, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$ definieren wir den partiellen Ableitungsoperator*

$$\nabla^{\boldsymbol{k}} := \partial_0^{k_0}\partial_1^{k_1}\dots\partial_n^{k_n}.$$

Ist nicht offensichtlich, nach welcher Variable differenziert werden soll, so schreiben wir die entsprechende Variable in den Index: $\nabla_x^{\boldsymbol{k}}$.

Definition 5.9. *Die Funktionen $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}}(x)$ seien definiert als*

$$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}}(x) := \frac{(-1)^{|\boldsymbol{k}|}}{\boldsymbol{k}\,!}\nabla^{\boldsymbol{k}}\sigma_n E_n(x) = (-1)^{|\boldsymbol{k}|}\nabla^{\boldsymbol{k}}\frac{\bar{x}}{|x|^{n+1}}.$$

Dabei gilt $\boldsymbol{k}\,! = k_1! \cdots k_n!$. Insbesondere ist

$$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{0}}(x) = \frac{\bar{x}}{|x|^{n+1}} = \sigma_n E_n(x).$$

Wir werden im Folgenden vor allem mit Multiindizes arbeiten, bei denen $k_0 = 0$ ist, sodass nur nach $x_1, \dots, x_n$ differnziert wird. Betrachtet man insbesondere den Fall $n = 1$ mit $Cl(1) = \mathbb{C}$, dann ist $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}}(z)$ einfach die $k+1$-te negative Potenz von z multiplizert mit dem Vorfaktor i^k. In diesem Fall gilt nämlich $\boldsymbol{k} = (0, k)$ also $\nabla^{\boldsymbol{k}} = \partial_1^k$ und

$$f'(z) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} = -i\partial_1 f(z).$$

Wegen $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{0}}(z) = \frac{1}{z}$, folgt damit

$$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}}(z) = \frac{(-1)^k}{k!}\partial_1^k\mathcal{Q}_{\boldsymbol{0}}(z) = \frac{i^k}{z^{k+1}}.$$

Definition 5.10. *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt homogen vom Grad $k \in \mathbb{Z}$, wenn für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x).$$

Insbesondere ist ein Polynom $p : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^m$ genau dann homogen vom Grad k, wenn es eine Linearkombination von Monomen vom Grad k ist, wenn also gilt:

$$p(x) = \sum_{|\boldsymbol{k}|=k} a_{\boldsymbol{k}} x_0^{k_0} \cdots x_n^{k_n}$$

mit $a_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{R}^m$.

Lemma 5.11. *Eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann homogen vom Grad k, wenn gilt:*

$$\sum_{k=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = f'(x)x = kf(x). \tag{5.3}$$

Beweis. Ist f homogen vom Grad 0 – also konstant – so ist (5.3) trivialerweise erfüllt. Ist f homogen vom Grad $k \neq 0$, so betrachten wir für festes $x \in \mathbb{R}^n$ die Abbildung $\lambda \mapsto f(\lambda x)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Aus

$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$$

folgt durch Differenzieren nach λ

$$f'(\lambda x)x = k\lambda^{k-1} f(x).$$

Einsetzen von $\lambda = 1$ liefert dann genau (5.3).

Gilt umgekehrt (5.3), so betrachten wir für festes x die Abbildung $g : \lambda \mapsto \frac{1}{\lambda^k} f(\lambda x)$. Im Fall $k \neq 0$ erhalten wir

$$\frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = -\frac{k}{\lambda^{k+1}} f(\lambda x) + \frac{1}{\lambda^k} f'(\lambda x)x = -\frac{1}{\lambda^{k+1}} f'(\lambda x)\lambda x + \frac{1}{\lambda^k} f'(\lambda x)x = 0$$

bzw. im Fall $k = 0$

$$g'(\lambda) = f'(\lambda x)x = \frac{1}{\lambda} f'(\lambda x)\lambda x = 0.$$

Also ist die Abbildung $g(\lambda)$ konstant und es gilt $g(\lambda) = g(1) = f(x)$. Die Multiplikation mit λ^k ergibt

$$f(\lambda x) = \lambda^k g(x) = \lambda^k f(x).$$

□

Lemma 5.12. *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zweimal stetig differenzierbar und homogen vom Grad $k \in \mathbb{Z}$. Dann sind die partiellen Ableitungen von f homogen vom Grad $k - 1$.*

Beweis. Fasst man die Abbildung $g : x \mapsto f'(x)x$ als Verkettung $g = g_2 \circ g_1$ der Funktionen

$$g_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & (f'(x), x) \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ (A, x) & \mapsto & Ax \end{cases}$$

auf, so folgt wie im Beweis von Lemma 3.15, da g_2 bilinear ist, aus (3.14) und der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f'(x)x = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f'\right)(x)\, x + f'(x) \frac{\partial}{\partial x_i} x.$$

Da wir nach dem Satz von Schwarz die Reihenfolge der Differentiation vertauschen können, folgt mit Lemma 5.11

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} kf(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f'(x)\, x &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f'\right)(x)\, x + f'(x) \frac{\partial}{\partial x_i} x = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right)'(x)\, x + f'(x) e_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right)'(x)\, x + \frac{\partial}{\partial x_i} f(x), \end{aligned}$$

wobei e_i den i-ten kanonischen Basis-Vektor bezeichnet. Also erhalten wir

$$(k-1)\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right)'(x)\, x,$$

sodass nach $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ Lemma 5.11 homogen vom Grad $k-1$ ist.

□

Lemma 5.13. *Es gilt*

$$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}}(x) = \frac{q_{\boldsymbol{k}}(x)}{|x|^{n+2|\boldsymbol{k}|+1}}$$

mit einem homogenen Polynom $q_{\boldsymbol{k}}$ vom Grad $|\boldsymbol{k}|+1$, das nur Werte in $\mathbb{R}^{n+1}$ – also in den Paravektoren – annimmt. $q_{\boldsymbol{k}}$ hat also die Form

$$\sum_{|\boldsymbol{l}|=|\boldsymbol{k}|+1} a_{\boldsymbol{l}}\, x_0^{l_0}\, x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n} \tag{5.4}$$

mit $a_{\boldsymbol{l}} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Weiters existieren Konstanten $C_{n,\boldsymbol{k}}$, sodass

$$|\mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}}(x)| \leq \frac{C_{n,\boldsymbol{k}}}{|x|^{n+|\boldsymbol{k}|}}. \tag{5.5}$$

Beweis. Wir verwenden vollständige Induktion nach $|\boldsymbol{k}|$. Für $\boldsymbol{k} = 0$ stimmt das Lemma wegen $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{0}}(x) = \sigma_n E_n(x)$. Um von $|\boldsymbol{k}|$ auf $|\boldsymbol{k}|+1$ zu schließen, muss $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}}$ einmal partiell differenziert werden:

$$\begin{aligned}\partial_i \mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}}(x) &= \frac{(\partial_i q_{\boldsymbol{k}}(x))|x|^{n+2|\boldsymbol{k}|+1} - q_{\boldsymbol{k}}(x)\frac{n+2|\boldsymbol{k}|+1}{2}(|x|^2)^{\frac{n+2|\boldsymbol{k}|-1}{2}} 2x_i}{|x|^{(n+2|\boldsymbol{k}|+1)2}} = \\ &= \frac{|x|^2 \partial_i q_{\boldsymbol{k}}(x) - (n+|k|+1)x_i q_{\boldsymbol{k}}}{|x|^{n+2(|\boldsymbol{k}|+1)+1}}\end{aligned}$$

Der linke Ausdruck im Zähler $|x|^2\partial_i q_{\boldsymbol{k}}(x)$ ist nun aber entweder null oder ein homogenes Polynom vom Grad $|\boldsymbol{k}|+2$. Differenziert man nämlich $q_{\boldsymbol{k}}$ nach x_i so fallen die einzelnen Summanden in (5.4) entweder weg, oder ihr Grad erniedrigt sich um 1, sodass man ein homogenes Polynom vom Grad $|\boldsymbol{k}|$ erhält. Multipliziert man dieses nun mit $|x|^2 = \sum_{k=0}^n x_i^2$ so haben alle auftretenden Terme klarerweise Grad $|\boldsymbol{k}|+2$. Auch der rechte Ausdruck im Zähler ist ein homogenes Polynom vom gesuchten Grad, denn Multiplizieren mit x_i erhöht den Grad aller Summanden in (5.4) um 1. Damit ist aber auch die Summe dieser beiden Ausdrücke ein solches homogenes Polynom vom Grad $|\boldsymbol{k}|+2$.

Es ist auch klar, dass der Wert des Zählers weiterhin ein Parvektor ist, da die Differentiation die Koeffizienten $a_{\boldsymbol{l}}$ in (5.4) nicht verändert und eine Multiplikation mit reellen Zahlen Paravektoren wieder in solche überführt – also hat $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}}(x)$ die gesuchte Form.

Schließlich kann ein homogenes Polynom $q_{\boldsymbol{k}}$ vom Grad $|\boldsymbol{k}|+1$ durch

$$|q_{\boldsymbol{k}}| \leq C_{n,\boldsymbol{k}}|x|^{|k|+1}$$

mit einer geeigneten Konstante $C_{n,\boldsymbol{k}}$ abgeschätzt werden, was zu der gesuchten Abschätzung (5.5) führt.

□

Satz 5.14 (Cauchysche Integralformel für Ableitungen in $Cl(n)$)**.** *Es sei f links-holomorph in der Kugel $U_R(x_0)$. Dann ist f dort unendlich oft reell stetig differenzierbar und für ρ mit $0 < \rho < R$ gilt: für alle x mit $|x - x_0| < \rho$ ist*

$$\nabla^{\boldsymbol{k}} f(x) = \frac{\boldsymbol{k}!}{\sigma_n}\int_{\partial U_\rho(x_0)} \mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}}(y-x)dy^* f(y). \tag{5.6}$$

Ist ferner $|f(x)| \leq M$ für $|x - x_0| = \rho$, so gilt

$$|\nabla^{\boldsymbol{k}} f(x_0)| \leq \frac{MC_{n,\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{k}!}{\rho^{|\boldsymbol{k}|}}.$$

Beweis. Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$f(x) = \int_{\partial U_\rho(x_0)} E_n(y-x)dy^* f(y) = \frac{1}{\sigma_n}\int_{\partial U_\rho(x_0)} \mathcal{Q}_{\mathbf{0}}(y-x)dy^* f(y)$$

Wir überlegen zunächst, dass sich für für jeden Multiindex $\boldsymbol{k}$ das Integral und $\nabla^{\boldsymbol{k}}$ vertauschen lassen. Mit $k = |\boldsymbol{k}|$ ist

$$\nabla_x^{\boldsymbol{k}}(\mathcal{Q}_{\mathbf{0}}(y-x)) = (-1)^k(\nabla^{\boldsymbol{k}}\mathcal{Q}_{\mathbf{0}})(y-x)$$

wegen Lemma 5.13 auf $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{x\}$ stetig in y, wobei wegen $|x-x_0| < \rho$ sicher $x \notin \partial U_\rho(x_0)$ gilt. Insbesondere ist also $\nabla_x^{\boldsymbol{k}}\mathcal{Q}_{\mathbf{0}}(y-x)$ als stetige Funktion in y auf $\partial U_\rho(x_0)$ beschränkt. Also ist für alle $\boldsymbol{k}$ das Parameterintegral

$$f(x) = \int_{\partial U_\rho(x_0)} \nabla_x^{\boldsymbol{k}}(\mathcal{Q}_{\mathbf{0}}(y-x))dy^* f(y)$$

differenzierbar mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \int_{\partial U_\rho(x_0)} \frac{\partial}{\partial x_i}\nabla_x^{\boldsymbol{k}}(\mathcal{Q}_{\mathbf{0}}(y-x))dy^* f(y). \tag{5.7}$$

Mittels Induktion nach $k = |\boldsymbol{k}|$ erhält man nun sofort die Vertauschbarkeit des Integrals mit $\nabla_x^{\boldsymbol{k}}$. Für $k = 1$ ist diese genau (5.7) mit $\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$. Ist die Vertauschbarkeit außerdem für $k-1$ gegeben, so folgt

$$\begin{aligned}
\nabla^{\boldsymbol{k}}\int_{\partial U_\rho(x_0)} \mathcal{Q}_{\mathbf{0}}(y-x)dy^* f(y) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\nabla_x^{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}\int_{\partial U_\rho(x_0)} \mathcal{Q}_{\mathbf{0}}(y-x)dy^* f(y) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\partial U_\rho(x_0)} \nabla_x^{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(\mathcal{Q}_{\mathbf{0}}(y-x))dy^* f(y) = \\
= \int_{\partial U_\rho(x_0)} \frac{\partial}{\partial x_i}\nabla_x^{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(\mathcal{Q}_{\mathbf{0}}(y-x))dy^* f(y) &= \int_{\partial U_\rho(x_0)} \nabla_x^{\boldsymbol{k}}(\mathcal{Q}_{\mathbf{0}}(y-x))dy^* f(y),
\end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{\varepsilon_i}$ den Vektor $(0,\dots,1,\dots,0)$ mit dem Eintrag 1 an der i-ten Stelle bezeichnet und i so gewählt ist, dass $k_i \neq 0$.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\nabla^{\boldsymbol{k}} f(x) &= \frac{1}{\sigma_n}\int_{\partial U_\rho(x_0)} \nabla_x^{\boldsymbol{k}}(\mathcal{Q}_{\mathbf{0}}(y-x))dy^* f(y) = \\
&= \frac{1}{\sigma_n}\int_{\partial U_\rho(x_0)} (-1)^{|\boldsymbol{k}|}(\nabla^{\boldsymbol{k}}\mathcal{Q}_{\mathbf{0}})(y-x)dy^* f(y) = \\
&= \frac{\boldsymbol{k}!}{\sigma_n}\int_{\partial U_\rho(x_0)} \mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}}(y-x)dy^* f(y).
\end{aligned}$$

Um noch die Abschätzung zu zeigen, nimmt man in (5.6) auf beiden Seiten den Betrag und zieht ihn rechts in das Integral und weiter in das Produkt hinein, was möglich ist, da $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}}(y-x)$ und dy^* nur Werte in $\mathbb{R}^{n+1}$ annehmen. Dann erhält man mit (5.5)

$$\left|\nabla^{\boldsymbol{k}} f(x_0)\right| \leq \frac{\boldsymbol{k}!}{\sigma_n}\int_{\partial U_\rho(x_0)} |\mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}}(y-x_0)|\,|dy^*|\,|f(y)| \leq \frac{MC_{n,\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}!}{\rho^{|\boldsymbol{k}|}}.$$

□

Insbesondere folgt damit:

Korollar 5.15. *Eine in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ links-holomorphe Funktion ist beliebig oft reell stetig differenzierbar und alle ihre partiellen Ableitungen sind selbst wieder links-holomorph.*

Beweis. Da G offen ist, existiert zu jedem Punkt $x \in G$ eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(x) \subset G$ auf der f holomorph ist – also können wir Satz 5.14 anwenden und erhalten, dass f in dieser Umgebung und insbesondere im Punkt x unendlich oft differenzierbar ist. Da dann aber nach dem Satz von Schwarz die Reihenfolge der partiellen Ableitung vertausch werden darf, gilt $\bar{\partial}\nabla^{\boldsymbol{k}} f(x) = \nabla^{\boldsymbol{k}}\bar{\partial} f(x) = 0$ – also ist jede Ableitung von f wieder links-holomorph.

□

Außerdem zeigt sich, dass die Gültigkeit der Cauchyschen Integralformel für eine Funktion nicht nur eine Konsequenz ihrer Holomorphie, sondern sogar eine gleichwertig Eigenschaft ist.

Korollar 5.16. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet. Dann ist eine stetige Funktion $f : G \to Cl(n)$ genau dann links-holomorph, wenn lokal die Cauchysche Integralformel gilt.*

Beweis. Ist f holomorph, so gilt natürlich natürlich die Cauchysche Integralformel. Gilt umgekehrt die Cauchysche Integralformel lokal, so können Integral und Differentiation vertauscht werden und die Holomorphie von f folgt aus der von $\mathcal{Q}_{\mathbf{0}}$.

$\square$

5.3 Taylor-Entwicklung

Als letztes Resultat wollen wir nun noch zeigen, dass sich jede in $Cl(n)$ holomorphe Funktion wie in $\mathbb{C}$ in eine konvergente Taylorreihe entwickeln lässt. Dazu benötigen wir jedoch noch zwei spezielle Typen von Polynomen.

Definition 5.17 (Fueter-Polynome)**.** *Zu einem Multiindex $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$ definieren wir eine Indexfolge $j_{\boldsymbol{k}} = (j_i)_{i=1,\ldots,k}$ mit $k = |\boldsymbol{k}|$ so, dass die ersten k_1 Indizes gleich 1, die nächsten k_2 gleich 2 usw. und schließlich die letzten k_n Indizes gleich n sind. Die Indexfolge $j_{\boldsymbol{k}}$ hat also die Form*

$$j_{\boldsymbol{k}} = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k_1 mal}, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{k_2 mal}, \ldots, \underbrace{n, n, \ldots, n}_{k_n \ mal}).$$

Weiters definieren wir für jede Permutation $\sigma \in S_k$

$$\sigma \star z^{\boldsymbol{k}} := z_{j_{\sigma(1)}} z_{j_{\sigma(2)}} \ldots z_{j_{\sigma(k)}}.$$

Für $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n$ ist das Fueter-Polynom $\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}$ dann definiert als $\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) = 0$, falls $\boldsymbol{k}$ einen negativen Index enthält, als $\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(x) = 1$ für $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$ und sonst als

$$\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma \star z^{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} z_{j_{\sigma(1)}} z_{j_{\sigma(2)}} \ldots z_{j_{\sigma(k)}}. \tag{5.8}$$

Die z_j sind dabei die in (4.18) *eingeführten Fueter-Variablen mit $z_j(x) = x_j - x_0 e_j$.*

Ist σ die Identität auf $\{1, \ldots, k\}$, so gilt aufgrund der Beschaffenheit der Indexfolge $j_1, \ldots j_n$

$$\sigma \star z^{\boldsymbol{k}} = z^{\boldsymbol{k}} = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n}.$$

Man beachte allerdings, dass für beliebige Permutationen diese Gleichheit nicht gilt, da die z_i im Allgemeinen nicht kommutieren.

Man sieht sofort, dass für alle Multiindizes $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}_0^n$ das Fueter-Polynom $\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}$ homogen vom Grad $k = |\boldsymbol{k}|$ ist, denn es gilt $z_j(\lambda x) = \lambda z_j(x)$ und deshalb

$$\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(\lambda x) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \lambda z_{j_{\sigma(1)}} \lambda z_{j_{\sigma(2)}} \ldots \lambda z_{j_{\sigma(k)}} = \lambda^k \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} z_{j_{\sigma(1)}} z_{j_{\sigma(2)}} \ldots z_{j_{\sigma(k)}} = \lambda^k \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x).$$

Lemma 5.18. *Mit den Bezeichnungen $\boldsymbol{\varepsilon}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}_0^n$ mit der 1 an der i-ten Stelle und $k = |\boldsymbol{k}|$ gilt:*

(i) Die Fueter-Polynome erfüllen die Rekursionsformel

$$k\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon}_i}(x) z_i = \sum_{i=1}^{n} k_i z_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon}_i}(x). \tag{5.9}$$

Damit gilt auch

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon}_i}(x) e_i = \sum_{i=1}^{n} k_i e_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon}_i}(x). \tag{5.10}$$

(ii) Für die partiellen Ableitungen ∂_i mit $i = 1, \ldots .n$ gilt

$$\partial_j \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) = k_j \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_j}}(x). \tag{5.11}$$

(iii) Es gilt

$$\partial_0 \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) = -\sum_{j=1}^{n} k_j e_j \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_j}}(x) = -\sum_{j=1}^{n} e_j \partial_j \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}} \tag{5.12}$$

und

$$\partial_0 \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) = -\sum_{j=1}^{n} k_j \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_j}}(x) e_j = -\sum_{j=1}^{n} \partial_j \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}} e_j. \tag{5.13}$$

Also ist $\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}$ links- und rechts-holomorph, denn aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$\bar{\partial} \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) = \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) \bar{\partial} = 0.$$

Beweis. Zunächst wollen wir (5.9) zeigen. Ist $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$ oder eines der k_i negativ, so ist die Gleichheit trivial. Es gelte also $k_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, n$. In jedem Summanden von $\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}$ steht eines der z_i als letzter Faktor. Sortieren wir die Summe nach diesem letzten Faktor, so erhalten wir

$$\begin{aligned} k\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\sigma \in S_k} z_{j_{\sigma(1)}} \ldots z_{j_{\sigma(k)}} = \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\substack{r \in \{1,\ldots,k\} \\ j_r = i}} \sum_{\substack{\sigma \in S_k \\ \sigma(k) = r}} z_{j_{\sigma(1)}} z_{j_{\sigma(2)}} \ldots z_{j_{\sigma(k-1)}} \right) z_i \end{aligned}$$

Für alle i mit $k_i = 0$ steht in den Klammern die leere Summe, sodass wir diese durch $\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x) = 0$ ersetzen können. Für alle anderen i hat die innerste Summe genau die Gestalt (5.8), wobei aber z_i einmal weniger vorkommt. Da es k_i Indizes r mit $j_r = i$ gibt, folgt dann

$$\frac{1}{(k-1)!} \sum_{\substack{r \in \{1,\ldots,k\} \\ j_r = i}} \sum_{\substack{\sigma \in S_k \\ \sigma(k) = r}} z_{j_{\sigma(1)}} z_{j_{\sigma(2)}} \ldots z_{j_{\sigma(k-1)}} = \sum_{\substack{r \in \{1,\ldots,k\} \\ j_r = i}} \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x) = k_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x).$$

Also erhalten wir insgesamt

$$k\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)!} \sum_{\substack{r \in \{1,\ldots,k\} \\ j_r = i}} \sum_{\substack{\sigma \in S_k \\ \sigma(k) = r}} z_{j_{\sigma(1)}} z_{j_{\sigma(2)}} \ldots z_{j_{\sigma(k-1)}} \right) z_i = \sum_{k=1}^{n} k_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x) z_i.$$

Die Gleichheit

$$k\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i z_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x)$$

erhalten wir völlig analog, indem wir nach dem ersten Faktor sortieren. Um (5.10) zu zeigen, setzen wir $z_i = x_i - x_0 e_i$ in (5.9) ein. Daraus ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x)(x_i - x_0 e_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x) z_i = \sum_{i=1}^{n} k_i z_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i (x_i - x_0 e_i) \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x).$$

Da die x_i als reelle Zahlen mit den $\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x)$ kommutieren, kann man auf beiden Seiten $\sum_{i=1}^{n} k_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x) x_i$ subtrahieren und den Faktor $-x_0$ kürzen und erhält so die gesuchte Gleichung (5.10).

(ii) zeigen wir durch vollständige Induktion nach k. Enthält k einen negativen Index, so ist die Gleichung trivialerweise erfüllt. Für $k = 0$ enthält $\boldsymbol{k} - \boldsymbol{\varepsilon}_j$ eine negative Komponente. Also gilt (5.11), da $\partial_j \mathcal{P}_{\boldsymbol{0}} = 0$ und $\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_j}} = 0$. Um von $k-1$ nach k zu schließen, rechnen wir

$$\begin{aligned} k\partial_j \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) &\overset{*}{=} \sum_{i=1}^{n} k_i \partial_j (\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x) z_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i (k_j - \delta_{ij}) \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}-\boldsymbol{\varepsilon_j}}(x) z_i + \sum_{i=1}^{n} k_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x) \partial_j z_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (k_i - \delta_{ij}) k_j \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_j}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x) z_i + k_j \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_j}}(x) = \\ &\overset{*}{=} (k-1) k_j \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_j}}(x) + k_j \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_j}}(x) = k k_j \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_j}}(x), \end{aligned}$$

wobei die mit $*$ gekennzeichneten Gleichheiten aus der Rekursionsformel (5.9) folgen. Kürzen wir nun durch k, so erhalten wir (5.11).

Auch (iii) wird durch vollständige Induktion nach k gezeigt. Für $k = 0$ ist $\partial_0 \mathcal{P}_{\boldsymbol{0}}(x) = \mathcal{P}_{\boldsymbol{0}}(x)\partial_0 = 0$, also sind die Gleichungen trivialerweise erfüllt, da $\mathcal{P}_{\boldsymbol{0}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x) = 0$. Mit der Rekursionformel (5.9) und der Induktionsvoraussetzung gilt wieder

$$\begin{aligned} k\partial_0(x)\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}} &\overset{*}{=} \sum_{i=1}^{n} k_i (\partial_0 \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x)) z_i + \sum_{i=1}^{n} k_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x) \partial(z_i) = \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_i (k_j - \delta_{ij}) e_j \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}-\boldsymbol{\varepsilon_j}}(x) z_i - \sum_{i=1}^{n} k_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_j}}(x) e_i = \\ &= -\sum_{j=1}^{n} k_j e_j \sum_{i=1}^{n} (k_i - \delta_{ij}) \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_j}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x) z_i - \sum_{i=1}^{n} k_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_j}}(x) e_i = \\ &\overset{**}{=} -(k-1) \sum_{j=1}^{n} k_j e_j \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_j}}(x) - \sum_{i=1}^{n} k_i e_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x) = -k \sum_{i=1}^{n} e_i k_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x), \end{aligned}$$

wobei die mit $*$ gekennzeichnete Gleichheit wieder aus (5.9) und die mit $**$ gekennzeichnete aus (5.9) und (5.10) folgt. Schließlich folgt mit (5.11) die zu beweisende Gleichung (5.12)

$$\partial_0 \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) = -\sum_{i=1}^{n} e_i k_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x) = -\sum_{i=1}^{n} e_i \partial_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x).$$

Sofort folgt damit aus (5.10) auch (5.13)

$$\partial_0 \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) = -\sum_{i=1}^{n} e_i k_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x) = -\sum_{i=1}^{n} k_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}(x) e_i = -\sum_{i=1}^{n} \partial_i \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) e_i.$$

□

Korollar 5.19. *Für zwei Multiindizes $\boldsymbol{j} = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n$ und $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ gilt*

$$\nabla^{(0,\boldsymbol{j})} \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) = \frac{\boldsymbol{k}!}{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j})!} \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}}(x), \tag{5.14}$$

wobei wir $\frac{\boldsymbol{k}!}{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j})!} = 0$ setzen, falls $j_i > k_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Insbesondere gilt damit

$$(\nabla^{(0,\boldsymbol{j})} \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}})(0) = \boldsymbol{j}! \delta_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}}. \tag{5.15}$$

Beweis. Ist $j_i > k_i$ für einen Index i, so können wir zuerst j_i mal nach x_i differenzieren, da die $\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}$ beliebig oft stetig differenzierbar sind, sodass nach dem Satz von Schwarz die Differentiationsreihenfolge vertauscht werden kann. Wir erhalten dann wegen (5.11) eine Funktion der Bauart $C\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j_i}\boldsymbol{\varepsilon_i}}$– also die

Nullfunktion. Folglich gilt auch $\nabla^{\boldsymbol{j}}\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}} = 0$. Sei nun $k_i \geq j_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wir zeigen die Aussage mit vollständiger Induktion nach $j = |\boldsymbol{j}|$. Für $j = 1$ ist sie genau die im letzten Lemma gezeigte Eigenschaft (5.11) .

Gilt nun (5.14) für $|\boldsymbol{j}| \leq j - 1$, so wähle man ein beliebiges i mit $j_i > 0$. Da die Differentiationsreihenfolge wieder beliebig gewählt werden kann, folgt

$$\begin{aligned}\nabla^{(\mathbf{0},\boldsymbol{j})}\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) &= \nabla^{(\mathbf{0},\boldsymbol{j}-\boldsymbol{\varepsilon}_i)}\partial_i\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) = k_i\nabla^{(\mathbf{0},\boldsymbol{j}-\boldsymbol{\varepsilon}_i)}\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon}_i}(x) = \\ &= k_i\frac{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon}_i)!}{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon}_i-(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{\varepsilon}_i))!}\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varepsilon}_i-(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{\varepsilon}_i)}(x) = \frac{\boldsymbol{k}!}{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j})!}\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}}(x).\end{aligned}$$

Für $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{j}$ folgt damit $(\nabla^{(\mathbf{0},\boldsymbol{j})}\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}})(0) = 0$, denn abgesehen von $\mathcal{P}_{\mathbf{0}}$ gilt für alle Fueter-Polynome $\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(0) = 0$. Ist aber $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$ so folgt $(\nabla^{(\mathbf{0},\boldsymbol{j})}\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}})(0) = \boldsymbol{j}!\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(0) = \boldsymbol{j}!$ – insgesamt also (5.15).

□

Korollar 5.20. *Die Fueter-Polynome sind rechts-$Cl(n)$und links-$Cl(n)$-linear unabhängig.*

Beweis. Links-$Cl(n)$-lineare Unabhängigkeit bedeutet, dass für jede endliche Indexmenge I mit $\boldsymbol{k}_i \neq \boldsymbol{k}_j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ aus

$$\sum_{i\in I}\lambda_i\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}_i} = 0 \qquad \text{mit } \lambda_i \in Cl(n)$$

folgt, dass $\lambda_i = 0$ für alle $i \in I$. Wegen Korollar 5.19 gilt für so eine Linearkombination

$$0 = \nabla^{(\mathbf{0},\boldsymbol{k}_i)}\sum_{\boldsymbol{k}_i\in I}\lambda_i\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}_i} = \lambda_i\boldsymbol{k}_i!,$$

also $\lambda_i = 0$.

Analog zeigt man, dass die Fueter-Polynome rechts-linear-unabhänig sind. □

Lemma 5.21. *Jedes links-holomorphe homogene Polynom $P : \mathbb{R}^{n+1} \to Cl(n)$ vom Grad k lässt sich in der Form*

$$P(x) = \sum_{|\boldsymbol{k}|=k}\frac{1}{\boldsymbol{k}!}\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x)\,(\nabla^{(\mathbf{0},\boldsymbol{k})}P)(0),$$

jedes rechts-holmorphe in der Form

$$P(x) = \sum_{|\boldsymbol{k}|=k}\frac{1}{\boldsymbol{k}!}\,(\nabla^{(\mathbf{0},\boldsymbol{k})}P)(0)\,\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x)$$

als $Cl(n)$-Linarkombination von Fueter-Polynomen schreiben.

Beweis. Es sei P ein links-holomorphes und homogenes Polynom vom Grad k. Dann gilt

$$\partial_0 P(x) + \sum_{i=1}^{n} e_i\partial_i P(x) = 0. \tag{5.16}$$

Weiters folgt wegen Lemma 5.11

$$x_0\partial_0 P(x) + \sum_{i=1}^{n} x_i\partial_i P(x) = kP(x).$$

Durch Subtrahieren von der mit x_0 multiplizieren Gleichung (5.16) erhält man daraus

$$kP(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0 e_i)\partial_i P(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i\partial_i P(x). \tag{5.17}$$

Da mit $P(x)$ auch alle Ableitungen $\partial_i P(x)$ holomorph und homogene Polynome vom Grad $k - 1$ sind, können wir die obige Argumentation für sie wiederholen und nach insgesamt k Schritten erhalten wir

$$k!P(x) = \sum_{i_1,i_2,i_3,\ldots,i_k=1}^{n} z_{i_1}\ldots z_{i_k}\partial_{i_1}\ldots\partial_{i_k}P(x). \tag{5.18}$$

Fassen wir nun alle Ableitungen, die zu einem Multiindex $\boldsymbol{k}$ gehören, zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{|\boldsymbol{k}|=k} \frac{1}{k!}\frac{1}{\boldsymbol{k}!} \sum_{\sigma \in S_k} z_{i_{\sigma(1)}} \dots z_{i_{\sigma(k)}} \nabla^{(\mathbf{0},\boldsymbol{k})} P(x) = \\ &= \sum_{|\boldsymbol{k}|=k} \frac{1}{\boldsymbol{k}!} \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) \nabla^{(\mathbf{0},\boldsymbol{k})} P(x) \qquad \text{mit } \boldsymbol{k} = (0, k_1, \dots, k_n), \end{aligned}$$

wobei der Faktor $\frac{1}{\boldsymbol{k}!}$ dadurch entsteht, dass jede Anordnung der z_i in (5.18) nur einmal vorkommt. Zu jeder solchen Anordnung gibt es aber genau $\boldsymbol{k}!$ Permutationen $\sigma \in S_k$, die nur Indizes mit $z_r = z_s$ untereinander permutiert und somit wieder die gleiche Anordnung der z_i liefert, sodass wir die Summe über alle $\sigma \in S_k$ durch diesen Faktor divideren müssen.

Schließlich ist eine Ableitung k-ten Grades eines Polynoms vom Grad k konstant, sodass wir $\nabla^{(\mathbf{0},\boldsymbol{k})} P(x)$ statt an der Stelle x an der Stelle 0 auswerten können. Damit erhalten wir genau die gesuchte Darstellung.

Für rechts-holomorphe Polynome verläuft der Beweis analog.

□

Die Gleichung (5.17) kann insbesondere als Rechtfertigung für die Wahl der Fueter-Variablen dienen, denn an dieser Stelle treten die Terme z_i auf natürliche Weise auf.

Schließlich benötigen wir noch einen anderen Polynomtyp zum Beweis der Taylor-Entwicklung:

Definition 5.22 (Gegenbauer-Polynome). *Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\mu > -\frac{1}{2}$, ist das Gegenbauer-Polynom C_k^μ definiert als*

$$C_k^\mu : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \to & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & \sum_{\frac{k}{2} \le m \le k} \binom{-\mu}{m}\binom{m}{2m-k}(-2s)^{2m-k} \end{array} \right.$$

mit dem verallgemeinerten Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!}, & \text{wenn } k > 0 \\ 1, & \text{wenn } k = 0 \\ 0, & \text{wenn } k < 0 \end{cases} \tag{5.19}$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$.

Mit dieser Definition ist insbesondere $C_0^\mu(s) = 1$.

Korollar 5.23. *Die Funktion $C_k^\mu(s)$ enthält nur Potenzen der Ordnung k, $k-2$, ...*

Beweis. Definieren wir $j := k - m$, so lässt sich $C_k^\mu(s)$ schreiben als

$$C_k^\mu(x) = \sum_{0 \le j \le \frac{k}{2}} \binom{-\mu}{k-j}\binom{k-j}{k-2j}(-2s)^{k-2j}.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. □

Satz 5.24 (Taylorreihe). *Es sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet. Ist $U_r(x_0) \subset G$ und $f : G \to Cl(n)$ links-holomorph, so kann f in $U_{(\sqrt{2}-1)r}(x_0)$ in eine konvergente Taylorreihe der Form*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\boldsymbol{k}|=k} \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) a_{\boldsymbol{k}}$$

mit

$$a_{\boldsymbol{k}} = \frac{\nabla^{(\mathbf{0},\boldsymbol{k})} f(x_0)}{\boldsymbol{k}!} = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial U_\rho(x)} \mathcal{Q}_{(\mathbf{0},\boldsymbol{k})}(y - x_0) dy^* f(y) \tag{5.20}$$

mit beliebigem $0 < \rho < r$ entwickelt werden. (Für rechts-holomorphe Funktionen müssen $a_{\boldsymbol{k}}$ und $\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}$ bzw. $\mathcal{Q}_{(\mathbf{0},\boldsymbol{k})}$ und f vertauscht werden.)

Beweis. Für den Beweis gehen wir von der Causchyschen Integralformel (5.2) aus. Sei zunächst ρ beliebig mit $0 < \rho < r$. Dann gilt

$$f(x) = \int_{\partial U_\rho(x_0)} E_n(y-x)dy^* f(y) \qquad \text{für } \; |x_0 - x| < \rho. \tag{5.21}$$

Wir wollen nun den Cauchy-Kern bzw. $\mathcal{Q}_{\mathbf{0}}(y-x) = \sigma_n E_n(y-x)$ in eine Reihe entwickeln, wobei wir o.B.d.A. $x_0 = 0$ annehmen. Dazu berechnen wir

$$\partial_x \frac{1}{|y-x|^{n-1}} = -\frac{n-1}{2}\frac{1}{|y-x|^{n+1}}\partial_x |y-x|^2,$$

wobei

$$\partial_x := \frac{\partial}{\partial x_0} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} e_i$$

den zu $\bar{\partial}$ formal konjugierten Operator in der Variable x bezeichnet. Analog werden wir $\bar{\partial}_x$ schreiben, um zu betonen, dass nach den Komponenten der Variable x partiell differenziert wird. Fassen wir x und y wieder als Elemente von $Cl(n)$ auf, so folgt

$$\begin{aligned}\partial_x |y-x|^2 &= (\frac{\partial}{\partial x_0} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}e_i)\sum_{i=0}^{n}(y_i - x_i)^2 = \\ &= -2(y_0 - x_0) + \sum_{k=1}^{n} e_i 2(y_i - x_i) = -2\overline{(y-x)}.\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\partial_x \frac{1}{|y-x|^{n-1}} = (n-1)\frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{n+1}} = (n-1)\mathcal{Q}_{\mathbf{0}}(y-x). \tag{5.22}$$

Bis auf einen Faktor ist das aber der Cauchy-Kern, sodass wir uns auf eine Reihenentwicklung von $|y-x|^{-(n-1)}$ beschränken können. Schreiben wir $x = \omega_x|x|$ und $y = \omega_y|y|$ mit $\omega_x, \omega_y \in \mathbb{R}^{n+1} \subset Cl(n)$ und $|\omega_x| = |\omega_y| = 1$, so ergibt sich mit Lemma 2.6

$$|y-x|^2 = |y|^2\left(1 - \frac{\bar{y}x}{|y|^2}\right)\left(1 - \frac{\bar{x}y}{|y|^2}\right) = |y|^2\left(1 - 2[\omega_x \cdot \omega_y]\frac{|x|}{|y|} + \frac{|x|^2}{|y|^2}\right),$$

wobei $[\omega_x \cdot \omega_x]$ das Sklarprodukt der Paravektoren bezeichnet. Setzen wir nun

$$t := \frac{|x|}{|y|} \qquad \text{und} \qquad s := [\omega_x \cdot \omega_y],$$

so folgt mit $\mu := \frac{n-1}{2}$

$$\frac{1}{|y-x|^{n-1}} = \frac{1}{|y|^{n-1}}\frac{1}{(1-2st+t^2)^\mu}, \tag{5.23}$$

wobei $0 \leq t < 1$ und $-1 \leq s \leq 1$ gilt. Aus der elementaren Analysis ist bekannt, dass sich $\frac{1}{(1-2st+t^2)^\mu}$ für $|-st+t^2| < 1$ in der Form

$$\frac{1}{(1-2st+t^2)^\mu} = \sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\mu}{m}(-2st+t^2)^m \tag{5.24}$$

als binomische Reihe anschreiben lässt. Diese konvergiert wegen $|-st+t^2| < 1$ absolut. Da für festes t der Ausdruck $-2st+t$ eine Gerade in s ist, reicht es die Extremfälle $s=1$ und $s=-1$ zu überprüfen, um eine geeignete Bedingung für t zu finden, sodass $|-2st+t^2| < 1$ gilt. Für $s=1$ erhalten wir

$$|-2t+t^2| = |(t-1)^2 - 1| = 1 - (t-1)^2 < 1,$$

bzw. $-(t-1)^2 < 0$. Diese Ungleichung ist aber offensichtlich für alle $t \in [0,1)$ erfüllt. Für $s=-1$ erhalten wir

$$|2t+t^2| = |(t+1)^2 - 1| = (t+1)^2 - 1 < 1,$$

bzw. $t < \sqrt{2}-1$. Insgesamt ist (5.24) also für $s \in [-1,1]$ und $0 \le t < \sqrt{2}-1$, das heißt für $|x| < (\sqrt{2}-1)|y|$, absolut konvergent und deshalb auch lokal gleichmäßig konvergent in s und t.

Da $(-st+t^2)^m$ nur endlich viele Summanden enthält, können wir die Reihe nach Potenzen von t umordnen. Zunächst gilt

$$\frac{1}{(1-2st+t^2)^\mu} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\binom{-\mu}{m}\binom{m}{j}(-2st)^j t^{2(m-j)}.$$

Sortieren wir nun nach Potenzen von t, so sind die zu t^k gehörenden Terme jene, für die $2m-j=k$ gilt. Wegen $j \in \{0,\ldots,m\}$ sind das genau die Terme mit $2m \ge k \ge m$ bzw. $k \ge m \ge \frac{k}{2}$:

$$\frac{1}{(1-2st+t^2)^\mu} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \sum_{\frac{k}{2}\le m\le k}\binom{-\mu}{m}\binom{m}{2m-k}(-2s)^{2m-k} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k C_k^\mu(s).$$

Da diese Reihe lokal gleichmäßig konvergiert und wir deshalb Summation und Differentiation vertauschen können, folgt mit (5.22) und (5.23) und wegen $\partial_x C_0^\mu(s) = \partial_x 1 = 0$

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{0}}(y-x) = \frac{1}{n-1}\partial_x \frac{1}{|y-x|^{n-1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n-1}\partial_x\left(C_k^\mu([\omega_x\cdot\omega_y])\frac{|x|^k}{|y|^{n-1+k}}\right).$$

Benennen wir nun die Summanden mit

$$\mathcal{T}_k(x,y) := \frac{1}{n-1}\partial_x\left(C_{k+1}^\mu([\omega_x\cdot\omega_y])\frac{|x|^{k+1}}{|y|^{n+k}}\right),$$

so folgt schließlich

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{0}}(y-x) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{T}_k(x,y).$$

$C_{k+1}^\mu([\omega_x\cdot\omega_y])\frac{|x|^{k+1}}{|y|^{n+k}}$ enthält wegen Korollar 5.23 in x nur Potenzen der Form

$$[\omega_x\cdot\omega_y]^{k+1-2j}|x|^{k+1} = [x\cdot\omega_y]^{k+1-2j}|x|^{2j}.$$

Also enthält $\mathcal{T}_k(x,y)$ nur Potenzen der Form

$$e_i\partial_i[x\cdot\omega_y]^{k+1-2j}|x|^{2j}.$$

Diese sind nun aber alle homogene Polynome der Ordnung k in x – also ist auch $\mathcal{T}_k$ ein solches. Da $\mathcal{Q}_{\mathbf{0}}$ links-holomorph in x ist, muss das auch für die einzelnen Summanden gelten, denn da die Reihe (5.3) lokal gleichmäßig konvergiert, können wir Differentiation und Summe vertauschen und erhalten

$$0 = \bar{\partial}_x(\mathcal{Q}_{\mathbf{0}}(y-x)) = \sum_{k=0}^{\infty}\bar{\partial}_x\mathcal{T}_k(x,y).$$

Für jedes $k > 1$ ist nun aber $\bar{\partial}_x\mathcal{T}_k(x,y)$ ein homogenes Polynom vom Grad $k-1$. Also erhalten wir für hinreichend kleines $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty}\bar{\partial}_x\mathcal{T}_k(\lambda x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}\bar{\partial}_x\mathcal{T}_k(x,y) = \sum_{j=0}\lambda^j\bar{\partial}_x\mathcal{T}_{j+1}(x,y),$$

eine Entwicklung der konstanten Nullfunktion als Potenzreihe in λ. Da die Koeffizienten einer Potenzreihe eindeutig sind, folgt $\bar{\partial}_x\mathcal{T}_k(x,y) = 0$ für alle $k > 0$. Für $k = 0$ ist diese Gleichheit trivial, da $\mathcal{T}_0$ konstant ist. Also sind die $\mathcal{T}_k$ links-holomorph in x.

Nach Lemma 5.21 können wir $\mathcal{T}_k(x,y)$ also für jedes feste y als Summe von Fueter-Polynomen $\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(\mathrm{x})$ mit $|\boldsymbol{k}| = k$ darstellen. Die Funktionen $\tilde{\mathrm{Q}}_{\boldsymbol{k}}(y)$ seien nun als die entsprechenden, von y abhängigen Koeffizienten dieser Darstellung definiert. Sie erfüllen somit

$$\sum_{|\boldsymbol{k}|=k}\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x)\tilde{\mathrm{Q}}_{\boldsymbol{k}}(y) = \mathcal{T}_k(x,y). \tag{5.25}$$

Um auf eine Darstellung der Form (5.20) zu kommen, wollen wir nun zeigen, dass die $\tilde{\mathrm{Q}}_{\boldsymbol{k}}$ mit den in Definition 5.9 eingeführten Funktionen $\mathcal{Q}_{(\mathbf{0},\boldsymbol{k})}$ übereinstimmen. Für einen beliebigen Multiindex $\boldsymbol{j} = (j_1, \ldots, j_n)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{(\mathbf{0},\boldsymbol{j})}(y-x) &= \frac{(-1)^{|\boldsymbol{j}|}}{\boldsymbol{j}!} \nabla_y^{(\mathbf{0},\boldsymbol{j})} \mathcal{Q}_{\mathbf{0}}(y-x) = \frac{1}{\boldsymbol{j}!} \nabla_x^{(\mathbf{0},\boldsymbol{j})} \mathcal{Q}_{\mathbf{0}}(y-x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\boldsymbol{j}!} \nabla_x^{(\mathbf{0},\boldsymbol{j})} \mathcal{T}_k(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\boldsymbol{k}|=k} \frac{1}{\boldsymbol{j}!} \left(\nabla_x^{(\mathbf{0},\boldsymbol{j})} \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}} \right)(x) \tilde{\mathrm{Q}}_{\boldsymbol{k}}(y) \end{aligned}$$

Setzen wir nun $x = 0$, so gilt wegen Korollar 5.19 $\left(\nabla^{(\mathbf{0},\boldsymbol{j})} \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}\right)(0) = \boldsymbol{j}! \delta_{\boldsymbol{jk}}$ und damit

$$\mathcal{Q}_{(\mathbf{0},\boldsymbol{j})}(y) = \frac{1}{\boldsymbol{j}!} \left(\nabla_x^{(\mathbf{0},\boldsymbol{j})} \mathcal{P}_{\boldsymbol{j}} \right)(0) \tilde{\mathrm{Q}}_{\boldsymbol{j}}(y) = \tilde{\mathrm{Q}}_{\boldsymbol{j}}(y).$$

Insgesamt erhalten wir damit eine Potenzreihendarstellung des Cauchy-Kerns, sodass mit (5.21) für $|x - x_0| < (\sqrt{2} - 1)\rho$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial U_\rho(x_0)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\boldsymbol{k}|=k} \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) \mathcal{Q}_{(\mathbf{0},\boldsymbol{k})}(y) \right) dy^* f(y).$$

Wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Reihe können wir Integral und Summe vertauschen und erhalten

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\boldsymbol{k}|=k} \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(x) \left(\frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial U_\rho(x_0)} \mathcal{Q}_{(\mathbf{0},\boldsymbol{k})}(y) dy^* f(y) \right)$$

was genau der gesuchten Taylorreihen-Entwicklung entspricht.

Da $0 < \rho < r$ beliebig war und die Koeffizienten a_k der Taylorentwicklung unabhängig von ρ sind, ist die Reihenentwicklung tatsächlich für alle x mit $|x - x_0| < (\sqrt{2} - 1)r$ möglich.

□

Insgesamt ist es gelungen, eine sinnvolle Verallgemeinerung des Begriffs der Holomorphie für $Cl(n)$-wertige Funktionen zu finden, der alle der drei üblichen Zugänge aus dem Komplexen erhält - nämlich Differenzierbarkeit bzw. Approximierbarkeit durch eine lineare Funktion, Analytizität – also Entwickelbarkeit als Taylorreihe – und die Erfüllung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Abschließend soll hier noch erwähnt sein, dass sich nicht nur die gezeigten Resultate, sondern viele zentrale Sätze der Funktionentheorie, wie beispielsweise der Satz von Liouville, der Identitätssatz oder der Residuensatz, mit dem hier entwickelten Holomorphiebegriff verallgemeinern lassen. Ausführlich behandelt werden diese in [3].

Literatur

[1] F. Brackx, Richard Delanghe, and F. Sommen. *Clifford Analysis*. Boston [u.a.]: Pitmann Research Notes, 1982.

[2] Henri Cartan. *Differentialformen*. Bibliographisches Institut, 1974.

[3] Hans Gürlebeck, Klaus Habeta, and Wolfgang Sprößig. *Funktionentheorie in der Ebene und im Raum*. Birkhäuser, 2006.

[4] Michael Kaltenbäck. *Analysis auf Mannigfaltigkeiten*. TU Wien (Skriptum), 2011.

[5] Helmut Malonek. A new hypercomplex structure of the euclidean space $\mathbb{R}^{m+1}$ and the concept of hypercomplex differentiability. *Complex Variables*, 14:25–33, 1990.

[6] Georg Nöbeling. *Integralsätze der Analysis*. de Gruyter, 1979.

[7] Marcel Riesz. *Clifford Numbers and Spinors*. Kluwer, 1993.