BACHELORARBEIT

Bornologische Räume

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Kaltenbäck

durch

Marco Katic
Matrikelnummer: 11717644

Wien, am 21.06.2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem Begriff der Beschränktheit bzgl. topologischen Vektorräumen und versuchen dieses Konzept zu verallgemeinern. Die Elemente einer Bornologie spiegeln die Eigenschaften von beschränkten Mengen wieder. Statten wir eine Menge mit einer Bornologie aus, so erhalten wir einen bornologischen Raum. In diesem wird der Begriff der Beschränktheit einer Abbildung zwischen bornologischen Räumen, genauso essentiell sein, wie der Begriff der Stetigkeit zwischen topologischen Räumen. Weiterhin werden wir einige Konzepte zur Konstruktion von Bornologien kennen- lernen, welche aus der Topologie bekannt sind. Die Konvergenz einer Folge in bornologischen Räumen wird Anlass geben, den Begriff des bornologischen Abschlusses zu definieren. Im Nachhinein werden wir die Dualität zwischen topologischen und bornologischen Räumen genauer studieren und feststellen, dass für lokalkonvexe topologische Räume eine zu dieser Topologie kompatible Bornologie existiert, sodass die Beschränktheit von linearen Funktionen bzgl. der Bornologie, die Stetigkeit der Funktion bzgl. der Topologie impliziert.

2 Grundbegriffe

Um eine größere Übersichtlichkeit zu gewährleisten, werden wir uns in der gesamten Arbeit, wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, immer auf Vektorräume über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen beschränken. Fast alle Ergebnisse gelten aber genauso für Vektorräume über $\mathbb{R}$.

Definition 2.0.1. *Sei X ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$ und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. Wir sagen $(X, \mathcal{T})$ ist ein topologischer Vektorraum, wenn gilt:*

i) Die Abbildung

$$+ : \begin{cases} X \times X \to X \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases}$$

ist stetig, wobei X mit der Topologie $\mathcal{T}$ und $X \times X$ mit der Produkttopologie $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ versehen ist.

ii) Die Skalarmultiplikation

$$\cdot : \begin{cases} \mathbb{C} \times X \to X \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{cases}$$

ist stetig, wobei $\mathbb{C}$ mit der üblichen Topologie $\mathcal{E}$ und $\mathbb{C} \times X$ mit der Produkttopologie $\mathcal{E} \times \mathcal{T}$ versehen ist.
Wenn nichts anderes explizit spezifiziert ist, fordern wir, dass die Topologie $\mathcal{T}$ Hausdorff ist.

Definition 2.0.2. *Die Teilmenge A eines Vektorraumes X heißt*

i) absorbierend, wenn es zu jedem $x \in X$ ein $t > 0$ gibt mit $tx \in A$.

ii) symmetrisch, wenn gilt $-A = A$, wobei $-A = \{-x : x \in A\}$.

iii) kreisförmig, wenn für alle $x \in A$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq 1$, auch $\lambda x \in A$ gilt.

iv) konvex, wenn für alle $x, y \in A$ und $t \in [0, 1]$ auch

$$tx + (1 - t)y \in A$$

gilt.

Definition 2.0.3. *Sei X ein Vektorraum und $A, B \subseteq X$ Teilmengen. Dann absorbiert A die Menge B, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert mit $\lambda B \subseteq A$ für alle $|\lambda| \leq \epsilon$.*

Definition 2.0.4. *Ein topologischer Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ heißt lokalkonvex, wenn es eine Umgebungsbasis der Null gibt, die aus konvexen Mengen besteht.*

Proposition 2.0.5. *Sei X ein Vektorraum und $A \subseteq X$ eine kreisförmige Menge. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ folgt $\lambda A = |\lambda| A$ und für ein $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \leq |\mu|$ folgt $\lambda A \subseteq \mu A$.*

Beweis. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$\lambda A = |\lambda| \frac{\lambda}{|\lambda|} A = |\lambda| A,$$

da A kreisförmig ist. Seien $\mu, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|\lambda| \leq |\mu|$ bzw. $\frac{|\lambda|}{|\mu|} \leq 1$. Dann folgt

$$\lambda A = |\mu| \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{|\lambda|}{|\mu|} A \subseteq |\mu| A = \mu A.$$

Wegen $0A = \{0\}$ ist der Fall $\mu = 0$ bzw. $\lambda = 0$ klar.

□

Proposition 2.0.6. *Sei X ein Vektorraum und A eine kreisförmige absorbierende Menge. Für jedes $x \in X$ existiert dann ein $\epsilon > 0$ mit $tx \in A$ für alle $|t| \leq \epsilon$.*

Beweis. Da A absorbierend ist, existiert für jedes $x \in X$ ein $\epsilon > 0$ mit $\epsilon x \in A$. Da A kreisförmig ist, folgt mit Proposition 2.0.5 $\epsilon x \in A \subseteq \frac{\epsilon}{t} A$ und daher $tx \in A$ für $0 < |t| \leq \epsilon$. Der Fall $t = 0$ ist wieder klar. □

Satz 2.0.7. *Sei X ein Vektorraum und $O_i \subseteq X$ für $i = 1, \ldots, n$ mit $n \in \mathbb{N}$ kreisförmig. Dann ist auch*

$$\bigcap_{i=1}^{n} O_i$$

kreisförmig.

Beweis. Seien $O_i \subseteq X$, $i = 1, \ldots, n$ kreisförmige Mengen und $x \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i \neq \emptyset$. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \leq 1$ gilt $\lambda x \in O_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, woraus $\lambda x \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i$ folgt. □

Definition 2.0.8. *Sei X ein Vektorraum und $A \subseteq X$. Wir bezeichnen mit $\operatorname{bal}(A)$ die kleinste kreisförmige Menge in X, welche A enthält, und nennen $\operatorname{bal}(A)$ die kreisförmige Hülle von A.*

Lemma 2.0.9. *Sei X ein Vektorraum und $A \subseteq X$. Für die kreisförmige Hülle von A gilt*

$$\operatorname{bal}(A) = \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A.$$

Beweis. $\subseteq$: Für $a \in \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A$ und $\tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$ mit $|\tilde{\lambda}| \leq 1$ folgt aus $|\tilde{\lambda}\lambda| \leq 1$ im Fall $|\lambda| \leq 1$, dass

$$\tilde{\lambda} a \in \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \tilde{\lambda}(\lambda A) \subseteq \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A. \tag{2.1}$$

Also ist die Menge $\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A$ kreisförmig. Da $\operatorname{bal}(A)$ die kleinste kreisförmige Menge ist, die A enthält, folgt $\operatorname{bal}(A) \subseteq \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A$.
$\supseteq$: Wegen $A \subseteq \operatorname{bal}(A)$ und $\lambda A \subseteq \lambda \operatorname{bal}(A) \subseteq \operatorname{bal}(A)$ für alle $|\lambda| \leq 1$, folgt $\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A \subseteq \operatorname{bal}(A)$. □

Bemerkung 2.0.10. *Aus obigem Lemma folgt direkt die Darstellung* $\mathrm{bal}(A) = K_1(0)A = \{\lambda a : |\lambda| \leq 1, a \in A\}$.

Proposition 2.0.11. *Sei X ein Vektorraum und $A \subseteq X$. Dann ist $\mathrm{co}\,(\mathrm{bal}(A))$ eine kreisförmige konvexe Menge.*

Beweis. Wir zeigen, dass $\mathrm{co}((\mathrm{bal}(A)))$ kreisförmig ist. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \leq 1$, dann gilt wegen Lemma 2.0.9 und der Vertauschbarkeit des Hüllenoperators mit der Skalarmultiplikation

$$\lambda\,\mathrm{co}\,(\mathrm{bal}(A)) = \mathrm{co}\,(\lambda \mathrm{bal}(A)) = \mathrm{co}\,(\mathrm{bal}(\lambda A)) \subseteq \mathrm{co}\,(\mathrm{bal}(A)).$$

□

Satz 2.0.12. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{V})$ topologische Vektorräume und $f : X \to Y$ eine lineare Abbildung.*

i) Falls $A \subseteq X$ kreisförmig in X ist, so ist $f(A)$ kreisförmig in Y.

ii) Falls $B \subseteq Y$ kreisförmig in Y ist, dann ist $f^{-1}(B)$ kreisförmig in X.

Beweis. i) Für kreisförmiges $A \subseteq X$ und $|\lambda| \leq 1$ gilt $\lambda A \subseteq A$ und wegen der Linearität von f auch $\lambda f(A) = f(\lambda A) \subseteq f(A)$.

ii) Für kreisförmiges $B \subseteq Y$ und $|\lambda| \leq 1$ gilt $\lambda B \subseteq B$, womit $\lambda f^{-1}(B) = f^{-1}(\lambda B) \subseteq f^{-1}(B)$.

□

Lemma 2.0.13. *Seien X ein Vektorraum, $a, b > 0$ und $K \subseteq X$ konvex. Dann gilt $(a + b)K = aK + bK$.*

Beweis. Klarerweise haben wir $(a+b)K \subseteq aK+bK$. Für $y \in aK+bK$ existieren $x, w \in K$ mit $y = ax + bw$. Da K konvex ist, folgt

$$\frac{1}{a+b}y = \frac{a}{a+b}x + \frac{b}{a+b}w \in K.$$

□

Proposition 2.0.14. *Sei X ein Vektorraum. Für eine konvexe und kreisförmige Menge $A \subseteq X$ gilt*

$$\mathrm{span}\,(A) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} \lambda A = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A. \tag{2.2}$$

Beweis. Offenbar gilt

$$\mathrm{span}\,(A) \supseteq \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} \lambda A \supseteq \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A.$$

Für $a \in \mathrm{span}\,(A)$ existieren $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \subseteq \lambda_1 A + \ldots + \lambda_n A$. Aus 2.0.5 und 2.0.13 erhalten wir

$$\lambda_1 A + \ldots + \lambda_n A = |\lambda_1| A + \ldots + |\lambda_n| A = (|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n|)A,$$

womit $a \in (|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n|)A$. □

3 Beschränkte Mengen

Für einen topologischen Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ bezeichnen wir mit $\mathcal{U}_X(0)$ die Menge aller Nullumgebungen von $(X, \mathcal{T})$.

Definition 3.0.1. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. Eine Menge $S \subseteq X$ heißt beschränkt, wenn für alle Nullumgebungen U ein $\epsilon > 0$ mit $tS \subseteq U$ für alle $|t| \leq \epsilon$ existiert.*

Bemerkung 3.0.2. *Da jeder topologische Vektorraum eine Nullumgebungsbasis bestehend aus kreisförmigen Mengen hat, reicht es, die Bedingung aus Definition 3.0.1 für kreisförmige U nachzuprüfen. Gilt für ein solches U und ein $\epsilon > 0$ die Inklusion $\epsilon S \subseteq U$, so folgt $\frac{t}{\epsilon}\epsilon S \subseteq \frac{t}{\epsilon} U \subseteq U$ für $|t| \leq \epsilon$. Also ist S genau dann beschränkt, wenn es zu jeder kreisförmigen Umgebung ein $\epsilon > 0$ mit $\epsilon S \subseteq U$ gibt.*

Jeder Singleton $\{x\} \subseteq X$ eines topologischen Vektorraumes $(X, \mathcal{T})$ ist beschränkt, da jede Nullumgebungsbasis absorbierend ist.

Proposition 3.0.3. *In einem topologischen Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ gelten folgende Eigenschaften für beschränkte Mengen:*

i) Der Abschluss einer beschränkten Menge ist beschränkt.

ii) Endliche Vereinigungen von beschränkten Mengen sind beschränkt.

iii) Jede Teilmenge einer beschränkten Menge ist beschränkt.

iv) Endliche Summen und skalare Vielfache von beschränkten Mengen sind beschränkt.

Beweis. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $B, B_1, \ldots, B_n \subseteq X$ beschränkt.

i) Da jeder topologische Vektorraum (T_3) erfüllt und somit eine Nullumgebungsbasis $\mathcal{C}$ aus abgeschlossenen Nullumgebungen besitzt, existiert für $C \in \mathcal{C}$ ein $\epsilon > 0$ mit $tB \subseteq C$ für $|t| \leq \epsilon$, weshalb $t\overline{B} = \overline{tB} \subseteq \overline{C} = C$ für alle $|t| \leq \epsilon$.

ii) Für $U \in \mathcal{U}_X(0)$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$ existiert $\epsilon_i > 0$ mit $tB_i \subseteq U$ für $|t| \leq \epsilon_i$. $\epsilon := \min_{i=1,\ldots,n} \epsilon_i$ erfüllt dann

$$t\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} tB_i \subseteq U \text{ für } |t| \leq \epsilon.$$

iii) Wegen der Beschränktheit von B existiert für jede Nullumgebung $U \in \mathcal{U}_X(0)$ ein $\epsilon > 0$ mit $tB \subseteq U$ für alle $|t| \leq \epsilon$. Im Fall $A \subseteq B$ folgt $tA \subseteq tB \subseteq U$ für alle $|t| \leq \epsilon$.

iv) Zu $U \in \mathcal{U}_X(0)$ existiert nach Lemma 2.1.8 [M.B20, Seite 20] eine symmetrische Nullumgebung $V \subseteq U$ mit

$$\underbrace{V + \ldots + V}_{\text{n-mal}} \subseteq U.$$

Da alle B_i beschränkt sind, existiert für jedes $i = 1, \ldots, n$ ein $\epsilon_i > 0$ mit $tB_i \subseteq V$, wenn $|t| \leq \epsilon_i$. Für $\epsilon := \min_{i=1,\ldots,n} \epsilon_i$ und $|t| \leq \epsilon$ erhalten wir

$$tB_1 + \ldots + tB_n \subseteq V + \ldots + V \subseteq U.$$

Zu $B \subseteq X$ existiert ein $\epsilon > 0$ mit $tB \subseteq V$ für alle $|t| \leq \epsilon$. Im Fall $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $|t| \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|}$ folgt $|t\lambda| \leq \epsilon$ und daher $\lambda tB \subseteq V$. Für $\lambda = 0$ ist die Aussage $t\lambda B \subseteq V$ offenbar richtig.

□

Satz 3.0.4. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum.*

i) Für eine streng monoton wachsende Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $(0, +\infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} r_n = +\infty$ und eine Nullumgebung V in $(X, \mathcal{T})$ gilt

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} r_n V.$$

ii) Jede kompakte Menge ist beschränkt.

Beweis. i) Offenbar können wir V als offen annehmen. Da für gegebenes $x \in X$ die Abbildung $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \lambda x \in X$ stetig ist, ist $D := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda x \in V\}$ eine offene Nullumgebung in $\mathbb{C}$ und enthält somit $\frac{1}{r_n}$ für alle $n \geq N$ für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $\frac{1}{r_n}x \in V$ bzw. $x \in r_n V$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

ii) Sei V eine Nullumgebung und $W \subseteq V$ eine offene und kreisförmige Nullumgebung. Nach (i) gilt

$$K \subseteq X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nW.$$

Da K kompakt ist, existieren $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N}$ derart, dass $K \subseteq n_1 W \cup \ldots \cup n_s W$. Für $t := \max_{i=1,\ldots,s} n_i$ und $|w| \leq 1$ erhalten wir aus Proposition 2.0.5

$$wK \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} wn_i W \subseteq wtW \subseteq tW \subseteq tV,$$

womit $\lambda K \subseteq V$ für alle $|\lambda| \leq \frac{1}{t}$.

□

Satz 3.0.5. *Für einen topologischen Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

i) S ist beschränkt.

ii) Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in S und jede Folge $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty}\epsilon_n = 0$ erfüllt $\lim_{n\to\infty}\epsilon_n x_n = 0$.

iii) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in S gilt $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}x_n = 0$.

Beweis.
$(i) \implies (ii)$: Sei $U \in \mathcal{U}_X(0)$ und $\delta > 0$ mit $tS \subseteq U$ für alle $|t| \leq \delta$. Für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in S und eine Nullfolge $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $|\epsilon_n| \leq \delta$ für $n \geq N$ und damit $\epsilon_n x_n \in \epsilon_n S \subseteq U$ für alle $n \geq N$.
$(ii) \implies (iii)$: Klar.
$(iii) \implies (i)$: Angenommen S ist nicht beschränkt. Dann existiert nach Lemma 2.1.8 [M.B20, Seite 20] eine kreisförmige offene Menge $U \in \mathcal{U}_X(0)$ derart, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein t mit $|t| \leq \epsilon$ und $tS \not\subseteq U$ gibt, weshalb $t \neq 0$ und wegen der Kreisförmigkeit $\frac{1}{\epsilon}U \subseteq \frac{1}{t}U$ und daher $S \not\subseteq \frac{1}{\epsilon}U$ gilt. Für $\epsilon = \frac{1}{n}$ folgt die Existenz von $x_n \in S \setminus nU \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $\frac{1}{n}x_n \notin U$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}x_n \neq 0$. □

Definition 3.0.6. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{V})$ topologische Vektorräume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt beschränkt, falls für jede beschränkte Menge $B \subseteq X$ auch $f(B)$ beschränkt in Y ist.*

Satz 3.0.7. *Sind $(X, \mathcal{T})$,$(Y, \mathcal{V})$ topologische Vektorräume und $T : X \to Y$ eine stetig lineare Abbildung, so ist T beschränkt.*

Beweis. Sei $S \subseteq X$ beschränkt, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $T(S)$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in S mit $y_n = T(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt wegen der Stetigkeit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}T(x_n) = \lim_{n\to\infty}T\left(\frac{1}{n}x_n\right) = 0.$$

aus Satz 3.0.5. Wieder aus Satz 3.0.5 folgt, dass $T(S)$ beschränkt ist. □

Wenden wir diesen Satz auf die Identität an, so erhalten wir

Korollar 3.0.8. *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $\mathcal{T}, \mathcal{V}$ zwei Topologien mit $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{V}$ derart, dass $(X, \mathcal{T})$ und $(X, \mathcal{V})$ topologische Vektorräume sind. Dann ist jede bzgl. $(X, \mathcal{V})$ beschränkte Menge auch bzgl. $(X, \mathcal{T})$ beschränkt.*

Im Allgemeinen sind Unterräume U von topologischen Vektorräumen $(X, \mathcal{T})$ nicht beschränkt, da diese $\mathbb{C}x$ für ein $x \in U$ enthalten. Das nächste Resultat charakterisiert beschränkte Unterräume von topologischen Vektorräumen $(X, \mathcal{T})$, welche nicht das hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllen.

Satz 3.0.9. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, welcher nicht das hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt. Ein Unterraum $M \subseteq X$ ist genau dann beschränkt, wenn*

$$M \subseteq \overline{\{0\}} = \bigcap_{U\in\mathcal{U}_X(0)} U.$$

Beweis. $\Leftarrow$: Ist $M \subseteq X$ ein Unterraum mit $M \subseteq \overline{\{0\}}$, so gilt $\lambda M \subseteq \overline{M}$ und folglich $\lambda M \subseteq U$ für alle $U \in \mathcal{U}_X(0)$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$.
$\Rightarrow$: Angenommen, M ist ein beschränkter Unterraum von X und $x \in M$ mit $x \notin \overline{\{0\}}$. Da M beschränkt ist und $nx \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit Satz 3.0.5 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)(nx) = \lim_{n\to\infty} x = 0$, womit $x \in \overline{\{0\}}$ im Widerspruch zur Annahme. Man beachte, dass, da $(X, \mathcal{T})$ nicht Hausdorff ist, eine Folge mehr als einen Grenzwert besitzen kann. $\square$

Proposition 3.0.10. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $M \subseteq X$ ein linearer Unterraum. Dann ist $B \subseteq M$ genau dann beschränkt in $(M, \mathcal{T}_M)$, wenn B in $(X, \mathcal{T})$ beschränkt ist.*

Beweis.
$\Rightarrow$: Angenommen $B \subseteq M$ ist beschränkt in M und $V \in \mathcal{U}_X(0)$. Dann gilt $V \cap M \in \mathcal{U}_M(0)$ und es existiert ein $\epsilon > 0$ mit $tB \subseteq V \cap M \subseteq V$ für $|t| \leq \epsilon$. Also ist B auch in $(X, \mathcal{T})$ beschränkt.
$\Leftarrow$: Angenommen $B \subseteq M$ ist in $(X, \mathcal{T})$ beschränkt. Sei $U \in \mathcal{U}_M(0)$, dann existiert ein $V \in \mathcal{U}_X(0)$ mit $U = V \cap M$. Da V eine Nullumgebung ist, existiert ein $\epsilon > 0$ mit $tB \subseteq V$ für $|t| \leq \epsilon$. Da $B \subseteq M$ und M ein linearer Unterraum ist, gilt $tB \subseteq tM \subseteq M$ und infolge $tB \subseteq V \cap M = U$ für $|t| \leq \epsilon$. $\square$

4 Bornologien und bornologische Räume

Wir wollen den Begriff der Beschränktheit von Menge verallgemeinern. Die gebrachten Resultate entnehmen wir dem Buch [HN77].

Definition 4.0.1. *Sei X eine Menge und $\mathbb{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir nennen $\mathbb{B}$ eine Bornologie, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

i) $X = \bigcup_{B \in \mathbb{B}} B$.

ii) Für $A \subseteq X$ und $B \in \mathbb{B}$ mit $A \subseteq B$ folgt $A \in \mathbb{B}$.

iii) Für $n \in \mathbb{N}$ und $B_i \in \mathbb{B}$, $i = 1, \ldots, n$, gilt $\bigcup_{i=1}^{n} B_i \in \mathbb{B}$.

Das Paar $(X, \mathbb{B})$ wird bornologischer Raum genannt. Elemente von $\mathbb{B}$ werden als $\mathbb{B}$-beschränkte Mengen oder nur als beschränkte Mengen bezeichnet.

Beispiel 4.0.2. *Für eine Menge X ist $\mathcal{P}(X)$ eine Bornologie auf X, welche auch die diskrete Bornologie genannt wird.*

Setzen wir (ii) vorraus, so ist (i) äquivalent zu $\{x\} \in \mathbb{B}$ für alle $x \in X$. Folglich ist der Durchschnitt von Bornologien wieder eine solche.

Beispiel 4.0.3. *Das Mengensystem $\mathbb{U} := \{B \subseteq \mathbb{C} | \exists C > 0 : \ B \subseteq K_C(0)\}$ ist eine Bornologie auf $\mathbb{C}$, welche auch die kanonische Bornologie auf $\mathbb{C}$ genannt wird.*

Definition 4.0.4. *Sind $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$ zwei Bornologien, dann heißt $\mathbb{B}_1$ feiner als $\mathbb{B}_2$ bzw. $\mathbb{B}_2$ gröber als $\mathbb{B}_1$, falls $\mathbb{B}_1 \subseteq \mathbb{B}_2$.*
Eine Teilmenge $\mathbb{B}_0 \subseteq \mathbb{B}$ heißt Basis von $\mathbb{B}$, falls für jedes $B \in \mathbb{B}$ ein $A \in \mathbb{B}_0$ mit $B \subseteq A$ existiert.

Bemerkung 4.0.5. *Im Gegensatz zu Topologien bedeutet für $\mathbb{B}_1$ feiner als $\mathbb{B}_2$ zu sein, dass $\mathbb{B}_1$ weniger Mengen beinhaltet.*

Ist X ein Vektorraum über den Skalarkörper $\mathbb{C}$, so können wir bornologische Strukturen betrachten, welche mit der Addition und Skalarmultiplikation auf X verträglich sind.

Definition 4.0.6. *Sei X ein Vektorraum über den Skalarkörper $\mathbb{C}$. Eine Bornologie $\mathbb{B}$ auf X heißt Vektorbornologie auf X, falls $\mathbb{B}$ folgende Eigenschaften erfüllt:*

- *Für $A, B \in \mathbb{B}$ gilt $A + B \in \mathbb{B}$.*
- *Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $A \in \mathbb{B}$ gilt $\lambda A \in \mathbb{B}$.*
- *Für $A \in \mathbb{B}$ gilt* $\operatorname{bal}(A) \in \mathbb{B}$.

Wir nennen das Paar $(X, \mathbb{B})$ *einen bornologischen Vektorraum.*

Offenbar ist der Durchschnitt von Vektorbornologien wieder eine Vektorbornologie.

Definition 4.0.7. *Eine Vektorbornologie* $\mathbb{B}$ *auf einem Vektorraum* X *heißt konvexe Vektorbornologie, falls* $A \in \mathbb{B}$ *auch* $\operatorname{co}(A) \in \mathbb{B}$ *nach sich zieht. Ein bornologischer Vektorraum* $(X, \mathbb{B})$*, dessen Vektorbornologie* $\mathbb{B}$ *konvex ist, heißt konvex bornologischer Vektorraum.*

Genauso wie wir in topologischen Räumen stetige Abbildungen betrachten, wollen wir für bornologische Räume beschränkte Abbildungen untersuchen.

Definition 4.0.8. *Seien* $(X, \mathbb{B}_X)$ *und* $(Y, \mathbb{B}_Y)$ *bornologische Räume. Eine Abbildung* $f : X \to Y$ *heißt beschränkt, falls* $f(A) \in \mathbb{B}_Y$ *für alle* $A \in \mathbb{B}_X$*. Eine bijektive Abbildung* $f : X \to Y$ *heißt bornologischer Isomorphismus, falls* f *und* f^{-1} *beschränkte Abbildungen sind. Ist* $f : X \to \mathbb{C}$ *eine beschränkte lineare Abbildung in den Skalarkörper* $\mathbb{C}$ *versehen mit der kanonischen Bornologie aus Beispiel 4.0.3, so nennen wir* f *ein beschränktes lineares Funktional.*

Man erkennt, dass eine Bornologie $\mathbb{B}_1$ genau dann feiner als eine Bornologie $\mathbb{B}_2$ ist, wenn die Identität I von X mit der Bornologie $\mathbb{B}_1$ nach X mit der Bornologie $\mathbb{B}_2$ beschränkt ist.

4.1 Konstruktionen von Bornologien

Auf ähnliche Weise wie es uns möglich ist, Topologien zu konstruieren, lassen sich auch Bornologien konstruieren. Das Analogon der initialen Topologie in topologischen Räumen ist die initiale Bornologie.

Definition 4.1.1. *Sei* X *eine Menge und* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$*. Die feinste Bornologie* $\mathbb{B}$ *auf* X*, welche* $\mathcal{B}$ *enthält, heißt die durch durch* $\mathcal{B}$ *induzierte Bornologie und wird mit* $[\mathcal{B}]$ *bezeichnet.*

Bemerkung 4.1.2. $[\mathcal{B}]$ *stimmt mit dem Schnitt aller* $\mathcal{B}$ *enthaltenden Bornologien, in denen jedenfalls* $\mathcal{P}(X)$ *enthalten ist, überein und ist daher selber eine Bornologie. Falls (i) und (iii) aus Definition 4.0.1 für* $\mathcal{B}$ *zutrifft, besteht* $[\mathcal{B}]$ *aus* $\bigcup_{A \in \mathcal{B}} \mathcal{P}(A)$*.*

Satz 4.1.3. *Sei* X *eine Menge,* I *eine Indexmenge und* $(X_i, \mathbb{B}_i)_{i \in I}$*, eine Familie von bornologischen Räumen mit Abbildungen* $f_i : X \to X_i$*,* $i \in I$*. Sei* $\mathbb{B}$ *die Menge aller* $A \subseteq X$ *mit* $f_i(A) \in \mathbb{B}_i$ *für alle* $i \in I$*. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

i) $\mathbb{B}$ *ist die gröbste Bornologie auf* X *derart, dass* f_i *für alle* $i \in I$ *beschränkt sind.*

ii) Falls X *ein Vektorraum ist,* $(X_i, \mathbb{B}_i)$ *für alle* $i \in I$ *bornologische Vektorräume und die* f_i *für* $i \in I$ *linear sind, so ist* $\mathbb{B}$ *eine Vektorbornologie auf* X*.*

Die Bornologie $\mathbb{B}$ *wird auch die initiale Bornologie auf* X *bzgl. den Abbildungen* f_i*,* $i \in I$*, genannt.*

Beweis.

i) Für $A \in \mathbb{B}$ gilt $f_i(A) \in \mathbb{B}_i$ für alle $i \in I$. Aus $B \subseteq A$ folgt $f_i(B) \subseteq f_i(A)$, womit $f_i(B) \in \mathbb{B}_i$ für alle $i \in I$ und daher $B \in \mathbb{B}$. Sind $B_1, \ldots, B_n \in \mathbb{B}$, also $f_i(B_j) \in \mathbb{B}_i$ für $i \in I$ und $j = 1, \ldots, n$, so folgt

$$f_i\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \bigcup_{j=1}^{n} f_i(B_j) \in \mathbb{B}_i, \tag{4.1}$$

womit $f_i\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) \in \mathbb{B}_i$ für alle $i \in I$, also $\bigcup_{j=1}^{n} B_j \in \mathbb{B}$.
Da für $x \in X$ immer $f_i(x) \in \mathbb{B}_i$, $i \in I$, erhalten wir $\{x\} \in \mathbb{B}$. Folglich ist $\mathbb{B}$ eine Bornologie auf X.
Angenommen, es existiert eine Bornologie $\mathbb{W}$ mit $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{W}$ derart, dass f_i für alle $i \in I$ beschränkt sind. Für $B \in \mathbb{W}$ gilt $f_i(B) \in \mathbb{B}_i$ für alle $i \in I$, weshalb auch $B \in \mathbb{B}$. Wir erhalten $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{B}$ und insgesamt $\mathbb{B} = \mathbb{W}$. Damit ist $\mathbb{B}$ die gröbste Bornologie, welche (i) erfüllt.

ii) Wegen der Linearität folgt für $A, B \in \mathbb{B}$ und $i \in I$

$$f_i(A + B) = f_i(A) + f_i(B) \in \mathbb{B}_i,$$

womit $A + B \in \mathbb{B}$. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ folgt ebenso wegen der Linearität von f_i für $i \in I$

$$f_i(\lambda A) = \lambda f_i(A) \in \mathbb{B}_i,$$

womit $\lambda A \in \mathbb{B}$. Aus der Linearität folgt wegen Lemma 2.0.9 und Satz 2.0.12 auch $\mathrm{bal}(f_i(A)) = f_i(\mathrm{bal}(A)) \in \mathbb{B}_i$ für alle $i \in I$. Also gilt $\mathrm{bal}(A) \in \mathbb{B}$.

□

Lemma 4.1.4. *Mit den selben Vorraussetzungen wie in Satz 4.1.3 und* $f^{-1}(\mathbb{B}) = \{f^{-1}(A) : A \in \mathbb{B}\}$ *ist die initiale Bornologie gegeben durch*

$$\bigcap_{i \in I} [f_i^{-1}(\mathbb{B}_i)].$$

Beweis. $\subseteq$: Für $B \in \mathbb{B}$ gilt $f_i(B) \in \mathbb{B}_i$, weshalb $B \subseteq f_i^{-1}(f_i(B)) \in f_i^{-1}(\mathbb{B}_i)$ für alle $i \in I$. Damit gilt $B \in [f^{-1}(\mathbb{B}_i)]$ für alle $i \in I$.
$\supseteq$: Für $B \in \bigcap_{i \in I} [f_i^{-1}(\mathbb{B}_i)]$ gibt es wegen Bemerkung 4.1.2 $A_i \in \mathbb{B}_i$ derart, dass $B \subseteq f_i^{-1}(A_i)$. Wir schließen auf $f_i(B) \subseteq A_i$, womit $f_i(B) \in \mathbb{B}_i$ für alle $i \in I$ und infolge $B \in \mathbb{B}$. □

Definition 4.1.5. *Sei* $(X, \mathbb{B}_X)$ *ein bornologischer Raum,* $Y \subseteq X$ *und* $\iota : Y \to X$ *die kanonische Einbettung. Die initiale Bornologie auf* Y *bezüglich* ι *nennen wir auch die durch* $\mathbb{B}_X$ *auf* Y *induzierte Bornologie* $\mathbb{B}_Y$.

Die Menge Y versehen mit der Bornologie $\mathbb{B}_Y$ induziert durch $(X, \mathbb{B}_X)$ wird auch als bornologische Teilmenge von $(X, \mathbb{B}_X)$ bezeichnet. Falls $(X, \mathbb{B})$ ein bornologischer Vektorraum ist, ist die induzierte Bornologie $\mathbb{B}_Y$ auf Y nach Satz 4.1.3 eine Vektorbornologie und Y wird als bornologischer Unterraum von X bezeichnet. Da $\iota^{-1}(\mathbb{B}_X)$ schon eine Bornologie abgibt, folgt aus Lemma 4.1.4

Proposition 4.1.6. *Mit der Notation aus Definition 4.1.5 gilt*

$$\mathbb{B}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathbb{B}_X\}.$$

Definition 4.1.7. *Sei I eine Indexmenge und $(X_i, \mathbb{B}_i)$, $i \in I$, eine Familie bornologischer Räume. Dann nennen wir die initiale Bornologie $\mathbb{B}_\prod$ auf $X := \prod_{i \in I} X_i$ bezüglich der Projektionen $\pi_i : X \to X_i$ Produktbornologie.*

Lemma 4.1.8. *Die Produktbornologie einer Familie von bornologischen Räumen $(X_i, \mathbb{B}_i)$, $i \in I$ besitzt*

$$\mathcal{B} = \prod_{\substack{i \in I \\ B_i \in \mathbb{B}_i}} B_i$$

als Basis.

Beweis. Für $B_i \in \mathbb{B}_i$, $i \in I$, gilt

$$B := \prod_{i \in I} B_i \in \mathbb{B}_\prod,$$

da $\pi_i(B) = B_i \in \mathbb{B}_i$. Aus $A \in \mathbb{B}_\prod$ folgt für $B_i := \pi_i(A) \in \mathbb{B}_i$, $i \in I$,

$$B := \prod_{i \in I} B_i \in \mathbb{B}_\prod$$

und $A \subseteq B$.

□

Die letzte interessante Konstruktion einer Bornologie ist die einer finalen Bornologie.

Satz 4.1.9. *Seien X eine Menge, $(X_i, \mathbb{B}_i)$, $i \in I$, eine Familie bornologischer Räume und $f_i : X_i \to X$, $i \in I$, Abbildungen. Wir nennen die Bornologie auf X induziert durch*

$$\mathcal{A} := \bigcup_{i \in I} f_i(\mathbb{B}_i)$$

die finale Bornologie $\mathbb{B}_F$ von X. Die Bornologie $\mathbb{B}_F$ ist die feinste Bornologie auf X, sodass alle Abbildungen f_i, $i \in I$, beschränkt sind.
Sind $(X_i, \mathbb{B}_i)$, $i \in I$, bornologische Vektorräume und sind die Abbildungen f_i, $i \in I$, linear, so ist der Durchschnitt aller $\mathcal{A}$ enthaltenden Vektorbornologien auf X die feinste Vektorbornologie auf X, sodass alle f_i, $i \in I$, beschränkt sind.

Beweis. Per Definitionem ist $\mathbb{B}_F$ eine Bornologie mit $f_i(B) \in \mathcal{A} \subseteq \mathbb{B}_F$ für alle $B \in \mathbb{B}_i$ und alle $i \in I$. Also sind alle f_i beschränkt. Ist $\mathbb{W}$ eine Bornologie derart, dass $f_i(B) \in \mathbb{W}$ für alle $B \in \mathbb{B}_i$, $i \in I$, so ist $\bigcup_{i \in I} f_i(\mathbb{B}_i)$ in $\mathbb{W}$ enthalten, womit auch $\mathbb{B}_F \subseteq \mathbb{W}$. Sind $(X_i, \mathbb{B}_i)$,$i \in I$, bornologische Vektorräume und sind die Abbildungen f_i für $i \in I$ linear, so zeigt man vom Durchschnitt aller Vektorbornologien, welche $\bigcup_{i \in I} f_i(\mathbb{B}_i)$ enthalten, mit dem selben Argument wie eben, dass dieser die feinste Vektorbornologie auf X ist, sodass alle f_i beschränkt und linear sind. □

4.2 Eigenschaften und Beispiele von Bornologien

Lemma 4.2.1. *Sei X ein Vektorraum und $\mathbb{B}$ eine Bornologie auf X. Dann sind folgenden Aussagen äquivalent:*

i) *$\mathbb{B}$ ist eine Vektorbornologie.*

ii) *Sind $A, A_1, \ldots, A_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ beschränkt, dann sind auch $A_1 + \ldots + A_n$ und $\mathrm{bal}(A)$ beschränkt.*

iii) *Sind $\mathbb{C} \times X$ und $X \times X$ mit einer Produktbornologie ausgestattet, so sind die Skalarmultiplikation $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ und die Addition $(x, y) \mapsto x + y$ beschränkte Abbildungen.*

Beweis.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Summanden $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 2$ ist die Aussage klar. Für $n \geq 2$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{B}$ gelte $A_1 + \ldots + A_n \in \mathbb{B}$. Ist $A_{n+1} \in \mathbb{B}$, so folgt, da $\mathbb{B}$ eine Vektorbornologie ist, $B + A_{n+1} = A_1 + \ldots + A_n + A_{n+1} \in \mathbb{B}$ und für $A \in \mathbb{B}$ auch $\mathrm{bal}(A) \in \mathbb{B}$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Ist $X \times X$ mit der Produktbornologie versehen, dann gilt für $A, B \in \mathbb{B}$ $A \times B \in \mathbb{B}_{\prod}$ und nach Vorraussetzung $A + B \in \mathbb{B}$. Ist $C \in \mathbb{B}_{\prod}$, so existieren gemäß Lemma 4.1.8 $A, B \in \mathbb{B}$, sodass $C \subseteq A \times B$, womit $+(C) \subseteq A + B \in \mathbb{B}$ und $+(C) \in \mathbb{B}$.
Sei $B \in \mathbb{B}$ kreisförmig und $r > 0$. Für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq r > 0$ folgt wegen Proposition 2.0.5

$$K_r^{\mathbb{C}}(0)B \subseteq nB \subseteq \underbrace{B + \ldots + B}_{n-mal} \in \mathbb{B},$$

womit $K_r^{\mathbb{C}}(0)B \in \mathbb{B}$. Ist $\mathbb{C} \times X$ mit der Produktbornologie $\mathbb{W}_{\prod}$ ausgestattet und $C \in \mathbb{W}_{\prod}$, so existieren wegen Lemma 4.1.8 $B \in \mathbb{B}$ und $A \in \mathbb{U}$ mit $C \subseteq A \times B$. Nach Vorraussetzung gilt $\mathrm{bal}(B) \in \mathbb{B}$. Weil A beschränkt ist, existiert ein $r > 0$ derart, dass $A \subseteq K_r^{\mathbb{C}}(0)$, womit

$$\cdot(C) \subseteq K_r^{\mathbb{C}}(0)\mathrm{bal}(B) \in \mathbb{B}.$$

Also ist die Skalarmultiplikation auf $\mathbb{C} \times X$ eine beschränkte Abbildung.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Seien $A, B \in \mathbb{B}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Vorraussetzungsgemäß gilt $+(A \times B) = A + B \in \mathbb{B}$ und $\cdot(\{\lambda\} \times A) = \lambda A \in \mathbb{B}$. Für $A \in \mathbb{B}$ gilt $\cdot(K_1^{\mathbb{C}}(0) \times A) = \mathrm{bal}(A) \in \mathbb{B}$. ☐

Proposition 4.2.2. *Die kanonische Bornologie $\mathbb{U}$ auf $\mathbb{C}$ ist eine Vektorbornologie.*

Beweis. Seien $A, B \in \mathbb{U}$, dann existieren $r_1, r_2 > 0$ mit $A \subseteq K_{r_1}(0)$ und $B \subseteq K_{r_2}(0)$ und infolge $A + B \subseteq K_{r_1}(0) + K_{r_2}(0) \subseteq K_{r_1+r_2}(0)$, womit $A + B \in \mathbb{U}$. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $\lambda A \subseteq \lambda K_{r_1}(0) \subseteq K_{\frac{r}{|\lambda|}}(0)$ und falls $\lambda = 0$ folgt $\lambda A = \{0\} \subseteq K_r(0)$ für $r > 0$, womit $\lambda A \in \mathbb{U}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$. Weiters gilt $\mathrm{co}\,(A) \subseteq \mathrm{co}\,(K_{r_1}(0)) = K_{r_1}(0)$, womit $\mathrm{co}\,(A) \in \mathbb{U}$. ☐

Definition 4.2.3. *Ein bornologischer Vektorraum $(X, \mathbb{B})$ heißt separierend, falls für alle linearen Unterräume $A \in \mathbb{B}$ immer $A = \{0\}$ gilt.*

Korollar 4.2.4. *Sei X eine Menge, $(X_i, \mathbb{B}_i)$, $i \in I$, eine Familie von separierenden bornologischen Vektorräumen und für jedes $i \in I$ seien $f_i : X \to X_i$ lineare Abbildungen. Die initiale Bornologie $\mathbb{B}$ auf X bzgl. der Abbildungen $(f_i)_{i \in I}$ ist genau dann separierend, wenn für jedes $x \in X$ mit $x \neq 0$ ein $j \in I$ mit $f_j(x) \neq 0$ existiert.*

Beweis.
$\Rightarrow$: Für $x \in X$ mit $x \neq 0$ gilt $L := \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}\} \notin \mathbb{B}$. Nach Definition der initialen Bornologie existiert ein $j \in I$ mit $f_j(L) = \{\lambda f_j(x) : \lambda \in \mathbb{C}\} \notin \mathbb{B}_j$, womit auch $f_j(x) \neq 0$.
$\Leftarrow$: Ist $M \in \mathbb{B}$ ein Unterraum von X, dann folgt $f_i(M) \in \mathbb{B}_i$ für alle $i \in I$. Da $(X_i, \mathbb{B}_i)$, $i \in I$, separierende bornologische Vektorräume sind, gilt $f_i(M) = \{0\}$ für alle $i \in I$ und infolge $M = \{0\}$. □

Im ersten Kapitel haben wir beschränkte Menge in einem topologischen Vektorraum als jene Menge definiert, welche durch jede Nullumgebung absorbiert werden.

Satz 4.2.5. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. Die Menge aller beschränkten Mengen $\mathbb{B}_N$ bildet eine Vektorbornologie auf X. Falls $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum ist, so ist $\mathbb{B}_N$ eine konvexe Vektorbornologie.*

Beweis. Bezeichne $\mathcal{V}(0)$ die Menge aller kreisförmigen offene Nullumgebungen (Lemma 2.1.8 [M.B20, Seite 20]). Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ gilt $A \in \mathbb{B}_N$ genau dann, wenn für alle $V \in \mathcal{V}(0)$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $tA \subseteq V$ für alle $|t| \leq \epsilon$. Da jede Nullumgebung absorbierend ist, gilt $\{x\} \in \mathbb{B}_N$ für alle $x \in X$, womit $\bigcup_{B \in \mathbb{B}_N} B = X$. Nach Proposition 3.0.3 ist jede Teilmenge einer beschränkten Menge und jede endliche Vereinigung von beschränkten Mengen beschränkt. Damit ist $\mathbb{B}_N$ eine Bornologie. Gilt $A, B \in \mathbb{B}_N$ und $V \in \mathcal{V}(0)$, dann existiert nach Lemma 2.1.8 [M.B20, Seite 20] eine symmetrische Menge W mit $W + W \subseteq V$. Da A und B beschränkt sind, existieren $\epsilon_1 > 0$ und $\epsilon_2 > 0$ mit $tA \subseteq W$ für alle $|t| \leq \epsilon_1$ und $tB \subseteq W$ für alle $|t| \leq \epsilon_2$. Mit $\epsilon := \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ erhalten wir

$$t(A + B) = tA + tB \subseteq W + W \subseteq V \text{ für alle } |t| \leq \epsilon.$$

Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $A \in \mathbb{B}_N$ und $U \in \mathcal{U}_X(0)$ mit $\epsilon > 0$ derart, dass $tA \subseteq U$ für alle $|t| \leq \epsilon$. Für $\tilde{\epsilon} := \frac{\epsilon}{|\lambda|}$ folgt aus $|t| \leq \tilde{\epsilon}$ die Ungleichung $|t\lambda| \leq \epsilon$, womit $t\lambda A \subseteq U$ für alle $|t| \leq \tilde{\epsilon}$, also $\lambda A \in \mathbb{B}_N$. Für $\lambda = 0$ ist diese Tatsache klar.
Für $A \in \mathbb{B}_N$ und $V \in \mathcal{V}(0)$ existiert ein $\epsilon > 0$ derart, dass $tA \subseteq V$ für alle $|t| \leq \epsilon$. Da für $|t| \leq \epsilon$ die Menge $\operatorname{bal}(tA)$ die kleinste kreisförmige Menge ist, welche tA enthält, folgt $\operatorname{bal}(tA) \subseteq V$ und wegen Proposition 2.0.9 $t\operatorname{bal}(A) \subseteq V$ für alle $|t| \leq \epsilon$.
Ist $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, so besitzt dieser eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen. Zu $B \in \mathbb{B}_N$ existiert für jede konvexe Nullumgebung $U \in \mathcal{U}_X(0)$ ein $\epsilon > 0$ derart, dass $tB \subseteq U$ für alle $|t| \leq \epsilon$. Da U konvex ist, folgt $\operatorname{co}(tB) = t\operatorname{co}(B) \subseteq \operatorname{co}(U) = U$ für alle $|t| \leq \epsilon$, womit $\operatorname{co}(B) \in \mathbb{B}_N$. □

Die Bornologie $\mathbb{B}_N$ wird auch als die von Neumann Bornologie bezeichnet. Ein weitere interessante Bornologie ist die der totalbeschränkten Mengen.

Definition 4.2.6. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt totalbeschränkt, falls für jede Nullumgebung V endlich viele Punkte $a_1, \ldots, a_n \in X$ existieren mit*

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} a_i + V.$$

Lemma 4.2.7. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{V})$ topologische Vektorräume und $f : X \to Y$ eine stetige lineare Abbildung. Falls $A \subseteq X$ totalbeschränkt in X ist, so ist $f(A)$ totalbeschränkt in Y.*

Beweis. Sei $V \in \mathcal{U}_Y(0)$. Da f stetig und linear ist, muss $W = f^{-1}(V)$ eine Nullumgebung in X sein. Da $A \subseteq X$ totalbeschränkt ist, existieren $a_1, \ldots, a_n \in X$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} a_i + W,$$

weshalb auch

$$f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f(a_i) + f(W) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f(a_i) + V.$$

□

Satz 4.2.8. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. Die Menge aller totalbeschränkten Menge $\mathbb{B}_T$ ist eine Vektorbornologie.*

Beweis. Teilmengen von totalbeschränkten Mengen sind klarerweise totalbeschränkt. Da für alle $x \in X$ das Singleton $\{x\}$ totalbeschränkt ist, folgt (i) aus Definition 4.0.1. Sind $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{B}_T$, so existieren für $V \in \mathcal{U}_X(0)$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ endlich viele $a_{1,j}, \ldots, a_{n_j,j} \in X$ mit

$$A_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_j} a_{i,j} + V$$

und daher

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{i=1}^{n_j} a_{i,j} + V. \tag{4.2}$$

Da die Vereinigung auf der rechten Seite in (4.2) endlich ist, folgt $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathbb{B}_T$. Seien $A, B \in \mathbb{B}_T$ und $V \in \mathcal{U}_X(0)$. Dann existiert nach Lemma 2.1.8 [M.B20, Seite 20] eine symmetrische Nullumgebung $W \subseteq V$ mit $W + W \subseteq V$. Da A und B totalbeschränkt sind, existieren $a_1, \ldots, a_n \in X$ und $b_1, \ldots, b_m \in X$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} a_i + W \text{ und } B \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} b_j + W,$$

und folglich

$$A + B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (a_i + b_j + W + W) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} a_i + b_j + V,$$

also $A + B \in \mathbb{B}_T$. Seien $A \in \mathbb{B}_T$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $V \in \mathcal{U}_X(0)$. Im Fall $\lambda = 0$ ist $\lambda A = \{0\}$ klarerweise totalbeschränkt. Im Fall $\lambda \neq 0$ existiert für $V \in \mathcal{U}_X(0)$ wegen $\frac{1}{\lambda} V \in \mathcal{U}_X(0)$ ein $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in X$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{\lambda} V,$$

wodurch

$$\lambda A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \lambda a_i + \lambda \frac{1}{\lambda} V = \bigcup_{i=1}^{n} \lambda a_i + V.$$

Sei $A \in \mathbb{B}_T$, $V \in \mathcal{U}_X(0)$ und $W \subseteq V$ eine kreisförmige Nullumgebung mit $W + W \subseteq V$. Dann existieren $a_1, \ldots, a_n \in X$ mit $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n a_i + W$. Für $D := \{a_i : i = 1, \ldots, n\}$ und $M = \operatorname{bal}(D)$ folgt wegen Lemma 2.0.9

$$\operatorname{bal}(A) \subseteq M + W. \tag{4.3}$$

Wegen Bemerkung 2.0.10 gilt

$$M = \operatorname{bal}(D) = \underbrace{K_1^{\mathbb{C}}(0)a_1 \cup \ldots \cup K_1^{\mathbb{C}}(0)a_n}_{\text{n-mal}}.$$

$K_1^{\mathbb{C}}(0)a_j$ ist das Bild unter der stetigen Funktion $\lambda \mapsto \lambda a_j$ von $K_1^{\mathbb{C}}(0)$ nach X. Da $K_1^{\mathbb{C}}(0)$ kompakt und damit totalbeschränkt ist, ist wegen Lemma 4.2.7 $K_1^{\mathbb{C}}(0)a_j$ totalbeschränkt. Also ist M totalbeschränkt, weshalb $m_1, \ldots, m_l \in X$ existieren mit

$$M \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} m_j + W.$$

Wegen (4.3) erhalten wir

$$\operatorname{bal}(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} m_j + W + W \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} m_j + V,$$

womit $\operatorname{bal}(A)$ totalbeschränkt ist. □

Die Menge der relativ kompakten Mengen bildet auch eine Bornologie.

Definition 4.2.9. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt relativ kompakt, falls $\overline{A}$ kompakt ist.*

Satz 4.2.10. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. Die Menge $\mathbb{B}_R$ aller relativ kompakten Teilmengen $A \subseteq X$ ist eine Vektorbornologie.*

Beweis. Da wir (T_2) vorraussetzen, ist jeder Singelton abgeschlossen und kompakt. Daraus folgt die Überdeckungseigenschaft. Für $A \in \mathbb{B}_R$ und $B \subseteq A$ gilt $\overline{B} \subseteq \overline{A}$. Folglich ist $\overline{B}$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Mengen kompakt, also $B \in \mathbb{B}_R$.
Für $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{B}_R$ gilt

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i \in \mathbb{B}_R,$$

da endliche Vereinigungen von kompakten Mengen kompakt sind. Damit ist $\mathbb{B}_R$ eine Bornologie.
Für $A, B \in \mathbb{B}_R$ folgt wegen der Stetigkeit der Addition und der Kompaktheit von $\overline{A} \times \overline{B}$

$$A + B \subseteq \overline{A} + \overline{B} \in \mathbb{B}_R.$$

Da $\overline{A} + \overline{B}$ abgeschlossen ist, folgt $\overline{A + B} \subseteq \overline{A} + \overline{B}$. Da $\mathbb{B}_R$ eine Bornologie ist, folgt $\overline{A + B} \in \mathbb{B}_R$.

Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist $\overline{\lambda A} = \lambda \overline{A}$ kompakt, da die Skalarmultiplikation stetig ist. Für $\lambda = 0$ ist $\overline{\lambda A} = \overline{\{0\}} = \{0\}$ kompakt.

Wegen der Stetigkeit der Skalarmultiplikation und der Kompaktheit von $\overline{K_1^{\mathbb{C}}(0)}^{\mathbb{C}} \times \overline{A}$ für $A \in \mathbb{B}_R$ ergibt sich die Kompaktheit von

$$K_1^{\mathbb{C}}(0)\overline{A} = \operatorname{bal}(\overline{A}) = \overline{\operatorname{bal}(A)}.$$

□

Definition 4.2.11. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{V})$ topologische Vektorräume. Wir bezeichnen mit $L(X, Y)$ die Menge aller stetigen und linearen Abbildungen von X nach Y. Eine Familie $\mathcal{H}$ von Funktionen in $L(X, Y)$ heißt gleichgradig stetig, falls für jede Nullumgebung $V \in \mathcal{U}_Y(0)$*

$$\bigcap_{f \in \mathcal{H}} f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_X(0)$$

gilt.

Lemma 4.2.12. *Die Familie $\mathbb{B}_E := \{\mathcal{H} \subseteq L(X, Y) \mid \mathcal{H}$ ist gleichgradig stetig $\}$ ist eine Vektorbornologie auf $L(X, Y)$. Falls $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum ist, ist $\mathbb{B}_E$ konvex. Diese Bornologie wird auch die gleichgradig stetige Bornologie von $L(X, Y)$ genannt.*

Beweis. Da jedes Element von $L(X, Y)$ stetig ist, gilt $\{f\} \in \mathbb{B}_E$ für $f \in L(X, Y)$. Folglich überdeckt $\mathbb{B}_E$ die Menge $L(X, Y)$. Klarerweise gilt für $\mathcal{A} \in \mathbb{B}_E$ und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ auch $\mathcal{B} \in \mathbb{B}_E$ und für endlich viele $\mathcal{A}_i \in \mathbb{B}_E,\ i = 1, \dots, n$, ist $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i \in \mathbb{B}_E$.

Wir wollen zeigen, dass $\mathbb{B}_E$ unter Addition stabil ist. Sei $\mathcal{V}_Y(0)$ eine Basis von Y bestehend aus kreisförmigen Nullumgebungen in Y und $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathbb{B}_E$. Für $V \in \mathcal{V}_Y(0)$ existiert nach Lemma 2.1.8 [M.B20, Seite 20] eine Nullumgebung W mit $W + W \subseteq V$. Da $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ gleichgradig stetig sind, folgt $\bigcap_{f \in \mathcal{H}_1} f^{-1}(W),\ \bigcap_{g \in \mathcal{H}_2} g^{-1}(W) \in \mathcal{U}_X(0)$. Wegen

$$\bigcap_{f \in \mathcal{H}_1} f^{-1}(W) \cap \bigcap_{g \in \mathcal{H}_2} g^{-1}(W) \subseteq \bigcap_{\substack{f \in \mathcal{H}_1 \\ g \in \mathcal{H}_2}} (f+g)^{-1}(V) \tag{4.4}$$

ist die Menge auf der rechten Seite eine Nullumgebung in X, also $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 \in \mathbb{B}_E$.
Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\mathcal{H} \in \mathbb{B}_E$, sowie $V \in \mathcal{V}_Y(0)$ gilt

$$\bigcap_{f \in \lambda\mathcal{H}} f^{-1}(V) = \bigcap_{f \in \mathcal{H}} (\lambda f)^{-1}(V) = \frac{1}{\lambda}\left(\bigcap_{f \in \mathcal{H}} f^{-1}(V)\right) \in \mathcal{U}_X(0).$$

Sei $V \in \mathcal{V}_Y(0)$ und $x \in \bigcap_{f \in \mathcal{H}} f^{-1}(V)$. Für alle $\lambda \in K_1^{\mathbb{C}}(0)$ und alle $f \in \mathcal{H}$ folgt $f(x) \in V$ und weiter

$$\lambda f(x) \in \lambda V \subseteq V,$$

weshalb

$$x \in \bigcap_{\substack{f \in \mathcal{H} \\ \lambda \in K_1^{\mathbb{C}}(0)}} (\lambda f)^{-1}(V) = \bigcap_{g \in \operatorname{bal}(\mathcal{H})} g^{-1}(V),$$

siehe Lemma 2.0.9. Aus $\bigcap_{f\in\mathcal{H}} f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_X(0)$ folgt daher $\bigcap_{g\in\mathrm{bal}(\mathcal{H})} g^{-1}(V) \in \mathcal{U}_X(0)$. Damit ist $(L(X,Y),\mathbb{B}_E)$ ein bornologischer Vektorraum.
Sei V eine konvexe Nullumgebung in Y, $\mathcal{H} \in \mathbb{B}_E$ und $x \in X$ mit $f(x) \in V$ für alle $f \in \mathcal{H}$. Sind $\lambda_i \in [0,1]$ und $h_i \in \mathcal{H}$ für $i = 1,\dots,n$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1$ und $g := \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i \in \mathrm{co}\,(\mathcal{H})$, dann folgt $g(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i(x) \in V$. Also

$$\bigcap_{f\in\mathcal{H}} f^{-1}(V) \subseteq \bigcap_{g\in\mathrm{co}(\mathcal{H})} g^{-1}(V),$$

womit $\mathbb{B}_E$ konvex ist. $\square$

5 Bornologische Konvergenz und bornologische Abgeschlossenheit

In jedem bornologischen Vektorraum $(X, \mathbb{B})$ lässt sich der Begriff der Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X definieren, welcher nur von der bornologischen Struktur abhängt.

Definition 5.0.1. *Sei $(X, \mathbb{B})$ ein bornologischer Vektorraum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert bornologisch gegen 0, falls eine kreisförmige beschränkte Menge $B \subseteq X$ und eine Nullfolge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ existiert, sodass $x_n \in \lambda_n B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert bornologisch gegen ein $x \in X$, falls $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}}$ bornologisch gegen 0 konvergiert.*

Der Begriff der bornologischen Konvergenz wird auch Mackey-Konvergenz genannt, benannt nach G.W. Mackey. Wir bezeichnen mit $x_n \overset{M}{\to} x$ die bornologische Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.

Lemma 5.0.2. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere bzgl. der von Neumann Bornologie $\mathbb{B}_N$ auf X gegen $x \in X$. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch topologisch gegen x.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, welche o.B.d.A. bornologisch gegen 0 konvergiert, womit eine Nullfolge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ und eine beschränkte und kreisförmige Menge $B \in \mathbb{B}_N$ mit $x_n \in \lambda_n B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Da B beschränkt bzgl. der von Neumann Bornologie ist, wird B von jeder Nullumgebung absorbiert. Ist $U \in \mathcal{U}_X(0)$ eine Nullumgebung und $W \subseteq U$ eine kreisförmige und offene Nullumgebung, dann existiert ein $\epsilon > 0$ mit $tB \subseteq W$ für alle $|t| \leq \epsilon$. Da $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\lambda_n| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Wegen der Kreisförmigkeit von W folgt aus Proposition 2.0.5

$$x_n \in \lambda_n B = \frac{\lambda_n}{\epsilon} \epsilon B \subseteq \frac{\lambda_n}{\epsilon} W \subseteq W \subseteq U$$

für alle $n \geq N$. □

Lemma 5.0.3. *Seien $(X, \mathbb{B})$ ein bornologischer Vektorraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in X$ bzw. $y \in X$ bornologisch konvergente Folgen. Dann folgt $(x_n + y_n) \overset{M}{\to} x + y$. Ist $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexwertige Folge mit $\lambda_n \to \lambda$ für $n \to \infty$, so folgt $\lambda_n x_n \overset{M}{\to} \lambda x$.*

Beweis. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornologisch gegen $x \in X$ konvergiert, existiert eine kreisförmige Menge $B_x \in \mathbb{B}$ und eine Nullfolge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ derart, dass $x_n - x \in \lambda_n B_x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Analog existiert eine kreisförmige beschränkte Menge $B_y \in \mathbb{B}$ und eine Nullfolge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$

in $\mathbb{C}$, sodass $y_n - y \in \mu_n B_y$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Mit $\alpha_n := \max\{|\lambda_n|, |\mu_n|\}$ folgt wegen Proposition 2.0.5

$$(x_n + y_n) - (x + y) = (x_n - x) + (y_n - y) \in \lambda_n B_x + \mu_n B_y \subseteq \alpha_n(B_x + B_y) \in \mathbb{B}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $B_x + B_y$ kreisförmig und beschränkt ist, folgt $x_n + y_n \overset{M}{\to} x + y$.
Für die Abgeschlossenheit der Mackey-Konvergenz unter Skalarmultiplikation mit einer konvergenten komplexwertigen Folge sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $\lambda \in \mathbb{C}$ konvergente komplexwertige Folge und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $x \in X$ bornologisch konvergente Folge. Dann existiert eine kreisförmige beschränkte Menge $B \in \mathbb{B}$ und eine Nullfolge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ derart, dass $x_n - x \in \alpha_n B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(X, \mathbb{B})$ ein bornologischer Vektorraum ist, folgt wegen $\{x\} \in \mathbb{B}$

$$\lambda_n x_n - \lambda x = \lambda_n(x_n - x) + (\lambda_n - \lambda)x \in \lambda_n \alpha_n B + (\lambda_n - \lambda)\mathrm{bal}(\{x\}) \in \mathbb{B} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für $\mu_n := |\lambda_n - \lambda| + |\lambda_n \alpha_n|$, $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$ und wegen Proposition 2.0.5

$$\lambda_n \alpha_n B + (\lambda_n - \lambda)\mathrm{bal}(\{x\}) \subseteq \mu_n \left(B + \mathrm{bal}(\{x\})\right).$$

Wegen

$$\lambda_n x_n - \lambda x \in \mu_n(B + \mathrm{bal}(\{x\}))$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und da $B + \mathrm{bal}(\{x\})$ kreisförmig und nach Definition 4.0.6 beschränkt ist, folgt $\lambda_n x_n \overset{M}{\to} \lambda x$. □

Lemma 5.0.4. *Seien $(X, \mathbb{B}_X)$ und $(Y, \mathbb{B}_Y)$ bornologische Vektorräume, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $x \in X$ bornologisch konvergente Folge und $f : X \to Y$ eine linear beschränkte Abbildung. Dann ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine in Y gegen $f(x)$ bornologisch konvergente Folge.*

Beweis. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornologisch gegen x konvergiert, existiert eine kreisförmige beschränkte Menge $B \in \mathbb{B}_X$ und eine Nullfolge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, dass $x_n - x \in \lambda_n B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da f eine beschränkte lineare Abbildung und $(Y, \mathbb{B}_Y)$ ein bornologischer Vektorraum ist, gilt $f(x_n - x) \in \lambda_n f(B) \in \mathbb{B}_Y$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $f(B)$ kreisförmig und beschränkt ist, folgt $f(x_n) \overset{M}{\to} f(x)$. □

Definition 5.0.5. *Sei A eine nichtleere, absorbierende Teilmenge eines Vektorraums X. Wir definieren eine Abbildung $\mu_A : X \to [0, \infty)$ als*

$$\mu_A(x) := \inf\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in A\}.$$

Die Abbildung μ_A heißt das Minkowski-Funktional von A.

Bemerkung 5.0.6. *Für einen Vektorraum X und eine konvexe und kreisförmige Teilmenge B ist B gemäß Proposition 2.0.14 absorbierend in $\mathrm{span}\,(B)$ und nach Lemma 5.1.9 [M.B20, Seite 71] bildet das Minkowski-Funktional μ_B von B eine Seminorm auf $\mathrm{span}\,(B)$.*

Proposition 5.0.7. *Für einen bornologischer Vektorraum $(X, \mathbb{B})$, $y \in X$ und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert bornologisch gegen y.

ii) Es existiert eine kreisförmig beschränkte Menge $B \subseteq X$ mit $y \in B$ und eine monoton fallende Nullfolge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^+$ mit $x_n - y \in \alpha_n B$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

iii) Es existiert eine kreisförmig beschränkte Menge $B \subseteq X$ mit $y \in B$, sodass für jedes $\epsilon > 0$ ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n - y \in \epsilon B$ für alle $n \geq N_\epsilon$.

Falls $(X, \mathbb{B})$ ein konvexer bornologischer Raum ist, dann sind $(i), (ii), (iii)$ äquivalent zu:

iv) Es existiert eine beschränkte, konvexe und kreisförmige Menge $B \subseteq X$ mit $y \in B$ derart, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\operatorname{span}(B)$ enthalten ist und im semi-normierten Raum $(\operatorname{span}(B), \mu_B)$ gegen y konvergiert.

Beweis.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornologisch gegen y konvergiert, existiert eine komplexwertige Nullfolge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und beschränkte kreisförmige Menge $B \in \mathbb{B}$ mit $x_n - y \in \lambda_n B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit existiert für $m \in \mathbb{N}$ ein $N_m \in \mathbb{N}$ mit $|\lambda_n| \leq \frac{1}{m}$ für $n \geq N_m$. Da B kreisförmig ist, gilt $\lambda_n B \subseteq \frac{1}{m} B$ für $n \geq N_m$. Wir wählen N_m minimal mit dieser Eigenschaft. Für $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ mit $m_1 \geq m_2$ folgt wegen

$$|\lambda_n| \leq \frac{1}{m_1} \leq \frac{1}{m_2},$$

im Fall $n \geq N_{m_1}$, dass $N_{m_1} \geq N_{m_2}$. Wir setzen $M_m := N_m + m$, $\alpha_k = \frac{1}{m}$ für $M_m \leq k < M_{m+1}$ und $\alpha_k = \max_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| + 1$ für $1 \leq k < M_1$. Da B kreisförmig ist, gilt für alle $1 \leq n < M_1$ wegen Proposition 2.0.5

$$x_n - y \in \lambda_n B = |\lambda_n| B \subseteq \max_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| B \subseteq (\max_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| + 1) B = \alpha_n B.$$

Im Fall $M_m \leq n < M_{m+1}$ folgt wegen $|\lambda_n| \leq \frac{1}{m}$ und Proposition 2.0.10

$$x_n - y \in \lambda_n B = |\lambda_n| B \subseteq \frac{1}{m} B = \alpha_n B. \tag{5.1}$$

Die Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die gesuchte monoton fallende Folge in $\mathbb{R}^+$. Da der Singleton $\{y\}$ beschränkt und $\mathbb{B}$ eine Vektorbornologie ist, können wir B durch $\operatorname{bal}(\{y\}) + B$ ersetzen, sodass $y \in B$ und B eine beschränkte und kreisförmige Menge ist, welche $x_n - y \in \alpha_n B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei $B \subseteq X$ eine kreisförmige beschränkte Menge mit $y \in B$ und $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge mit $\alpha_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, derart, dass $x_n - y \in \alpha_n B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_n \leq \epsilon$ für alle $n \geq N_\epsilon$, wodurch $x_n - y \in \alpha_n B \subseteq \epsilon B$.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Für $\epsilon = 1$ existiert nach Vorraussetzung ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $x_n - y \in B$ für alle $n \geq N_1$. Da die Menge $\{x_1 - y, \ldots, x_{N_1-1} - y\}$ als endliche Vereinigung beschränkter Mengen beschränkt ist, ist $L := \operatorname{bal}(\{x_1 - y, \ldots, x_{N_1-1} - y\})$ beschränkt. Da die endliche Vereinigung von beschränkten und kreisförmigen Mengen wieder beschränkt und kreisförmig ist, ist $\tilde{B} := L \cup B$ beschränkt und kreisförmig mit $y \in \tilde{B}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$\epsilon_n := \inf\{\epsilon > 0 : x_n - y \in \epsilon \tilde{B}\} \quad \text{und} \quad \lambda_n := \epsilon_n + \frac{1}{n}.$$

Nach Definition von $\tilde{B}$ gilt $\{\epsilon > 0 : x_n - y \in \epsilon\tilde{B}\} \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $\epsilon > 0$ existiert nach Vorraussetzung ein $N_{\frac{\epsilon}{2}} \in \mathbb{N}$ mit $x_n - y \in \frac{\epsilon}{2}\tilde{B}$ für alle $n \geq N_{\frac{\epsilon}{2}}$, womit ϵ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ wohldefiniert ist. Wegen Proposition 2.0.5 gilt $x_n - y \in \epsilon\tilde{B}$ und folglich $\epsilon_n \leq \frac{\epsilon}{2}$ für $n \geq N_{\frac{\epsilon}{2}}$. Wir wählen $M \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq M$. Für $n \geq \max\{M, N_{\frac{\epsilon}{2}}\}$ folgt $\lambda_n = \epsilon_n + \frac{1}{n} < \epsilon$. Die Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also gegen 0 und weil $\tilde{B}$ kreisförmig ist, folgt wegen unserer Wahl von ϵ_n aus Proposition 2.0.5 $x_n - y \in \lambda_n\tilde{B}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
$(iv) \Rightarrow (i)$: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\lambda_n := \mu_B(x_n - y) + \frac{1}{n}.$$

Da B kreisförmig ist, gilt $x_n - y \in \lambda_n B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $\mu_B(x_n - y) \to 0$ folgt $\lambda_n \to 0$ für $n \to \infty$, weshalb $x_n \overset{M}{\to} y$.
$(ii) \Rightarrow (iv)$: Es existiert eine kreisförmig beschränkte Menge $B \subseteq X$ mit $y \in B \subseteq \operatorname{span}(B)$ und eine monoton fallende Nullfolge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n - y \in \alpha_n B \subseteq \operatorname{span}(B)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Vorraussetzung ist die Menge $\tilde{B} := \operatorname{co}(B)$ beschränkt und, da die konvexe Hülle einer kreisförmigen Menge kreisförmig ist, ist $\tilde{B}$ beschränkt, kreisförmig und konvex. Weiters ist $\mu_{\tilde{B}}$ eine Seminorm auf $\operatorname{span}(\tilde{B})$, wobei

$$\mu_{\tilde{B}}(x_n - y) = \inf\{t > 0 : x_n - y \in t\tilde{B}\} \leq \inf\{t > 0 : x_n - y \in tB\} \leq \alpha_n \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

□

Die Umkehrung von Lemma 5.0.2 gilt i.A. nicht wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 5.0.8. *Sei c_0 der Raum aller Nullfolge und $X := \prod_{x\in c_0} \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie versehen. Definiere $x_n \in X$ durch $\pi_\mu(x_n) := \mu(n)$ für alle $\mu \in c_0$. Weil x_n komponentenweise gegen 0 konvergiert, konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. der Topologie gegen 0. Wir zeigen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht bornologisch konvergiert.*
Angenommen, es existiert eine beschränkte kreisförmige Menge $B \subseteq X$ und eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|\lambda_n| \to +\infty$ für $n \to \infty$, sodass $x_n \in \frac{1}{\lambda_n}B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\kappa \in c_0$ definiert durch $\kappa(n) := \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$. Wir erhalten $\pi_\kappa(\lambda_n x_n) = \sqrt{\lambda_n} \in \pi_\kappa(B)$ im Widerspruch zur Tatsache, dass $\pi_\kappa(B)$ beschränkt in $\mathbb{R}$ ist; siehe Satz 3.0.7.

Proposition 5.0.9. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $A \subseteq X$ eine beschränkte, kreisförmige und konvexe Menge. Dann ist das Minkowski-Funktional μ_A von A eine Norm auf $(\operatorname{span}(A), \mu_A)$.*

Beweis. Nach Lemma 5.1.9 [M.B20, Seite 71] ist das Minkowski-Funktional für absorbierende, nichtleere, konvexe und kreisförmige Mengen A eine Seminorm. Weiters ist A in $\operatorname{span}(A)$ wegen Proposition 2.0.14 absorbierend, womit das Minkowski-Funktional von A in $\operatorname{span}(A)$ wohldefiniert ist. Wir müssen nur nachweisen, dass $\mu_A(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$. Sei $x \in \operatorname{span}(A)$ mit $x \neq 0$ und U eine Nullumgebung in X, sodass $x \notin U$. Da A beschränkt ist, existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $tA \subseteq U$ für alle $|t| \leq \epsilon$, woraus $x \notin \epsilon A$ und $\mu_A(x) \geq \epsilon > 0$ folgt. Damit ist μ_A eine Norm auf $\operatorname{span}(A)$. □

Satz 5.0.10. *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $D \subseteq X$ eine konvexe und kreisförmige Menge, so ist D genau dann beschränkt, wenn die Inklusionsabbildung $\iota : (\operatorname{span}(D), \mathcal{T}_{\mu_D}) \to (X, \mathcal{T})$ stetig ist.*

Beweis.
$\Rightarrow$: Da D beschränkt in $(X, \mathcal{T})$ ist, existiert für jede Nullumgebung $U \in \mathcal{U}_X(0)$ ein $\epsilon > 0$ mit $tD \subseteq U \cap \operatorname{span}(D)$ für $|t| \leq \epsilon$. Daraus folgt $U_\epsilon^{\mu_D}(0) \subseteq U \cap \operatorname{span}(D)$ womit $U \cap \operatorname{span}(D)$ offen bzgl. $\mathcal{T}_{\mu_D}$ ist. Also ist $\mathcal{T}_{\mu_D}$ feiner als $\mathcal{T}_D$ auf $\operatorname{span}(D)$, womit die Inklusionsabbildung ι stetig ist.
$\Leftarrow$: Falls die Inklusionsabbildung $\iota : (\operatorname{span}(D), \mathcal{T}_{\mu_D}) \to (X, \mathcal{T})$ bzgl. $\mathcal{T}_{\mu_D}$ stetig ist, existiert für jede Nullumgebung $U \in \mathcal{U}_X(0)$ ein $\delta > 0$ derart, dass $\iota(U_\delta^{\mu_D}(0)) \subseteq U \cap \operatorname{span}(D)$ und infolge $tD \subseteq U \cap \operatorname{span}(D)$ für alle $|t| \leq \frac{\delta}{2}$. Also ist D beschränkt in $(X, \mathcal{T})$. □

Proposition 5.0.11. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, sodass für jede bzgl. $\mathcal{T}$ kompakte Menge $K \subseteq X$ eine beschränkte, konvexe und kreisförmige Menge $B \subseteq X$ mit $K \subseteq \operatorname{span}(B)$ und K kompakt bzgl. $\mathcal{T}_{\mu_B}$ existiert. Dann konvergiert jede topologisch konvergente Folge in $(X, \mathbb{B}_\mathbb{N})$ auch bornologisch.*

Beweis. Für eine topologisch gegen 0 konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Menge $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ kompakt in X bzgl. $\mathcal{T}$. Nach Vorraussetzung existiert eine beschränkte, konvexe und kreisförmige Menge $B \subseteq X$ mit $A \subseteq \operatorname{span}(B)$. Da B kreisförmig ist, gilt $0 \in B$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auch topologisch in $(\operatorname{span}(B), \mathcal{T}_{\operatorname{span}(B)})$ gegen 0. Nach Proposition 5.0.9 ist $(\operatorname{span}(B), \mu_B)$ ein normierter Raum und infolge $(\operatorname{span}(B), \mathcal{T}_{\mu_B})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Da B eine beschränkte, konvexe und kreisförmige Menge ist, ist wegen Satz 5.0.10 $\iota : (\operatorname{span}(B), \mathcal{T}_{\mu_B}) \to (\operatorname{span}(B), \mathcal{T}_{\operatorname{span}(B)})$ stetig. Nach Vorraussetzung ist A in $\operatorname{span}(B)$ bzgl. $\mathcal{T}_{\mu_B}$ kompakt. Damit ist $\iota|_A : (A, \mathcal{T}_{\mu_B}|_A) \to (A, \mathcal{T}_{\operatorname{span}(B)}|_A)$ ein Homöomorphismus. Also konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\operatorname{span} B$ bzgl. $\mathcal{T}_{\mu_B}$ gegen 0. Nach Proposition 5.0.7 konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornologisch in X bzgl. $\mathbb{B}_\mathbb{N}$ gegen 0. □

Proposition 5.0.12. *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so konvergiert jede im topologischen Sinn konvergente Folge in X auch bornologisch.*

Beweis. Nach Vorraussetzung existiert eine abzählbare Basis $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}_X(0)$ von Nullumgebungen, die wir wegen Lemma 2.1.8 [M.B20, Seite 20] kreisförmig wählen können. Für $S_n := \bigcap_{i=1}^n B_i$ mit $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt $S_n \in \mathcal{B}$ und $S_{n+1} \subseteq S_n$. Wir können also eine abzählbare Basis bestehend aus kreisförmigen Nullumgebungen $\mathcal{S} = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $S_{n+1} \subseteq S_n$ für $n \in \mathbb{N}$ wählen. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, welche im topologischen Sinn gegen 0 konvergiert und setze $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wir wollen zeigen, dass eine beschränkte und kreisförmige Menge $B \subseteq X$ existiert, sodass für alle $\epsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A \cap S_m \subseteq \epsilon B$ existiert.
Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im topologischen Sinne gegen 0 konvergiert und S_n kreisförmig und absorbierend ist, existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\lambda_n > 0$ mit $A \subseteq \lambda_n S_n$, also

$$A \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \lambda_n S_n.$$

Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $\alpha_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\mu_n := \frac{\lambda_n}{\alpha_n}$. Wir zeigen, dass die Menge

$$B := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mu_n S_n.$$

beschränkt und kreisförmig ist. Für $U \in \mathcal{U}_X(0)$ existert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $S_m \subseteq U$. Für $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mu_n S_n$ gilt $\frac{1}{\mu_m} x \in S_m$. Da S_m kreisförmig ist, folgt für $|\lambda| \leq 1$

$$\frac{\lambda}{\mu_m} x \in \lambda S_m \subseteq S_m \subseteq U,$$

womit $tx \in U$ für alle $|t| \leq \frac{1}{|\mu_m|}$. Jede Nullumgebung absorbiert also die Menge B, weshalb B beschränkt ist. Für $|\lambda| \leq 1$ gilt, da alle S_n kreisförmig sind,

$$\lambda B = \lambda \bigcap_{n=1}^{\infty} \mu_n S_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mu_n (\lambda S_n) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mu_n S_n = B,$$

weshalb B kreisförmig ist. Wegen $\frac{\mu_n}{\lambda_n} = \frac{1}{\alpha_n} \to +\infty$ für $n \to \infty$ existiert zu gegebenen $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{\mu_n}{\lambda_n} \geq \frac{1}{\epsilon}$ bzw. $\lambda_n \leq \epsilon \mu_n$ für alle $n \geq N$. Wegen $A \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \lambda_n S_n$ folgt aus Proposition 2.0.5 $A \subseteq \epsilon \mu_n S_n$ für $n \geq N$. Da

$$V_N := \bigcap_{n<N} \epsilon \mu_n S_n$$

eine Nullumgebung ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $S_m \subseteq V_N$ und infolge $A \cap S_m \subseteq \epsilon \mu_n S_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wodurch

$$A \cap S_m \subseteq \epsilon \bigcap_{n=1}^{\infty} \mu_n S_n = \epsilon B.$$

Für $\epsilon > 0$ und $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_k \in S_m$ für $k \geq N_\epsilon$ gilt $x_k \in A \cap S_m \subseteq \epsilon B$. Nach Proposition 5.0.7 konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornologisch gegen 0. □

Proposition 5.0.13. *Ein bornologischer Vektorraum $(X, \mathbb{B})$ ist genau dann separierend, wenn jede bornologisch konvergente Folge in X einen eindeutigen Grenzwert besitzt.*

Beweis.
$\Rightarrow$: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in X gegen $x \in X$ und $y \in X$ bornologisch konvergente Folge, dann konvergiert wegen Lemma 5.0.3 $z_n := x_n - x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, bornologisch gegen $x - y$. Wir wollen zeigen, dass der einzige bornologische Grenzwert z der Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Null ist.
Nach Proposition 5.0.7 existiert eine positive reellwertige Nullfolge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $B \in \mathbb{B}$ kreisförmig mit $z - z_n = z \in \lambda_n B$ für alle $n \geq 1$. $\frac{1}{\lambda_n} z \in B$ für alle $n \in \mathbb{N}$, impliziert wegen $\frac{1}{\lambda_m} \to +\infty$ und wegen der Kreisförmigkeit von B $\mu z \in B$ für alle $\mu \in \mathbb{C}$. Das heißt $\mathbb{C}z \subseteq B$, womit $\mathbb{C}z \in \mathbb{B}$ im Widerspruch zur Annahme, dass $(X, \mathbb{B})$ ein separierender bornologischer Vektorraum ist.
$\Leftarrow$: Angenommen, alle Grenzwerte bornologisch konvergenter Folgen in X sind eindeutig und es existiert ein Element $z \in X$ mit $z \neq 0$, sodass $\mathbb{C}z \in \mathbb{B}$. Dann gilt $z \in \frac{1}{n}\mathbb{C}z$ für alle $n \geq 1$. Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n = z$ für $n \in \mathbb{N}$ konvergiert damit bornologisch gegen 0 und wegen $z_n - z = 0 \in \frac{1}{n}\mathbb{C}z$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert z_n bornologisch gegen z. Nach Vorraussetzung folgt $z = 0$ im Widerspruch zur Annahme. □

Mit der bornologischen Konvergenz lässt sich auch der Begriff der Abgeschlossenheit einer Menge bzgl. der Bornologie definieren.

Definition 5.0.14. *Sei $(X, \mathbb{B})$ ein bornologischer Vektorraum. Eine Menge $A \subseteq X$ ist bornologisch abgeschlossen, falls für alle bornologisch konvergenten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $x_n \overset{M}{\to} x \in X$ der Grenzwert x in A enthalten ist.*

Proposition 5.0.15. *Ein bornologischer Vektorraum $(X, \mathbb{B})$ ist genau dann separierend, wenn der lineare Unterraum $\{0\}$ bornologisch abgeschlossen ist.*

Beweis.
$\Rightarrow$: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\{0\}$, welche bornologisch gegen ein Element $x \in X$ konvergiert. Wegen $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert diese Folge auch gegen $0 \in X$, weshalb aus Proposition 5.0.13 $x = 0$ folgt.
$\Leftarrow$: Angenommen, $\{0\}$ ist bornologisch abgeschlossen in X und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge, welche bornologisch gegen x und y in X konvergiert. Die Folge $x_n - x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert nach Vorraussetzung bornologisch gegen $x - y \in \{0\}$, also $x = y$. Damit sind bornologische Grenzwerte von Folgen in X eindeutig und wegen Proposition 5.0.13 ist $(X, \mathbb{B})$ separierend. □

Definition 5.0.16. *Sei $(X, \mathbb{B})$ ein bornologischer Vektorraum und $A \subseteq X$. Dann bezeichnen wir mit*

$$\overline{A}^{\mathbb{B}} = \bigcap \{B \subseteq X : B \textit{ ist bornologisch abgeschlossen}, A \subseteq B\}.$$

den bornologischen Abschluss von A bzgl. $\mathbb{B}$.

Klarerweise ist X bzgl. $\mathbb{B}$ eine bornologisch abgeschlossene Menge. Nach Definition ist auch der Durchschnitt von bornologisch abgeschlossenen Mengen wieder bornologisch abgeschlossen. Der bornologische Abschluss ist nach Definition die kleinste bornologisch abgeschlossene Menge, welche A enthält.

Lemma 5.0.17. *Sei $(X, \mathbb{B})$ ein konvexer bornologischer Vektorraum. Eine Menge $A \subseteq X$ ist genau dann bornologisch abgeschlossen, wenn für jede beschränkte, konvexe und kreisförmige Menge $B \subseteq X$, $A \cap \operatorname{span}(B)$ abgeschlossen in $\operatorname{span}(B)$ bezüglich der von μ_B auf $\operatorname{span}(B)$ induzierten Topologie ist.*

Beweis.
$\Rightarrow$: Angenommen, A ist bornologisch abgeschlossen und $B \subseteq X$ ist eine beschränkte, konvexe und kreisförmige Menge. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $A \cap \operatorname{span}(B)$ mit $y \in \operatorname{span}(B)$ derart, dass $\mu_B(x_n - y) \to 0$ für $n \to \infty$. Wegen Proposition 5.0.7 konvergiert $(x_n - y)_{n\in\mathbb{N}}$ in X bornologisch gegen 0. Da A bornologisch abgeschlossen ist, folgt $y \in A$, womit $y \in A \cap \operatorname{span}(B)$.
$\Leftarrow$: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A und $y \in X$ mit $x_n \overset{M}{\to} y$. Nach Proposition 5.0.7 existiert für $(x_n - y)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte, konvexe und kreisförmige Menge $B \subseteq X$ mit $y \in B$ derart, dass $(x_n - y)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\operatorname{span}(B), \mu_B)$ bzgl. μ_B gegen 0 konvergiert, womit $y \in \operatorname{span}(B)$. Vorraussetzungsgemäß ist $A \cap \operatorname{span}(B)$ abgeschlossen in $\operatorname{span}(B)$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge in A ist, gilt $y \in \operatorname{span}(B) \cap A$. □

Proposition 5.0.18. *Sei $(X, \mathbb{B})$ ein bornologischer Vektorraum. Der bornologische Abschluss eines Unterraums von X ist wieder ein Unterraum von X.*

Beweis. Nach Lemma 5.0.3 ist für jede bornologisch abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ und $x \in X$ die Menge $A_x := \{z \in X : x + z \in A\}$ eine bornologisch abgeschlossene Menge in X. Sei $U \subseteq X$ ein linearer Unterraum und $a \in U$. Da $\overline{U_a}^{\mathbb{B}}$ bornologisch abgeschlossen in X ist und $U \subseteq \overline{U_a}^{\mathbb{B}}$ gilt, folgt $\overline{U}^{\mathbb{B}} \subseteq \overline{U_a}^{\mathbb{B}}$, womit $a + y \in \overline{U}^{\mathbb{B}}$ für jedes $y \in \overline{U}^{\mathbb{B}}$. Für ein solches $y \in \overline{U}^{\mathbb{B}}$ gilt folglich $U \subseteq \overline{U_y}^{\mathbb{B}}$, weshalb wieder $\overline{U}^{\mathbb{B}} \subseteq \overline{U_y}^{\mathbb{B}}$. Also gilt $x + y \in \overline{U}^{\mathbb{B}}$ für $x, y \in \overline{U}^{\mathbb{B}}$. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $M_\lambda : x \mapsto \lambda x$ eine beschränkte lineare Abbildung. Lemma 5.0.4 impliziert $M_\lambda(\overline{U}^{\mathbb{B}}) \subseteq \overline{M_\lambda(U)}^{\mathbb{B}}$, wobei $\overline{M_\lambda(U)}^{\mathbb{B}} \subseteq \overline{U}^{\mathbb{B}}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig. Also ist $\overline{U}^{\mathbb{B}}$ ein Unterraum. $\square$

6 Vollständige Bornologien

Definition 6.0.1. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge in X, falls für jede Nullumgebung $V \in \mathcal{U}_X(0)$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n - x_m \in V$ für alle $n, m \geq N$.*

Definition 6.0.2. *Sei X ein Vektorraum und $A \subseteq X$ eine konvexe und kreisförmige Menge. Die Menge A heißt Banachscheibe, falls μ_A eine Norm auf $\operatorname{span}(A)$ und $(\operatorname{span}(A), \mu_A)$ ein Banachraum ist.*

Proposition 6.0.3. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. Jede beschränkte, konvexe und kreisförmige Menge $A \subseteq X$, sodass jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A bzgl. der Spurtopologie $\mathcal{T}_A$ gegen ein $x \in A$ konvergiert, ist eine Banachscheibe.*

Beweis. Nach Proposition 5.0.9 ist $(\operatorname{span}(A), \mu_A)$ ein normierter Raum. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\operatorname{span}(A)$. Da A beschränkt ist, ist nach Satz 5.0.10 die kanonische Einbettung $\iota : (\operatorname{span}(A), \mathcal{T}_{\mu_A}) \to (X, \mathcal{T})$ linear und stetig, womit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X bzgl. $\mathcal{T}$ ist. Zudem existiert für $\epsilon > 0$ ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $\mu_A(x_n - x_m) < \epsilon$ für alle $n, m \geq N_\epsilon$. Für $m = N_\epsilon$ gilt $\mu_A(x_n - x_N) < \epsilon$ und, da μ_A eine Norm auf $\operatorname{span}(A)$ ist, folgt mit der unteren Dreiecksungleichung $\mu_A(x_n) - \mu_A(x_N) < \epsilon$ bzw. $\mu_A(x_n) < \epsilon + \mu_A(x_N)$ für alle $n \geq N$. Wir erhalten $\mu_A(x_n) < \max\{\mu_A(x_1), \ldots, \mu_A(x_{N-1}), \epsilon + \mu_A(x_N)\} + 1 =: \lambda$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \lambda A$. Da $x \mapsto \lambda x$ ein linearer Homöomorphismus von $(A, \mathcal{T}_A)$ auf $(\lambda A, \mathcal{T}_{\lambda A})$ ist, konvergiert auch jede Cauchy-Folge in $(\lambda A, \mathcal{T}_{\lambda A})$. Damit konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\operatorname{span}(A)$ bzgl. $\mathcal{T}_{\operatorname{span} A}$ gegen einen Punkt $x \in \lambda A \subseteq \operatorname{span}(A)$.
Wir zeigen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch bzgl. der Norm μ_A gegen ein x konvergiert. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\operatorname{span}(A), \mathcal{T}_{\mu_A})$ ist, existiert für $\epsilon > 0$ ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $\mu_A(x_n - x_m) < \epsilon$ bzw. $x_n - x_m \in \epsilon A$ für alle $m, n \geq N_\epsilon$. Für $m \geq N_\epsilon$ fest ist $(x_m - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\operatorname{span}(A), \mu_A)$, denn für $\delta > 0$ existiert ein $M \in \mathbb{N}$ mit $\mu_A((x_m - x_n) - (x_m - x_{n'})) = \mu_A(x_{n'} - x_n) < \delta$ für alle $n, n' \geq N$. Nach dem ersten Teil des Beweises ist damit $(x_m - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X bzgl. $\mathcal{T}$ und es existiert ein $\lambda > 0$ mit $\{x_m - x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \lambda A$. Nun konvergiert $(x_m - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\operatorname{span}(A)$ bzgl. $\mathcal{T}_{\operatorname{span}(A)}$ gegen $x_m - x \in \lambda A$. Da $x_m - x_n \in \epsilon A$ für $n \geq N_\epsilon$ gilt und jede Cauchy-Folge in ϵA bzgl. $\mathcal{T}_{\epsilon A}$ konvergiert, folgt $x_m - x \in \epsilon A$ und infolge $\mu_A(x_m - x) \leq \epsilon$ für alle $m \geq N_\epsilon$. □

Korollar 6.0.4. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $A \subseteq X$ eine absorbierende, konvexe, kreisförmige und kompakte Menge. Dann ist A eine Banachscheibe.*

Beweis. Nach Proposition 6.0.3 und Satz 3.0.4 reicht es, für jede kompakte, konvexe, absorbierende und kreisförmige Menge $A \subseteq X$ und jede Cauchy-Folge in A die Konvergenz dieser bzgl. $\mathcal{T}_A$ gegen ein $x \in A$ zu zeigen.
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in A und $F_N := \overline{\{x_n : n \geq N\}}$. Da A kompakt ist und

$F_N \subseteq A$ gilt, ist F_N kompakt, womit

$$K := \bigcap_{N=1}^{\infty} F_N \neq \emptyset.$$

Sei $x \in K$. Wir zeigen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. $\mathcal{T}$ gegen x konvergiert. Für eine Nullumgebung $V \in \mathcal{U}_X(0)$ existiert eine symmetrische Nullumgebung $W \subseteq V$ mit $W + W \subseteq V$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n - x_m \in W$ für alle $n, m \geq N$. Wegen $x \in F_N$ existiert ein $n \geq N$ mit $x_n - x \in W$, woraus

$$x_m - x = (x_m - x_n) + (x_n - x) \in W + W \subseteq V$$

bzw. $x_m \in x + V$ für alle $m \geq N$ folgt. □

6.1 Vollständige konvexe bornologische Räume

Da die Eigenschaften einer Banachscheibe unabhängig von der Topologie sind, können wir diese auch auf bornologischer Räume übertragen.

Definition 6.1.1. *Eine konvexe Vektorbornologie $\mathbb{B}$ auf einen Vektorraum X heißt vollständige konvexe Bornologie, falls sie eine Basis im Sinne von 4.0.4 bestehend aus Banachscheiben besitzt. Ein konvexer bornologischer Raum $(X, \mathbb{B})$ heißt vollständiger konvexer bornologischer Raum, falls $\mathbb{B}$ eine vollständige konvexe Bornologie ist.*

Definition 6.1.2. *Ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ heißt bornologisch vollständig, falls die von Neumann Bornologie $\mathbb{B}_N$ auf X eine vollständige konvexe Bornologie ist.*

Proposition 6.1.3. *Sei $(X, \mathbb{B})$ ein separierender konvexer bornologischer Raum und $(A, \mathbb{B}_A)$ ein bornologischer Unterraum von X; vgl. Definition 4.1.5 . Dann gilt:*

i) Falls $(A, \mathbb{B}_A)$ ein vollständig konvexer bornologischer Raum ist, so ist A bornologisch abgeschlossen in X.

ii) Falls $(X, \mathbb{B})$ ein vollständiger konvexer bornologischer Raum ist und A bornologisch abgeschlossen, dann ist $(A, \mathbb{B}_A)$ ein vollständiger konvexer bornologischer Raum.

Beweis.

i) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, welche bornologisch gegen $x \in X$ konvergiert. Wegen Proposition 5.0.7 existiert eine beschränkte, konvexe und kreisförmige Menge $B \subseteq X$, sodass $x_n \to x \in \operatorname{span}(B)$ für $n \to \infty$ in $(\operatorname{span}(B), \mu_B)$. Da $B \cap A$ beschränkt bzgl. der Bornologie $\mathbb{B}_A$ ist, existiert nach Vorraussetzung eine beschränkte Banachscheibe $D \subseteq A$, sodass $B \cap A \subseteq D$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A enthalten und eine Cauchy-Folge in $(\operatorname{span}(B), \mu_B)$ ist, existiert für $\epsilon > 0$ ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $\mu_B(x_n - x_m) < \epsilon$, also $x_n - x_m \in \epsilon B$ für $n, m \geq N_\epsilon$. Daraus folgt $x_n - x_m \in \epsilon(B \cap A) \subseteq \epsilon D$ für alle $n, m \geq N_\epsilon$. Damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\operatorname{span}(D), \mu_D)$. Für $n \geq N_1$ gilt insbesondere $x_n - x_{N_1} \in D$, also $x_n \in D + x_{N_1}$. Da $\mathbb{B}_A$ eine Vektorbornologie ist, folgt aus $D, \{x_{N_1}\}, \{x_1, \ldots, x_{N_1-1}\} \in \mathbb{B}_A$

$$D \cup (D + \{x_{N_1}\}) \cup \{x_1, \ldots, x_{N_1-1}\} \in \mathbb{B}_A.$$

Da $(A, \mathbb{B}_A)$ ein vollständig konvexer bornologischer Raum ist, existiert eine beschränkte Banachscheibe W mit

$$D \cup (D + \{x_{N_1}\}) \cup \{x_1, \ldots, x_{N_1-1}\} \subseteq W.$$

Damit gilt $x_n \in W$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n, m \geq N_\epsilon$ erhalten wir $x_n - x_m \in \epsilon D \subseteq \epsilon W$ und infolge $\mu_W(x_n - x_m) \leq \epsilon$, weshalb $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\operatorname{span}(W), \mu_W)$ ist. Also folgt $x_n \to y \in \operatorname{span}(W)$ bzgl. μ_W für $n \to \infty$. Nach Proposition 5.0.7 konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A bornologisch gegen y und wegen Proposition 5.0.13 gilt $y = x$.

ii) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{B}$ bestehend aus Banachscheiben. Nach Proposition 4.1.6 reicht es zu zeigen, dass für jedes $B \in \mathcal{B}$ die Menge $B \cap A$ eine Banachscheibe in $\mathbb{B}_A$ ist. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\operatorname{span}(B) \cap A, \mu_{B\cap A})$. Da A ein Unterraum ist, gilt $\mu_{B\cap A}(z) = \mu_B(z)$ für $z \in A$. Damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\operatorname{span}(B)$ und muss daher gegen einen Punkt $x \in \operatorname{span}(B)$ konvergieren. Da A bornologisch abgeschlossen ist, muss $x \in \operatorname{span}(B) \cap A$ und $x_n \to x$ für $n \to \infty$ in $\operatorname{span}(B) \cap A$ bzgl. $\mu_{B\cap A}$ gelten.

□

6.2 Bornologisch vollständige topologische Vektorräume

Definition 6.2.1. *Für eine Funktion $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ nennen wir $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ eine Doppelfolge in $\mathbb{C}$. Wir nennen eine Doppelfolge $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ konvergent gegen $a \in \mathbb{C}$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ derart existiert, dass*

$$|a_{n,m} - a| < \epsilon \quad \textit{für alle } n, m \geq N.$$

Wir bezeichnen die Konvergenz einer Doppelfolge gegen a auch mit $\lim_{n,m\to\infty} a_{n,m} = a$. Sei $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge und eine Funktion $a : I \times I \to \mathbb{C}$. Dann nennen wir $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times I}$ ein Doppelnetz in $\mathbb{C}$. $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times I}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{C}$, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $i_0 \in I$ derart, existiert, dass

$$|a_{i,j} - a| < \epsilon \quad \textit{für alle } i, j \succeq i_0.$$

Definition 6.2.2. *Sei $(X, \mathbb{B})$ ein bornologischer Vektorraum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt Mackey-Cauchy Folge, falls eine beschränkte und kreisförmige Menge $B \subseteq X$ und eine Doppelfolge $(\lambda_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ in $\mathbb{C}$ mit $\lim_{n,m\to\infty} \lambda_{n,m} = 0$ derart existiert, dass $x_n - x_m \in \lambda_{n,m} B$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Analog lässt sich ein Mackey-Cauchy Netz $(x_i)_{i\in I}$ in X über eine gerichtete Menge $(I, \preceq)$ definieren.*

Lemma 6.2.3. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) Jedes Mackey-Cauchy Netz in $(X, \mathbb{B}_N)$ konvergiert topologisch in X.

ii) Jede Mackey-Cauchy Folge in $(X, \mathbb{B}_N)$ konvergiert topologisch in X.

iii) Für jede abgeschlossene, konvexe und kreisförmige Menge $B \in \mathbb{B}_N$ ist $(\operatorname{span}(B), \mu_B)$ ein Banachraum.

iv) Für jede beschränkte Menge $B \in \mathbb{B}_N$ existiert eine abgeschlossene, beschränkte, kreisförmige und konvexe Menge A mit $B \subseteq A$ derart, dass $(\operatorname{span}(A), \mu_A)$ ein Banachraum ist.

Beweis.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Klar.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei $B \subseteq X$ eine abgeschlossene, beschränkte, konvexe und kreisförmige Menge und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\operatorname{span}(B)$. Da $(\operatorname{span}(B), \mu_B)$ wegen Proposition 5.0.9 ein normierter Raum ist, reicht es, seine Vollständigkeit zu zeigen. Die Doppelfolge $\lambda_{n,m} := \mu_B(x_n - x_m) + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, erfüllt $x_n - x_m \in \lambda_{n,m} B$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\operatorname{span}(B)$ ist, gilt $\lim_{n,m\to\infty} \lambda_{n,m} = 0$, womit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Mackey-Cauchy Folge in $(X, \mathbb{B}_N)$ ist. Nach Vorraussetzung konvergiert diese in X bzgl. $\mathcal{T}$ gegen ein x. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\operatorname{span}(B), \mu_B)$ ist, existiert für $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n - x_m \in \epsilon B \quad \text{für alle} \quad n, m \geq N.$$

Für $m \geq N$ konvergiert die Folge $(x_n - x_m)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. $\mathcal{T}$ gegen $x - x_m$. Da mit B auch ϵB abgeschlossen ist, erhalten wir $x - x_m \in \epsilon B$. Also gilt $\mu_B(x - x_m) \leq \epsilon$ für alle $m \geq N$.

(iii) $\Rightarrow$ *(iv)*: Wegen Proposition 2.0.11 ist $\operatorname{co}(\operatorname{bal}(B))$ eine kreisförmige und konvexe Menge. Nach Lemma 2.1.7 [M.B20, Seite 19] ist der topologische Abschluss einer konvexen bzw. kreisförmigen Menge wieder konvex bzw. kreisförmig, womit $A := \overline{\operatorname{co}(\operatorname{bal}(B))}$ eine abgeschlossene kreisförmige und konvexe Menge ist mit $B \subseteq A$. Da die von Neumann Bornologie $\mathbb{B}_N$ eine lokalkonvexen topologischen Vektorraums eine konvexe Vektorbornologie ist, gilt $\operatorname{co}(\operatorname{bal}(B)) \in \mathbb{B}_N$ und gemäß Proposition 3.0.3 auch $A \in \mathbb{B}_N$. Nach Vorraussetzung ist $(\operatorname{span}(A), \mu_A)$ ein Banachraum.
(iv) $\Rightarrow$ *(i)*: Ist $(x_i)_{i\in I}$ ein Mackey-Cauchy Netz in $(X, \mathbb{B}_N)$, so existiert ein Doppelnetz $(\lambda_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$ mit $\lim_{(i,j)\in I^2} \lambda_{i,j} = 0$ sowie ein beschränkte und kreisförmige Menge B mit $x_i - x_j \in \lambda_{i,j} B$ für alle $i, j \in I$. Nach Vorraussetzung existiert eine abgeschlossene, beschränkte, kreisförmige und konvexe Menge A mit $B \subseteq A$ derart, dass $(\operatorname{span}(A), \mu_A)$ ein Banachraum ist. Aufgrund von $x_i - x_j \in \lambda_{i,j} B \subseteq \lambda_{i,j} A$ gilt

$$\mu_A(x_i - x_j) \leq \lambda_{i,j} \quad \text{für alle} \quad i, j \in I.$$

Wegen $\lim_{(i,j)\in I^2} \lambda_{i,j} = 0$ ist $(x_i)_{i\in I}$ eine Cauchy-Netz in $(\operatorname{span}(A), \mu_A)$ und konvergiert daher gegen ein $x \in \operatorname{span}(A)$. Da A eine beschränkte, konvexe und kreisförmige Menge ist, ist nach Proposition 5.0.10 die Inklusionsabbildung $\iota : (\operatorname{span}(A), \mathcal{T}_{\mu_A}) \to (X, \mathcal{T})$ stetig und infolge konvergiert $(x_i)_{i\in I}$ in $(X, \mathcal{T})$ gegen x. $\square$

Proposition 6.2.4. *Ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann bornologisch vollständig, wenn jede Mackey-Cauchy Folge in X im topologischen Sinn konvergiert.*

Beweis.
$\Rightarrow$: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Mackey-Cauchy Folge in X. Dann existiert eine beschränkte und kreisförmige Menge B und eine gegen Null konvergente Doppelfolge $(\lambda_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ in $\mathbb{C}$ mit $x_n - x_m \in \lambda_{n,m} B$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Da $(X, \mathcal{T})$ bornologisch vollständig ist, existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{B}_N$ bestehend aus Banachscheiben. Folglich existiert eine Banachscheibe $D \in \mathbb{N}$ mit $B \subseteq D$, wodurch $x_n - x_m \in \lambda_{n,m} D = |\lambda_{n,m}| D$ und daher $\mu_D(x_n - x_m) \leq |\lambda_{n,m}|$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim_{n,m\to\infty} \lambda_{n,m} = 0$ ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\operatorname{span}(D), \mu_D)$. Da $(\operatorname{span}(D), \mu_D)$ ein Banachraum ist, konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. μ_D gegen ein $x \in \operatorname{span}(D)$. Da D eine beschränkte, kreisförmige und konvexe Menge ist folgt aus Satz 5.0.10, dass die Inklusionsabbildung $\iota : (\operatorname{span}(D), \mu_D) \to (X, \mathcal{T})$ stetig ist. Damit konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch topologisch in X bzgl. $\mathcal{T}$ gegen x.
$\Leftarrow$: Falls jede Mackey-Cauchy Folge in X bzgl. $\mathcal{T}$ konvergiert folgt aus Lemma 6.2.3, dass es für jede beschränkte Menge B eine beschränkte, abgeschlossene, konvexe und kreisförmige Menge A mit $B \subseteq A$ derart existiert, dass $(\operatorname{span}(A), \mu_A)$ ein Banachraum ist. Das heißt, $\mathbb{B}_N$ besitzt eine Basis bestehend aus abgeschlossenen Banachscheiben. $\square$

Korollar 6.2.5. *Ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum $(X, \mathcal{T})$, in welchem jede Cauchy-Folge konvergiert, ist bornologisch vollständig.*

Beweis. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Mackey-Cauchy Folge in X, so existiert eine beschränkte und kreisförmige Menge $B \subseteq X$ sowie eine Doppelfolge $(\lambda_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ mit $\lim_{n,m\to\infty} \lambda_{n,m} = 0$

und $x_n - x_m \in \lambda_{n,m}B$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Da B beschränkt ist, existiert zu jeder Nullumgebung $V \in \mathcal{U}_X(0)$ ein $\delta > 0$ mit $tB \subseteq V$ für alle $|t| \leq \delta$. Wegen $\lim_{n,m\to\infty} \lambda_{n,m} = 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\lambda_{n,m}| < \delta$ für $n, m \geq N$. Gemäß Proposition 2.0.5 folgt

$$x_n - x_m \in \lambda_{n,m}B = |\lambda_{n,m}|B \subseteq \delta B,$$

womit $x_n - x_m \in \delta B \subseteq V$ für alle $n, m \geq N$. Da $V \in \mathcal{U}_X(0)$ beliebig war, ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X und konvergiert vorraussetzungsgemäß gegen ein x. Damit konvergiert jede Macky-Cauchy Folge in X im topologischen Sinn, weshalb nach Proposition 6.2.4 $(X, \mathcal{T})$ bornologisch vollständig ist. □

Korollar 6.2.5 zeigt, dass für einen lokalkonvexen topologischen Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ bornologische Vollständigkeit schwächer als topologische Vollständigkeit ist. Bei den meisten Problemen ist bornologische Vollständigkeit ausreichend.

Literaturverzeichnis

[HN77] H. HOGBE NLEND. *Bornologies and Functional Analysis.* North-Holland Publishing Company, 1977.

[M.B20] H.WORACEK, M.KALTENBÄCK, M.BLÜMLINGER. *Funktionalanalysis 1.* Vorlesungsskript SS 2020, 2020.