TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

BACHELORARBEIT

Abstrakte harmonische Analysis auf lokalkompakten abelschen Gruppen

Benedikt Klocker

Institut für Analysis und Scientific Computing

Betreuer: Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Martin Blümlinger

Wien, im November 2012

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

In vielen Anwendungen der Mathematik, insbesondere in der Physik, spielt die Fouriertransformation eine wichtige Rolle. In dieser Arbeit wird der Begriff der Fouriertransformation für Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ auf komplexwertige Funktionen auf beliebigen lokalkompakten abelschen Gruppen verallgemeinert.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Einführung in die Theorie der abstrakten harmonischen Analysis auf lokalkompakten abelschen Gruppen. Dabei werden im ersten Teil unitäre Darstellungen auf lokalkompakten nicht unbedingt abelschen Gruppen und dessen Zusammenhang mit Funktionen von positivem Typ behandelt. Im zweiten Teil wird die Fouriertransformation auf lokalkompakten abelschen Gruppen eingeführt. Die Hauptresultate sind dabei der Dualitätssatz von Pontrjagin und die Rücktransformationsformel.

Die Arbeit basiert hauptsächlich auf den ersten vier Kapiteln von [2]. Sie setzt Grundkenntnisse in Analysis, Maßtheorie und Topologie voraus.

2. Grundlagen

Definition 2.1. Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe $(G, *, ^{-1})$ versehen mit einer Hausdorff-Topologie, sodass die Gruppenoperationen stetig sind, wobei $G \times G$ mit der Produkttopologie versehen ist. Eine topologische Gruppe heißt *lokalkompakt*, falls ihre Topologie lokalkompakt ist. Dies bedeutet, dass es eine Basis aus kompakten Mengen gibt.

Definition 2.2. Sei X ein topologischer Hausdorff-Raum. Ein *Borelmaß* ist ein nichtnegatives Maß auf den Borelmengen von X, welches auf allen kompakten Mengen endlich ist. Ein Maß auf den Borelmengen heißt *Riesz-regulär*, falls es für jede Borelmenge von außen und für jede offene Menge von innen regulär ist.

Definition 2.3. Sei X ein geordneter Vektorraum über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$. Dies ist ein Vektorraum versehen mit einer Halbordnung, welche mit den Vektorraumoperationen verträglich ist, d.h.:

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad \forall x, y, z \in X$$
$$x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y \quad \forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$$

Ein *positives lineares Funktional* ist eine lineare Abbildung $\Lambda\colon X \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$, sodass $\Lambda(x) \geq 0$ für jedes $x \in X$ mit $x \geq 0$ gilt.

Satz 2.4 (Darstellungssatz von Riesz)**.** *Sei X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Ist $\Lambda\colon C_c(X) \to \mathbb{R}$ ein positives lineares Funktional, dann gibt es ein eindeutiges nichtnegatives, Riesz-reguläres Borelmaß $\mu\colon \mathfrak{B}(G) \to [0, \infty]$, sodass*

$$\Lambda(f) = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Umgekehrt erzeugt jedes nichtnegative Borelmaß mit obigen Eigenschaften ein positives lineares Funktional.

Beweis. Siehe Satz 2.14 in [4]. □

Da wir in späteren Kapiteln Maße, welche nicht unbedingt σ-endlich sein müssen, betrachten, benötigen wir eine Version des Satzes von Fubini für beliebige Borelmaße.

Satz 2.5. *Seien X_1 und X_2 topologische Hausdorff-Räume und seien λ_1 und λ_2 nicht unbedingt σ-endliche Borelmaße darauf. Sei $f\colon X_1 \times X_2 \to \mathbb{C}$ eine bezüglich den Borelmengen messbare Funktion, sodass $\operatorname{supp}(f)$ eine σ-kompakte Menge ist. Dabei bedeutet σ-kompakt, dass es eine abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen gibt, welche die Menge überdeckt. Weiters existiere $\int\int |f(x,y)|\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_2(y)$ oder es existere $\int\int |f(x,y)|\,\mathrm{d}\lambda_2(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$. Dann folgt, dass f in $L^1(\lambda_1 \times \lambda_2)$ ist und beide iterierten Integrale existieren und mit $\|f\|_{L^1(X\times Y,\lambda_1\times\lambda_2)}$ übereinstimmen. Weiters gilt*

$$\int\int f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_2(y) = \int\int f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$$

Beweis. Da die Projektion auf eine Komponente in einem Produktraum stetig ist und kompakte Mengen unter stetigen Funktionen auf kompakte Mengen abgebildet werden, sind $E_1 := \pi_1(\operatorname{supp}(f))$ und $E_2 := \pi_2(\operatorname{supp}(f))$ zwei σ-kompakte Mengen. Betrachten wir die Mengen E_1 und E_2 mit den Spurtopologien versehen und die Maße $\lambda_1|_{E_1}$ und $\lambda_2|_{E_2}$, dann sehen wir, dass wegen der σ-Kompaktheit von E_1 und E_2 die Einschränkungen der beiden Maße σ-endlich sind. Da $\operatorname{supp}(f) \subseteq E_1 \times E_2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int\int |f(x,y)|\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_2(y) &= \int\limits_{E_1}\int\limits_{E_2} |f(x,y)|\,\mathrm{d}\lambda_1|_{E_1}(x)\,\mathrm{d}\lambda_2|_{E_2}(y)\\
\int\int |f(x,y)|\,\mathrm{d}\lambda_2(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) &= \int\limits_{E_2}\int\limits_{E_1} |f(x,y)|\,\mathrm{d}\lambda_2|_{E_2}(y)\,\mathrm{d}\lambda_1|_{E_1}(x)\\
\|f\|_{L^1(X\times Y,\lambda_1\times\lambda_2)} &= \|f\|_{L^1(E_1\times E_2,\lambda_1|_{E_1}\times\lambda_2|_{E_2})}\\
\int\int f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_2(y) &= \int\limits_{E_1}\int\limits_{E_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1|_{E_1}(x)\,\mathrm{d}\lambda_2|_{E_2}(y)\\
\int\int f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) &= \int\limits_{E_2}\int\limits_{E_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2|_{E_2}(y)\,\mathrm{d}\lambda_1|_{E_1}(x)
\end{aligned}$$

Nun können wir auf die rechten Seiten den Satz von Fubini anwenden und erhalten, dass alle rechten Seiten existieren, die ersten drei übereinstimmen und die letzten zwei übereinstimmen. Dasselbe gilt dann aber auch für die linken Seiten. □

Da der Raum $L^\infty(\mu)$ für nicht σ-endliche Maße μ in der Literatur unterschiedliche Definitionen hat und wir gerne hätten, dass er auch für nicht σ-endliche Maße der Dualraum des $L^1(\mu)$ ist, definieren wir nun als nächstes den Raum $L^\infty(\mu)$ für Riesz-reguläre Maße μ. Es ist leicht zu sehen, dass folgende Definition im Falle von σ-endlichen Maßen mit der herkömmlichen Definition übereinstimmt.

Definition 2.6. Sei X ein topologischer Raum und μ ein Riesz-reguläres Maß auf X. Eine Menge $A \subseteq X$ ist eine *lokale Borelmenge*, falls $A \cap F$ für alle Borelmengen F mit $\mu(F) < \infty$ eine Borelmenge ist. Wir nennen eine lokale Borelmenge A *lokale Nullmenge*, falls $\mu(A \cap F) = 0$ für alle Borelmengen F mit $\mu(F) < \infty$ ist. Sei $\mathcal{L}^\infty(X,\mu,\mathbb{C}) := \Big\{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ ist Borelmessbar}, \exists C > 0 : \{x \in X : |f(x)| > C\}$ ist eine lokale Nullmenge$\Big\}$. Nun definieren wir $L^\infty(X,\mu,\mathbb{C}) := \mathcal{L}^\infty(X,\mu,\mathbb{C})/\mathcal{N}$ wobei $\mathcal{N}$ die Menge aller $f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu,\mathbb{C})$, sodass $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ eine lokale Nullmenge ist, ist. Wir versehen den $L^\infty(X,\mu,\mathbb{C})$ mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm:

$$\|f + \mathcal{N}\|_\infty := \inf\Big\{M > 0 : \{x \in X : |f(x)| > M\} \text{ ist lokale Nullmenge}\Big\}$$

Mit dieser Norm bildet der Raum $L^\infty(X,\mu,\mathbb{C})$ einen Banachraum. Wir werden auch hier in Zukunft anstatt dem Element $f+\mathcal{N} \in L^\infty(X,\mu,\mathbb{C})$ kurz nur f schreiben.

Satz 2.7. *Sei X ein topologischer Raum und μ ein Riesz-reguläres Maß auf X. Dann ist die Abbildung $\Phi : L^\infty(X,\mu,\mathbb{C}) \to \big(L^1(X,\mu,\mathbb{C})\big)'$ mit $\Phi(f)(g) := \int fg\,\mathrm{d}\mu$ ein isometrischer Isomorphismus.*

Beweis. Siehe Satz 9.4.8 in [1] □

Definition 2.8. Sei G eine topologische Gruppe, f eine Funktion von G in eine beliebige Menge M und $y \in G$, dann definieren wir die *Linkstranslation* L_y von f durch

$$L_y f \colon G \to M, x \mapsto f(y^{-1}x).$$

Weiters definieren wir die *Rechtstranslation* R_y von f durch

$$R_y f \colon G \to M, x \mapsto f(xy).$$

Proposition 2.9. *Sei G eine topologische Gruppe. Die Abbildungen $y \mapsto L_y$ und $y \mapsto R_y$ sind bezüglich der Multiplikation verträglich, wenn wir im Bildraum die Komposition als Multiplikation verwenden.*

Beweis.

$$(L_yL_zf)(x) = L_zf(y^{-1}x) = f(z^{-1}y^{-1}x) = f((yz)^{-1}x) = L_{yz}f(x) \quad \forall f, \forall y \in G$$

$$(R_yR_zf)(x) = R_zf(xy) = f(xyz) = R_{yz}f(x) \quad \forall f, \forall y \in G$$

□

Definition 2.10. Sei G eine topologische Gruppe und f eine Funktion von G nach $\mathbb{C}$. Wir sagen f ist *links (bzw. rechts) gleichmäßig stetig*, falls

$$\|L_yf - f\|_\infty \xrightarrow{y\to 1} 0 \text{ (bzw. } \|R_yf - f\|_\infty \xrightarrow{y\to 1} 0).$$

Proposition 2.11. *Sei G eine topologische Gruppe mit neutralem Element e. Sei weiters $f \in C_c(G)$. Dann ist f links und rechts gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage für L_y, für R_y ist der Beweis ähnlich. Sei $\epsilon > 0$ und $K = \operatorname{supp}(f)$. Für jedes $x \in K$ gibt es eine Umgebung U_x von e, sodass $|f(yx) - f(x)| < \frac{1}{2}\epsilon$ für alle $y \in U_x$. Weiters sei V_x eine symmetrische Umgebung von x, sodass $V_xV_x \subseteq U_x$. So eine Umgebung finden wir immer, da die Multiplikation und die Inversenbildung stetig sind. Dann überdecken die Mengen V_xx für $x \in K$ die kompakte Menge K und somit gibt es endlich viele $x_1, ..., x_n$ aus K, sodass $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n V_{x_j}x_j$. Sei $V := \bigcap_{j=1}^n V_{x_j}$. Wir zeigen nun, dass $\|L_yf - f\|_\infty < \epsilon$ für alle $y \in V$ gilt. Sei zunächst $x \in K$, dann gibt es ein j, sodass $x \in V_{x_j}x_j$ und somit gibt es ein $x_0 \in V_{x_j} \subseteq U_{x_j}$, sodass $x = x_0x_j$. Dann ist aber $xx_j^{-1} \in V_{x_j}$. Also gilt $y^{-1}x = y^{-1}(xx_j^{-1})x_j \in VV_{x_j}x_j \subseteq V_{x_j}V_{x_j}x_j \subseteq U_{x_j}x_j$ für alle $y \in V$. Daher gibt es ein $y_0 \in U_{x_j}$, sodass $y^{-1}x = y_0x_j$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}|f(y^{-1}x) - f(x)| \leq& |f(y_0x_j) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| \\ =& |f(y_0x_j) - f(x_j)| + |f(x_0x_j) - f(x_j)| \leq \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon.\end{aligned}$$

Ist hingegen $y^{-1}x \in K$, dann stubstituieren wir $y^{-1}x$ mit $z \in K$ und erhalten $|f(y^{-1}x) - f(x)| = |f(z) - f(yz)|$ mit $y \in V$ und können somit den Beweis von oben wiederholen. □

Später werden wir noch folgendes Lemma benötigen:

Lemma 2.12. *Sei G eine topologische Gruppe. Dann ist jede offene Untergruppe von G auch abgeschlossen und für zwei kompakte Teilmengen K_1 und K_2 von G ist auch K_1K_2 kompakt.*

Beweis. Sei H eine offene Untergruppe von G. Dann sind auch alle Nenbenklassen xH mit $x \in G$ offen. Weiters gilt

$$H^c = \bigcup_{x \in H^c} xH$$

und somit ist auch H^c offen und damit H abgeschlossen. Für zwei kompakte Mengen K_1 und K_2 ist K_1K_2 kompakt, da K_1K_2 genau das Bild unter der stetigen Multiplikation von der kompakten Menge $K_1 \times K_2$ ist. □

Lemma 2.13. *Sei X ein lokalkompakter topologischer Raum, K eine kompakte Menge und U eine offene Menge, welche K enhält. Dann gibt es eine kompakte Menge L und eine offene Menge V, sodass $K \subseteq V \subseteq L \subseteq U$.*

Beweis. Für jeden Punkt $x \in K$ gibt es eine kompakte Umgebung $L_x \subseteq U$. Da L_x eine Umgebung von x ist, gibt es weiters eine offene Menge V_x, sodass $x \in V_x \subseteq L_x$. Klarerweise gilt $\bigcup_{x \in K} V_x \supseteq K$ und somit gibt es endlich viele $x_1, ..., x_n$ mit $V := \bigcup_{j=1}^n V_{x_j} \supseteq K$. Damit ist $L := \bigcup_{j=1}^n L_{x_j} \supseteq V$ eine kompakte Menge, welche Teilmenge von U ist. □

Proposition 2.14. *Sei X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, $U \subseteq X$ offen und $K \subseteq U$ kompakt. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit kompaktem Träger,* $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$ *und $f = 1$ auf K.*

Beweis. Nach Lemma 2.13 gibt es eine kompakte Menge L und eine offene Menge V, sodass $K \subseteq V \subseteq L \subseteq U$. Betrachten wir nun den Raum L versehen mit der Spurtopologie, so ist dieser ein kompakter Hausdorff-Raum und somit normal. Also können wir das Lemma von Uryson anwenden und erhalten eine stetige Funktion $g : L \to [0, 1]$ welche auf K konstant 1 ist und deren Träger in V enthalten ist. Sei f die Fortsetzung von g auf X, wobei $f(x) = 0$ für alle $x \in X \setminus L$. Sei $O \subseteq [0, 1]$ eine offene Menge, dann ist $g^{-1}(O)$ offen in L und somit gibt es eine offene Menge $W \subseteq X$, sodass $g^{-1}(O) = W \cap L =$. Falls O die 0 nicht enthält gilt $f^{-1}(O) = g^{-1}(O) = W \cap L = W \cap L \cap V = W \cap V$ offen in X. Andernfalls, wenn O die 0 enthält, ist $f^{-1}(O) = g^{-1}(O) \cup X \setminus L = W \cup X \setminus L$ auch wieder offen. Also ist f eine stetige Funktion, welche alle Bedingungen erfüllt. □

Im nächsten Kapitel werden wir auch benötigen:

Lemma 2.15. *Seien X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, μ und ν zwei Riesz-reguläre Borelmaße auf X und $f \colon X \to (0, \infty)$ eine stetige Funktion, sodass $\int \phi \, \mathrm{d}\nu = \int \phi f \, \mathrm{d}\mu$ für alle $\phi \in C_c(X)$ gilt. Dann gilt $\nu = f\mu$, d.h. $\nu(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu$ für alle Borelmengen E.*

Beweis. Wir betrachten das Maß $\widetilde{\nu}(E) := \int_E f \, \mathrm{d}\mu$. Da stetige Funktionen auf kompakten Mengen beschränkt sind, ist $\widetilde{\nu}$ wieder ein Borel-Maß. Wir werden jetzt zeigen, dass $\widetilde{\nu}$ von außen regulär ist und auf allen offenen Mengen mit ν übereinstimmt. Sei dazu E eine beliebige Borelmenge. Falls $\widetilde{\nu}(E) = \infty$ ist, approximiert die offene Menge X die Menge E. Sei also $\widetilde{\nu}(E) < \infty$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Die offenen Mengen $V_j := \{x \in X : 2^{j-2} < f(x) < 2^j\}$ überdecken für $j \in \mathbb{Z}$ den Raum X. Also gilt mit $E_j := E \cap V_j$, dass $E = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} E_j$. Für jedes $j \in \mathbb{Z}$ gilt $\mu(E_j) < 2^{2-j} \int_E f \, \mathrm{d}\mu = 2^{2-j} \widetilde{\nu}(E) < \infty$ und somit gibt es, da μ von außen regulär ist, offene Mengen U_j mit $U_j \supseteq E_j$ und $\mu(U_j \setminus E_j) < \epsilon 2^{-|j|-j}$. Damit erhalten wir für die offene Menge $U := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} U_j \cap V_j \supseteq \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} E_j \cap V_j = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} E_j = E$:

$$\begin{aligned}\widetilde{\nu}(U \setminus E) \leq& \widetilde{\nu}(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} U_j \cap V_j \setminus E_j) \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{\nu}(U_j \cap V_j \setminus E_j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int\limits_{U_j\cap V_j\setminus E_j} f \,\mathrm{d}\mu \\ \leq& \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j \mu(U_j \cap V_j \setminus E_j) < \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j \epsilon 2^{-|j|-j} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \epsilon 2^{-|j|} \leq \epsilon 2 \frac{1}{1-2^{-1}} = 4\epsilon\end{aligned}$$

Also ist $\widetilde{\nu}$ von außen regulär.

Sei nun U eine offene Menge und $\epsilon > 0$ beliebig. Wir betrachten zusätzlich die offene Menge $U_\epsilon := \{x \in U : f(x) > \epsilon\}$. Da μ und ν auf allen offenen Mengen von innen Regulär sind, gibt es eine Folge von kompakten Mengen $K_n \subseteq U$, sodass $\mu(K_n) \to \mu(U)$, $\mu(K_n \cap U_\epsilon) \to \mu(U_\epsilon)$ und $\nu(K_n) \to \nu(U)$ gilt. Weiters existiert nach Lemma 2.14 eine monoton steigende Folge von Funktionen $\phi_n \in C_c(G)$, sodass $\mathrm{supp}(\phi_n) \subseteq U$,$0 \leq \phi_n \leq 1$, und $\phi_n = 1$ auf K_n gilt. Damit gilt:

$$\nu(U) \geq \int \phi_n \,\mathrm{d}\nu \geq \nu(K_n) \to \nu(U)$$

Somit gilt $\lim \int \phi_n \,\mathrm{d}\nu = \nu(U)$. Klarerweise gilt auch:

$$\lim \int \phi_n \,\mathrm{d}\nu = \lim \int \phi_n f \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_U f \,\mathrm{d}\mu = \widetilde{\nu}(U)$$

Also haben wir insbesondere $\nu(U) \leq \widetilde{\nu}(U)$ gezeigt.

Im Falle $\nu(U) = \infty$ sind wir somit fertig. Sei also $\nu(U) < \infty$. Es gilt:

$$\nu(U) \geq \int \phi_n f \,\mathrm{d}\mu \geq \int\limits_{U_\epsilon \cap K_n} f \,\mathrm{d}\mu \geq \epsilon\mu(U_\epsilon \cap K_n) \to \epsilon\mu(U_\epsilon)$$

Somit gilt auch $\mu(U_\epsilon) < \infty$. Da $\mu(U_\epsilon \cap K_n) \to \mu(U_\epsilon)$ gilt, ist die Menge

$$\{x \in X : \phi_n f \chi_{U_\epsilon} \not\to \chi_{U_\epsilon} f\} \subseteq U_\epsilon \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

eine μ-Nullmenge. Damit können wir den Satz von Beppo Levi anwenden und erhalten:

$$\nu(U) \geq \int\limits_{U_\epsilon} \phi_n f \,\mathrm{d}\mu \to \int\limits_{U_\epsilon} f \,\mathrm{d}\mu$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war erhalten wir $\nu(U) \geq \int\limits_{U_\epsilon} f \,\mathrm{d}\mu$ für alle $\epsilon > 0$. Lassen wir nun ϵ gegen 0 fallen so steigt U_ϵ gegen U und somit steigt χ_{U_ϵ} punktweise gegen χ_U. Also gilt:

$$\nu(U) \geq \int\limits_{U_\epsilon} f \,\mathrm{d}\mu \to \int\limits_U f \,\mathrm{d}\mu = \widetilde{\nu}(U)$$

Da die offene Menge U beliebig war haben wir $\nu(U) = \widetilde{\nu}(U)$ für jede offene Menge U gezeigt und damit erhalten wir insgesamt für eine beliebige messbare Menge E:

$$\nu(E) = \inf\{\nu(U) : U \text{ offen }, U \supseteq E\} = \inf\{\widetilde{\nu}(U) : U \text{ offen }, U \supseteq E\} = \widetilde{\nu}(E)$$

□

Satz 2.16 (allgemeiner Transformationssatz)**.** *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein Messraum. Seien weiters $G : \Omega \to \Omega'$ und $f : \Omega' \to \mathbb{C}$ messbar. Dann ist die Abbildung $\mu^G : \mathcal{A}' \to \mathbb{R} : A \mapsto \mu(G^{-1}(A))$ ein Maß auf $(\Omega', \mathcal{A}')$. Weiters ist f*

genau dann bezüglich μ^G integrierbar, wenn $f \circ G$ bezgülich μ integrierbar ist. In diesem Fall gilt:

$$\int f \circ G \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu^G$$

Beweis. Siehe Satz 8.2 und Satz 9.62 in [3]. □

3. Das Haar-Mass

In diesem Kapitel ist G immer eine lokalkompakte topologische Gruppe.

Definition 3.1. Ein *linksinvariantes (bzw. rechtsinvariantes) Haar-Maß* ist ein Riesz-reguläres Borelmaß λ ungleich dem Nullmaß, welches für jedes $x \in G$ und für jede Borelmenge E die Bedingung $\lambda(E) = \lambda(xE)$(bzw. $\lambda(E) = \lambda(Ex)$) erfüllt.

Satz 3.2. *Es gibt ein bis auf eine positive Konstante eindeutiges linksinvariantes Haar-Maß auf G.*

Beweis. Siehe [2]. □

Wir können also ein linksinvariantes Haar-Maß λ auf G finden. Sei dieses ab nun fest gewählt.

Beispiel 3.3. Sei $G = \mathbb{R}$. Das Lebesgue-Maß ist translationsinvariant und regulär. Also ist es ein Haar-Maß auf $\mathbb{R}$. In allen weiteren Beispielen in denen $G = \mathbb{R}$ ist sei ab nun das Haar-Maß immer das Lebesgue-Maß.

Beispiel 3.4. Sei $G = \mathbb{Z}$ versehen mit der diskreten Topologie. Dann ist das Zählmaß ein Haar-Maß. In allen weiteren Beispielen in denen $G = \mathbb{Z}$ ist sei ab nun das Haar-Maß immer das Zählmaß.

Beispiel 3.5. Sei $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ versehen mit der Faktortopologie. Dann ist das Maß λ mit $\lambda(A + \mathbb{Z}) := \lambda(A)$ für alle $A \subseteq [0, 1)$ ein Haar-Maß, wobei das Maß λ auf der rechten Seite das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ darstellt. Die Regularität folgt dann aus der Regularität des Lebesgue-Maßes und der Eigenschaft, dass die Abbildung $x \mapsto x+\mathbb{Z}$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ stetig und offen ist. Die Translationsinvarianz folgt ebenfalls aus der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes:

$$\begin{aligned}\lambda((x + \mathbb{Z}) + (A + \mathbb{Z})) =& \lambda\big((x + A) + \mathbb{Z}) = \lambda(\{x + a + \mathbb{Z} : a \in A, x + a < 1\} \\ & \cup \{x + a - 1 + \mathbb{Z} : a \in A, x + a \geq 1\}\big) \\ =& \lambda(\{a : a \in A, x + a < 1\} \cup \{a : a \in A, x + a \geq 1\}) \\ =& \lambda(A) = \lambda(A + \mathbb{Z}) \quad \forall x \in [0, 1), A \subseteq [0, 1)\end{aligned}$$

Proposition 3.6. *Jede offene nichtleere Menge hat positives Maß, d.h. $\lambda(U) > 0$ für alle nichtleeren offenen Mengen U.*

Beweis. Da λ ungleich dem Nullmaß ist, gilt $\lambda(G) > 0$. Da G offen ist, ist λ auf G von innen regulär und somit gibt es eine kompakte Menge K mit $\lambda(K) > 0$. Für jede nichtleere offene Menge U gilt, dass $\bigcup_{x \in X} xU \supseteq K$ und somit gibt es endlich viele $x_n \in X$, sodass $\bigcup_{n=1}^N x_n U \supseteq K$. Also erhalten wir

$$\lambda(K) \leq \lambda(\bigcup_{n=1}^{N} x_n U) \leq \sum_{n=1}^{N} \lambda(x_n U) = N\lambda(U)$$

und damit, dass $\lambda(U) > 0$. □

Als nächstes wollen wir einen Zusammenhang zwischen links- und rechtsinvarianten Haar-Maßen herstellen.

Proposition 3.7. *Das Maß $\rho(E) := \lambda(E^{-1})$ ist ein rechtsinvariantes Haar-Maß.*

Beweis.
$$\rho(Ex) = \lambda((Ex)^{-1}) = \lambda(x^{-1}E^{-1}) = \lambda(E^{-1}) = \rho(E) \quad \forall x \in G, E \in \mathfrak{B}$$
Weiters erbt ρ die Regularitätsaussagen von λ, da $x \mapsto x^{-1}$ ein Homöomorphismus ist. Somit ist $\rho(E)$ ein rechtsinvariantes Haar-Maß. □

Proposition 3.8. *Sei G eine lokalkompakte topologische Gruppe und λ ein Riesz-reguläres Maß. Dann ist die Menge $C_c(G)$ dicht im Raum $L^p(G, \mathfrak{B}, \lambda)$ für $p \in [1, \infty)$.*

Beweis. Siehe Satz 3.14. in [4]. □

Lemma 3.9. *Sei μ ein Riesz-reguläres Borelmaß auf G und $x \in G$ beliebig. Dann ist das Maß $\mu_x(E) := \mu(Ex)$ wieder ein Riesz-reguläres Borelmaß. Ist μ zusätzlich linkstranslationsinvariant, so ist auch μ_x linkstranslationsinvariant.*

Beweis. Weil die Multiplikation mit x ein Homöomorphismus auf G ist und somit kompakte Mengen auf kompakte Mengen abbildet, ist μ_x klarerweise wieder ein Borelmaß. Weiters gilt
$$\begin{aligned}
\mu_x(E) =& \mu(Ex) = \inf\{\mu(U) : Ex \subseteq U, \text{ U offen}\} = \inf\{\mu(U) : E \subseteq Ux^{-1}, \text{ U offen}\} \\
=& \inf\{\mu(Vx) : E \subseteq V, \text{ V offen}\} = \inf\{\mu_x(V) : E \subseteq V, \text{ V offen}\} \quad \forall E \in \mathfrak{B} \\
\mu_x(U) =& \mu(Ux) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq Ux, \text{ K kompakt}\} \\
=& \sup\{\mu(K) : Kx^{-1} \subseteq U, \text{ K kompakt}\} = \inf\{\mu(Lx) : L \subseteq U, \text{ L kompakt}\} \\
=& \inf\{\mu_x(L) : L \subseteq U, \text{ L kompakt}\} \quad \forall U \text{ offen.}
\end{aligned}$$
Somit ist μ_x Riesz-regulär. Sei nun μ auch linkstranslationsinvariant, dann gilt
$$\mu_x(yE) = \mu((yE)x) = \mu(y(Ex)) = \mu(Ex) = \mu_x(E) \quad \forall y \in G, E \in \mathfrak{B}(G).$$
□

Proposition 3.10. *Es gibt eine eindeutige Funktion $\Delta \colon G \to (0, \infty)$, sodass für alle linksinvarianten Haar-Maße λ gilt:*
$$\Delta(x)\lambda(E) = \lambda(Ex) \quad \forall x \in G$$
Wir nennen die Funktion Δ auch Modulfunktion *von G.*

Beweis. Seien $x \in G$ und λ, ein linksinvariantes Haar-Maß, zunächst fest. Betrachte das Maß $\lambda_x(E) := \lambda(Ex)$. Dieses ist nach Lemma 3.9 wieder ein linksinvariantes Haar-Maß, da λ_x natürlich auch nicht konstant null ist. Wegen der Eindeutigkeit von linksinvarianten Haar-Maßen bis auf eine Konstante gibt es eine positive Konstante $\Delta(x) \in (0, \infty)$, sodass $\lambda_x = \Delta(x)\lambda$. Wir zeigen nun, dass diese Gleichheit auch für jedes beliebige andere linksinvariante Haar-Maß $\widetilde{\lambda}$ gilt. Wieder aus der Eindeutigkeit der linksinvarianten Haar-Maße folgt, dass es eine Konstante $c \in (0, \infty)$ gibt, sodass $\widetilde{\lambda} = c\lambda$. Damit folgt
$$\widetilde{\lambda}_x(E) = \widetilde{\lambda}(Ex) = c\lambda(Ex) = c\Delta(x)\lambda(E) = \Delta(x)\widetilde{\lambda}(E).$$
□

Proposition 3.11. *Δ ist ein stetiger Homomorphismus von G nach $(\mathbb{R}_+, \cdot)$. Weiters gilt für ein $f \in L^1(G)$:*
$$\int R_y f \,\mathrm{d}\lambda = \Delta(y^{-1}) \int f \,\mathrm{d}\lambda \tag{3.12}$$

Beweis. Seien $x, y \in G$ und K eine kompakte Umgebung von e. Dann gilt, da K kompakt und eine Obermenge einer nichtleeren offenen Menge ist, $0 < \lambda(K) < \infty$. Weiters gilt

$$\Delta(xy)\lambda(K) = \lambda(Kxy) = \Delta(y)\lambda(Kx) = \Delta(x)\Delta(y)\lambda(K)$$

und somit $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$, also ist Δ ein Gruppenhomomorphismus.
Betrachten wir die messbare Abbildung $\phi_y(x) = xy$, so gilt nach dem allgemeinen Transformationssatz der Maßtheorie (Satz 2.16)

$$\int R_y f \,\mathrm{d}\lambda = \int f \circ \phi_y \,\mathrm{d}\lambda = \int f \,\mathrm{d}\lambda^{\phi_y},$$

wobei die rechte Seite genau dann existiert, wenn die linke Seite existiert und λ^{ϕ_y} das Bildmaß bezeichnet, d.h.

$$\lambda^{\phi_y}(E) = \lambda(\phi_y^{-1}(E)) = \lambda(Ey^{-1}) = \Delta(y^{-1})\lambda(E).$$

Also ist $\lambda^{\phi_y} = \Delta(y^{-1})\lambda$ und somit $\int R_y f \,\mathrm{d}\lambda = \Delta(y^{-1}) \int f \,\mathrm{d}\lambda$. Da die rechte Seite existiert, tut dies auch die linke Seite. Sei $f \in C_c(G) \setminus \{0\}$. Aus Proposition 2.11 folgt, dass die Abbildung $y \mapsto R_y f$ von G nach $C_c(G)$ stetig ist. Wir wollen nun die Stetigkeit von Δ in $y_0 \in G$ zeigen. Sei dazu V eine kompakte Umgebung von y_0 in G und $\mathcal{C} := \{g \in C_c(G) : \operatorname{supp}(g) \subseteq \operatorname{supp}(f)V^{-1}\}$ ein linearer Teilraum von $C_c(G)$. Wir können nun die immer noch stetige Abbildung $\psi\colon V \to \mathcal{C}, y \mapsto R_y f$ betrachten. Weiters betrachten wir das Integral als lineare Abbildung von $\mathcal{C}$ nach $\mathbb{C}$, $g \mapsto \int g \,\mathrm{d}\lambda$. Diese ist beschränkt, da $\left|\int g \,\mathrm{d}\lambda\right| \leq \lambda((\operatorname{supp}(f))V^{-1})\|g\|_\infty$ und damit stetig. Nun können wir die Abbildung Δ darstellen durch

$$y \mapsto y^{-1} \mapsto \psi(y^{-1}) \mapsto \frac{\int \psi(y^{-1}) \,\mathrm{d}\lambda}{\int f \,\mathrm{d}\lambda} = \frac{\int R_{y^{-1}} f \,\mathrm{d}\lambda}{\int f \,\mathrm{d}\lambda} = \Delta(y).$$

Da alle verwendeten Abbildungen stetig sind ist Δ stetig. $\square$

Lemma 3.13. *Sei Λ ein positives lineares Funktional von $C_c(G)$ nach $\mathbb{C}$ und nicht konstant null. Weiters gelte $\Lambda(R_x f) = \Lambda(f)$ für alle $f \in C_c(G)$. Dann ist das nach dem Darstellungssatz von Riesz zu Λ gehörige Riesz-reguläre Maß μ ein rechtsinvariantes Haar-Maß.*

Beweis. Betrachten wir das Maß $\mu_x(E) := \mu(Ex)$, so ist μ_x nach Lemma 3.9 wieder ein Riesz-reguläres Borelmaß. Nach dem allgemeinen Transformationssatz (Satz 2.16) gilt weiters, da $\mu_x = \mu^{y \mapsto yx^{-1}}$:

$$\int f \,\mathrm{d}\mu_x = \int f \circ (y \mapsto yx^{-1}) \,\mathrm{d}\mu = \int R_{x^{-1}} f \,\mathrm{d}\mu = \Lambda(R_{x^{-1}} f) = \Lambda(f) = \int f \,\mathrm{d}\mu$$

Aus der Eindeutigkeit, welche sich aus dem Darstellungssatz von Riesz ergibt, folgt also $\mu = \mu_x$. Klarerweise ist μ nicht konstant 0, da Λ nicht konstant null ist. $\square$

Proposition 3.14. *Sei $\rho(E) := \lambda(E^{-1})$ auf allen Borelmengen E. Dann gilt $\rho = \Delta(\cdot^{-1})\lambda$, d.h. $\rho(E) = \int_E \Delta(x^{-1}) \,\mathrm{d}\lambda(x)$.*

Beweis. Nach Proposition 3.7 ist ρ ein rechtsinvariantes Haar-Maß. Weiters gilt für das positive lineare Funktional $\Lambda(f) := \int f(x)\Delta(x^{-1}) \,\mathrm{d}\lambda(x)$ mit Hilfe von (3.12):

$$\begin{aligned}\Lambda(R_y f) &= \int f(xy)\Delta(x^{-1}) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \Delta(y) \int f(xy)\Delta((xy)^{-1}) \,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \Delta(y) \int R_y(f\Delta(\cdot^{-1})) \,\mathrm{d}\lambda = \Delta(y)\Delta(y^{-1}) \int f\Delta(\cdot^{-1}) \,\mathrm{d}\lambda = \Lambda(f)\end{aligned}$$

Somit folgt nach Lemma 3.13, dass das zu Λ zugehörige Maß ein rechtsinvariantes Haar-Maß ist. Da rechtsinvariante Haar-Maße bis auf ein Vielfaches eindeutig sind, gibt es eine positive Konstante $c > 0$, sodass $\int f(x)\Delta(x^{-1}) \,\mathrm{d}\lambda(x) = c \int f \,\mathrm{d}\rho$. Da

$g : x \mapsto \frac{\Delta(x^{-1})}{c}$ eine stetige Funktion von X nach $(0, \infty)$ ist, folgt aus Lemma 2.15 $\rho = g\lambda$. Wir müssen also nur noch zeigen, dass $c = 1$ gilt. Angenommen $c \neq 1$, dann finden wir wegen der Stetigkeit von Δ eine symmetrische Umgebung U von e in G, sodass $|\Delta(x^{-1}) - 1| \leq \frac{1}{2}|c-1|$ auf U. Allerdings folgt dann wegen der Symmetrie $\lambda(U) = \rho(U)$ und somit

$$|c-1|\lambda(U) = |c\rho(U) - \lambda(U)| = \left|\int_U \Delta(x^{-1}) - 1 \,\mathrm{d}\lambda(x)\right| \leq \frac{1}{2}|c-1|\lambda(U)$$

Dies ist aber ein Widerspruch, da nach Proposition 3.6 $\lambda(U) > 0$ gilt. $\square$

Proposition 3.15. *Sei G eine lokalkompakte topologische Gruppe und λ ein linksinvariantes Haar-Maß. Weiters sei $f \in L^p(G, \lambda)$ mit $p \in [1, \infty)$. Dann sind die Abbildungen $y \mapsto L_y f$ und $y \mapsto R_y f$ stetige Abbildungen von G nach $L^p(G, \lambda)$.*

Beweis. Es ist klar, dass die Abbildungen wohldefiniert sind, da mit f auch $L_y f$ und $R_y f$ in L^p sind. Weiters gilt wegen der Linksinvarianz von λ

$$\begin{aligned}\|L_y f - L_z f\|_{L^p}^p &= \int |f(y^{-1}x) - f(z^{-1}x)|^p \,\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \int |f(y^{-1}zx) - f(x)|^p \,\mathrm{d}\lambda(x) = \|L_{z^{-1}y} f - f\|_{L^p}^p.\end{aligned}$$

Für die Rechtstranslation gilt wegen (3.12)

$$\begin{aligned}\|R_y f - R_z f\|_{L^p}^p &= \int |f(xy) - f(xz)|^p \,\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \int R_z(x \mapsto |f(xz^{-1}y) - f(x)|^p) \,\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \Delta(z^{-1}) \int |f(xz^{-1}y) - f(x)|^p \,\mathrm{d}\lambda(x) = \Delta(z^{-1})\|R_{z^{-1}y} f - f\|_{L^p}^p.\end{aligned}$$

Somit genügt es die Stetigkeit bei 0 zu zeigen. Dazu fixieren wir eine kompakte Umgebung V von e und nehmen zunächst an, dass $g \in C_c(G)$ ist. Weiters sei $K := \operatorname{supp}(g)V \cup V\operatorname{supp}(g)$ eine kompakte Menge. Für $y \in V$ gilt dann, $\operatorname{supp}(L_y g) \subseteq K$ und $\operatorname{supp}(R_y g) \subseteq K$. Und somit gilt mit Proposition 2.11

$$\begin{aligned}\|L_y g - g\|_{L^p}^p &\leq \lambda(K)\|L_y g - g\|_\infty^p \xrightarrow{y \to e} 0\\ \|R_y g - g\|_{L^p}^p &\leq \lambda(K)\|R_y g - g\|_\infty^p \xrightarrow{y \to e} 0.\end{aligned}$$

Sei nun $f \in L^p$ beliebig. Es gilt wegen der Linksinvarianz von λ, dass $\|L_y h\|_{L^p} = \|h\|_{L^p}$ und wegen (3.12) $\|R_y h\|_{L^p}^p = \Delta(y^{-1})\|h\|_{L^p}^p$ für alle $h \in L^p(G)$ und für alle $y \in V$. Aus Proposition 3.8 erhalten wir, dass es ein $g \in C_c(G)$ gibt, sodass $\|f - g\|_{L^p} \leq \frac{\epsilon}{4}$. Damit folgt insgesamt

$$\begin{aligned}\|L_y f - f\|_{L^p} &\leq \|L_y f - L_y g\|_{L^p} + \|L_y g - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p}\\ &\leq 2\|f - g\|_{L^p} + \|L_y g - g\|_{L^p} \leq \epsilon \quad \forall y \in V\end{aligned}$$

für eine von ϵ abhängige Umgebung V von e. Für die Rechtstranslation wählen wir V so, dass $\|R_y g - g\|_{L^p} < \frac{\epsilon}{4}$ und $\Delta(y^{-1}) < 2$ für alle $y \in V$. Dies geht, da Δ nach Proposition 3.11 stetig ist und $\Delta(e) = 1$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\|R_y f - f\|_{L^p} &\leq \|R_y f - R_y g\|_{L^p} + \|R_y g - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p}\\ &\leq (\Delta(y^{-1}) + 1)\|f - g\|_{L^p} + \|L_y g - g\|_{L^p} \leq 3\frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon \quad \forall y \in V\end{aligned}$$

$\square$

3.1. **Die Banach*-Algebra $L^1(G)$.** In diesem Abschnitt wollen wir eine Faltung und eine *-Involution auf $L^1(G)$ definieren, sodass dieser zu einer Banach*-Algebra wird.

Um die Existenz der Faltung zu zeigen benötigen wir den Satz von Fubini. In den nächsten Lemmata werden wir sehen, dass die Bedingung an den Träger des Integranden in Satz 2.5 für den Integrand einer Faltung erfüllt ist.

Lemma 3.16. *Es gibt eine offene, abgeschlossen, σ-kompakte Untergruppe H von G.*

Beweis. Sei V eine kompakte Umgebung von e, dann ist $K := V \cap V^{-1}$ eine symmetrische kompakte Umgebung von e. Sei $K_1 := K$ und $K_{n+1} := K_n K$ und sei $H := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. H enthält e und ist, da K symmetrisch ist, unter Inversenbildung abgeschlossen. Weiters ist klar, dass für $x \in K_n$ und $y \in K_m$ das Produkt xy in K_{n+m} liegt und somit ist H eine Untergruppe von G. Da für jedes $x \in H$ die Menge $xK \subseteq H$ eine Umgebung von x ist, ist H offen. Mit Lemma 2.12 folgt, dass H auch abgeschlossen ist. Nochmal mit Lemma 2.12 folgt, dass die Mengen K_n kompakt sind und somit H σ-kompakt ist. $\square$

Lemma 3.17. *Sei H eine Untergruppe, wie in Lemma 3.16. Weiters sei Y ein Repräsentantensystem aller Linksebenklassen von H und E eine Borelmenge, sodass die Menge $Y_E := \{y \in Y : E \cap yH \neq \emptyset\}$ überabzählbar ist. D.h. E hat mit überabzählbar vielen Nebenklassen von H nichtleeren Schnitt. Dann gilt $\lambda(E) = \infty$.*

Beweis. Angenommen $\lambda(E) < \infty$, dann gibt es wegen der Regularität von außen eine offene Menge $U \supseteq E$ mit $\lambda(U) < \infty$. Nach Proposition 3.6 gilt $\lambda(U \cap yH) > 0$ für alle $y \in Y_E \subseteq Y_U$. Da Y_E überabzählbar ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass die Menge $Y_{n_0} := \{y \in Y_E : \lambda(U \cap yH) > \frac{1}{n_0}\}$ überabzählbar ist, denn ansonsten wäre $Y_E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ eine Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen. Dann folgt aber

$$\lambda(U) \geq \lambda(\dot{\bigcup_{y\in Y_{n_0}}} U \cap yH) = \sum_{y\in Y_{n_0}} \lambda(U \cap yH) \geq \sum_{y\in Y_{n_0}} \frac{1}{n_0} = \infty,$$

was ein Widerspruch zur Annahme ist. $\square$

Lemma 3.18. *Sei $f \in L^p(G)$ für ein $p \in (0, \infty)$. Dann ist* $\operatorname{supp}(f)$ *σ-kompakt.*

Beweis. Angenommen $\operatorname{supp}(f)$ wäre nicht σ-kompakt. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass die Menge $A_n := \{x \in G : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$ ebenfalls nicht σ-kompakt ist, da ansonsten der Träger als abzählbare Vereinigung von σ-kompakten Mengen geschrieben werden könnte. Sei H die Untergruppe aus Lemma 3.16, dann gilt, dass $A_n \cap yH \neq \emptyset$ für überabzählbar viele $y \in Y$ ist, da ansonsten A_n als Vereinigung abzählbar vieler kompakten Mengen geschrieben werden könnte. Also folgt aus Lemma 3.17, dass $\lambda(A_n) = \infty$ ist. Somit erhalten wir

$$\|f\|_{L^p(G)}^p = \int |f(x)|^p \, \mathrm{d}\lambda(x) \geq \int_{A_n} |f(x)|^p \, \mathrm{d}\lambda(x) \geq \int_{A_n} \left(\frac{1}{n}\right)^p \mathrm{d}\lambda(x) = \infty,$$

was ein Widerspruch zur Annahme $f \in L^p(G)$ ist. $\square$

Proposition 3.19. *Seien f und g in $L^1(G)$. Dann hat die Funktion $h\colon G \times G \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto f(y)g(y^{-1}x)$ einen σ-kompakten Träger.*

Beweis. Aus Lemma 3.18 besitzt f einen σ-kompakten Träger E_1 und g einen σ-kompakten Träger E_2. Der Träger von h ist eine Teilmenge von $E_1E_2 \times E_1$. Da das Produkt zweier kompakter Mengen wegen Lemma 2.12 wieder kompakt ist, ist auch E_1E_2 σ-kompakt. Mit der selben Argumentation für das kartesische Produkt erhalten wir, dass der Träger von h σ-kompakt ist. □

Nun können wir die Faltung auf $L^1(G)$ definieren.

Satz 3.20. *Seien $f, g \in L^1(G,\lambda)$. Dann existiert die* Faltung von f mit g

$$f * g(x) := \int f(y)g(y^{-1}x)\,\mathrm{d}\lambda(y)$$

für fast alle $x \in G$ und ist in $L^1(G,\lambda)$ enthalten. Zusätzlich gilt

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} \tag{3.21}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\int\int |f(y)g(y^{-1}x)|\,\mathrm{d}\lambda(y)\,\mathrm{d}\lambda(x) &= \int\int |f(y)g(y^{-1}x)|\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y)\\ &= \int\int |f(y)g(x)|\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} < \infty\end{aligned}$$

Nach Proposition 3.19 ist der Träger des Integranden σ-kompakt, also können wir Satz 2.5 anwenden und erhalten, dass das innere Integral $\int f(y)g(y^{-1}x)\,\mathrm{d}\lambda(y)$ für fast alle x existiert und aus $L^1(G,\lambda)$ ist. (3.21) folgt schließlich aus

$$\int\left|\int f(y)g(y^{-1}x)\,\mathrm{d}\lambda(y)\right|\mathrm{d}\lambda(x) \leq \int\int |f(y)g(y^{-1}x)|\,\mathrm{d}\lambda(y)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

□

Proposition 3.22. *Der Raum $L^1(G)$ mit der punktweisen Addition, der Faltung als Multiplikation und der L^1-Norm versehen bildet eine Banach-Algebra.*

Beweis. Es ist bekannt, dass $L^1(G)$ mit der punktweisen Addition einen Banachraum über $\mathbb{C}$ bildet. Die Distributivgesetze gelten, da das Integral linear ist. Die Assoziativität der Faltung folgt aus:

$$\begin{aligned}(f * g) * h(x) &= \int (f * g)(y)h(y^{-1}x)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int\int f(z)g(z^{-1}y)h(y^{-1}x)\,\mathrm{d}\lambda(z)\,\mathrm{d}\lambda(y)\\ &= \int f(z)\int g(z^{-1}y)h(y^{-1}x)\,\mathrm{d}\lambda(y)\,\mathrm{d}\lambda(z)\\ &= \int f(z)\int g(y)h(y^{-1}z^{-1}x)\,\mathrm{d}\lambda(y)\,\mathrm{d}\lambda(z) = \int f(z)g * h(z^{-1}x)\,\mathrm{d}\lambda(z)\\ &= f * (g * h)(x)\end{aligned}$$

Dabei durften wir, wegen Proposition 3.19 und, da $|g| * |h| \in L^1(G)$ ist, den Satz von Fubini anwenden. Weiters ist die Norm wegen (3.21) submultiplikativ. □

Als nächstes definieren wir eine *-Involution auf $L^1(G)$.

Proposition 3.23. *Die Abbildung $^*\colon L^1(G) \to L^1(G), f \mapsto f^*$ mit $f^*(x) := \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}$ ist eine *-Involution auf $L^1(G)$.*

Beweis. Zunächst gilt nach Proposition 3.14:

$$\int |\Delta(x)^{-1}\overline{f(x^{-1})}|\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int \Delta(x)|\overline{f(x)}|\,\mathrm{d}\lambda(x^{-1}) = \int |\overline{f(x)}|\,\mathrm{d}\lambda(x) = \|f\|_{L^1(G)}.$$

Damit ist $f^* \in L^1(G)$. Weiters ist $f \mapsto f^*$ involutorisch, da sowohl die Konjugation als auch die Inversenbildung involutorisch sind und $\Delta(x^{-1})\Delta((x^{-1})^{-1}) = \Delta(e) = 1$ ist. Zusätzlich gilt:

$$\begin{aligned}
(f * g)^*(x) =& \Delta(x^{-1})\overline{\int f(y)g(y^{-1}x^{-1})\,\mathrm{d}\lambda(y)} = \Delta(x^{-1})\overline{\int f(x^{-1}y)g(y^{-1})\,\mathrm{d}\lambda(y)} \\
=& \int \overline{\Delta((y^{-1}x)^{-1})f\left((y^{-1}x)^{-1}\right)\Delta(y^{-1})g(y^{-1})}\,\mathrm{d}\lambda(y) \\
=& \int g^*(y)f^*(y^{-1}x)\,\mathrm{d}\lambda(y) = (g^* * f^*)(x)
\end{aligned}$$

Somit ist die Faltung auch anti-multiplikativ. Die Antilinearität von $f \mapsto f^*$ ist wegen der punktweisen Definition der Addition und der skalaren Multiplikation und wegen der Antilinearität der Konjugation klar. □

Korollar 3.24. *Der $L^1(G)$ mit der Involution $f \mapsto f^*$ bildet eine Banach*-Algebra.*

4. Unitäre Darstellungen und Funktionen von positivem Typ

Dieses Kapitel behandelt unitäre Darstellungen auf lokalkompakten Gruppen und dessen engen Zusammenhang zu Funktionen von positivem Typ. Die Erkenntnisse aus der Darstellungstheorie bilden dann die Basis für die Fouriertransformation auf lokalkompakten abelschen Gruppen. In diesem Kapitel sei G eine lokalkompakte Gruppe.

4.1. **Unitäre Darstellungen.**

Definition 4.1. Eine *unitäre Darstellung von G* ist ein stetiger Homomorphismus π von G in den Raum der unitären Abbildungen $U(\mathcal{H}_\pi)$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}_\pi$ über $\mathbb{C}$, wenn man den Raum $U(\mathcal{H}_\pi)$ mit der starken Operatortopologie versieht. D.h.

$$\pi\colon G \to U(\mathcal{H}_\pi), \quad \pi(xy) = \pi(x)\pi(y),\ \pi(x^{-1}) = \pi(x)^{-1} = \pi(x)^* \quad \forall x, y \in G$$

und die Abbildung $x \mapsto \pi(x)u$ ist für jedes $u \in \mathcal{H}_\pi$ stetig.

Beispiel 4.2. Wir betrachten die Abbildung $\pi_L(x)f := L_x f$ mit $x \in G$ und $f \in L^2(G)$. Für jedes $x \in G$ und $f \in L^2(G)$ ist $L_x f$ wegen der Linksinvarianz von λ wieder in $L^2(G)$. Weiters ist $\pi_L(x) = L_x$ linear und es gilt:

$$\langle \pi_L(x)f, g\rangle = \int f(x^{-1}y)\overline{g(y)}\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int f(y)\overline{g(xy)}\,\mathrm{d}\lambda(y) = \langle f, \pi_L(x)^{-1}g\rangle$$

Somit ist $\pi_L(x) = L_x \in U(L^2(G))$ für alle $x \in G$. Wegen Proposition 2.9 ist π_L ein Gruppenhomomorphismus von G nach $U(L^2)$. Die Stetigkeit von $x \mapsto \pi_L(x)f = L_x f$ folgt schließlich aus 3.15. Also ist π_L eine unitäre Darstellung von G mit $\mathcal{H}_{\pi_L} = L^2(G)$.

Definition 4.3. Sei $\mathcal{M}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}_\pi$. Wir nennen $\mathcal{M}$ einen *unter π invarianten Unterraum* falls $\pi(x)\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ für alle $x \in G$.

Falls es nichttriviale unter π invariante Unterräume gibt, nennen wir π *reduzibel* und andernfalls *irreduzibel.*

Als nächstes wollen wir das Lemma von Schur herleiten, welches die irreduziblen unitären Darstellungen charakterisiert.

Lemma 4.4. *Sei $\mathcal{M}$ ein unter π invarianter Unterraum, dann ist auch $\mathcal{M}^\perp$ ein solcher.*

Beweis. Für $u \in \mathcal{M}$ und $v \in \mathcal{M}^\perp$ gilt

$$\langle \pi(x)v, u\rangle = \langle v, \pi(x^{-1})u\rangle = 0,$$

also ist $\pi(x)v \in \mathcal{M}^\perp$. □

Definition 4.5. Seien π_1 und π_2 unitäre Darstellungen von G und sei $T\colon \mathcal{H}_{\pi_1} \to \mathcal{H}_{\pi_2}$ eine beschränkte lineare Abbildung. T wird *Verflechtungsoperator von π_1 und π_2* genannt, falls $T\pi_1(x) = \pi_2(x)T$ für alle $x \in G$ gilt. Die Menge aller Verflechtungsoperatoren von π_1 und π_2 bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$.

Lemma 4.6. *Sei $\mathcal{M}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}_\pi$ und sei P die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{M}$. In diesem Fall ist $\mathcal{M}$ genau dann unter π invariant, wenn $P \in \mathcal{C}(\pi, \pi)$.*

Beweis. Sei zunächst $P \in \mathcal{C}(\pi, \pi)$ und $v \in \mathcal{M}$, dann gilt

$$\pi(x)v = \pi(x)Pv = P\pi(x)v \in \mathcal{M},$$

also ist $\mathcal{M}$ unter π invariant. Sei nun umgekehrt $\mathcal{M}$ unter π invariant. Dann ist nach Lemma 4.4 auch $\mathcal{M}^\perp$ unter π invariant und für ein $v \in \mathcal{H}_\pi$ gilt:

$$\begin{aligned} P\pi(x)v &= P\pi(x)(\underbrace{Pv}_{\in\mathcal{M}} + \underbrace{(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}_\pi} - P)v}_{\in\mathcal{M}^\perp}) \\ &= P\underbrace{\pi(x)Pv}_{\in\mathcal{M}} + P\underbrace{\pi(x)(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}_\pi} - P)v}_{\in\mathcal{M}^\perp} = \pi(x)Pv + 0 = \pi(x)Pv \end{aligned}$$

□

Satz 4.7 (Lemma von Schur)**.** *Eine unitäre Darstellung π von G ist genau dann irreduzibel, wenn $C(\pi, \pi)$ nur skalare Vielfache der Identität enthält.*

Beweis. Sei π reduzibel. Dann gibt es einen nichttrivialen invarianten Unterraum und somit nach Lemma 4.6 eine nichttriviale Projektion in $\mathcal{C}(\pi, \pi)$. Diese kann natürlich kein Vielfaches der Identität sein. Sei umgekehrt $T \in \mathcal{C}(\pi, \pi)$ gegeben, und sei $T \neq cI$ für alle $c \in \mathbb{C}$. Insbesondere folgt daraus, dass $\mathcal{H}_\pi$ mehr als eine Dimension hat. Mit T sind auch $A := \frac{1}{2}(T + T^*)$ und $B := \frac{1}{2i}(T - T^*)$ in $\mathcal{C}(\pi, \pi)$, denn $\mathcal{C}(\pi, \pi)$ ist ein *-abgeschlossener linearer Raum. Da $T = A - iB$ ist, kann zumindest A oder B kein Vielfaches der Identität sein. Nehmen wir o.B.d.A. an, dass A kein Vielfaches der Identität ist. Da A beschränkt und selbstadjungiert ist, können wir den Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren anwenden. Weil $\pi(x)$ für jedes $x \in G$ mit A kommutiert, kommutiert $\pi(x)$ auch mit $E(\Delta)$, dem Spektralmaß einer Borelmenge Δ. Da A kein Vielfaches der Identität ist, muss es eine Borelmenge Δ geben, sodass $E(\Delta) \in \mathcal{C}(\pi, \pi)$ eine nicht triviale Projektion ist. □

Korollar 4.8. *Wenn G eine abelsche Gruppe ist, dann ist für jede irreduzible unitäre Darstellung π von G der Hilbertraum H_π eindimensional.*

Beweis. Sei π eine Darstellung von G, dann kommutieren die Abbildungen $\pi(x_1)$ und $\pi(x_2)$ für $x_1, x_2 \in G$ miteinander, und somit ist $\pi(x) \in \mathcal{C}(\pi, \pi)$ für alle $x \in G$. Wenn nun π irreduzibel ist, dann muss nach Satz 4.7 $\pi(x)$ für jedes $x \in G$ ein Vielfaches der Identität sein. Damit ist aber jeder eindimensionale Unterraum von $\mathcal{H}_\pi$ unter π invariant und deswegen muss $\mathcal{H}_\pi$ eindimensional sein. □

Jede unitäre Darstellung π induziert eine Abbildung von $L^1(G)$ nach $\mathcal{H}_\pi$. Dazu benötigen wir aber ein Integral im schwachen Sinne.

Lemma 4.9. *Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein beliebiger Maßraum mit einem nichtnegativem Maß μ und sei $\mathcal{H}$ ein Skalarproduktraum über $\mathbb{C}$. Weiters sei $\phi\colon X\to\mathcal{L}(H)$ messbar, sodass $x\mapsto\|\phi(x)\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}}$ in $L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ liegt. Dann gibt es genau eine lineare beschränkte Abbildung F auf $\mathcal{H}$ mit*

$$\langle Fu,v\rangle=\int\langle\phi(x)u,v\rangle\,\mathrm{d}\mu(x)\quad\forall u,v\in\mathcal{H}.$$

Zusätzlich gilt $\|F\|\leq\|(x\mapsto\|\phi(x)\|)\|_{L^1(X)}$. Als Notation für F verwenden wir $\int\phi\,\mathrm{d}\mu$ bzw. $\int\phi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ und sprechen vom Integral im schwachen Sinne.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass das Integral auf der rechten Seite immer existiert, da Folgendes gilt:

$$|\langle\phi(x)u,v\rangle|\leq\|\phi(x)u\|\|v\|\leq\|\phi(x)\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}}\|u\|\|v\|\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)\quad\forall u,v\in\mathcal{H}.$$

Wir zeigen nun, dass die Abbildung $(u,v)\mapsto[u,v]:=\int\langle\phi(x)u,v\rangle\,\mathrm{d}\lambda(x)$ eine beschränkte Sesquilinearform ist, um dann den Satz von Lax-Milgram anzuwenden. Die Linearität im ersten und die Antilinearität im zweiten Argument ist klar, da das Skalarprodukt dieselben Eigenschaften hat und da $\phi(x)$ und das Integral linear sind. Weiters gilt:

$$\begin{aligned}|[u,v]|\leq&\int|\langle\phi(x)u,v\rangle|\,\mathrm{d}\mu(x)\leq\|u\|\|v\|\int\|\phi(x)\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}}\,\mathrm{d}\mu(x)\\=&\|(x\mapsto\|\phi(x)\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}})\|_{L^1(X)}\|u\|\|v\|\end{aligned}$$

Damit ist $(u,v)\mapsto[u,v]$ eine beschränkte Sesquilinearform und es gibt nach dem Satz von Lax-Milgram einen eindeutigen beschränkten linearen Operator $F\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit

$$\langle Fu,v\rangle=[u,v]=\int\langle\phi(x)u,v\rangle\,\mathrm{d}\mu(x)\quad\forall u,v\in\mathcal{H}.$$

Die Abschätzung folgt ebenfalls aus dem Satz von Lax-Milgram und der obigen Abschätzung. □

Korollar 4.10. *Sei π eine unitäre Darstellung von G, dann gibt es für jedes $f\in L^1(G)$ eine eindeutige beschränkte lineare Abbildung $\pi(f)$ auf $\mathcal{H}_\pi$, sodass $\pi(f)=\int f(x)\pi(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$ im Sinne von Satz 4.9 ist. Zusätzlich gilt $\|\pi(f)\|\leq\|f\|_{L^1(G)}$.*

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus Satz 4.9 für $X=G$, $\mathcal{A}=\mathfrak{B}$, $\mu=\lambda$, $\mathcal{H}=\mathcal{H}_\pi$ und $\phi(x)=(u\mapsto f(x)\pi(x)u)$. Die Abschätzung ist richtig, da $\|f(x)\pi(x)\|=|f(x)|$ für alle $x\in G$ gilt. □

Beispiel 4.11. Betrachten wir wieder π_L wie in Beispiel 4.2, dann können wir für ein $f\in L^1(G)$ die Linearform $\pi(f)$ auf $\mathcal{H}_{\pi_L}=L^2(G)$ betrachten. Sei $g\in L^1(G)\cap L^2(G)$ und $h\in C_c(G)$, dann gilt

$$\begin{aligned}\langle\pi_L(f)g,h\rangle=&\int f(x)\langle\pi_L(x)g,h\rangle\,\mathrm{d}\lambda(x)=\int\int f(x)g(x^{-1}y)\overline{h(y)}\,\mathrm{d}\lambda(y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\\=&\int\int f(x)g(x^{-1}y)\overline{h(y)}\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y)=\int f*g(y)\overline{h(y)}\,\mathrm{d}\lambda(y)\\=&\langle f*g,h\rangle\end{aligned}$$

Da $h\in C_c(G)$ beliebig war und $C_c(G)$ nach Proposition 3.8 dicht in $L^2(G)$ ist und das Skalarprodukt stetig ist, folgt die Gleichheit für alle $h\in L^2(G)$ und somit folgt $\pi_L(f)g=f*g$. Dabei haben wir Satz 2.5 verwendet. Die Voraussetzungen sind erfüllt, da sowohl der Träger von h als auch der Träger von f σ-kompakt ist und da $|f|*|g|\in L^1(G)$ und somit erst Recht $|f|*|g||h|\in L^1(G)$ ist.

Lemma 4.12. *Mit den Voraussetzungen und der Notation von Satz 4.9 sei zusätzlich A eine lineare beschränkte Abbildung auf $\mathcal{H}$. Dann gilt $AF = \int A\phi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$, dies ist gleichbedeutend mit*

$$\langle AFu, v\rangle = \int \langle A\phi(x)u, v\rangle\,\mathrm{d}\mu(x) \quad \forall u, v \in \mathcal{H}.$$

Beweis.

$$\langle AFu, v\rangle = \langle Fu, A^*v\rangle = \int \langle \phi(x)u, A^*v\rangle\,\mathrm{d}\mu(x) = \int \langle A\phi(x)u, v\rangle\,\mathrm{d}\mu(x) \quad \forall u, v \in \mathcal{H}$$

□

Definition 4.13. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{A}$ eine $*$-Algebra. Eine Abbildung $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt *$*$-Darstellung von A auf $\mathcal{H}$*, falls ϕ ein $*$-Homomorphismus ist. Weiters heißt ϕ *nicht degeneriert*, falls es keinen Vektor $v \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ gibt, sodass $Tv = 0$ für alle $T \in \overline{\phi(\mathcal{A})}^{\|\cdot\|}$.

Satz 4.14. *Sei π eine unitäre Darstellung von G. Dann ist die Abbildung $f \mapsto \pi(f)$ eine nicht degenerierte $*$-Darstellung von $L^1(G)$ auf $\mathcal{H}_\pi$.*

Beweis. Da das Integral linear ist, ist klar, dass die Abbildung $f \mapsto \pi(f)$ linear ist. Weiters gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \pi(f * g)u, v\rangle &= \int\int f(y)g(y^{-1}x)\langle \pi(x)u, v\rangle\,\mathrm{d}\lambda(y)\,\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int\int f(y)g(x)\langle \pi(yx)u, v\rangle\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int f(y)\int \langle \pi(y)(g(x)\pi(x)u), v\rangle\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) \quad \forall u, v \in \mathcal{H}_\pi
\end{aligned}$$

Hier haben wir den Satz 2.5 verwendet. Die Voraussetzungen sind erfüllt, da nach Proposition 3.19 der Träger des Integranden σ-kompakt ist, da $|f| * |g| \in L^1$ und da $|\langle \pi(x)u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\| < \infty$. Nun können wir Lemma 4.12 mit $A = \pi(y)$ und $\phi(x) = g(x)\pi(x)$ auf das innere Integral anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned}
\langle \pi(f * g)u, v\rangle &= \int f(y)\langle \pi(y)\int g(x)\pi(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)u, v\rangle\,\mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int f(y)\langle \pi(y)\pi(g)u, v\rangle\,\mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \langle \pi(f)\pi(g)u, v\rangle \quad \forall u, v \in \mathcal{H}_\pi
\end{aligned}$$

Also ist π auch bezüglich der Multiplikation verträglich. Schließlich folgt

$$\begin{aligned}
\langle \pi(f^*)u, v\rangle &= \int \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}\langle \pi(x)u, v\rangle\,\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int \overline{\Delta(x^{-1})f(x^{-1})\langle \pi(x^{-1})v, u\rangle}\,\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \overline{\int \Delta(x)f(x)\langle \pi(x)v, u\rangle\,\mathrm{d}\lambda(x^{-1})} \stackrel{3.14}{=} \overline{\int f(x)\langle \pi(x)v, u\rangle\,\mathrm{d}\lambda(x)} \\
&= \overline{\langle \pi(f)v, u\rangle} = \langle u, \pi(f)v\rangle \quad \forall u, v \in \mathcal{H}_\pi
\end{aligned}$$

und somit $\pi(f^*) = \pi(f)^*$, die Verträglichkeit bezüglich der Involution.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass die Abbildung $\mapsto \pi(f)$ nicht degeneriert ist. Sei dazu $u \in \mathcal{H}_\pi$ ungleich dem Nullvektor gegeben. Dann gibt es wegen der Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto \pi(x)u$ eine kompakte Umgebung V von e, sodass $\|\pi(x)u - u\|_{\mathcal{H}_\pi} \leq \frac{1}{2}\|u\|_{\mathcal{H}_\pi}$ für alle $x \in V$. Da V kompakt und Obermenge einer nichtleeren offenen

Menge ist, gilt $0 < \lambda(V) < \infty$ und wir können die Abbildung $f := \lambda(V)^{-1}\chi_V \in L^1(G)$ definieren. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle \pi(f)u - u, v\rangle = &\int_V \lambda(V)^{-1}\langle \pi(x)u, v\rangle \, \mathrm{d}\lambda(x) - \int_V \lambda(V)^{-1}\langle u, v\rangle \, \mathrm{d}\lambda(x)\\ =&\lambda(V)^{-1}\int_V \langle \pi(x)u - u, v\rangle \, \mathrm{d}\lambda(x)\end{aligned}$$

Betrachten wir die Abbildung $\phi(x)$, mit $\phi(x)u = \pi(x)u - u$ für $x \in V$ und sonst konstant 0. Dann ist $\phi(x)$ für jedes x eine lineare beschränkte Abbildung und $\|\phi(x)\|_{\mathcal{H}_\pi} \leq 2$ für $x \in V$ und $\|\phi(x)\|_{\mathcal{H}_\pi} = 0$ für $x \notin V$. Somit ist $\|\phi(x)\|_{\mathcal{H}_\pi} \in L^1(G)$ und wir können das Integral $\int_V \pi(x) - \mathrm{Id}\, \mathrm{d}\lambda(x) := \int \phi(x)\, \mathrm{d}\lambda(x)$ definieren. Damit folgt mit der Gleichung von oben, dass $\langle \int \phi(x)\, \mathrm{d}\lambda u, v\rangle = \lambda(V)\langle \pi(f)u - u, v\rangle$ ist, also $\int \phi(x)\, \mathrm{d}\lambda = \lambda(V)(\pi(f) - \mathrm{Id})$. Somit gilt:

$$\begin{aligned}\|\pi(f)u - u\|_{\mathcal{H}_\pi} =&\lambda(V)^{-1}\|\int \phi(x)\, \mathrm{d}\lambda(x)u\|_{\mathcal{H}_\pi} \leq \lambda(V)^{-1}\|\int \phi(x)\, \mathrm{d}\lambda(x)\|\|u\|_{\mathcal{H}_\pi}\\ \leq&\lambda(V)^{-1}\|(x \mapsto \|\phi(x)\|)\|_{L^1(G)}\|u\|_{\mathcal{H}_\pi}\end{aligned}$$

Für $x \in V$ gilt $\|\phi(x)u\|_{\mathcal{H}_\pi} = \|\pi(x)u - u\|_{\mathcal{H}_\pi} \leq \frac{1}{2}\|u\|_{\mathcal{H}_\pi}$ und somit $\|\phi(x)\| \leq \frac{1}{2}$ und für $x \notin V$ gilt $\|\phi(x)\| = 0$. Also erhalten wir insgesamt $\|(x \mapsto \|\phi(x)\|)\|_{L^1(G)} \leq \frac{1}{2}\lambda(V)$ und damit $\|\pi(f)u - u\|_{\mathcal{H}_\pi} \leq \frac{1}{2}\|u\|_{\mathcal{H}_\pi}$. Somit gilt insbesondere $\pi(f)u \neq 0$. Daher ist π nicht degeneriert. □

4.2. **Funktionen von positivem Typ.** Unitäre Darstellungen stehen in engem Zusammenhang mit Funktionen von positivem Typ. In diesem Abschnitt werden wir diesen Zusammenhang näher erläutern.

Definition 4.15. Es sei an die Definition des Raumes $L^\infty(G) := L^\infty(G, \lambda, \mathbb{C})$ in Definition 2.6 erinnert. Sei $\phi \in L^\infty(G)$. Dann heißt ϕ eine *Funktion von positivem Typ*, wenn gilt:

$$\int (f^* * f)\phi \, \mathrm{d}\lambda \geq 0 \quad \text{für alle } f \in L^1(G)$$

Die Menge aller stetigen Funktionen von positivem Typ bezeichnen wir mit $\mathcal{P}(G)$ oder kurz $\mathcal{P}$.

Proposition 4.16. *Seien $f, g \in L^1(G)$ und $\phi \in L^\infty(G)$. Dann gilt:*

$$\int (f^* * g)\phi \, \mathrm{d}\lambda = \int\int g(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)\, \mathrm{d}\lambda(x)\, \mathrm{d}\lambda(y)$$

Beweis. Wegen Proposition 3.19 ist der Träger von $f^*(y)g(y^{-1}x)$ σ-kompakt und somit auch der Träger von $f^*(y)g(y^{-1}x)\phi(x)$. Da weiters $|f^*| * |g| \in L^1(G)$ und $\phi \in L^\infty(G)$ ist, existiert das iterierte Integral in der Voraussetzung von Satz 2.5 und somit sind alle Voraussetzungen für den Satz erfüllt und wir erhalten:

$$\begin{aligned}\int (f^* * g)\phi \, \mathrm{d}\lambda =& \int\int f^*(y)g(y^{-1}x)\phi(x)\, \mathrm{d}\lambda(y)\, \mathrm{d}\lambda(x)\\ =&\int \Delta(y^{-1})\int \overline{f(y^{-1})}g(y^{-1}x)\phi(x)\, \mathrm{d}\lambda(x)\, \mathrm{d}\lambda(y)\\ =&\int\int \overline{f(y)}g(yx)\phi(x)\, \mathrm{d}\lambda(x)\, \mathrm{d}\lambda(y)\\ =&\int\int g(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)\, \mathrm{d}\lambda(x)\, \mathrm{d}\lambda(y)\end{aligned}$$

□

Proposition 4.17. *Sei ϕ von positivem Typ, dann ist auch $\overline{\phi}$ von positivem Typ.*

Beweis.
$$\begin{aligned}\int (f^* * f)\overline{\phi}\,\mathrm{d}\lambda &= \overline{\int \overline{(f^* * f)}\phi\,\mathrm{d}\lambda} = \overline{\int (\overline{f}^* * \overline{f})\phi\,\mathrm{d}\lambda} \\ &= \int (\overline{f}^* * \overline{f})\phi\,\mathrm{d}\lambda \geq 0 \quad \forall f \in L^1(G)\end{aligned}$$

Wobei wir hier die Identität $\overline{f^* * f} = \overline{f}^* * \overline{f}$ verwendet haben. Diese folgt aus
$$\begin{aligned}\overline{f^* * f}(x) &= \overline{\int \Delta(y^{-1})\overline{f(y^{-1})}f(y^{-1}x)\,\mathrm{d}\lambda(y)} \\ &= \int \Delta(y^{-1})\overline{\overline{f}(y^{-1})}\overline{f}(y^{-1}x)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \overline{f}^* * \overline{f}.\end{aligned}$$
□

Proposition 4.18. *Sei π eine unitäre Darstellung von G und $u \in \mathcal{H}_\pi$. Dann ist die Abbildung $\phi\colon G \to \mathbb{C}, x \mapsto \langle \pi(x)u, u\rangle$ eine Funktion von positivem Typ.*

Beweis. ϕ ist stetig, da $x \mapsto \pi(x)u$ stetig ist und das Skalarprodukt stetig ist. Weiters gilt $\phi(y^{-1}x) = \langle \pi(y^{-1})\pi(x)u, u\rangle = \langle \pi(x)u, \pi(y)u\rangle$. Damit folgt mit Proposition 4.16:
$$\begin{aligned}\int (f^* * f)\phi\,\mathrm{d}\lambda &= \int\int f(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \int \overline{f(y)}\int f(x)\langle \pi(x)u, \pi(y)u\rangle\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \int \overline{f(y)}\langle \pi(f)u, \pi(y)u\rangle\,\mathrm{d}\lambda(y) = \overline{\int f(y)\langle \pi(y)u, \pi(f)u\rangle\,\mathrm{d}\lambda(y)} \\ &= \overline{\langle \pi(f)u, \pi(f)u\rangle} = \|\pi(f)u\|^2 > 0 \quad \forall f \in L^1(G)\end{aligned}$$

Klarerweise ist $\phi(x) \leq \|u\|^2$ und somit $\phi \in L^\infty(G)$. □

Korollar 4.19. *Sei $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ und sei $\widetilde{f}(x) := \overline{f(x^{-1})}$. Dann gilt $f * \widetilde{f} \in \mathcal{P}$.*

Beweis. Betrachten wir die unitäre Darstellung π_L aus Beispiel 4.2. Dann erhalten wir:
$$\begin{aligned}\langle \pi_L(x)f, f\rangle &= \int f(x^{-1}y)\overline{f(y)}\,\mathrm{d}\lambda(y) = \overline{\int \overline{f((y^{-1}x)^{-1})}f(y)\,\mathrm{d}\lambda(y)} \\ &= \overline{\int \widetilde{f}(y^{-1}x)f(y)\,\mathrm{d}\lambda(y)} = \overline{f * \widetilde{f}}(x)\end{aligned}$$

Also folgt mit Proposition 4.17 und Proposition 4.18, dass $f * \widetilde{f}$ eine Funktion von positivem Typ ist. □

Als nächstes wollen wir für eine Funktion von positivem Typ eine zugehörige unitäre Darstellung finden. Dazu benötigen wir zunächst einen zugehörigen Hilbertraum.

Lemma 4.20. *Sei $\phi \in \mathcal{P}$, ϕ ungleich der Nullfunktion. Dann ist die Abbildung*
$$(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle_\phi := \int (g^* * f)\phi\,\mathrm{d}\lambda$$
eine nichtnegative Sesquilinearform. Betrachten wir weiters den Teilraum $\mathcal{N} := \{f \in L^1 : \langle f, f\rangle_\phi = 0\}$. Dann können wir die Sesquilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle_\phi$ auch auf dem Faktorraum $L^1(G)/\mathcal{N}$ definieren, indem wir sie über Repräsentanten definieren. Diese Sesquilinearform bildet dann ein Skalarprodukt auf dem Faktorraum, welches

wir ebenfalls mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_\phi$ bezeichnen. Die Skalarproduktvervollständigung dieses Faktorraums nennen wir $\mathcal{H}_\phi$. Weiters gilt:

$$|\langle f+\mathcal{N}, g+\mathcal{N}\rangle_\phi| = |\langle f,g\rangle_\phi| \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_{L^1(G)}\|g\|_{L^1(G)} \quad \forall f,g \in L^1(G) \tag{4.21}$$

Beweis. Die Sesquilinearität folgt aus der Antilinearität von *, der Bilinearität der Faltung und der Linearität des Integrals. Weiters ist die Sesquilinearform nichtnegativ, da $\phi \in \mathcal{P}$. Da die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auch auf Sesquilinearformen anwendbar ist, gilt $f \in \mathcal{N}$ genau dann, wenn $\langle f,g\rangle_\phi = 0$ ist für alle $g \in L^1(G)$. Somit ist $\mathcal{N}$ ein linearer Teilraum von $L^1(G)$. Seien nun $f, \widetilde{f}, g, \widetilde{g} \in L^1(G)$, sodass $f - \widetilde{f} \in \mathcal{N}$ und $g - \widetilde{g} \in \mathcal{N}$. Dann gilt:

$$\langle f,g\rangle_\phi = \langle \widetilde{f},\widetilde{g}\rangle_\phi + \underbrace{\langle \widetilde{f}, g-\widetilde{g}\rangle_\phi}_{0} + \underbrace{\langle f-\widetilde{f}, g\rangle_\phi}_{0} = \langle \widetilde{f},\widetilde{g}\rangle_\phi.$$

Also kann man die Sesquilinearform auf dem Faktorraum mit Hilfe der Repräsentanten definieren. Klarerweise ist sie wieder eine nichtnegative Sesquilinearform. Zusätzlich ist sie nun radikalfrei und somit ein Skalarprodukt. Die Ungleichung (4.21) folgt schließlich direkt aus der Darstellung von Proposition 4.16. □

Lemma 4.22. *Seien $\mathcal{N}$, ϕ und $\mathcal{H}_\phi$ wie in Lemma 4.20 und bezeichne $[f] := f+\mathcal{N} \in L^1/\mathcal{N}$ die Nebenklasse einer Funktion $f \in L^1$. Dann sind die Abbildungen $\widetilde{\pi_\phi}(x)$ mit*

$$\widetilde{\pi_\phi}(x)([f]) := [L_x f] \quad \forall f \in L^1(G)$$

für alle $x \in G$ wohldefiniert und unitär, wobei wir $L^1/\mathcal{N}$ mit der von dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_\phi$ induzierten Norm $\|\cdot\|_\phi$ versehen . Damit kann man $\widetilde{\pi_\phi}(x)$ für jedes $x \in G$ in eindeutiger Weise unitär auf $\mathcal{H}_\phi$ fortsetzen. Wir nennen diese Fortsetzung $\pi_\phi(x)$.

Beweis. Seien $f,g \in L^1(G)$. Dann gilt $L_x f - L_x g \in L^1(G))$ und wegen Proposition 4.16:

$$\begin{aligned}\langle L_x f, L_x g\rangle_\phi &= \int (L_x g)^* * (L_x f)\phi \,\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \int\int f(x^{-1}y)\overline{g(x^{-1}z)}\phi(z^{-1}y)\,\mathrm{d}\lambda(y)\,\mathrm{d}\lambda(z)\\ &= \int\int f(y)\overline{g(z)}\phi(xz^{-1}xy)\,\mathrm{d}\lambda(y)\,\mathrm{d}\lambda(z) = \langle f,g\rangle_\phi\end{aligned}$$

Gilt nun $f - g \in \mathcal{N}$, d.h. $[f] = [g]$, dann gilt $\langle L_x f, L_x g\rangle_\phi = \langle f,g\rangle_\phi = 0$. Somit gilt $\widetilde{\pi_\phi}(x)([f]) = [L_x f] = [L_x g] = \widetilde{\pi_\phi}(x)([g])$, also ist $\widetilde{\pi_\phi}(x)$ wohldefiniert. Die Linearität folgt direkt aus der Linearität des Translationsoperators. Weiters ist $\widetilde{\pi_\phi}(x)$ surjektiv und wegen obiger Gleichung isometrisch und somit unitär. □

Lemma 4.23. *Mit der Notation aus Lemma 4.22 ist die Abbildung $\pi_\phi\colon G \to U(\mathcal{H}_\pi), x \mapsto \pi_\phi(x)$ eine unitäre Darstellung von G in $\mathcal{H}_\pi$.*

Beweis. Wegen Lemma 4.22 gilt $\pi_\phi(x) \in U(\mathcal{H}_\pi)$ für alle $x \in G$. Die Homomorphismuseigenschaft folgt aus der Homomorphismuseigenschaft von L_x. Für die Stetigkeit seien $x \in G$, $u \in \mathcal{H}_\pi$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Da $L^1(G)/\mathcal{N}$ dicht in $\mathcal{H}_\phi$ eingebettet ist, gibt es ein $f \in L^1$, sodass $\|[f] - u\|_\phi < \frac{\epsilon}{3}$ ist. Weiters ist nach Proposition 3.15 die Abbildung $x \mapsto L_x f$ stetig und somit gibt es eine offene Menge $O \subseteq G$, sodass $\|L_y f - L_x f\|_{L^1(G)}\|\phi\|_\infty^{\frac{1}{2}} < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $y \in O$ gilt. Zusätzlich wissen wir, dass $\pi_\phi(x)$

für festes x unitär ist, und somit gilt mit (4.21) für jedes $y \in O$:

$$\begin{aligned}\|\pi_\phi(x)u - \pi_\phi(y)u\|_\phi \leq& \|\pi_\phi(x)[f] - \pi_\phi(y)[f]\|_\phi + \|\pi_\phi(x)u - \pi_\phi(x)[f]\|_\phi \\ &+ \|\pi_\phi(y)[f] - \pi_\phi(y)u\|_\phi \\ \leq& \|L_x f - L_y f\|_\phi + \|\pi_\phi(x)(u - [f])\|_\phi + \|\pi_\phi(y)([f] - u)\|_\phi \\ \leq& \|L_x f - L_y f\|_{L^1(G)} \|\phi\|_\infty^{\frac{1}{2}} + 2\|[f] - u\|_\phi \leq \frac{\epsilon}{3} + 2\frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

□

Proposition 4.24. *Sei $\mathcal{U}$ eine Umgegbungsbasis von e in G, dann ist $\mathcal{U}$ versehen mit der Obermengenrelation eine gerichtete Menge. Sei weiters $(\psi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ ein Netz mit $\psi_U \in C_c(G)$, $\psi_U \geq 0$, $\operatorname{supp}(\psi_U) \subseteq U$ und $\|\psi_U\|_{L^1(G)} = 1$ für alle $U \in \mathcal{U}$, dann gilt $\|\psi_U * f - f\|_{L^1(G)} \to 0$ für alle $f \in L^1(G)$. Wir nennen die Funktionen ψ_U dabei approximative Einheit. Weiters existiert ein Netz mit diesen Eigenschaften immer. Insbesondere ist die Menge $\{f * g : f, g \in L^1\}$ dicht in $L^1(G)$.*

Beweis. Seien $f \in L^1(G)$ und $\epsilon > 0$ beliebig aber fest. Nach Proposition 3.15 ist die Abbildung $x \mapsto L_x f$ stetig und somit gibt es eine kompakte Umgebung $U_0 \in \mathcal{U}$, sodass $\|L_x f - f\|_{L^1} < \epsilon$ für alle $x \in U_0$ gilt. Für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}$ mit $U_0 \supseteq U$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\|\psi_U * f - f\|_{L^1(G)} &= \int |(\psi_U * f)(x) - f(x)| \,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int \left| \int \psi_U(y) f(y^{-1}x) \,\mathrm{d}\lambda(y) - f(x) \right| \mathrm{d}\lambda(x) \\ &\leq \int \int \psi_U(y) \left| f(y^{-1}x) - f(x) \right| \mathrm{d}\lambda(y) \,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int_U \psi_U(y) \int |L_y f(x) - f(x)| \,\mathrm{d}\lambda(x) \,\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \int_U \psi_U(y) \|L_y f - f\|_{L^1} \,\mathrm{d}\lambda(y) \leq \int_U \psi_U(y) \epsilon \,\mathrm{d}\lambda(y) = \epsilon.\end{aligned}$$

Also konvergiert das Netz gegen 0. In der Berechnung haben wir den Satz von Fubini verwendet. Dies dürfen wir, da der Träger des Integranden des iterierten Integrals eine Teilmenge von $U \times (U \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(f))$ ist und dies nach Lemma 3.18 eine σ-kompakte Menge ist. Weiters ist wegen der Abschätzung von oben das iterierte Integral kleiner ϵ und somit kleiner unendlich.

Die Existenz eines solchen Netzes folgt direkt aus Proposition 2.14, denn $\{e\}$ ist eine kompakte Menge und somit gibt es eine stetige Funktion von G nach $[0, 1]$, welche bei e gleich 1 ist und dessen Träger Teilmenge von einer vorgegebenen Umgebung U ist. Normieren wir diese Funktion bezüglich der L^1-Norm erhalten wir die gewünschten Eigenschaften.

□

Definition 4.25. Sei π eine unitäre Darstellung von G. Dann heißt ein Vektor $u \in \mathcal{H}_\pi$ ein zyklischer Vektor von π, falls der von der Menge $\mathcal{M}_u := \{\pi(x)u : x \in G\}$ aufgespannte Unterraum dicht in $\mathcal{H}_\pi$ ist. Falls es einen zyklischen Vektor von π gibt, nennen wir π eine zyklische Darstellung.

Satz 4.26. *Sei ϕ eine Funktion von positivem Typ. Sei $\mathcal{H}_\phi$ wie in Lemma 4.20 und π_ϕ wie in Lemma 4.22. Dann folgt mit der Notation aus Lemma 4.22, dass es einen zyklischen Vektor u von π_ϕ gibt, sodass $\pi_\phi(f)u = [f]$ für alle $f \in L^1(G)$ und $\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)u, u \rangle$ für fast alle $x \in G$ gelten.*

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ eine Umgebungsbasis von e aus symmetrischen Mengen. Nach Proposition 4.24 gibt es ein Netz von approximativen Einheiten $(\psi_U)_{U\in\mathcal{U}}$. Betrachten wir nun das Netz $(\psi_U^*)_{U\in\mathcal{U}}$, so gilt $\operatorname{supp}(\psi_U^*) \subseteq U^{-1} = U, \|\psi_U^*\|_{L^1} = 1$ und $\psi_U^*(x) = \Delta(x)\overline{\psi_U(x^{-1})} \geq 0$ für alle $x \in G$. Also sind die ψ_U^* ebenfalls wieder approximative Einheiten. Also gilt für jedes $f \in L^1$:

$$\langle [f], [\psi_U] \rangle_\phi = \int (\psi_U^* * f)\phi \, \mathrm{d}\lambda \to \int f\phi \, \mathrm{d}\lambda$$

Insbesondere gilt $\|[\psi_U]\|_\phi^2 = \int \psi_U \phi \, \mathrm{d}\lambda \leq \|\psi_U\|_{L^1}\|\phi\|_\infty = \|\phi\|_\infty$ und somit gilt für ein beliebiges $v \in \mathcal{H}_\phi$, dass $|\langle v, [\psi_U]\rangle_\phi| \leq \|v\|_\phi \|\phi\|_\infty^{\frac{1}{2}}$ ist. Also ist das Netz $(\langle v, [\psi_U]\rangle_\phi)$ ein beschränktes Netz in $\mathbb{R}$. Wir zeigen nun, dass es sogar ein Cauchynetz und somit konvergent ist. Sei dazu $\epsilon > 0$ beliebig. Es gibt ein $f \in L^1(G)$, sodass $\|v - [f]\|_\phi \|\phi\|_\infty^{\frac{1}{2}} < \frac{\epsilon}{4}$ gilt. Weiters gibt es ein $U_0 \in \mathcal{U}$, sodass für alle $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ mit $U_1 \subseteq U_0$ und $U_2 \subseteq U_0$ die Differenz $|\langle [f], [\psi_{U_1} - \psi_{U_2}]\rangle_\phi| < \frac{\epsilon}{2}$ gilt. Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\left|\langle v, [\psi_{U_1} - \psi_{U_2}]\rangle_\phi\right| \leq& \left|\langle [f], [\psi_{U_1} - \psi_{U_2}]\rangle_\phi\right| + \left|\langle v - [f], [\psi_{U_1} - \psi_{U_2}]\rangle_\phi\right| \\
\leq& \frac{\epsilon}{2} + \|v - [f]\|_\phi (\|\psi_{U_1}\|_\phi + \|\psi_{U_2}\|_\phi) \\
\leq& \frac{\epsilon}{2} + \|v - [f]\|_\phi 2\|\phi\|_\infty^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\epsilon}{2} + 2\frac{\epsilon}{4} = \epsilon
\end{aligned}$$

für alle $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ mit $U_1 \subseteq U$ und $U_2 \subseteq U$. Somit ist $\langle v, [\psi_U]\rangle_\phi$ als beschränktes Cauchynetz in $\mathbb{R}$ konvergent. Die Abbildung $v \mapsto \lim_{U\in\mathcal{U}} \langle v, [\psi_U]\rangle_\phi$ ist damit auf ganz $\mathcal{H}_\phi$ wohldefiniert. Weiters ist sie klarerweise linear und wegen

$$|\lim_{U\in\mathcal{U}} \langle v, [\psi_U]\rangle_\phi| \leq \lim_{U\in\mathcal{U}} |\langle v, [\psi_U]\rangle_\phi| \leq \lim_{U\in\mathcal{U}} \|v\|_\phi \|[\psi_U]\|_\phi \leq \|v\|_\phi \|\phi\|_\infty^{\frac{1}{2}}$$

auch beschränkt. Also gibt es nach dem Darstellungssatz von Riesz-Fischer ein $u \in \mathcal{H}_\phi$, sodass $\langle v, u\rangle_\phi = \lim_{U\in\mathcal{U}} \langle v, [\psi_U]\rangle_\phi$ für alle $v \in \mathcal{H}_\phi$ ist. Insbesondere gilt für $f \in L^1(G)$, dass $\langle [f], u\rangle_\phi = \lim_{U\in\mathcal{U}} \langle [f], [\psi_U]\rangle_\phi = \int f\phi \, \mathrm{d}\lambda$ ist. Seien nun $f, g \in L^1(G)$ und $y \in G$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\langle [g], \pi_\phi(y)u\rangle_\phi =& \langle \pi_\phi(y^{-1})[g], u\rangle_\phi = \langle [L_{y^{-1}}g], u\rangle_\phi = \int g(yx)\phi(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) \\
=& \int g(x)\phi(y^{-1}x) \, \mathrm{d}\lambda(x)
\end{aligned}$$

Also erhalten wir mit Proposition 4.16:

$$\begin{aligned}
\langle [g], [f]\rangle_\phi =& \int \int g(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x) \, \mathrm{d}\lambda(x) \, \mathrm{d}\lambda(y) = \int \overline{f(y)} \langle [g], \pi_\phi(y)u\rangle_\phi \, \mathrm{d}\lambda(y) \\
=& \langle [g], \pi_\phi(f)u\rangle_\phi \quad \forall f, g \in L^1(G)
\end{aligned}$$

Da $L^1(G)/\mathcal{N}$ dicht in $\mathcal{H}_\phi$ liegt, gilt somit $\pi_\phi(f)u = [f]$ für alle $f \in L^1(G)$.

Um zu zeigen, dass u ein zyklischer Vektor von π_ϕ ist, sei $v \in \mathcal{H}_\pi$, sodass $\langle v, \pi_\phi(y)u\rangle_\phi = 0$ für alle $y \in G$ ist. Dann gibt es eine Folge von Funktionen $g_n \in L^1(G)$, sodass g_n in $\mathcal{H}_\pi$ gegen v konvergiert. Wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes gilt $\langle [g_n], \pi_\phi(y)u\rangle_\phi \to 0$ für alle $y \in G$. Da $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge ist, ist sie insbesondere beschränkt und somit erhalten wir:

$$\left|\overline{f(y)}\langle [g_n], \pi_\phi(y)u\rangle_\phi\right| \leq |f|(y)\|g_n\|_\phi \|u\|_\phi \leq |f|(y)C \quad \forall n \in \mathbb{N}, f \in L^1(G)$$

Deswegen können wir den Satz der majorisierten Konvergenz anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned}\langle v,[f]\rangle_\phi &= \lim_{n\to\infty}\langle [g_n],[f]\rangle_\phi = \lim_{n\to\infty}\int \overline{f(y)}\langle [g_n],\pi_\phi(y)u\rangle_\phi \,\mathrm{d}\lambda(y)\\ &= \int \lim_{n\to\infty}\overline{f(y)}\langle [g_n],\pi_\phi(y)u\rangle_\phi \,\mathrm{d}\lambda(y) = 0 \quad \forall f\in L^1(G)\end{aligned}$$

Da $L^1(G)/\mathcal{N}$ dicht in $\mathcal{H}_\pi$ ist muss somit $v=0$ gelten. Also gilt $\mathcal{M}_u^\perp=\{0\}$ und somit, dass der von $\mathcal{M}_u$ aufgespannte Unterraum dicht in $\mathcal{H}_\phi$ liegt. Damit ist u ein zyklischer Vektor von π_ϕ.

Schlussendlich erhalten wir noch:

$$\begin{aligned}\int \langle \pi_\phi(y)u,u\rangle_\phi f(y)\,\mathrm{d}\lambda(y) &= \int \lim_{U\in\mathcal{U}}\langle \pi_\phi(y)u,[\psi_U]\rangle_\phi f(y)\,\mathrm{d}\lambda(y)\\ &= \lim_{U\in\mathcal{U}}\int \langle \pi_\phi(y)u,[\psi_U]\rangle_\phi f(y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \lim_{U\in\mathcal{U}}\langle \pi_\phi(f)u,[\psi_U]\rangle_\phi\\ &= \langle \pi_\phi(f)u,u\rangle_\phi = \langle [f],u\rangle_\phi = \int f\phi\,\mathrm{d}\lambda \quad \forall f\in L^1\end{aligned}$$

Somit gilt $\phi(y)=\langle \pi_\phi(y)u,u\rangle_\phi$ fast sicher. Wir haben hier den Satz der majorisierten Konvergenz angewendet, da für alle $U\in\mathcal{U}$ gilt:

$$|\langle \pi_\phi(y)u,[\psi_U]\rangle_\phi f(y)| \le \|\pi_\phi(y)u\|_\phi \|[\psi_U]\|_\phi |f|(y) \le \|u\|_\phi \|\phi\|_\infty^{\frac{1}{2}}|f|(y)$$

□

Korollar 4.27. *Jede Funktion von positivem Typ stimmt λ-fast überall mit einer stetigen Funktion überein.*

Beweis. Sei ϕ eine beliebige Funktion von positivem Typ. Nach Satz 4.26 gibt es eine unitäre Darstellung π_ϕ und einen Vektor $u\in\mathcal{H}_{\pi_\phi}$ mit $\phi(x)=\langle \pi_\phi(x)u,u\rangle$ für fast alle $x\in G$. Da die rechte Seite stetig in x ist, stimmt ϕ fast sicher mit einer stetigen Funktion überein. □

Bemerkung 4.28. Wir können also für jede Funktion von positivem Typ einen Repräsentanten wählen, welcher stetig ist. Von nun an werden wir somit die Menge der Funktionen von positivem Typ als Teilmenge der stetigen Funktionen auffassen.

Korollar 4.29. *Jedes $\phi\in\mathcal{P}$ erfüllt $\|\phi\|_\infty=\phi(e)$ und $\phi(x^{-1})=\overline{\phi(x)}$ für alle $x\in G$.*

Beweis. Sei $\phi\in\mathcal{P}$ und $\phi(x)=\langle \pi_\phi(x)u,u\rangle$ wie in Satz 4.26. Dann gilt

$$|\phi(x)| = |\langle \pi_\phi(x)u,u\rangle| \le \|\pi_\phi(x)u\|\|u\| = \|u\|^2 = \langle \pi_\phi(e)u,u\rangle = \phi(e) \quad \forall x\in G$$

und somit erhalten wir $\|\phi\|_\infty=\phi(e)$. Weiters gilt

$$\phi(x^{-1}) = \langle \pi(x^{-1})u,u\rangle = \langle u,\pi(x)u\rangle = \overline{\phi(x)} \quad \forall x\in G.$$

□

4.3. **Satz von Gelfand-Raikov.** Mithilfe der Charakterisierung über Funktionen von positivem Typ werden wir zeigen, dass die unitären Darstellungen punktetrennend auf G sind. Dazu untersuchen wir zunächst zwei Teilräume von $\mathcal{P}$.

Definition 4.30.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 :=& \{\phi\in\mathcal{P} : \|\phi\|_\infty = 1\} = \{\phi\in\mathcal{P} : \phi(e)=1\}\\ \mathcal{P}_0 :=& \{\phi\in\mathcal{P} : \|\phi\|_\infty \le 1\} = \{\phi\in\mathcal{P} : 0\le\phi(e)\le 1\}\end{aligned}$$

Satz 4.31. *Sei $\phi \in \mathcal{P}_1$, dann ist ϕ genau dann in $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$wenn die zugehörige Darstellung π_ϕ aus Satz 4.26 irreduzibel ist. Dabei bezeichnet $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ die Extremalpunkte von $\mathcal{P}_1$.*

Beweis. Sei zunächst π_ϕ reduzibel, d.h. es gibt einen unter π_ϕ invarianten nichttrivialen Unterraum $\mathcal{M}$ von $\mathcal{H}_\phi$. Es gilt: $\mathcal{H}_\phi = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$. Sei $u \in \mathcal{H}_\phi$ wie in Satz 4.26. Da u ein zyklischer Vektor ist und sowohl $\mathcal{M}$ als auch $\mathcal{M}^\perp$ unter π_ϕ invariant sind, kann u in keinem der beiden Räume liegen. Also gibt es ein $v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ und ein $w \in \mathcal{M}^\perp \setminus \{0\}$, sodass $u = v + w$ ist. Damit erhalten wir:

$$\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)u, u\rangle = \langle \pi_\phi(x)v, v\rangle + \langle \pi_\phi(x)w, w\rangle + 2 \cdot 0 = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x)$$

mit $c_1 := \|v\|^2$, $c_2 := \|w\|^2$, $\psi_1(x) := \langle \pi_\phi(x)v, v\rangle/c_1$ und $\psi_2(x) := \langle \pi_\phi(x)w, w\rangle/c_2$. Es gilt $c_1 + c_2 = \|u\|^2 = \phi(e) = 1$ und wegen Proposition 4.18 gilt $\psi_1 \in \mathcal{P}$ und $\psi_2 \in \mathcal{P}$. Es gilt sogar $\psi_1(e) = \|v\|^2/c_1 = 1$ und $\psi_2(e) = \|w\|^2/c_1 = 1$ und somit sind beide in $\mathcal{P}_1$. Da u ein zyklischer Vektor von π_ϕ ist, gibt es ein $x \in G$, sodass gilt:

$$\begin{aligned} 0 \neq \langle \pi_\phi(x)u, \frac{v}{c_1} - \frac{w}{c_2}\rangle =& \langle \pi_\phi(x)(v+w), \frac{v}{c_1} - \frac{w}{c_2}\rangle \\ =& \frac{\langle \pi_\phi(x)v, v\rangle}{c_1} + \frac{\langle \pi_\phi(x)w, w\rangle}{c_2} + 2 \cdot 0 = \psi_1(x) - \psi_2(x) \end{aligned}$$

Somit gilt $\psi_1 \neq \psi_2$. Also ist ϕ eine nichttriviale Linearkombinationen zweier verschiedener Elemente aus $\mathcal{P}_1$ und damit kein Extremalpunkt.

Sei nun umgekehrt π_ϕ irreduzibel und $\phi = \psi_1 + \psi_2$ mit $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{P}$. Dann gilt:

$$\langle f, f\rangle_{\psi_1} = \langle f, f\rangle_\phi - \langle f, f\rangle_{\psi_2} \leq \langle f, f\rangle_\phi \quad \forall f \in L^1(G)$$

und damit

$$|\langle f, g\rangle_{\psi_1}| \leq |\langle f, f\rangle_{\psi_1}|^{\frac{1}{2}} |\langle g, g\rangle_{\psi_1}|^{\frac{1}{2}} \leq |\langle f, f\rangle_\phi|^{\frac{1}{2}} |\langle g, g\rangle_\phi|^{\frac{1}{2}} \quad \forall f, g \in L^1(G)$$

Bezeichnen wir mit $[f]$ die Nebenklasse von f in $\mathcal{H}_\phi$, so ist die Abbildung $([f], [g]) \mapsto \langle f, g\rangle_{\psi_1}$ auf $\mathcal{H}_\phi \times \mathcal{H}_\phi$ und eine beschränkte Sesquilinearform. Nach dem Lemma von Lax Milgram gibt es also eine beschränkte lineare Abbildung $T : \mathcal{H}_\phi \to \mathcal{H}_\phi$, sodass $\langle T[f], [g]\rangle_\phi = \langle f, g\rangle_\psi$ für alle $f, g \in L^1(G)$ gilt. Schließlich erhalten wir mit Lemma 4.22 für beliebige $x \in G$, $f, g \in L^1(G)$:

$$\begin{aligned} \langle T\pi_\phi(x)[f], [g]\rangle_\phi =& \langle T[L_x f], [g]\rangle_\phi = \langle L_x f, g\rangle_{\psi_1} = \langle f, L_{x^{-1}} g\rangle_{\psi_1} \\ =& \langle T[f], [L_{x^{-1}} g]\rangle_\phi = \langle T[f], \pi_\phi(x^{-1})[g]\rangle_\phi = \langle \pi_\phi(x)T[f], [g]\rangle_\phi \end{aligned}$$

Also gilt $T \in C(\pi_\phi, \pi_\phi)$ und mit dem Lemma von Schur(Satz 4.7) folgt, dass $T = cI$ für ein $c \in \mathbb{C}$ und somit $\langle f, g\rangle_{\psi_1} = c\langle [f], [g]\rangle_\phi = c\langle f, g\rangle_\phi$ für alle $f, g \in L^1(G)$ ist.

Wegen Proposition 4.24 ist die Menge aller Faltungen von L^1-Funktionen dicht in L^1 und somit folgt, dass $\psi_1 = c\phi$ gelten muss. Damit ist aber auch $\psi_2 = \phi - \psi_1 = (1 - c)\phi$. Also ist $\phi \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$.

□

Definition 4.32. Da nach Satz 2.7 $L^\infty(G) \simeq L^1(G)'$ gilt, können wir auf $L^\infty(G)$ die schwach*-Topologie definieren. Genauer gesagt, wenn Φ den Isomorphismus zwischen L^∞ und $(L^1)'$ bezeichnet, dann ist die schwach*-Topologie auf $L^\infty(G)$ definiert durch die Urbilder bezüglich Φ aller schwach*-offener Mengen in $(L^1(G))'$. Die schwach*-Topologie auf $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_0$ bezeichnet dann jeweils die Spurtopologie bezüglich den jeweiligen Teilmengen.

Proposition 4.33. *Es gilt $\mathcal{E}(\mathcal{P}_0) = \mathcal{E}(\mathcal{P}_1) \cup \{0\}$.*

Beweis. Es ist klar, dass $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{P}_0)$. Denn aus $1 = \phi(e) = c\phi_1(e) + (1-c)\phi_2(e)$ mit $\phi \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ und $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{P}_0$ folgt $\phi_1(e) = \phi_2(e) = 1$ und somit $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{P}_1$. Also gilt $\phi_1 = \phi_2 = \phi$, da ϕ ein Extremalpunkt in $\mathcal{P}_1$ ist. Ist nun $\phi = 0$ anstatt $\phi \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$, dann folgt aus $0 = \phi(e) = c\phi_1(e) + (1-c)\phi_2(e)$, dass $\phi_1(e) = 0$ und $\phi_2(e) = 0$ ist und somit mit Lemma 4.29, dass $\phi_1 = \phi_2 = 0$ ist. Ist $\phi \in \mathcal{P}_1 \setminus \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ so ist es klarerweise auch nicht in $\mathcal{E}(\mathcal{P}_0)$ enthalten. Sei also $\phi \in \mathcal{P}_0 \setminus (\mathcal{P}_1 \cup \{0\})$. Dann kann man ϕ durch eine nichttriviale Linearkombination darstellen:

$$\phi = \phi(e)\frac{\phi}{\phi(e)} + (1 - \phi(e))0.$$

□

Die folgende Proposition erinnert an den Satz von Krein-Milman, allerdings können wir diesen nicht direkt auf $\mathcal{P}_1$ anwenden, da $\mathcal{P}_1$ nicht schwach*-abgeschlossen sein muss.

Proposition 4.34. *Die konvexe Hülle von $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ ist schwach*-dicht in $\mathcal{P}_1$.*

Beweis. Da $\mathcal{P}$ eine konvexe Menge ist, gilt dies auch für $\mathcal{P}_0$ und $\mathcal{P}_1$. Wobei letzteres gilt, da alle $\phi \in \mathcal{P}$ nach Korollar 4.29 ihre Supremumsnorm bei e annehmen. Versehen wir nun den L^∞ mit der oben definierten schwach*-Topologie, so ist $\mathcal{P}$ und somit auch $\mathcal{P}_0$ abgeschlossen. Also ist $\mathcal{P}_0$ als abgeschlossene Teilmenge der Einheitskugel nach dem Satz von Alaoglu eine schwach*-kompakte konvexe Menge. Wenden wir darauf den Satz von Krein-Milman an, so erhalten wir, dass jedes Element von $\mathcal{P}_0$ und somit auch jedes Element von $\mathcal{P}_1$ der Grenzwert eines Netzes $(\phi_i)_{i \in I}$ ist, wobei ϕ_i für alle $i \in I$ in der konvexen Hülle von $\mathcal{E}(\mathcal{P}_0)$ enthalten ist. Das heißt ϕ_i ist von der Gestalt

$$\sum_{j=1}^{n_i+1} c_i^j \psi_i^j, \quad \text{mit} \sum_{j=1}^{n_j+1} c_i^j = 1, \psi_i^j \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_0) = \mathcal{E}(\mathcal{P}_1) \cup \{0\} \quad \forall j = 1...n_i + 1.$$

Wenn wir den Term mit $\psi_i^j = 0$ weglassen erhalten wir folgende Darstellung:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{n_i} c_i^j \psi_i^j, \quad \text{mit} \sum_{j=1}^{n_i} c_i^j \leq 1, \psi_i^j \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_1) \quad \forall j = 1...n_i$$

Da die Menge $\{f \in L^\infty : \|f\|_{L^\infty} \leq 1 - \epsilon\}$ für jedes $\epsilon > 0$ schwach*-abgeschlossen ist, konvergiert $\phi_i(e) = \|\phi\|_\infty$ gegen 1 und somit gibt es einen Index i_0, sodass gilt:

$$\phi_i(e) = \|\phi_i(e)\|_\infty = \|\phi_i(e)\|_{L^\infty} \geq \frac{1}{2} \quad \forall i \succcurlyeq i_0$$

Setzen wir $\phi_i' = \frac{\phi_i}{\phi_i(e)}$ für alle $i \succcurlyeq i_0$, so erhalten wir:

$$\phi_i' = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\phi_i(e)} c_i^j \psi_i^j, \quad \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\phi_i(e)} c_i^j = \frac{1}{\phi_i(e)} \sum_{j=1}^{n_i} c_i^j \psi_i^j(e) = \frac{\phi_i(e)}{\phi_i(e)} = 1$$

Somit ist ϕ_i' für jedes $i \succcurlyeq i_0$ in der konvexen Hülle von $\mathcal{P}_1$ enthalten. Da $\phi_i(e)$ gegen 1 konvergiert, konvergiert ϕ_i' gegen dasselbe Element wie ϕ_i. □

Definition 4.35. Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{C}^X$, d.h. $\mathcal{A}$ ist eine Teilmenger aller Abbildungen von X nach $\mathbb{C}$. Dann definieren wir auf $\mathcal{A}$ die *Topologie der kompakten Konvergenz*, welche von folgenden Mengen erzeugt wird:

$$N(f_0, \epsilon, K) := \{f \in \mathcal{A} : |f(x) - f_0(x)| < \epsilon \, \forall x \in K\}, f_0 \in \mathcal{A}, \epsilon > 0, K \subseteq X \text{ kompakt}$$

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, dass auf $\mathcal{P}_1$ die schwach*-Topologie mit der Topologie der kompakten Konvergenz übereinstimmt.

Lemma 4.36. *Sei X ein Banachraum und $B \subseteq X'$ eine bezüglich der Abbildungsnorm beschränkte Teilmenge von X'. Dann stimmt auf B die Topologie der kompakten Konvergenz mit der schwach*-Topologie überein.*

Beweis. Die schwach*-Topologie ist die Topologie der punktweisen Konvergenz und somit, da einelementige Mengen kompakt sind, ist die schwach*-Topologie gröber oder gleich grob als die Topologie der kompakten Konvergenz. Um die Umkehrung zu zeigen, seien $x_0' \in B$, $\epsilon > 0$ und $K \subseteq X$ kompakt. Da B beschränkt bezüglich der Abbildungsnorm ist, existiert ein $C > 0$ mit $\|x'\| < C$ für alle $x' \in B$. Sei zusätzlich $\delta := \frac{\epsilon}{3C}$. Dann gibt es, weil K kompakt ist, endlich viele Punkte $x_1, ..., x_n \in K$, sodass $\bigcup_{j=1}^n U_\delta(x_j) \supseteq K$. Seien $x' \in B$ und $x \in K$ beliebig. Dann gibt es ein j, sodass $\|x - x_j\| < \delta$. Damit folgt:

$$|x'(x) - x_0'(x)| \leq |x'(x - x_j)| + |(x' - x)(x_j)| + |x_0'(x_j - x)| \leq 2C\frac{\epsilon}{3C} + |(x' - x)(x_j)|.$$

Also ist jedes $x' \in U := \bigcap_{j=1}^n \{x' \in B : |(x' - x)(x_j)| < \frac{\epsilon}{3}\}$ auch in $N(x_0', \epsilon, K)$. Somit gilt $U \subseteq N(x_0', \epsilon, K)$. Da x_0', ϵ und K beliebig waren und U eine bezüglich der schwach*-Topologie offene Teilmenge ist, müssen die Topologien gleich sein. □

Lemma 4.37. *Seien $\phi_0 \in \mathcal{P}_1$, $f \in L^1(G)$, $\epsilon > 0$ und $K \subseteq G$ kompakt. Dann gibt es eine schwach*-Umgebung U von ϕ_0, sodass $|f * \phi(x) - f * \phi_0(x)| < \epsilon$ für alle $\phi \in U$ und $x \in K$.*

Beweis. Wegen Korollar 4.29 folgt:

$$\begin{aligned} f * \phi(x) &= \int f(y)\phi(y^{-1}x)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int f(xy)\phi(y^{-1})\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int f(xy)\overline{\phi(y)}\,\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \int (L_{x^{-1}}f)(y)\overline{\phi(y)}\,\mathrm{d}\lambda(y). \end{aligned}$$

Weiters folgt aus Proposition 3.15, dass die Menge $\{L_{x^{-1}}f : x \in K\}$ kompakt in $L^1(G)$ ist. Sei Φ wie in Definition 4.32 der Isomorphismus von L^∞ nach $(L^1)'$. Dann gilt somit $f * \phi(x) = \Phi(\overline{\phi})(L_{x^{-1}}f)$. Da $\mathcal{P}_1$ bezüglich der L^∞-Norm beschränkt ist, ist auch $\Phi(\mathcal{P}_1)$ bezüglich der Abbildungsnorm beschränkt. Also können wir Lemma 4.36 anwenden und erhalten eine schwach* Umgebung V von $\Phi(\phi_0)$, sodass gilt:

$$|f * \phi(x) - f * \phi_0(x)| = |\Phi(\overline{\phi})(L_x f) - \Phi(\overline{\phi_0})(L_{x^{-1}}f)| < \epsilon \quad \forall x \in K \forall \phi \in \Phi^{-1}(V)$$

$\Phi^{-1}(V)$ erfüllt dann das Gewünschte. □

Lemma 4.38. *Sei $\phi \in \mathcal{P}_0$. Dann gilt $|\phi(x) - \phi(y)|^2 \leq 2 - 2\Re(\phi(yx^{-1}))$ für alle $x, y \in G$.*

Beweis. Nach Satz 4.26 gibt es eine unitäre Darstellung π und einen Vektor $u \in \mathcal{H}_\pi$, sodass $\phi(x) = \langle \pi(x)u, u\rangle$ für alle $x \in G$. In unserem Fall gilt $\|u\|^2 = \phi(0) \leq 1$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \phi(y)|^2 =& |\langle(\pi(x) - \pi(y))u, u\rangle|^2 = |\langle u, (\pi(x^{-1}) - \pi(y^{-1}))u\rangle|^2 \\ \leq& \|u\|^2 \|\|\pi(x^{-1})u - \pi(y^{-1})u\|^2 \\ \leq& \|\pi(x^{-1})u\|^2 + \|\pi(y^{-1})u\|^2 - 2\Re(\langle\pi(x^{-1})u, \pi(y^{-1})u\rangle) \\ =& 2\|u\|^2 - 2\Re(\langle\pi(yx^{-1})u, u\rangle) \leq 2 - 2\Re(\phi(yx^{-1})) \quad \forall x, y \in G \end{aligned}$$

□

Satz 4.39. *Auf $\mathcal{P}_1$ stimmt die schwach*-Topologie mit der Topologie der kompakten Konvergenz überein.*

Beweis. Sei $f \in L^1(G)$, $\epsilon > 0$ und $\phi_0 \in \mathcal{P}_1$. Aus Lemma 3.18 folgt, dass $\operatorname{supp}(f)$ σ-kompakt ist. Also gibt es eine monoton steigende Folge von kompakten Mengen K_n, welche gegen $\operatorname{supp}(f)$ konvergiert. Aus dem Satz von Beppo Levi folgt, dass $\int_{K_n} |f| \,\mathrm{d}\lambda$ gegen $\|f\|_{L^1}$ konvergiert und somit gibt es eine kompakte Menge K_N mit $\int_{G\setminus K_N} |f| \,\mathrm{d}\lambda < \frac{\epsilon}{4}$. Für $\phi \in \mathcal{P}_1$ mit $|\phi - \phi_0| < \frac{\epsilon}{2\|f\|_{L^1}}$ auf K gilt somit:

$$\left| \int (f\phi - f\phi_0) \,\mathrm{d}\lambda \right| \leq \int\limits_K |f||\phi - \phi_0| \,\mathrm{d}\lambda + \int\limits_{G\setminus K} |f||\phi - \phi_0| \,\mathrm{d}\lambda < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Da die Mengen $\{\phi \in \mathcal{P}_1 : |\int (f\phi - f\phi_0) \,\mathrm{d}\lambda| < \epsilon\}$ mit $f \in L^1(G)$, $\phi_0 \in \mathcal{P}_1$ und $\epsilon > 0$ eine Basis der schwach*-Topologie auf $\mathcal{P}_1$ bilden, ist die Topologie der kompakten Konvergenz feiner oder gleich der schwach*-Topologie.

Sei nun umgekehrt $\phi_0 \in \mathcal{P}_1$, $\epsilon > 0$ und $K \subseteq G$ kompakt. Wir müssen nun eine Umgebung U von ϕ_0 bezüglich der schwach*-Topologie finden, sodass $U \subseteq N(\phi_0, \epsilon, K)$ gilt, d.h. für alle $\phi \in U$ und $x \in K$ gilt $|\phi(x) - \phi_0(x)| < \epsilon$. Sei dazu $\eta > 0$ fest. Dann gibt es eine kompakte Umgebung V von e in G, sodass $|\phi_0(x) - 1| < \eta$ für alle $x \in V$. Wir betrachten nun die Menge

$$\begin{aligned} U_1 :=& \left\{ \phi \in \mathcal{P}_1 : \left| \int\limits_V (\phi - \phi_0) \,\mathrm{d}\lambda \right| < \eta\lambda(V) \right\} \\ =& \left\{ \phi \in \mathcal{P}_1 : \left| \int (\chi_V\phi - \chi_V\phi_0) \,\mathrm{d}\lambda \right| < \eta\lambda(V) \right\}. \end{aligned}$$

Da V kompakt ist, ist $\chi_V \in L^1(G)$ und somit ist U_1 eine schwach*-Umgebung von ϕ_0. Zusätzlich gilt für jedes $\phi \in U_1$:

$$\left| \int\limits_V (1 - \phi) \,\mathrm{d}\lambda \right| \leq \left| \int\limits_V (1 - \phi_0) \,\mathrm{d}\lambda \right| + \left| \int\limits_V (\phi_0 - \phi) \,\mathrm{d}\lambda \right| < 2\eta\lambda(V)$$

Für ein $\phi \in U_1$ und ein $x \in G$ gilt unter Anwendung der Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} |\chi_V * \phi(x) - \lambda(V)\phi(x)| =& \left| \int\limits_V \phi(y^{-1}x) - \phi(x) \,\mathrm{d}\lambda(y) \right| \leq \int\limits_V \left|\phi(y^{-1}x) - \phi(x)\right| \,\mathrm{d}\lambda(y) \\ \overset{4.38}{\leq}& \int\limits_V (2 - 2\Re(\phi(y)))^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}\lambda(y) \\ \leq& \left(\int\limits_V 2 - 2\Re(\phi(y)) \,\mathrm{d}\lambda(y) \right)^{\frac{1}{2}} \lambda(V)^{\frac{1}{2}} \\ =& \Re \left(2 \int\limits_V 1 - \phi \,\mathrm{d}\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \lambda(V)^{\frac{1}{2}} \leq (4\eta\lambda(V))^{\frac{1}{2}} \lambda(V)^{\frac{1}{2}} \\ =& 2\lambda(V)\eta^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Schließlich gibt es nach Lemma 4.37 noch eine zweite Umgebung U_2 von ϕ_0, sodass $|\chi_V * \phi(x) - \chi_V * \phi_0(x)| < \eta\lambda(V)$ für alle $\phi \in U_2$ und $x \in K$ ist. Insgesamt erhalten wir für ein beliebiges $\phi \in U_1 \cap U_2$ und $x \in K$:

$$\begin{aligned}|\phi(x) - \phi_0(x)| \leq& \frac{1}{\lambda(V)}\Big(|\lambda(V)\phi(x) - \chi_V * \phi(x)| + |\chi_V * (\phi - \phi_0)(x)| \\ &+ |\chi_V * \phi_0(x) - \lambda(V)\phi_0(x)|\Big) \\ \leq& \frac{1}{\lambda(V)}\big(2\lambda(V)\eta^{\frac{1}{2}} + \lambda(V)\eta + 2\lambda(V)\eta^{\frac{1}{2}}\big) = \eta + 4\eta^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Wählen wir nun η so klein, dass $\eta + 4\eta^{\frac{1}{2}} < \epsilon$, so ist $U := U_1 \cap U_2$ die gesuchte Umgebung. □

Lemma 4.40. *Seien $f, g \in C_c(G)$, dann ist $f * g$ in der linearen Hülle von $C_c(G) \cap \mathcal{P}(G)$ enthalten. Weiters ist $C_c(G) \cap \mathcal{P}(G)$ dicht in $C_c(G)$ und dicht in $L^p(G)$ mit $1 \leq p < \infty$.*

Beweis. Nach Korollar 4.19 ist $h * \widetilde{h} \in \mathcal{P}$ für alle $h \in C_c(G)$, wobei $\widetilde{h}(x) = \overline{h(x^{-1})}$. Da die Abbildung $B : (h_1, h_2) \mapsto h_1 * \widetilde{h_2}$ eine Sesquilinearform auf $C_c(G)$ ist, können wir polarisieren und erhalten, wenn wir mit $B(h) := B(h, h) bezeichnen$, für beliebige $h_1, h_2 \in C_c(G)$:

$$h_1 * \widetilde{h_2} = B(h_1, h_2) = \frac{1}{4}\left(B(h_1 + h_2) - B(h_1 - h_2) + iB(h_1 + ih_2) - iB(h_1 - ih_2)\right)$$

Da für alle $h_1, h_2 \in C_c(G)$ auch $h_1 + h_2$, $h_1 - h_2$, $h_1 + ih_2$ und $h_1 - ih_2$ in $C_c(G)$ sind, liegt $h_1 * \widetilde{h_2}$ in der linearen Hülle von $\mathcal{P}$. Wählen wir $h_1 = f$ und $h_2 = \widetilde{g}$ erhalten wir, dass $f * g$ in $\mathcal{P}$ ist. Gemäß Proposition 4.24 gibt es approximative Einheiten und somit bilden alle Elemente der Form $f * g$ mit $f, g \in C_c(G)$ eine dichte Teilmenge von $C_c(G)$. Daher ist auch $C_c(G) \cap \mathcal{P}$ dicht in $C_c(G)$. Versehen wir $C_c(G)$ mit der p-Norm, so ist $C_c(G) \cap \mathcal{P}$ klarerweise immer noch dicht in $C_c(G)$ und somit auch dicht in $L^p(G)$, da $C_c(G)$ dicht in $L^p(G)$ ist. □

Satz 4.41 (Satz von Gelfand-Raikov)**.** *Die irreduziblen unitären Darstellungen auf G sind punktetrennend.*

Beweis. Für $x, y \in G$, $x \neq y$ gibt es eine offene Menge O mit $x \in O$ und $y \notin O$ und damit gibt es nach Proposition 2.14 eine Funktion $f \in C_c(G)$ mit $f(x) = 1$ und $f(y) = 0$. Nach Lemma 4.40 gibt es eine Funktion g in der linearen Hülle von $C_c(G) \cap P(G)$ mit $g(x) \neq g(y)$. Nach Proposition 4.34 liegt die konvexe Hülle von $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ schwach*-dicht in $\mathcal{P}_1$ und nach Satz 4.39 stimmt auf $\mathcal{P}_1$ die schwach*-Topologie mit der Topologie der kompakten Konvergenz überein. Also ist die konvexe Hülle von $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ dicht bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz. Da die Menge $\{x, y\}$ kompakt ist, gibt es eine Funktion $h = \sum_{j=1}^{n} c_j\phi_j$ mit $\phi_j \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$, sodass $|h(x) - g(x)| < \frac{1}{2}|g(x) - g(y)|$ und $|h(y) - g(y)| < \frac{1}{2}|g(x) - g(y)|$. Damit erhalten wir $h(x) \neq h(y)$. Also muss es ein $j \in \{1...n\}$ geben, sodass $\phi_j(x) \neq \phi_j(y)$. Die damit verbundene Darstellung π_{ϕ_j} aus Lemma 4.22 ist nach Satz 4.31 irreduzibel und erfüllt nach Satz 4.26:

$$\langle\pi_{\phi_j}(x)u, u\rangle = \phi_j(x) \neq \phi_j(y) = \langle\pi_{\phi_j}(y)u, u\rangle$$

Wobei u ein zyklischer Vektor wie in Satz 4.26 ist. Also gilt $\pi_{\phi_j}(x) \neq \pi_{\phi_j}(y)$. □

5. Fouriertransformation

In diesem Kapitel behandeln wir die Fouriertransformation auf lokalkompakten abelschen Gruppen. Sei dazu ab nun G immer eine lokalkompakte abelsche Gruppe und λ ein Haar-Maß auf G. Es ist klar, dass nun jedes linksinvariante Haar-Maß auch rechtsinvariant ist und somit $\lambda(Ex) = \Delta(x)\lambda(E) = \lambda(E)$, also ist $\Delta = 1$.

5.1. Die Dualgruppe $\widehat{G}$.

Definition 5.1. Wir nennen einen stetigen Homomorphismus von G nach $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ einen unitären Charakter von G und bezeichnen mit $\widehat{G}$ die Menge aller unitären Charaktere von G. Dabei bildet $\mathbb{T}$ mit der euklidschen Topologie und der multiplikativen Struktur eine topologische Gruppe. Anstatt $\xi(x)$ schreiben wir auch $\langle x, \xi \rangle$.

Definition 5.2. Wir nennen zwei unitäre Darstellungen π_1 und π_2 äquivalent, falls es einen Isomoprhismus Φ zwischen $\mathcal{H}_{\pi_1}$ und $\mathcal{H}_{\pi_2}$ gibt, sodass $\Phi \circ (\pi_1(x)) = (\pi_2(x)) \circ \Phi$ für alle $x \in G$.

Satz 5.3. *Sei $\mathcal{S}$ die Menge der Äquivalenzklassen aller irreduziblen unitären Darstellungen bezüglich der in Definition 5.2 definierten Äquivalenzrelation. Die Abbildung $\xi \mapsto [\pi_\xi]$ mit $\pi_\xi(x)(z) := \langle x, \xi \rangle z$ ist eine Bijektion von $\widehat{G}$ nach $\mathcal{S}$. Hier bezeichnet $[\pi_\xi]$ die Äquivalenzklasse von π_ξ.*

Beweis. Sei π_0 eine irreduzible unitäre Darstellung von G. Dann ist nach Korollar 4.8 H_{π_0} eindimensional. Wir finden also eine zu π_0 äquivalente unitäre Darstellung π mit $H_\pi = \mathbb{C}$. Da $\pi(x)$ für jedes $x \in G$ linear ist, gibt es für jedes $x \in G$ ein eindeutiges $\langle x, \xi \rangle := \pi(x)(1) \in \mathbb{C}$, sodass $\pi(x)(z) = \langle x, \xi \rangle z$ ist. Wegen der Homomorphieeigenschaft von π ist auch ξ ein Homomorphismus von G nach $\mathbb{C}$ und, da π stetig ist muss auch ξ stetig sein. Weiters gilt:

$$1 = \pi(x)^*(1)\pi(x)(1) = \overline{\pi(x)(1)}\pi(x)(1) = \overline{\langle x, \xi \rangle}\langle x, \xi \rangle = |\langle x, \xi \rangle|^2$$

und somit folgt $|\langle x, \xi \rangle| = 1$ und damit $\xi \in \widehat{G}$.

Umgekehrt gilt für jedes $\xi \in \widehat{G}$, dass die damit definierte Abbildung π_ξ eine unitäre Darstellung ist und, da $\mathbb{C}$ als eindimensionaler Vektorraum nur triviale Teilräume hat, ist π_ξ auch irreduzibel. □

Definition 5.4. Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banach-Algebra. Dann nennen wir die Menge $\sigma(\mathcal{A}) := \{h : \mathcal{A} \to \mathbb{C}, h \neq 0, h \text{ ist Algebren-Homomorphismus}\}$ das Spektrum von $\mathcal{A}$.

Satz 5.5. *Die Abbildung*

$$\Psi \colon \widehat{G} \to \sigma(L^1(G)), \xi \mapsto \left(f \mapsto \overline{\xi}(f) := \int \overline{\langle x, \xi \rangle} f(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) \right)$$

ist wohldefiniert und bijektiv.

Beweis. Die Linearität von $\Psi(\xi)$ ist wegen der Linearität des Integrals klar. Nach Satz 4.14 ist die Abbildung $f \mapsto \pi_\xi(f)$ eine nicht ausgeartete $*$-Darstellung von $L^1(G)$ auf $H_{\pi_\xi} = \mathbb{C}$. Also gilt:

$$\begin{aligned} \overline{\xi}(f)\overline{\xi}(g) =& \pi_{\overline{\xi}}(f)(1)\pi_{\overline{\xi}}(g)(1) = \pi_{\overline{\xi}}(f)\left(1\pi_{\overline{\xi}}(g)(1)\right) = (\pi_{\overline{\xi}}(f)\pi_{\overline{\xi}}(g))(1) = \pi_{\overline{\xi}}(f * g)(1) \\ =& \overline{\xi}(f * g). \end{aligned}$$

Weiters ist $\Re(\overline{\xi}(\chi_{[\Re\xi > 0]})) > 0$ und damit $\Psi(\xi) \neq 0$, also ist $\Psi(\xi) \in \sigma(L^1(G))$. Die Injektivität folgt aus der Tatsache, dass wenn $\overline{\langle x, \xi_1 \rangle} \neq \overline{\langle x, \xi_2 \rangle}$ ist, folgt $\langle x, \xi_1 \rangle \neq$

$\langle x, \xi_2 \rangle$ und dann gibt es wegen der Stetigkeit eine offene Menge $O \subseteq G$ mit $|\langle x, \xi_1 \rangle - \langle x, \xi_2 \rangle| > \epsilon \quad \forall x \in O$. Nun folgt $|\overline{\xi_1}(\chi_O) - \overline{\xi_2}(\chi_O)| > \lambda(O)\epsilon > 0$, also $\Psi(\xi_1) \neq \Psi\xi_2$.

Um die Surjektivität zu zeigen, sei $\Phi \in \sigma(L^1(G)) \subseteq (L^1(G))' \simeq L^\infty$. Es gibt also ein $\phi \in L^\infty$, sodass $\Phi(f) = \int \phi f \,\mathrm{d}\lambda$. Sei $f \in L^1$, sodass $\Phi(f) \neq 0$, dann gilt für jedes $g \in L^1$:

$$\begin{aligned}
\Phi(f) \int \phi g \,\mathrm{d}\lambda =& \Phi(f)\Phi(g) = \Phi(f * g) \\
=& \int \int \phi(x) f(xy^{-1}) g(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) \,\mathrm{d}\lambda(x) \\
=& \int \int \phi(x) f(xy^{-1}) \,\mathrm{d}\lambda(x) g(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) \\
=& \int \Phi(L_y f) g(y) \,\mathrm{d}\lambda(y)
\end{aligned}$$

Wobei der Satz von Fubini hier angewendet werden darf, da $|f| * |g| \in L^1$, $|\phi| \in L^\infty$ und der Integrand von $f * g$ wegen Proposition 3.19 einen σ-kompakten Träger hat. Also erhalten wir $\phi(y) = \Phi(L_y f)/\Phi(f)$ fast überall. Durch Umdefinieren von ϕ können wir o.B.d.A. annehmen, dass die Gleichheit überall gilt. Aus Proposition 3.15 folgt, dass die Abbildung $y \mapsto L_y f$ stetig von G nach L^1 ist. Weiters ist die Abbildung $g \mapsto \int \phi g \,\mathrm{d}\lambda$ von L^1 nach $\mathbb{C}$ als lineare beschränkte Abbildung ebenfalls stetig. Somit ist $y \mapsto \Phi(L_y f)$ stetig und damit auch ϕ. Weiters erhalten wir:

$$\phi(xy)\Phi(f) = \Phi(L_{xy} f) = \Phi(L_x L_y f) = \phi(x)\Phi(L_y f) = \phi(x)\phi(y)\Phi(f) \quad \forall x, y \in G$$

und damit $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ für alle $x, y \in G$. Also gilt auch $\phi(x^n) = \phi(x)^n$ für alle $x \in G$ und $n \in \mathbb{N}$ und damit, da ϕ beschränkt ist, $|\phi(x)| \leq 1$ für alle $x \in G$. Es gilt auch $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$ und somit folgt $|\phi(x)| = 1$ für alle $x \in G$. Also ist ϕ und auch $\overline{\phi}$ ein unitärer Charakter von G und es gilt $\Psi(\overline{\phi}) = \Phi$. □

Satz 5.6. *$\widehat{G}$ versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz und der punktweisen Multiplikation, ist eine lokalkompakte abelsche Gruppe. Wir nennen sie die* Dualgruppe *von G. Die Topologie der kompakten Konvergenz auf $\widehat{G}$ stimmt mit der schwach*-Topologie überein (vgl. Definition 4.32).*

Beweis. Sei $\xi \in \widehat{G}$. Dann gilt $\langle x, \xi \rangle = \pi_\xi(x)(1) = (\pi_\xi(x)(1), 1)_\mathbb{C}$. Damit folgt aus Proposition 4.18, dass $\xi \in \mathcal{P}$ ist. Weiters gilt $\|\xi\| = 1$ und somit insgesamt $\widehat{G} \subseteq \mathcal{P}_1$. Nun folgt aus Satz 4.39, dass die Topologie der kompakten Konvergenz auf $\widehat{G}$ mit der schwach*-Topologie übereinstimmt. Damit folgt auch, dass $\widehat{G}$ mit dieser Topologie eine topologische Gruppe ist, denn die schwach*-Topologie erzeugt immer eine topologische Gruppe. Mit der punktweisen Multiplikation ist $\widehat{G}$ klarerweise auch abelsch. Aus Satz 5.5 folgt, dass $\Psi(\widehat{G}) \cup 0$ gerade alle Homomorphismen von $L^1(G)$ nach $\mathbb{C}$ sind. Da die Menge aller Homomorphismen unter punktweiser Konvergenz abgeschlossen ist, ist $\Psi(\widehat{G}) \cup \{0\}$ in der schwach*-Topologie abgeschlossen. Da die Abbildungsnorm aller Abbildungen in $\Psi(\widehat{G}) \cup \{0\}$ kleiner oder gleich 1 ist, ist $\Psi(\widehat{G}) \cup \{0\}$ eine abgeschlossene Teilmenge der nach dem Satz von Banach-Alaoglu schwach* kompakten Einheitskugel und somit selbst schwach* kompakt. Also ist $\Psi(\widehat{G})$ zumindest lokalkompakt. Wir stellen nun fest, dass $\Psi(\widehat{G})$ mit dem Bild von $\widehat{G}$ unter dem Isomorphismus zwischen L^∞ und $(L^1(G))'$ übereinstimmt. Also ist mit $\Psi(\widehat{G})$ auch $\widehat{G}$ lokalkompakt bezüglich der schwach*-Topologie. Insgesamt erhalten wir nun eine lokalkompakte abelsche Gruppe, welche wir die Dualgruppe von G nennen. □

Beispiel 5.7. Sei $G = (\mathbb{R}, +)$. Wir wollen nun $\widehat{G} = \widehat{\mathbb{R}}$ bestimmen. Für jedes $z \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung ξ_z mit $\xi_z(x) := e^{2\pi i x z}$ ein Charakter. Umgekehrt sei ein Charakter ξ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{T}$ gegeben. Es gilt $\xi(0) = \|\xi\|_\infty = 1$ und somit gibt es ein $a > 0$, sodass $A := \int_0^a \xi \,\mathrm{d}\lambda \neq 0$. Damit erhalten wir:

$$A\xi(x) = \int\limits_0^a \xi(x)\phi(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) = \int\limits_0^a \xi(x+t)\,\mathrm{d}\lambda(t) = \int\limits_x^{a+x} \xi(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)$$

Da ξ stetig ist, ist somit ξ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung differenzierbar und es gilt:

$$\xi'(x) = \frac{1}{A}(\xi(a+x) - \xi(x)) = \frac{1}{A}(\xi(a) - 1)\phi(x) \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

Aus dieser Differentialgleichung folgt, dass $\xi(x) = de^{ct}$ mit $c = A^{-1}(\phi(a) - 1)$. Da $|\xi| = 1$ folgt $d = 1$ und $|e^c| = 1$, also gibt es ein $z \in \mathbb{R}$ mit $c = 2\pi i z$. Somit gilt $\xi = \xi_z$ und damit ist $\widehat{G} = \{\xi_z : z \in \mathbb{R}\}$. Weiters gilt $\xi_{z_1+z_2}(x) = e^{2\pi i x(z_1+z_2)} = e^{2\pi i x z_1} e^{2\pi i x z_2}$. Also ist die Abbildung $\Psi : z \mapsto \xi_z$ ein Gruppenisomorphismus von $\mathbb{R}$ nach $\widehat{\mathbb{R}}$. Da jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist, bilden die Mengen der Bauart

$$U_{\epsilon,R} = \{\xi_z \in \widehat{\mathbb{R}} : |e^{2\pi i x z} - 1| < \epsilon \forall x \in \mathbb{R} : |x| \leq R\}, \quad R \in (0, \infty)$$

eine Umgebungsbasis von e in $\widehat{\mathbb{R}}$. Im Fall $\epsilon > 2$ folgt $U_{\epsilon,R} = \mathbb{R}$. Ansonsten gilt $\xi_z \notin U_{\epsilon,R}$ für $|z| \geq \frac{1}{2R}$. Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} U_{\epsilon,R} =& \Psi(\{z \in (-\frac{1}{2R}, \frac{1}{2R}) : |e^{2\pi i x z} - 1| < \epsilon \forall x \in \mathbb{R} : |x| \leq R\}) \\ =& \Psi\left(\{z \in (-\frac{1}{2R}, \frac{1}{2R}) : |e^{2\pi i R|z|} - 1| < \epsilon\}\right) \\ =& \Psi\left((\delta(\epsilon, R), \delta(\epsilon, R))\right) \end{aligned}$$

Dabei ist $\delta(\epsilon, R)$ von ϵ und R abhängig und wird beliebig klein, wenn ϵ genug klein bzw. R genug groß wird. Somit bildet Ψ eine Nullumgebungsbasis in $\mathbb{R}$ auf eine Umgebungsbasis von e in $\widehat{\mathbb{R}}$ ab und ist damit ein Homöomorphismus. Also können wir $\widehat{\mathbb{R}}$ mittels Ψ mit $\mathbb{R}$ identifizieren. Dabei schreiben wir $\langle x, \xi \rangle := e^{2\pi i x \xi}$ mit $x \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R} = \widehat{\mathbb{R}}$.

Beispiel 5.8. Betrachten wir nun $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Man sieht leicht, dass die Charaktere von G genau mit jenen Charaktern von $\mathbb{R}$ identifiziert werden können, welche auf $\mathbb{Z}$ konstant sind. Das ist genau dann der Fall, wenn $\xi \in \mathbb{Z}$ ist, denn dann gilt $e^{2\pi(x+m)\xi} = e^{2\pi x \xi} e^{2\pi m \xi} = e^{2\pi x \xi}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Also gilt $\widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$. Schließlich gilt $\langle x + \mathbb{Z}, \xi \rangle = e^{2\pi i x \xi}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Korollar 5.9. *Die Bijektion Ψ aus Satz 5.5 ist ein Homöomorphismus, wenn wir $\sigma(L^1(G)) \subseteq (L^1(G))'$ mit der schwach*-Topologie versehen.*

Beweis. Die Abbildung $\xi \mapsto \overline{\xi}$ ist klarerweise ein Homöomorphismus von $\widehat{G}$ nach $\widehat{G}$. Weiters ist die Abbildung $\xi \mapsto \Psi(\overline{\xi})$ genau die Einschränkung des Isomorphismus zwischen $L^\infty(G)$ und $(L^1(G))'$ auf $\widehat{G}$ und somit ein Homöomorphismus. $\square$

Satz 5.10. *Sei G kompakt und λ so, dass $\lambda(G) = 1$. Dann ist $\widehat{G}$ ein Orthonormalsystem in $L^2(G)$.*

Beweis. Sei $\xi \in \widehat{G}$, dann gilt $|\xi|^2 = 1$ und somit $\|\xi\|_{L^2} = 1$. Sei zusätzlich $\eta \in \widehat{G}$ mit $\eta \neq \xi$, d.h. es gibt ein $x_0 \in G$, sodass $\langle x_0, \xi\rangle \neq \langle x_0, \eta\rangle$. Damit gilt $\langle x_0, \xi\rangle\langle x_0, \eta\rangle^{-1} = \langle x_0, \xi\eta^{-1}\rangle \neq 1$ und somit:

$$\begin{aligned}\int \xi\overline{\eta}\,\mathrm{d}\lambda = \int \langle x, \xi\eta^{-1}\rangle\,\mathrm{d}\lambda(x) = \langle x_0, \xi\eta^{-1}\rangle \int \langle x_0^{-1}x, \xi\eta^{-1}\rangle\,\mathrm{d}\lambda(x)\\ =\langle x_0, \xi\eta^{-1}\rangle \int \langle x, \xi\eta^{-1}\rangle\,\mathrm{d}\lambda(x) = \langle x_0, \xi\eta^{-1}\rangle \int \xi\overline{\eta}\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

Also muss $\int \xi\overline{\eta}\,\mathrm{d}\lambda = 0$ gelten. □

Satz 5.11. *Sei G diskret. Dann ist $\widehat{G}$ kompakt. Ist G kompakt, dann ist $\widehat{G}$ diskret.*

Beweis. Wenn G diskret ist, hat $L^1(G)$ eine Einheit, nämlich die Funktion δ, welche bei e Eins ist und sonst 0. Für jedes $\xi \in \widehat{G}$ gilt

$$0 \neq \delta(1)\lambda(\{1\}) = \xi(\delta) = \xi(\delta * \delta) = \xi(\delta)\xi(\delta)$$

und somit $\xi(\delta) = 1$. Also ist 0 kein Häufungspunkt von $\widehat{G}$ bezüglich der schwach*-Topologie. Und somit ist $\widehat{G}$ als Teilmenge von $L^1(G)^*$ schwach*-abgeschlossen, also auch kompakt.

Ist nun G kompakt, dann ist die konstante 1-Funktion in L^1. Sei λ so, dass $\lambda(G) = 1$. Dann ist $\{f \in L^\infty : |\int f \cdot 1\,\mathrm{d}\lambda| > \frac{1}{2}\}$ eine schwach* offene Menge. Aus Satz 5.10 folgt, dass $\int \xi \cdot 1\,\mathrm{d}\lambda = 0$ aber $\int 1\,\mathrm{d}\lambda = 1$ ist. Und somit ist $\{1\}$ eine offene Menge von $\widehat{G}$ und damit ist $\widehat{G}$ diskret. □

5.2. **Die Fouriertransformation auf lokalkompakten abelschen Gruppen.**

Definition 5.12. Wir sind nun soweit, um die Fouriertransformation auf $L^1(G)$ zu definieren:

$$\mathcal{F}f(\xi) := \widehat{f}(\xi) := \overline{\xi}(f) = \int \overline{\langle x, \xi\rangle} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$$

Wir nennen $\widehat{f}$ die Fouriertransformierte von f.

Beispiel 5.13. Sei $G = \mathbb{R}$. In Beispiel 5.7 haben wir gesehen, dass wir $\widehat{\mathbb{R}}$ mit $\mathbb{R}$ identifizieren können. Damit erhalten wir für ein $f \in L^1(G)$:

$$\widehat{f}(\xi) = \int \overline{\langle x, \xi\rangle} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int \overline{e^{2\pi i x\xi}} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int f(x) e^{-2\pi i x\xi}\,\mathrm{d}\lambda(x)$$

Also erhalten wir die uns bereits bekannte Fourietransformation für Funktionen auf $\mathbb{R}$. Somit ist die oben definierte Fouriertransformation eine Verallgemeinerung der Fouriertransformation für Funktionen auf $\mathbb{R}$

Beispiel 5.14. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 1-periodische Funktion, sodass $f|_{[0,1]}$ Lebesgue-integrierbar ist. Dann können wir f als Funktion von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{C}$ auffassen. Da $f|_{[0,1]}$ Lebesgue-integrierbar ist und das Haar-Maß auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dem Lebesgue-Maß eingeschränkt auf $[0, 1]$ entspricht, gilt $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Nach Beispiel 5.8 gilt $\widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}$ und somit erhalten wir als Fouriertransformierte von f:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(m) = \int \overline{\langle x + \mathbb{Z}, m\rangle} f(x + \mathbb{Z})\,\mathrm{d}\lambda(x + \mathbb{Z}) = \int_0^1 \overline{e^{2\pi i x m}} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)\\ = \int_0^1 e^{-2\pi i x m} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)\end{aligned}$$

Satz 5.15. *Die Fouriertransformation ist ein $*$-Homomorphismus von $L^1(G)$ nach $C_0(\widehat{G})$. Dabei ist das Bild der Fouriertransformation eine dichte Teilmenge von $C_0(\widehat{G})$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. Weiters gilt:*

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1(G)}$$

Beweis. $\mathcal{F}$ ist klarerweise linear, die Homomorphieeigenschaft folgt aus Satz 5.5:

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \overline{\xi}(f * g) = \overline{\xi}(f)\overline{\xi}(g) = \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi).$$

Die $*$-Homomorphieeigenschaft folgt direkt aus Satz 4.14:

$$\mathcal{F}(f^*)(\xi) = \overline{\xi}(f^*) = \pi_{\overline{\xi}}(f^*)(1) = \overline{\pi_{\overline{\xi}}(f)(1)} = \overline{\overline{\xi}(f)} = \overline{\mathcal{F}(f)(\xi)}$$

Für ein festes $f \in L^1(G)$ betrachten wir nun die Abbildung $\iota(f)\colon (L^1(G))' \to \mathbb{C}$ mit $\iota(f)(h) = h(f)$ für alle $h \in (L^1(G))'$. Klarerweise ist diese Abbildung schwach* stetig, da die schwach*-Topologie genau die initiale Topologie bezüglich der Abbildungen $\iota(f)$ ist. Nun gilt aber mit der Abbildung Ψ aus Satz 5.5:

$$\widehat{f}(\xi) = \iota(f)(\Psi(\overline{\xi})) = (\iota(f) \circ \Psi \circ (x \mapsto \overline{x}))(\xi) \quad \forall \xi \in \widehat{G} \tag{5.16}$$

Somit ist $\widehat{f}$ als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig. Im Beweis von Satz 5.6 haben wir gezeigt, dass $\Psi(\widehat{G}) \cup \{0\}$ schwach*-kompakt ist. Weiters gibt es wegen der Stetigkeit von $\iota(f)$ für jedes $\epsilon > 0$ eine offene Menge U um 0 in $L^1(G)$, sodass $|\iota(f)(h)| < \epsilon$ für alle $h \in U$ ist. Da U offen ist, ist die Menge $K := \Psi(\widehat{G}) \setminus U = (\Psi(\widehat{G}) \cup \{0\}) \setminus U$ kompakt. Die Abbildungen Ψ und $x \mapsto \overline{x}$ sind sogar Homöomorphismen und somit ist die Menge $L := (\Psi \circ (x \mapsto \overline{x}))^{-1}(K)$ ebenfalls kompakt und es gilt für alle $\xi \in \widehat{G} \setminus L$, dass $\Psi(\overline{\xi}) \in U$ sein muss. Also gilt:

$$|\widehat{f}(\xi)| = |\iota(f)(\Psi(\overline{\xi}))| < \epsilon \quad \forall \xi \in \widehat{G} \setminus L$$

Damit ist $\widehat{f}$ in $C_0(\widehat{G})$.

Um die Dichtheit zu beweisen wollen wir den Satz von Stone-Weierstrass anwenden. Dazu betrachten wird die Menge

$$\mathcal{A} := \{\iota(f)|_{\Psi(\widehat{G}) \cup \{0\}} + c : f \in L^1(G), c \in \mathbb{C}\} \subseteq C(\Psi(\widehat{G}) \cup \{0\}).$$

Es gilt wegen der Homomorphieeigenschaft von $\mathcal{F}$ für $f, g \in L^1(G), c, d \in \mathbb{C}, \xi \in \widehat{G}$:

$$\begin{aligned}(\iota(f) + c)(\Psi(\xi))(\iota(g) + d)(\Psi(\xi)) =& (\widehat{f}(\overline{\xi}) + c)(\widehat{g}(\overline{\xi}) + d) \\ =& \widehat{f * g}(\overline{\xi}) + c\widehat{g}(\overline{\xi}) + d\widehat{f}(\overline{\xi}) + cd \\ =& (\iota(f * g + cg + fd) + cd)(\Psi(\xi))\end{aligned}$$

Weiters gilt auch $(\iota(f) + c)(0)(\iota(g) + d)(0) = cd = (\iota(f * g + cg + fd) + cd)(0)$ und somit gilt:

$$(\iota(f)|_{\Psi(\widehat{G}) \cup \{0\}} + c)(\iota(g)|_{\Psi(\widehat{G}) \cup \{0\}} + d) = \iota(f * g + cg + df)|_{\Psi(\widehat{G}) \cup \{0\}} + cd.$$

Also ist $\mathcal{A}$ unter Komposition abgeschlossen. Weiters ist sie auch ein Teilraum, da L^1 ein Vektorraum ist und ι linear ist. Also ist $\mathcal{A}$ eine Teilalgebra von $C(\Psi(\widehat{G}) \cup \{0\})$. Wegen der $*$-Homomorphieeigenschaft ist $\mathcal{A}$ unter Konjugation abgeschlossen:

$$(\overline{\iota(f) + c})(\Psi(\xi)) = \overline{\widehat{f}(\overline{\xi})} + \overline{c} = \widehat{f^*}(\overline{\xi}) + \overline{c} = (\iota(f^*) + \overline{c})(\Psi(\xi)) \quad \forall f \in L^1(G), \xi \in \widehat{G}$$

Weiters gilt $(\overline{\iota(f) + c})(0) = \overline{c} = (\iota(f^*) + \overline{c})(0)$. Für $\xi_1 \neq \xi_2 \in \widehat{G}$ gibt es ein $f \in L^1$, sodass mit der Notation aus Satz 5.5 gilt:

$$\iota(f)(\Psi(\xi_1)) = \widehat{f}(\overline{\xi_1}) = \xi_1(f) \neq \xi_2(f) = \iota(f)(\Psi(\xi_2))$$

Wir wissen, dass $\Psi(\xi)$ nie gleich der Nullfunktion ist, und somit gibt es für jedes $\xi \in \widehat{G}$ ein $f \in L^1(G)$, sodass $\iota(f)(\Psi(\xi)) = \Psi(\xi)(f) \neq 0 = \iota(f)(0)$. Also ist $\mathcal{A}$

punktetrennend. Da $\iota(0) + 1 = 1 \in \mathcal{A}$ ist, ist $\mathcal{A}$ nirgends verschwindend. Somit können wir den Satz von Stone-Weierstrass anwenden und erhalten, dass $\mathcal{A}$ dicht in $C(\Psi(\widehat{G}) \cup \{0\})$ bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz ist. Da $\Psi(G) \cup \{0\}$ kompakt ist stimmt die Topologie der kompakten Konvergenz mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz überein.

Nun können wir den Raum $C_0(\widehat{G})$ in den Raum $C(\Psi(\widehat{G}) \cup \{0\})$ einbetten, indem wir eine Funktion $h \in C_0(\widehat{G})$ mit H identifizieren, wobei $H|_{\Psi(\widehat{G})} := h \circ (\Psi \circ (x \mapsto \overline{x}))^{-1}$ ist, d.h. $H(\Psi(\overline{\xi})) = h(\xi)$ und $H(0) := 0$. H ist wieder stetig, da h außerhalb einer kompakten Teilmenge beliebig klein sein muss und somit in einer offenen Menge um 0 beliebig klein sein muss. Diese Einbettung κ ist bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ isometrisch. Dabei gilt nach (5.16):

$$\kappa(\mathcal{F}(L^1(G))) = \{\iota(f) : f \in L^1(G)\} = \{h \in \mathcal{A} : h(0) = 0\}$$

Somit ist $\kappa(\mathcal{F}(L^1(G)))$ dicht im abgeschlossenen Teilraum $T := \{g \in C(\Psi(\widehat{G}) \cup \{0\}) : g(0) = 0\}$ und, da $\kappa : C_0(\widehat{G}) \to \kappa(C_0(\widehat{G})) \subseteq T$ ein Homöomorphismus ist folgt daraus, dass $\mathcal{F}(L^1(G))$ dicht in $C_0(\widehat{G})$ ist.

Die Ungleichung der Normen folgt schließlich aus

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int |\overline{\langle x, \xi\rangle} f(x)| \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int |f(x)| \,\mathrm{d}\lambda(x) = \|f\|_{L^1}$$

□

Zwei wichtige Eingeschaften der Fouriertransformation sind:

Proposition 5.17.

$$\widehat{L_y f}(\xi) = \overline{\langle y, \xi\rangle} \widehat{f}(\xi) \quad \forall f \in L^1(G), y \in G, \xi \in \widehat{G}, \tag{5.18}$$

$$\widehat{\eta f}(\xi) = L_\eta \widehat{f}(\xi) \quad \forall f \in L^1(G), \xi, \eta \in \widehat{G} \tag{5.19}$$

Beweis.

$$\widehat{L_y f}(\xi) = \int \overline{\langle x, \xi\rangle} f(y^{-1}x) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int \overline{\langle yx, \xi\rangle} f(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \overline{\langle y, \xi\rangle} \widehat{f}(\xi)$$

$$\widehat{\eta f}(\xi) = \int \overline{\langle x, \xi\rangle} \langle x, \eta\rangle f(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int \overline{\langle x, \eta^{-1}\xi\rangle} f(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) = L_\eta \widehat{f}(\xi)$$

□

5.3. **Satz von Bochner.** In diesem Kapitel charakterisieren wir die Funktionen von positivem Typ mittels einer Darstellung durch ein Integral eines endlichen nichtnegativen Riesz-regulären Maßes auf $\widehat{G}$.

Definition 5.20. $M(\widehat{G})$ sei die Menge aller komplexwertiger Riesz-regulärer Maße auf $\widehat{G}$. Sei $\mu \in M(\widehat{G})$. Dann definieren wir

$$\phi_\mu \colon G \to \mathbb{C}, x \mapsto \int \langle x, \xi\rangle \,\mathrm{d}\mu(\xi).$$

Satz 5.21. *Die Abbildung $\mu \mapsto \phi_\mu$ ist eine lineare injektive Abbildung von $M(\widehat{G})$ in den Raum der beschränkten stetigen Funktionen auf G. Weiters gilt $\|\phi_\mu\|_\infty \leq \|\mu\|$.*

Beweis. Um die Stetigkeit von ϕ_μ zu beweisen, sei $\epsilon > 0$ und $x_0 \in G$ beliebig. Da μ auf allen offenen Mengen und insbesondere auf $\widehat{G}$ von innen regulär ist, gibt es eine kompakte Menge $K \subseteq \widehat{G}$, sodass $\mu(\widehat{G} \setminus K) < \frac{\epsilon}{4}$ gilt. Weiters gibt es, da alle

$\xi \in \widehat{G}$ stetige Abbildungen sind, für jedes $\xi \in K$ eine Umgebung V_ξ von e in G, sodass gilt:

$$|\langle x, \xi\rangle - \langle 1, \xi\rangle| = |\langle x, \xi\rangle - 1| < \frac{\epsilon}{4\mu(K)} \quad \forall x \in V_\xi$$

Da G lokalkompakt ist, können wir V_ξ kompakt wählen. Wir betrachten nun die offenen Mengen $U_\xi := N(\xi, \frac{\epsilon}{4\mu(K)}, V_\xi) \subseteq \widehat{G}$ aus Definition 4.35. Klarerweise gilt $\bigcup_{\xi \in K} U_\xi \supseteq K$ und somit gibt es endlich viele $\xi_1, ..., \xi_n$ in K, sodass $\bigcup_{j=1}^n U_{\xi_j} \supseteq K$. Die Menge $V := \cap_{j=1}^n V_{\xi_j}$ ist damit eine kompakte Umgebung von e. Für jedes $\xi \in K$ gibt es also ein $j \in \{1, ..., n\}$, sodass $\xi \in U_{\xi_j}$. Also erhalten wir für ein beliebiges $x \in V \subseteq V_{\xi_j}$:

$$|\langle x, \xi\rangle - 1| \leq |\langle x, \xi\rangle - \xi_j(x)| + |\xi_j(x) - 1| \leq 2\frac{\epsilon}{4\mu(K)} = \frac{\epsilon}{2\mu(K)}$$

Insgesamt ergibt sich für ein beiebiges $x \in x_0V$:

$$\begin{aligned}
|\phi_\mu(x) - \phi_\mu(x_0)| \leq& \int |\langle x, \xi\rangle - \langle x_0, \xi\rangle| \,\mathrm{d}\mu(\xi) = \int |\langle x_0^{-1}x, \xi\rangle - 1| \,\mathrm{d}\mu(\xi) \\
\leq& \int_K |\langle x_0^{-1}x, \xi\rangle - 1| \,\mathrm{d}\mu(\xi) + 2\mu(\widehat{G} \setminus K) \\
\leq& \mu(K)\frac{\epsilon}{2\mu(K)} + 2\mu(\widehat{G} \setminus K) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

Also ist ϕ_μ für jedes $\mu \in M(\widehat{G})$ stetig. Die Linearität von $\mu \mapsto \phi_\mu$ folgt aus der Tatsache:

$$\int \langle x, \xi\rangle \,\mathrm{d}(\mu_1 + c\mu_2)(\xi) = \int \langle x, \xi\rangle \,\mathrm{d}\mu_1(\xi) + c\int \langle x, \xi\rangle \,\mathrm{d}\mu_2(\xi)$$

Sei nun $\phi_\mu = 0$, dann gilt:

$$0 = \int\int f(x)\langle x, \xi\rangle \,\mathrm{d}\mu(\xi) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int\int f(x)\langle x, \xi\rangle \,\mathrm{d}\lambda(x) \,\mathrm{d}\mu(\xi) = \int \widehat{f}(\xi^{-1}) \,\mathrm{d}\mu(\xi)$$

für jedes $f \in L^1(G)$. Wenn $\mu \neq 0$ wäre, folgt aus dem Darstellungssatz von Riesz, dass es eine Funktion $f \in C_c(\widehat{G}) \subseteq C_0(\widehat{G})$ gibt, sodass $\int f \,\mathrm{d}\mu \neq 0$ ist. Da aber $\mathcal{F}(L^1(G))$ dicht im $C_0(\widehat{G})$ liegt, ist dies ein Widerspruch und somit $\mu = 0$, also ist die Abbildung auch injektiv. Die Beschränktheit und die Ungleichung für die Normen folgt aus

$$|\phi_\mu(x)| \leq \int |\langle x, \xi\rangle| \,\mathrm{d}|\mu|(\xi) = \int 1 \,\mathrm{d}|\mu|(\xi) = |\mu|(G) = \|\mu\| \quad \forall x \in G.$$

□

Lemma 5.22. *Sei $f \in L^1(G)$ und λ ein Riesz-reguläres Borelmaß. Dann ist das Maß $f\lambda$ mit $(f\lambda)(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\lambda$ ein Riesz-reguläres endliches Maß. Das heißt $f\lambda \in M(G)$.*

Beweis. Klarerweise ist $f\lambda$ ein endliches Maß mit $|f\lambda|(G) \leq \|f\|_{L^1(G)}$. Um die Regularitätseigenschaften zu zeigen sei $\epsilon > 0$ beliebig. Nach Proposition 3.8 liegt $C_c(G)$ dicht in $L^1(G)$ und somit gibt es ein $g \in C_c(G)$, sodass $\||f| - g\| < \frac{\epsilon}{2}$. Sei $K := \mathrm{supp}(g)$ kompakt und A eine beliebige Borelmenge. Dann gilt $\lambda(K \cap A) \leq \lambda(K) < \infty$. Somit gibt es, wegen der äußeren Regularität von λ eine offene Menge $U \supseteq K \cap A$ mit $\lambda(U \setminus (K \cap A)) < \frac{\epsilon}{2\|g\|_\infty}$. Insgesamt erhalten wir für die offene

Menge $U \cup K^c$:

$$
\begin{aligned}
|f\lambda|((U \cup K^c) \setminus A) = & \int\limits_{(U\cup K^c)\setminus A} |f| \,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_{(U\cup K^c)\setminus A} |f| - g \,\mathrm{d}\lambda + \int\limits_{(U\cup K^c)\setminus A} g \,\mathrm{d}\lambda \\
\leq & \| |f| - g \|_{L^1} + \int\limits_{U\setminus(K\cap A)} g \,\mathrm{d}\lambda \leq \frac{\epsilon}{2} + \|g\|_\infty \frac{\epsilon}{2\|g\|_\infty} = \epsilon
\end{aligned}
$$

Da ϵ und A beliebig waren, ist $f\lambda$ von außen regulär. Sei nun U eine offene Menge. Da $\lambda(U \cap K) \leq \lambda(K) < \infty$ gilt und λ von außen regulär ist, gibt es eine offene Menge $V \supseteq U \cap K$ mit $\lambda(V) < \infty$. Klarerweise gilt dann auch $\lambda(U \cap V) < \infty$ und $U \cap V \supseteq U \cap K$. Da λ auf allen offenen Mengen von innen regulär ist, gibt es eine kompakte Menge $L \subseteq U \cap V \subseteq U$ mit $\lambda((U \cap V) \setminus L) < \frac{\epsilon}{2\|g\|_\infty}$. Damit erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
|f\lambda|(U \setminus L) = & \int\limits_{U\setminus L} |f| \,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_{U\setminus L} |f| - g \,\mathrm{d}\lambda + \int\limits_{U\setminus L} g \,\mathrm{d}\lambda < \frac{\epsilon}{2} + \int\limits_{U\cap K\setminus L} g \,\mathrm{d}\lambda \\
\leq & \frac{\epsilon}{2} + \|g\|_\infty \lambda(U \cap K \setminus L) \leq \frac{\epsilon}{2} + \|g\|_\infty \lambda(U \cap V \setminus L) \\
< & \frac{\epsilon}{2} + \|g\|_\infty \frac{\epsilon}{2\|g\|_\infty} = \epsilon
\end{aligned}
$$

Also ist $f\lambda$ auch auf allen offenen Mengen von innen regulär. $\square$

Proposition 5.23. *Seien $f, g \in L^1(\widehat{G})$, λ ein Riesz-reguläres Borelmaß auf $\widehat{G}$ und es gelte für alle $x \in G$:*

$$\int \langle x, \xi \rangle f(\xi) \,\mathrm{d}\lambda(\xi) = \int \langle x, \xi \rangle g(\xi) \,\mathrm{d}\lambda(\xi)$$

Dann gilt $f = g$.

Beweis. Nach Lemma 5.22 sind die Maße $f\lambda$ und $g\lambda$ in $M(\widehat{G})$. Damit gilt:

$$\phi_{f\lambda}(x) = \int \langle x, \xi \rangle f(\xi) \,\mathrm{d}\lambda(\xi) = \int \langle x, \xi \rangle g(\xi) \,\mathrm{d}\lambda(\xi) = \phi_{g\lambda}(x) \quad \forall x \in G$$

Aus Satz 5.21 folgt somit $f = g$. $\square$

Satz 5.24. *Sei $\mu \in M(\widehat{G})$ ein nichtnegatives Maß, dann ist ϕ_μ eine Funktion von positivem Typ.*

Beweis. Sei $f \in L^1(G)$ beliebig, dann folgt:

$$\begin{aligned}
\int (f^* * f)\phi_\mu \,\mathrm{d}\lambda &= \int\int \overline{f(y^{-1})} f(y^{-1}x)\phi_\mu(x)\,\mathrm{d}\lambda(y)\,\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int\int \overline{f(y)} f(yx)\phi_\mu(x)\,\mathrm{d}\lambda(y^{-1})\,\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int\int \overline{f(y)} f(yx)\phi_\mu(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int\int \overline{f(y)} f(x)\phi_\mu(y^{-1}x)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int\int\int \overline{f(y)} f(x)\langle y^{-1}x, \xi\rangle\,\mathrm{d}\mu(\xi)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int\int\int \overline{f(y)\langle y, \xi\rangle} f(x)\langle x, \xi\rangle\,\mathrm{d}\mu(\xi)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int \overline{\int f(y)\langle y, \xi\rangle\,\mathrm{d}\lambda(y)} \int f(x)\langle x, \xi\rangle\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\mu(\xi) \\
&= \int |\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\mu(\xi) \geq 0
\end{aligned}$$

Wobei hier drei mal der Satz von Fubini angewendet wurde. Die Voraussetzungen für die erste Anwendung sind erfüllt, da $f^* * f$ nach Proposition 3.19 σ-kompakten Träger hat, $|f|^* * |f| \in L^1(G)$ und ϕ_μ beschränkt ist. Für die zweite und dritte Anwendung können wir nicht den Satz 2.5 verwenden, weil $(x, \xi) \mapsto f(x)\langle x, \xi\rangle$ nicht unbedingt σ-kompakten Träger haben muss. Allerdings ist μ endlich und somit insbesondere σ-endlich. Es genügt uns also in einer Dimension einen σ-kompakten Träger zu fordern. Dies ist erfüllt, weil $x \mapsto f(x)$ und somit auch $x \mapsto f(x)\langle x, \xi\rangle$ nach Lemma 3.18 einen σ-kompakten Träger in G hat. □

Die Umkehrung liefert uns nun folgender

Satz 5.25 (Satz von Bochner)**.** *Sei $\phi \in \mathcal{P}(G)$. Dann gibt es ein eindeutiges nichtnegatives Maß $\mu_\phi \in M(\widehat{G})$ mit $\phi = \phi_{\mu_\phi}$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit von μ_ϕ folgt aus Satz 5.21. Sei nun $\phi \in \mathcal{P}(G)$ gegeben. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\|\phi\|_\infty \leq 1$, da wir ansonsten normieren können und das daraus resultierende Maß schlussendlich wieder mit der Norm multiplizieren können. Also sei $\phi \in \mathcal{P}_0$ und sei M_0 die Menge aller nichtnegativen Maße $\mu \in M(\widehat{G})$ mit $\mu(\widehat{G}) \leq 1$. Jedes $\mu \in M(\widehat{G})$ induziert eine Linearform auf $C_0(\widehat{G})$ mittels $f \mapsto \int f\,\mathrm{d}\mu$ und somit kann $M(\widehat{G})$ als Teilmenge von $(C_0(\widehat{G}))'$ betrachtet werden. Diese Teilmenge entspricht nach dem Darstellungssatz von Riesz gerade den positiven linearen Funktionalen auf $C_0(\widehat{G})$. Die positiven linearen Funktionale sind klarerweise eine bezüglich der punktweisen Konvergenz abgeschlossene Teilmenge der linearen Funktionale. Da die 1-Funktion in $L^1(G, \mu)$ beliebig gut durch Funktionen aus $C_0(\widehat{G})$ approximiert werden kann, ist die Menge P_0 der durch M_0 induzierten Funktionale gerade die Menge aller positiven Funktionale mit Abbildungsnorm kleiner oder gleich 1, also ebenfalls eine bezüglich der punktweisen Konvergenz abgeschlossene Teilmenge von $(C_0(\widehat{G}))'$. Damit ist P_0 eine schwach*-abgeschlossene Teilmenge der Einheitskugel und somit nach dem Satz von Banach-Alaoglu schwach*-kompakt. Wir können also über diese Identifikation die schwach*-Topologie auf $M(\widehat{G})$ definieren und mit dieser bildet M_0 eine konvexe, kompakte Teilmenge. Wir wollen nun zeigen, dass die Menge $K := \{\phi_\mu : \mu \in M_0\} \subseteq \mathcal{P}_0 \subseteq L^\infty(G) \simeq (L^1(G))'$ kompakt bezüglich der schwach*-Topologie von $L^\infty(G)$ ist. Dazu sei $(\phi_{\mu_i})_{i\in I}$ ein Netz in K. Dann ist $(\mu_i)_{i\in I}$ ein Netz in M_0 und somit gibt es ein Teilnetz $I_0 \subseteq I$

und ein $\mu \in M_0$, sodass $(\mu_{i_0})_{i_0 \in I_0}$ gegen μ konvergiert. Dann gilt aber für alle $f \in L^1(G)$:

$$\begin{aligned}\int f\phi_{\mu_{i_0}}\,\mathrm{d}\lambda &= \int\int f(x)\langle x,\xi\rangle\,\mathrm{d}\mu_{i_0}(\xi)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int\int f(x)\langle x,\xi\rangle\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\mu_{i_0}(\xi)\\ &= \int \underbrace{\widehat{f}}_{\in C_0(\widehat{G})}(\xi^{-1})\,\mathrm{d}\mu_{i_0}(\xi) \xrightarrow{i_0\in I_0} \int \widehat{f}(\xi^{-1})\,\mathrm{d}\mu(\xi) = \int f\phi_\mu\,\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

Also konvergiert $\phi_{\mu_{i_0}}$ gegen ϕ_μ und somit ist K kompakt. Weiters ist K konvex, weil M_0 konvex ist. Wir wollen nun zeigen, dass K alle Extrempunkte von $\mathcal{P}_0$ enthält. Nach Proposition 4.33 sind das genau alle Extrempunkte von $\mathcal{P}_1$ zusammen mit 0. $\phi_0 = 0$ ist in K enthalten. Nach Satz 4.31 ist $\phi \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ genau dann, wenn π_ϕ irreduzibel ist. Das bedeutet aber genau, dass π_ϕ durch einen Charakter ξ_ϕ dargestellt werden kann. Aus Satz 4.26 folgt, dass es einen zyklischen Vektor $u \in \mathbb{C}$ gibt, sodass gilt:

$$\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)u, u\rangle = \xi_\phi(x)|u|^2 = (|u|^2\xi_\phi)(x)$$

Da $\phi \in \mathcal{P}_1$ ist, muss $\|\phi\|_\infty = 1$ und somit $|u| = 1$ gelten. Also gilt $\widehat{G} = \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$. Klarerweise ist $\widehat{G}$ in K enthalten. Denn für $\xi \in \widehat{G}$ ist das Diracmaß δ_ξ, welches auf der Menge $\{\xi\}$ eins und auf $\{\xi\}^c$ null ist, in M_0 enthalten und es gilt: $\phi_{\delta_\xi} = \xi \in K$. Also ist K eine kompakte, konvexe Menge, welche $\mathcal{E}(\mathcal{P}_0)$ enthält. Da für $f \in L^1(G)$ die Faltung $f^* * f \in L^1(G)$ ist, ist auch $\mathcal{P}_0$ schwach*-abgeschlossen und als Teilmenge der Einheitskugel somit kompakt. Zusätzlich ist er konvex und eine Teilmenge des lokalkonvexen Raumes $L^\infty(G)$. Also können wir den Satz von Krein-Milman anwenden und erhalten, dass $K = \mathcal{P}_0$ ist. Somit gibt es ein $\mu \in M_0$ mit $\phi = \phi_\mu$. □

5.4. **Rücktransformationsformel für Funktionen aus $\mathcal{B}^1$.** In diesem Abschnitt leiten wir eine Rücktransformationsformel für eine gewisse Teilmenge von $L^1(G)$ her. Diese wird dann Grundlage für die allgemeine Rücktransformationsformel sein. Im Weiteren werden wir folgende Räume verwenden:

Definition 5.26.

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}(G) := \{\phi_\mu : \mu \in M(\widehat{G})\} \subseteq C(G)$$

Für $p \in [1,\infty)$ definieren wir weiters:

$$\mathcal{B}^p := \mathcal{B}^p(G) := \mathcal{B}(G) \cap L^p(G)$$

Korollar 5.27. $\mathcal{P}(G) \subseteq \mathcal{B}(G)$

Beweis. Folgt direkt aus dem Satz von Bochner. □

Lemma 5.28. *Sei $K \subseteq \widehat{G}$ kompakt. Dann gibt es ein $f \in C_c(G) \cap \mathcal{P}$ mit $\widehat{f} \geq 0$ auf $\widehat{G}$ und $\widehat{f} > 0$ auf K.*

Beweis. Sei zunächst $h \in C_c(G)$ mit $\widehat{h}(1) = 1$ beliebig und sei $g = h^* * h$. Da die Fouriertransformation ein $*$-Homomorphismus ist, folgt $\widehat{g} = \overline{\widehat{h}}\widehat{h} = |\widehat{h}|^2 \geq 0$. Daraus folgt, dass $\widehat{g}(1) = 1$ und somit gibt es eine Umgebung V von e in $\widehat{G}$, sodass $\widehat{g} > 0$ auf V. Die Vereinigung aller ξV für $\xi \in K$ überdeckt klarerweise K und somit gibt es endlich viele $\xi_1, ..., \xi_n$, sodass $\bigcup_{j=1}^n \xi_j V \supseteq K$ ist. Wir betrachten nun die Abbildung

$$f := (\sum_{j=1}^n \xi_j)g$$

Dann gilt mit (5.19):

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \widehat{\xi_j g}(\xi) = \sum_{j=1}^{n} (L_{\xi_j}\widehat{g})(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \widehat{g}(\xi_j^{-1}\xi)$$

Da es für jedes $\xi \in K$ ein $j \in \{1...n\}$ gibt, sodass $\xi_j^{-1}\xi \in V$ ist, ist $\widehat{f} > 0$ auf K. Natürlich gilt sowieso $\widehat{f} \geq 0$. Nach Korollar 4.19 ist $g \in \mathcal{P}$ und somit können wir g nach Korollar 4.27 stetig wählen. Es gilt:

$$g(x) = h^* * h(x) = \int \overline{h(y)} h(yx) \, \mathrm{d}\lambda(y)$$

und somit ist $\operatorname{supp}(g) \subseteq \operatorname{supp}(f)\operatorname{supp}(f)^{-1}$. Denn aus $g(x) \neq 0$ folgt, dass es ein $y \in \operatorname{supp}(f)$ geben muss, sodass $yx \in \operatorname{supp}(f)$ ist. Das bedeutet aber, dass $x \in \operatorname{supp}(f)y^{-1} \subseteq \operatorname{supp}(f)\operatorname{supp}(f)^{-1}$. Da sowohl die Multiplikation als auch die Inversenbildung stetig sind, ist $\operatorname{supp}(g)$ kompakt und somit $g \in C_c(G) \cap \mathcal{P}$. Somit ist auch $f \in C_c(G) \cap \mathcal{P}$, denn es gilt:

$$\begin{aligned}\int f a^* * a \, \mathrm{d}\lambda &= \sum_{j=1}^{n} \int \int a(x)\overline{a(y)\xi_j(y)}\xi_j(x) g(y^{-1}x) \, \mathrm{d}\lambda(y) \, \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \sum_{j=1}^{n} g(\xi_j a)^* * (\xi_j a) \geq 0 \quad \forall a \in L^1(G)\end{aligned}$$

□

Lemma 5.29. *Für $f, g \in \mathcal{B}^1$ gilt $\widehat{f}\mu_g = \widehat{g}\mu_f$, das heißt, dass $\int_B \widehat{f} \, \mathrm{d}\mu_g = \int_B \widehat{g}\mu_f$ für alle Borelmengen B ist.*

Beweis. Sei $h \in L^1(G)$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\int \widehat{h} \, \mathrm{d}\mu_f &= \int \int \langle x^{-1}, \xi \rangle h(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) \, \mathrm{d}\mu_f(\xi) = \int \int \langle x^{-1}, \xi \rangle \, \mathrm{d}\mu_f(\xi) h(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int \phi_{\mu_f}(x^{-1}) h(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) = \int h(x) f(x^{-1}) \, \mathrm{d}\lambda(x) = h * f(1)\end{aligned}$$

Hier haben wir den Satz von Fubini verwendet. Die Voraussetzungen sind erfüllt, da $|h| \in L^1(G)$ ist, μ_f endlich ist und da h einen σ-kompakten Träger in G hat. Ersetzen wir in der obigen Gleichung h mit $h * g$ und mit $h * f$ und verwenden die Kommutativität und die Assoziativität der Faltung, so erhalten wir für ein beliebiges $h \in L^1(G)$:

$$\int \widehat{h}\widehat{g} \, \mathrm{d}\mu_f = \int \widehat{h * g} \, \mathrm{d}\mu_f = (h * g) * f(1) = (h * f) * g(1) = \int \widehat{h * f} \, \mathrm{d}\lambda_g = \int \widehat{h}\widehat{f} \, \mathrm{d}\lambda_g$$

Weiters ist klar, dass die Abbildungen $\psi \mapsto \int \psi\widehat{g} \, \mathrm{d}\mu_f$ und $\psi \mapsto \int \psi\widehat{f} \, \mathrm{d}\mu_g$ beide beschränkt und linear und somit stetig auf $C_0(\widehat{G})$ sind. Da $\mathcal{F}(L^1)$ dicht in $C_0(\widehat{G})$ ist folgt die Aussage. □

Lemma 5.30. *Sei X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und seien $\mu, \nu \in M(X)$ und es gelte $\int \phi \, \mathrm{d}\mu = \int \phi \, \mathrm{d}\nu$ für alle $\phi \in C_c(X)$, so gilt $\mu = \nu$.*

Beweis. Sei A eine beliebige messbare Menge und $\epsilon > 0$. Dann gibt es wegen der äußeren Regularität von μ und ν eine offene Menge $U \supseteq A$, sodass $(|\mu|+|\nu|)(U \setminus A) < \frac{\epsilon}{3}$ gilt. Weiters gibt es, wegen der inneren Regularität auf offenen Mengen von μ und ν eine kompakte Menge $K \subseteq U$ mit $(|\mu| + |\nu|)(U \setminus K) < \frac{\epsilon}{3}$. Weiters gibt es nach Lemma 2.14 eine Funktion $\phi \in C_c(\widehat{G})$, sodass $\operatorname{supp}(\phi) \subseteq U$, $0 \leq \phi \leq 1$ und $\phi = 1$ auf K gilt. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
|(\mu-\nu)(A)| =& |(\mu-\nu)(K) + (\mu-\nu)(A \setminus K) - (\mu-\nu)(K \setminus A)| \\
\leq& \left| \underbrace{\int \phi \,\mathrm{d}\mu - \int \phi \,\mathrm{d}\nu}_{0} - \left(\int\limits_{U \setminus K} \phi \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_{U \setminus K} \phi \,\mathrm{d}\nu \right) \right| \\
&+ (|\mu| + |\nu|)(U \setminus K) + (|\mu| + |\nu|)(U \setminus A) \\
\leq& 2(|\mu| + |\nu|)(U \setminus K) + (|\mu| + |\nu|)(U \setminus A) < \epsilon
\end{aligned}$$

Da ϵ beliebig war folgt $\mu(A) = \nu(A)$ und da A beliebig war folgt $\mu = \nu$. □

Satz 5.31 (Rücktransformationsformel für Funktionen aus $\mathcal{B}^1$)**.** *Sei $f \in \mathcal{B}^1$. Dann ist $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$ und für ein geeignet skaliertes Haar-Maß $\widehat{\lambda}$ auf $\widehat{G}$ gilt $\mu_f = \widehat{f}\widehat{\lambda}$. Dabei hängt die Skalierung des Maßes $\widehat{\lambda}$ nur von der Wahl des Haar-Maßes auf G ab. Die zweite Aussage bedeutet:*

$$f(x) = \int \langle x, \xi \rangle \widehat{f}(\xi) \,\mathrm{d}\widehat{\lambda}(\xi) \quad \forall x \in G$$

Beweis. Zunächst konstruieren wir uns ein translationsinvariantes positves lineares Funktional auf $C_c(\widehat{G})$. Sei dazu $\psi \in C_c(\widehat{G})$. Nach Lemma 5.28 gibt es ein $f \in L^1(G) \cap \mathcal{P}$ mit $\widehat{f} > 0$ auf $\operatorname{supp}(\psi)$. Sei $I : C_c(\widehat{G}) \to \mathbb{C}$ mit

$$I(\psi) = \int\limits_{\operatorname{supp}(\psi)} \frac{\psi}{\widehat{f}} \,\mathrm{d}\mu_f.$$

Nach dem Satz von Bochner ist $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ und somit ist f insbesondere in $\mathcal{B}^1$ enthalten. Sei g eine weitere Funktion aus $\mathcal{B}^1$ mit $\widehat{g} > 0$ auf $\operatorname{supp}(\psi)$. Dann gilt nach Lemma 5.29:

$$\int\limits_{\operatorname{supp}(\psi)} \frac{\psi}{\widehat{f}} \,\mathrm{d}\mu_f = \int\limits_{\operatorname{supp}(\psi)} \frac{\psi}{\widehat{f}\widehat{g}} \widehat{g} \,\mathrm{d}\mu_f = \int\limits_{\operatorname{supp}(\psi)} \frac{\psi}{\widehat{f}\widehat{g}} \widehat{f} \,\mathrm{d}\mu_g = \int\limits_{\operatorname{supp}(\psi)} \frac{\psi}{\widehat{g}} \,\mathrm{d}\mu_g.$$

Also ist die Definition von $I(\psi)$ unabhängig von der gewählten Funktion $f \in \mathcal{B}^1$, solange $f > 0$ auf $\operatorname{supp}(\psi)$ ist. Seien nun $\psi_1 \in C_c(\widehat{G})$, $\psi_2 \in C_c(\widehat{G})$ und $c \in \mathbb{C}$. Dann gibt es nach Lemma 5.28 ein $f \in \mathcal{B}^1$ mit $\widehat{f} > 0$ auf $\operatorname{supp}(\psi_1) \cup \operatorname{supp}(\psi_2)$ und damit folgt:

$$\begin{aligned}
I(\psi_1 + c\psi_2) &= \int\limits_{\operatorname{supp}(\psi_1 + c\psi_2)} \frac{\psi_1 + c\psi_2}{\widehat{f}} \,\mathrm{d}\mu_f = \int\limits_{\operatorname{supp}(\psi_1) \cup \operatorname{supp}(\psi_2)} \frac{\psi_1 + c\psi_2}{\widehat{f}} \,\mathrm{d}\mu_f \\
&= \int\limits_{\operatorname{supp}(\psi_1) \cup \operatorname{supp}(\psi_2)} \frac{\psi_1}{\widehat{f}} \,\mathrm{d}\mu_f + c \int\limits_{\operatorname{supp}(\psi_1) \cup \operatorname{supp}(\psi_2)} \frac{\psi_2}{\widehat{f}} \,\mathrm{d}\mu_f \\
&= \int\limits_{\operatorname{supp}(\psi_1)} \frac{\psi_1}{\widehat{f}} \,\mathrm{d}\mu_f + c \int\limits_{\operatorname{supp}(\psi_2)} \frac{\psi_2}{\widehat{f}} \,\mathrm{d}\mu_f = I(\psi_1) + cI(\psi_2),
\end{aligned}$$

also ist I linear. Sei $\psi \geq 0$ und $f \in L^1(G) \cap \mathcal{P}$ mit $\widehat{f} > 0$ auf $\operatorname{supp}(\psi)$, dann folgt, da $f \in \mathcal{P}$ ist, aus dem Satz von Bochner, dass μ_f ein nichtnegatives Maß ist. Insgesamt erhalten wir $I(\psi) \geq 0$ und somit, dass I ein positives lineares Funktional ist. Sei nun $g \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ beliebig. Dann ist $\mu_g \in M(\widehat{G})$ nach dem Satz von Bochner ein nichtnegatives Maß, welches nicht trivial ist, weil $g \neq 0$ ist. Es gilt also $\mu_g(G) > 0$. Da $\mu_g \in M(\widehat{G})$ auf allen offenen Mengen und somit auf G von innen regulär ist, gibt es eine kompakte Menge K mit $\mu_g(K) > 0$. Nach Proposition 2.14 gibt es ein $\psi : \widehat{G} \to [0,1]$ mit $\psi(K) = \{1\}$ und mit $\psi \in C_c(\widehat{G})$. Da $\widehat{g}$ stetig ist gilt $\widehat{g}\psi \in C_c(\widehat{G})$. Wir erhalten mit Lemma 5.29:

$$I(\widehat{g}\psi) = \int\limits_{\operatorname{supp}(\psi)} \frac{\psi}{\widehat{f}}\widehat{g}\,\mathrm{d}\mu_f = \int\limits_{\operatorname{supp}(\psi)} \frac{\psi}{\widehat{f}}\widehat{f}\,\mathrm{d}\mu_g = \int\limits_{\operatorname{supp}(\psi)} \psi\,\mathrm{d}\mu_g \tag{5.32}$$
$$\geq \int\limits_K \psi\,\mathrm{d}\mu_g = \mu_g(K) > 0$$

und somit, dass I nichttrivial ist. Nun wollen wir noch zeigen, dass I translationsinvariant ist. Sei dazu $\eta \in \widehat{G}$, dann gilt:

$$\phi_{A \mapsto \mu_f(\eta A)} = \int \langle x, \xi\rangle\,\mathrm{d}\mu_f(\eta\xi) = \int \langle x, \eta^{-1}\xi\rangle\,\mathrm{d}\mu_f(\xi) = \overline{\langle x, \eta\rangle} f(x) = (\overline{\eta} f)(x)$$

und somit $(A \mapsto \mu_f(\eta A)) = \mu_{\overline{\eta} f}$. Weiters wissen wir aus Lemma 5.17, dass $\widehat{(\overline{\eta} f)} = \widehat{f}(\xi \mapsto \eta\xi)$ ist. Wenn wir $f \in \mathcal{B}^1$ so wählen, dass $\widehat{f} > 0$ auf $\operatorname{supp}(\psi) \cup \operatorname{supp}(L_\eta\psi)$ gilt, erhalten wir somit:

$$I(L_\eta\psi) = \int\limits_{\operatorname{supp}(L_\eta\psi)} \frac{\psi(\eta^{-1}\xi)}{\widehat{f}(\xi)}\,\mathrm{d}\mu_f(\xi) = \int\limits_{\operatorname{supp}(\psi)} \frac{\psi(\xi)}{\widehat{f}(\eta\xi)}\,\mathrm{d}\mu_f(\eta\xi)$$
$$= \int\limits_{\operatorname{supp}(\psi)} \frac{\psi(\xi)}{\widehat{(\overline{\eta} f)}(\xi)}\,\mathrm{d}\mu_{\overline{\eta} f}(\xi) = I(\psi)$$

Wobei die letzte Gleichheit gilt, da $\overline{\eta} f \in \mathcal{B}^1$ und

$$\widehat{\overline{\eta} f}(\xi) = \widehat{f}(\eta\xi) > 0 \quad \forall \xi \in \{\xi : \eta\xi \in \operatorname{supp}(L_\eta\psi)\} = \operatorname{supp}(\psi).$$

Also ist I auch translationsinvariant. Somit gibt es nach Lemma 3.13 ein Haar-Maß $\widehat{\lambda}$, sodass $I(\psi) = \int \psi\,\mathrm{d}\widehat{\lambda}$ für alle $\psi \in C_c(\widehat{G})$ gilt. Also gilt für ein $f \in \mathcal{B}^1$ und ein $\psi \in C_c(\widehat{G})$ unter Anwendung von (5.32):

$$\int \psi\widehat{f}\,\mathrm{d}\widehat{\lambda} = I(\psi\widehat{f}) = \int\limits_{\operatorname{supp}(\psi)} \psi\,\mathrm{d}\mu_f = \int \psi\,\mathrm{d}\mu_f \leq \|\psi\|_\infty \|\mu_f\|$$

Da $\widehat{f}$ stetig und beschränkt ist, ist die Menge $U := \{\xi \in \widehat{G} : |\widehat{f}(\xi)| > 0\}$ offen und die Mengen $K_n := \{\xi \in \widehat{G} : |\widehat{f}|(\xi) \geq \frac{1}{n}\}$ sind kompakt. Nach Lemma 2.14 gibt es Funktionen $\phi_n \in C_c(\widehat{G})$, sodass $\phi_n = 1$ auf K_n, $0 \leq \phi_n \leq 1$ und $\operatorname{supp}(\phi_n) \subseteq U$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Weiters können wir die ϕ_n so wählen, dass sie monoton steigend sind. Da $\operatorname{supp}(\phi_n) \subseteq U$ gilt, ist die Funktion, welche außerhalb von U konstant 0 ist und innerhalb gleich $\phi_n \frac{|\widehat{f}|}{\widehat{f}}$ ist, in $C_c(\widehat{G})$ enthalten. Damit erhalten wir unter Verwendung des Satzes der monotonen Konvergenz:

$$\int |\widehat{f}|\,\mathrm{d}\widehat{\lambda} = \int\limits_U |\widehat{f}|\,\mathrm{d}\widehat{\lambda} = \int \lim_{n\to\infty} \phi_n |\widehat{f}|\,\mathrm{d}\widehat{\lambda} = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n |\widehat{f}|\,\mathrm{d}\widehat{\lambda} = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n \frac{|\widehat{f}|}{\widehat{f}} \widehat{f}\,\mathrm{d}\widehat{\lambda}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int \phi_n \frac{|\widehat{f}|}{\widehat{f}}\,\mathrm{d}\mu_f \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\phi_n\|_\infty \|\mu_f\| = \|\mu_f\| < \infty$$

Also ist $\widehat{f} \in L^1$. Damit ist $\widehat{f}\widehat{\lambda}$ nach Lemma 5.22 in $M(\widehat{G})$ enthalten. Mit Lemma 5.30 erhalten wir $\widehat{\widehat{f}\widehat{\lambda}} = \mu_f$. Somit folgt auch:

$$f(x) = \phi_{\mu_f}(x) = \int \langle x, \xi\rangle\,\mathrm{d}\mu_f(\xi) = \int \langle x, \xi\rangle \widehat{f}\,\mathrm{d}\widehat{\lambda}(\xi)$$

□

5.5. **Dualitätssatz von Pontrjagin.** In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass lokalkompakte abelsche Gruppen in einem gewissen Sinne reflexiv sind, das heißt, dass die Bidualgruppe einer lokalkompakten abelschen Gruppe wieder die Gruppe selbst ist. Da wir λ am Anfang dieses Kapitels fixiert haben, können wir nun für diesen Abschnitt ein Haar-Maß $\widehat{\lambda}$ auf $\widehat{G}$ so fixieren, dass Satz 5.31 gilt.

Zunächst wollen wir die Fouriertransformation auch auf dem Raum $L^2(G)$ definieren:

Satz 5.33 (Satz von Plancherel)**.** *Es gibt einen eindeutigen isometrischen Isomorphimus $\mathcal{F}$ von $L^2(G,\lambda)$ nach $L^2(\widehat{G},\widehat{\lambda})$, welcher die Fourietransformation auf $L^1(G)\cap L^2(G)$ fortsetzt. Wir nennen diesen ebenfalls Fouriertransformation.*

Beweis. Sei $f\in L^1(G)\cap L^2(G)$, dann ist $f*f^*$ nach Korollar 4.19 in $L^1(G)\cap\mathcal{P}\subseteq\mathcal{B}^1$. Wegen der $*$-Homomorphieeigenschaft der Fouriertransformation von $L^1(G)$ nach $C_0(\widehat{G})$ gilt $\widehat{f*f^*}=\widehat{f}\widehat{f}^*=|\widehat{f}|^2$. Damit folgt mit Satz 5.31:

$$\int |f|^2\,\mathrm{d}\lambda = f*f^*(1) = \int \langle 1,\xi\rangle \widehat{f*f^*}(\xi)\,\mathrm{d}\widehat{\lambda}(\xi) = \int |\widehat{f}|^2(\xi)\,\mathrm{d}\widehat{\lambda}(\xi)$$

Also ist die Fouriertransformation von $L^1(G)\cap L^2(G)$ nach $L^2(\widehat{G})$ eine Isometrie. Somit gibt es eine eindeutige Isometrie, welche die Fouriertransformation auf $L^2(G)$ fortsetzt. Wir müssen nun nur noch zeigen, dass diese sogar ein Isomorphismus ist. Sei dazu $\psi\in L^2(\widehat{G})$ orthogonal auf alle $\widehat{f}$ mit $f\in L^1(G)\cap L^2(G)$. Da mit f auch L_xf für jedes $x\in G$ in $L^1(G)\cap L^2(G)$ liegt, folgt mit (5.18):

$$0=\int \psi\overline{\widehat{L_xf}}\,\mathrm{d}\widehat{\lambda} = \int \langle x,\xi\rangle\psi(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi)}\,\mathrm{d}\widehat{\lambda}(\xi)$$

Da nach der Hölder-Ungleichung $\psi\overline{\widehat{f}}\in L^1(\widehat{G})$ ist, ist das Maß $\mu:=\psi\overline{\widehat{f}}\widehat{\lambda}$ mit $\mu(A):=\int_A\psi\overline{\widehat{f}}\,\mathrm{d}\widehat{\lambda}$ nach Lemma 5.22 in $M(\widehat{G})$ enthalten. Damit gilt mit obiger Gleichung $\phi_\mu(x)=0$ für alle $x\in G$. Nach Satz 5.21 folgt $\mu=0$ und somit $\psi\overline{\widehat{f}}=0$ fast sicher. Angenommen es gibt eine Borelmenge $A\subseteq\widehat{G}$ mit positivem Maß, sodass $\psi\neq 0$ auf A. Dann gibt es wegen der äußeren Regularität eine offene Obermenge O von A mit endlichem Maß. Wegen der inneren Regularität dieser offenen Obermenge muss es schließlich eine kompakte Teilmenge K von O geben, sodass $\mu(O\backslash K)<\mu(A)$ ist und somit $\mu(K\cap A)>0$ ist. Nach Lemma 5.28 gibt es eine Funktion $f\in L^1(G)\cap L^2(G)$, sodass $\widehat{f}>0$ auf K. Dann würde aber $\psi\overline{\widehat{f}}\neq 0$ auf $K\cap A$ gelten. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme und somit ist $\psi=0$ fast sicher. Wir haben also gezeigt, dass das Bild der Fouriertransformation von $L^1(G)\cap L^2(G)$ dicht in $L^2(\widehat{G})$ liegt und somit muss, da das isometrische Bild eines vollständigen metrischen Raumes wieder vollständig ist, die Fortsetzung surjektiv sein. $\square$

Lemma 5.34. *Seien $\phi,\psi\in C_c(\widehat{G})$. dann gibt es ein $h\in\mathcal{B}^1(G)$, sodass $\phi*\psi=\widehat{h}$.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildungen f, g und h mit

$$f(x):=\int\langle x,\xi\rangle\phi(\xi)\widehat{\lambda}(\xi)$$

$$g(x):=\int\langle x,\xi\rangle\psi(\xi)\widehat{\lambda}(\xi)$$

$$h(x):=\int\langle x,\xi\rangle(\phi*\psi)(\xi)\widehat{\lambda}(\xi)$$

Da die Abbildungen ϕ, ψ und $(\phi*\psi)$ in $L^1(\widehat{G})$ sind, sind die Maße $\phi\widehat{\lambda}$, $\psi\widehat{\lambda}$ und $(\phi*\psi)\widehat{\lambda}$ nach Lemma 5.22 in $M(\widehat{G})$ und damit sind die Abbildungen f, g und h in

$\mathcal{B}(G)$. Für ein $k \in L^1(G) \cap L^2(G)$ gilt weiters mit dem Satz von Plancherel:

$$\begin{aligned}\left|\int f\overline{k}\,\mathrm{d}\lambda\right| &= \left|\int\int \langle x,\xi\rangle\phi(\xi)\overline{k}(x)\widehat{\lambda}(\xi)\lambda(x)\right| = \left|\int \phi(\xi)\int \langle x,\xi\rangle\overline{k}(x)\lambda(x)\widehat{\lambda}(\xi)\right| \\ &= \left|\int \phi\overline{\widehat{k}}\,\mathrm{d}\widehat{\lambda}\right| \leq \|\phi\|_{L^2(\widehat{G})}\|\widehat{k}\|_{L^2(\widehat{G})} = \|\phi\|_{L^2(\widehat{G})}\|k\|_{L^2(G)}\end{aligned}$$

Dabei haben wir den Satz von Fubini angewendet. Dies dürfen wir, da ϕ einen kompakten Träger in $\widehat{G}$ hat und $k \in L^1(G)$ ist und somit einen σ-kompakten Träger in G hat. Da $L^1(G) \cap L^2(G)$ dicht in $L^2(G)$ liegt, folgt $f \in L^2(G)$. Analog folgt $g \in L^2(G)$. Weiters gilt:

$$\begin{aligned}h(x) &= \int\int \langle x,\xi\rangle\phi(\xi\eta^{-1})\psi(\eta)\,\mathrm{d}\widehat{\lambda}(\eta)\widehat{\lambda}(\xi) \\ &= \int\int \langle x,\xi\eta\rangle\phi(\xi)\psi(\eta)\,\mathrm{d}\widehat{\lambda}(\xi)\widehat{\lambda}(\eta) = f(x)g(x) \quad \forall x \in G\end{aligned}$$

Dabei durften wir den Satz von Fubini wegen Proposition 3.19 anwenden. Somit ist $h \in L^1(G)$ und damit in $\mathcal{B}^1(G)$. Mit Satz 5.31 erhalten wir somit:

$$\int \langle x,\xi\rangle(\phi*\psi)(\xi)\widehat{\lambda}(\xi) = h(x) = \int \langle x,\xi\rangle\widehat{h}(\xi)\widehat{\lambda}(\xi) \quad \forall x \in G$$

Nach Satz 5.21 folgt schließlich, da sowohl $\phi*\psi$ als auch $\widehat{h}$ in $L^1(\widehat{G})$ liegen, $\phi*\psi = \widehat{h}$. □

Lemma 5.35. *Sei H eine Untergruppe von G, sodass H versehen mit der Spurtopologie lokalkompakt ist. Dann ist H abgeschlossen.*

Beweis. Wegen der Lokalkompaktheit gibt es eine Umgebung U von e in G, sodass der Abschluss $K := \overline{U \cap H}^H$ kompakt in H ist. Dann ist K aber auch kompakt in G und somit abgeschlossen in G. Also muss $K = \overline{U \cap H}^G$ gelten. Sei nun $x \in \overline{H}$ gegeben. Dann gibt es ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in H, welches gegen x konvergiert. Sei V eine Umgebung von e, sodass $VV \subseteq U$. Da $\overline{H}$ eine Untergruppe ist, ist $x^{-1} \in \overline{H}$ und somit gilt $Vx^{-1} \cap H \neq \emptyset$. Sei $y \in Vx^{-1} \cap H$. Dann gibt es einen Index $i_0 \in I$, sodass $x_i \in xV$ ist und damit auch $yx_i \in (Vx^{-1})(xV) = VV \subseteq U$ für alle $i \succcurlyeq i_0$. Da $yx_i \in H$ für alle $i \in I$ ist, gilt $yx_i \in U \cap H \subseteq K$ für alle $i \succcurlyeq i_0$. Klarerweise konvergiert yx_i gegen yx und damit gilt $yx \in K \subseteq H$. Dann gilt aber auch $x = y^{-1}yx \in HH = H$. Also ist H abgeschlossen. □

Satz 5.36 (Dualitätssatz von Pontrjagin)**.** *Die Abbildung $\Phi : G \to \hat{\hat{G}}$ mit*

$$\langle\xi,\Phi(x)\rangle = \Phi(x)(\xi) = \xi(x) = \langle x,\xi\rangle$$

ist ein homöomorpher Isomorphismus.

Beweis. Klarerweise ist $\Phi(x)$ für jedes $x \in G$ ein Charakter auf $\widehat{G}$. Nach dem Satz von Raikov-Gelfand(Satz 4.41) ist die Menge aller Charaktere punktetrennend und somit ist Φ injektiv. Um zu zeigen, dass Φ ein Homöomorphismus ist, zeigen wir, dass ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in G genau dann konvergiert, wenn $\Phi(x_i)_{i\in I}$ in $\hat{\hat{G}}$ konvergiert. Dazu zeigen wir in Schritten die Äquivalenz folgender vier Punkte:

(1) $x_i \to x \in G$.
(2) $f(x_i) \to f(x) \quad \forall f \in \mathcal{B}^1(G)$.
(3) $\int\langle x_i,\xi\rangle\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\widehat{\lambda}(\xi) \to \int\langle x,\xi\rangle\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\widehat{\lambda}(\xi) \quad \forall f \in \mathcal{B}^1(G)$.
(4) $\Phi(x_i) \to \Phi(x) \in \hat{\hat{G}}$.

Da alle $f \in \mathcal{B}^1(G)$ nach Satz 5.21 stetig sind, folgt aus (1) klarerweise (2). Wenn umgekehrt $x_i \not\to x$ gilt, dann gibt es eine Umgebung U von x, sodass es für jedes $i_0 \in I$ ein $i \succcurlyeq i_0$ mit $x_i \notin U$ gibt. Nach Proposition 2.14 gibt es eine Funktion $h \in C_c(G)$ mit $\operatorname{supp}(h) \subseteq U$, $h(x) = 1$. Da Nach Lemma 4.40 die Menge $C_c(G) \cap \mathcal{P}(G)$ dicht in $C_c(G)$ ist, gibt es somit ein $f \in C_c(G) \cap \mathcal{P} \subseteq L^1(G) \cap \mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}^1$ mit $\|f - h\|_\infty < \frac{1}{3}$. Damit folgt aber $f < \frac{1}{3}$ auf U^c und $f(x) > \frac{2}{3}$. Somit folgt $f(x_i) \not\to f(x)$ und damit (1) $\Leftrightarrow$ (2). Nach Satz 5.31 gilt für jedes $f \in \mathcal{B}^1$:

$$f(x_i) = \int \langle x_i, \xi \rangle \widehat{f}(\xi) \, \mathrm{d}\widehat{\lambda}(\xi) \quad \forall i \in I, \text{ und } f(x) = \int \langle x, \xi \rangle \widehat{f}(\xi) \, \mathrm{d}\widehat{\lambda}(\xi)$$

Also gilt auch (2) $\Leftrightarrow$ (3). Da $\Phi(y)(\xi) = \langle y, \xi \rangle$ gilt, bedeutet (3) gerade $\int \Phi(x_i) \widehat{f} \, \mathrm{d}\widehat{\lambda} \to \int \Phi(x) \widehat{f} \, \mathrm{d}\widehat{\lambda}$ für alle $f \in \mathcal{B}^1$. Die Topologie auf $\hat{\hat{G}}$ ist die schwach*-Topologie wenn wir $\hat{\hat{G}}$ als Teilmenge von $L^\infty(\widehat{G})$ auffassen. Damit folgt (3) aus (4). Nach Lemma 5.34 ist die Menge aller Faltungen von Funktionen aus $C_c(\widehat{G})$ eine Teilmenge von $\mathcal{F}(\mathcal{B}^1)$ und im Beweis von Lemma 4.40 haben wir gesehen, dass die Menge aller Faltungen von Funktionen aus $C_c(\widehat{G})$ dicht in $L^1(\widehat{G})$ ist. Also gibt es für jede Funktion $g \in L^1(\widehat{G})$ eine Funktion $f \in \mathcal{B}^1$, sodass $\|\widehat{f} - g\|_{L^1} < \epsilon$ ist. Insgesamt folgt aus (3):

$$\begin{aligned}
\left| \int \Phi(x_i) g \, \mathrm{d}\widehat{\lambda} - \int \Phi(x) g \, \mathrm{d}\widehat{\lambda} \right| \leq & \left| \int \Phi(x_i) g - \Phi(x_i) \widehat{f} \, \mathrm{d}\widehat{\lambda} \right| + \left| \int \Phi(x_i) \widehat{f} - \Phi(x) \widehat{f} \, \mathrm{d}\widehat{\lambda} \right| \\
& + \left| \int \Phi(x) \widehat{f} - \Phi(x) g \, \mathrm{d}\widehat{\lambda} \right| \\
\leq & 2 \int |g - \widehat{f}| \, \mathrm{d}\widehat{\lambda} + \epsilon \leq 3\epsilon \qquad \text{für } i \text{ genug groß.}
\end{aligned}$$

Da ϵ beliebig war, gilt somit $\int \Phi(x_i) g \, \mathrm{d}\widehat{\lambda} \to \int \Phi(x) g \, \mathrm{d}\widehat{\lambda}$. Daher gilt auch (3) $\Leftrightarrow$ (4). Insgesamt erhalten wir (1) $\Leftrightarrow$ (4) und das zeigt, dass Φ ein Homöomorphismus von G nach $\Phi(G)$ ist.

Wir müssen nun noch zeigen, dass $\Phi(G) = \hat{\hat{G}}$ gilt. Da Φ von G nach $\Phi(G)$ ein Homöomorphismus ist, ist $\Phi(G)$ wieder lokalkompakt. Also folgt mit Lemma 5.35, dass $\Phi(G)$ abgeschlossen ist. Nehmen wir nun an, dass es ein $x \in \hat{\hat{G}} \backslash \Phi(G)$ gibt. Dann können wir wegen der Abgeschlossenheit von $\Phi(G)$ eine Umgebung V von e finden, sodass $xVV \cap \Phi(G) = \emptyset$ ist. Nach Proposition 2.14 gibt es Funktionen $\phi, \psi \in C_c(\hat{\hat{G}})$, sodass $0 \leq \phi, \psi \leq 1$, $\phi(x) = \psi(1) = 1$, $\operatorname{supp}(\phi) \subseteq xV$ und $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq V$ ist. Die Funktion $y \mapsto \phi(y)\psi(y^{-1}x)$ ist eine nichtnegative stetige Funktion, welche bei $y = x$ Eins ist. Somit ist $\phi * \psi \neq 0$ und $\operatorname{supp}(\phi * \psi) \subseteq \operatorname{supp}(\phi) \operatorname{supp}(\psi) \subseteq xVV$ ist disjunkt zu $\Phi(G)$. Nach Lemma 5.34 gibt es eine Funktion $h \in \mathcal{B}^1(\widehat{G})$, sodass $\phi * \psi = \widehat{h}$. Damit erhalten wir für alle $x \in G$:

$$0 = \phi * \psi(\Phi(x^{-1})) = \widehat{h}(\Phi(x^{-1})) = \int \langle \xi, \Phi(x) \rangle h(\xi) \, \mathrm{d}\widehat{\lambda}(\xi) = \int \langle x, \xi \rangle h(\xi) \, \mathrm{d}\widehat{\lambda}(\xi)$$

Da $h \in L^1(\widehat{G})$ ist, ist das Maß $h\widehat{\lambda}$ in $M(\widehat{G})$ enthalten und somit folgt nach Satz 5.21, dass $h\widehat{\lambda} = 0$ und somit $h = 0$ fast sicher. Da h stetig ist, folgt $h = 0$. Damit würde aber $\widehat{h} = \phi * \psi = 0$ folgen. Das ist aber ein Widerspruch. Also muss $\Phi(G) = \hat{\hat{G}}$ gelten. $\square$

Schlussendlich erhalten wir noch die allgemeine Rücktransformationsformel.

Satz 5.37 (Rücktransformationsformel). *Sei $f \in L^1(G)$, sodass auch $\widehat{f} \in L^1(G)$. Dann gilt $f(x) = \hat{\hat{f}} \circ \Phi(x^{-1})$ fast sicher. Wenn f stetig ist, gilt die Gleichheit für alle $x \in G$.*

Beweis. Mithilfe des allgemeinen Transformationssatzes(Satz 2.16) gilt:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int \overline{\langle x, \xi\rangle} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int \langle x^{-1}, \xi\rangle f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int \langle x, \xi\rangle f(x^{-1})\,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int \langle \xi, \Phi(x)\rangle f(x^{-1})\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int \langle \xi, \Phi(x)\rangle f((\Phi^{-1}(\Phi(x)))^{-1})\,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int \langle \xi, y\rangle f(\Phi^{-1}(y^{-1}))\,\mathrm{d}\lambda^{\Phi}(y)\end{aligned}$$

Da nach Satz 5.36 Φ ein homöomorpher Isomorphismus ist, ist λ^{Φ} ein Haar-Maß und $f \circ \Phi^{-1}(x \mapsto x^{-1}) \in L^1(\hat{\hat{G}}, \lambda^{\Phi})$. Somit ist das Maß $f \circ \Phi^{-1}(x \mapsto x^{-1})\lambda^{\Phi}$ in $M(\hat{\hat{G}})$ und damit ist $\widehat{f} \in \mathcal{B}^1(\widehat{G})$. Nach der Rücktransformationsformel für Funktionen in $\mathcal{B}^1$ (Satz 5.31) gilt für ein geeignetes Haar-Maß $\hat{\hat{\lambda}}$ auf $\hat{\hat{G}}$:

$$\widehat{f}(\xi) = \int \langle \xi, y\rangle \hat{\hat{f}}(y)\hat{\hat{\lambda}}(y)$$

Da λ^{Φ} ebenfalls ein Haar-Maß ist, gibt es ein $c > 0$, sodass $c\lambda^{\Phi} = \hat{\hat{\lambda}}$. Dabei ist das c nicht von dem gewählten $f \in L^1(G)$ abhängig. Weiter ist auch $\hat{\hat{f}}\hat{\hat{\lambda}} \in M(\hat{\hat{G}})$ und somit gilt nach Satz 5.21:

$$f \circ \Phi^{-1}(x \mapsto x^{-1})\lambda^{\Phi} = \hat{\hat{f}}\hat{\hat{\lambda}} = \hat{\hat{f}} c\lambda^{\Phi}$$

Damit erhalten wir $f = c\hat{\hat{f}} \circ \Phi(x \mapsto x^{-1})$ λ-fast sicher. Wir müssen nur noch zeigen, dass $c = 1$ gilt. Da die Konstante c nicht von dem gewählten $f \in L^1(G)$ mit $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$ abhängt, können wir ein f aus $\mathcal{B}^1(G) \setminus \{0\}$ wählen. Aus Satz 5.31 folgt $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$ und es gilt:

$$f(x) = \int \langle x, \xi\rangle \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\widehat{\lambda}(\xi) = \int \overline{\langle \xi, \Phi(x^{-1})\rangle}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\widehat{\lambda}(\xi) = \hat{\hat{f}}(\Phi(x^{-1})) \quad \forall x \in G$$

Da $f \neq 0$ ist, muss somit $c = 1$ gelten. Ist schlussendlich f stetig, so gilt die Gleichheit überall, da $\hat{\hat{f}} \circ \Phi(x \mapsto x^{-1})$ sowieso stetig ist. □

Beispiel 5.38. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, sodass $f|_{[0,2\pi]}$ Lebesgue-integrierbar ist. Dann ist die Abbildung $g : x \mapsto f(2\pi x)$ 1-periodisch und nach Beispiel 5.14 können wir g als Abbildung von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{C}$ auffassen und erhalten mithilfe des Transformationssatzes:

$$\begin{aligned}\widehat{g}(m) &= \int_0^1 e^{-2\pi itm} g(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) = \int_0^1 e^{-2\pi itm} f(2\pi t)\,\mathrm{d}\lambda(t) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-itm} f(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)\end{aligned}$$

Sei nun angenommen, dass $\widehat{g}$ intergrierbar ist, das heißt $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(m)| < \infty$. Da wir wissen, dass das Zählmaß ξ ein Haar-Maß auf $\mathbb{Z}$ ist, können wir die Rücktransformationsformel anwenden und erhalten für ein gewisses $c > 0$:

$$f(x) = g(\frac{x}{2\pi}) = \hat{\hat{g}} \circ \Psi(-\frac{x}{2\pi}) = \int \overline{\langle -\frac{x}{2\pi}, m\rangle}\widehat{g}(m)\,\mathrm{d}c\xi(m) = c\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{ixm}\widehat{g}(m)$$

Fassen wir jeweils einen positiven und einen negativen Index zusammen so erhalten wir:

$$f(x) = c\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{ixm}\widehat{g}(m) = c\widehat{g}(0) + \frac{c}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_0^{2\pi}(e^{in(x-t)} + e^{-in(x-t)})f(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)$$

Nach dem Additionstheorem gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$e^{in(x-t)} + e^{-in(x-t)} = 2\cos(n(x-t)) = 2(\cos(nx)\cos(nt) + \sin(nx)\sin(nt))$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(x) =& c\widehat{g}(0) + \frac{c}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_0^{2\pi}(\cos(nx)\cos(nt) + \sin(nx)\sin(nt))f(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) \\ =& c\widehat{g}(0) + \frac{c}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\cos(nx)\int_0^{2\pi}\cos(nt)f(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) + \sin(nx)\int_0^{2\pi}\sin(nt)f(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) \\ =& c\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}}\cos(nx)a_n + \sin(nx)b_n\right) \end{aligned}$$

mit

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nt)f(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) \quad n = 0, 1, 2, ...$$

$$b_n := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nt)f(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) \quad n = 1, 2, ...$$

Dabei gilt die Gleichheit λ-fast sicher auf $[0, 2\pi]$. Da sowohl die linke als auch die rechte Seite 2π-periodisch sind, gilt die Gleichheit sogar auf ganz $\mathbb{R}$ fast sicher. Wenn f stetig ist, gilt sie sogar überall. Betrachten wir nun die stetige Funktion $f = 1$, so erhalten wir $\widehat{g}(m) = 0$ für alle $m \neq 0$. Damit folgt $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{Z})$ und $a_n = b_n = 0$ für $n \geq 1$ und somit ergibt sich:

$$1 = f(x) = c\frac{a_0}{2} = \frac{c}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\lambda = c$$

Somit gilt $c = 1$ und wir haben die klassische Darstellung der Fourierreihe hergeleitet.

Korollar 5.39. *Die Fouriertransformation von $L^1(G)$ nach $C_0(\widehat{G})$ ist injektiv.*

Beweis. Angenommen $f, g \in L^1(G)$ und $\widehat{f} = \widehat{g}$. Dann folgt $f - g \in L^1(G)$ und $\widehat{f-g} = \widehat{f} - \widehat{g} = 0 \in L^1(\widehat{G})$. Also können wir Satz 5.37 anwenden und erhalten:

$$f - g = \widehat{\widehat{f-g}} \circ \Phi(x \mapsto x^{-1}) = \widehat{0} \circ \Phi(x \mapsto x^{-1}) = 0$$

□

Literatur

[1] Donald L. Cohn. *Measure theory.* , 1980.
[2] Gerald B. Folland. *A course in abstract harmonic analysis.* Boca Raton, FL: CRC Press, 1995.
[3] Norbert Kusolitsch. *Measure theory and probability theory. An introduction. (Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie. Eine Einführung.).* Wien: Springer. xi, 2011.
[4] Walter Rudin. *Real and complex analysis. 3rd ed.* New York, NY: McGraw-Hill, 1987.