Toeplitz Operator

Hyuksung Kwon

18. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Trigonometrische Reihen

Sei $\mathbb{T}$ der Einheitskreis in der komplexen Ebene, d.h. die Menge der komplexen Zahlen mit Betrag 1. Wenn F eine Funktion auf $\mathbb{T}$ und f auf $\mathbb{R}$ durch

$$f(t) = F(e^{it})$$

definiert ist, dann ist f eine periodische Funktion mit der Periode 2π. Dies bedeutet, dass für alle reellen t die Identität $f(t+2\pi) = f(t)$ gilt. Wenn umgekehrt f eine Funktion auf $\mathbb{R}$ mit der Periode 2π ist, dann gibt es eine Funktion F auf $\mathbb{T}$, so dass $f(t) = F(e^{it})$ gilt. Folglich können wir Funktionen auf $\mathbb{T}$ mit 2π-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ identifizieren. Um die Schreibweise zu vereinfachen, werden wir gelegentlich $f(t)$ statt $f(e^{it})$ schreiben, selbst wenn wir f als auf $\mathbb{T}$ definiert voraussetzen. Mit diesen Vereinbarungen definieren wir $L_p(\mathbb{T})$ für $1 \leq p < \infty$ als die Klasse aller komplexen, Lebesgue messbaren, 2π-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$, deren Norm

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

endlich ist.
Anders formuliert: Wir betrachten $L^p(\mu)$, wobei μ das Lebesgue Maß auf $[0, 2\pi]$ (oder auf $\mathbb{T}$) dividiert durch 2π ist. Der Faktor $1/(2\pi)$ in der zweiten Gleichung führt in der zu entwickelnden Theorie zu formalen Vereinfachungen. Zum Beispiel ist die L_p-Norm der konstanten Funktion 1 gleich 1.

Definition 1.1.1. *Ein trigonometrisches Polynom ist eine endliche Summe der Form*

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nt + b_n \sin nt), \ (t \in \mathbb{R}), \tag{1}$$

wobei $a_0, a_1, \cdots, a_N$ *und* $b_0, b_1, \cdots, b_N$ *komplexe Zahlen sind.*

Wegen der Eulerschen Formel kann (1) auch in der Form

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$$

geschrieben werden, was in den meisten Fällen zweckmäßiger ist. Es ist klar, dass jedes trigonometrische Polynom periodisch mit der Periode 2π ist.
Wir setzen

$$u_n(t) = e^{int}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Wenn wir das innere Produkt in $L_2(\mathbb{T})$ durch

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

definieren, zeigt eine einfache Rechnung, dass

$$(u_n, u_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-m)t}\, dt = \begin{cases} 1, & \text{für } n = m \\ 0, & \text{für } n \neq m \end{cases}.$$

gilt.

1.2 Beschränkte lineare Operatoren

Definition 1.2.1 (Beschränkter linearer Operator)**.** *Die Funktion A heißt linearer Operator, wenn für alle x, y und $\alpha \in \mathbb{C}$*

1) $A(x + y) = A(x) + A(y)$,
2) $A(\alpha x) = \alpha A(x)$.

Und der lineare Operator $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ($\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ sind Hilberträume) heißt beschränkt, wenn

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < \infty.$$

Sei $f : A \to A$. Im folgenden darstellen wir $L(A)$ stets ein linearer beschränkter Operator.

Beispiel 1.2.2. Alle linearen Operatoren von einem endlichen dimensionalen Hilbertraum in einen Hilbertraum sind beschränkt. Sei $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ mit $\dim \mathcal{H}_1 < \infty$ und sei $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_1$. Dann gilt

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k \text{ und } Ax = \sum_{k=1}^{n} \langle x, \varphi_k \rangle A\varphi_k.$$

Zusätzlich

$$\|Ax\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\langle x, \varphi_k \rangle| \, \|A\varphi_k\| \leq (\sum_{k=1}^{n} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{n} \|A\varphi_k\|^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\| \, (\sum_{k=1}^{n} \|A\varphi_k\|^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ d.h.,}$$

$$\|A\| \leq (\sum_{k=1}^{n} \|A\varphi_k\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Falls $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ und $A\varphi_k = \lambda_k \varphi_k$, $1 \leq k \leq n$ dann gilt

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, \varphi_k \rangle A\varphi_k, \sum_{k=1}^{n} \langle x, \varphi_k \rangle A\varphi_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \, |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \leq M^2 \, \|x\|^2 \,, \quad M := \max_k |\lambda_k| \,. \end{aligned}$$

Das heißt $\|A\| \leq M$. Andererseits gilt, weil $\|\varphi_j\| = 1$ ist,

$$\|A\| \geq \|A\varphi_k\| = |\lambda_k| \,, \qquad k = 1, \cdots, n.$$

Also ist insgesamt

$$\|A\| = \max_k |\lambda_k| \,. \tag{2}$$

Beispiel 1.2.3. Sei $\mathcal{H} = L_2([a, b])$ und $a(t)$ eine stetige komplexwertige Funktion auf $[a, b]$. Dann definieren wir $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ als

$$(Af)(t) = a(t)f(t). \tag{3}$$

A ist linear und für $M = \max\limits_{a \leq t \leq b} |a(t)|$ gilt

$$\|Af\|^2 = \int_a^b |a(t)f(t)|^2 \, dt \leq M^2 \, \|f\|^2 \,.$$

Das heißt $\|A\| \leq M$. Jetzt zeigen wir $\|A\| = M$. Wähle $t_0 \in [a, b]$ mit $M = |a(t_0)|$ und sei $\{\varphi_n\} \in \mathcal{H}$ die Folge

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{2}}, & t \in [t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}] \cap [a, b] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt

$$\|\varphi_n\|^2 = \int\limits_{t_0-\frac{1}{n}}^{t_0+\frac{1}{n}} \frac{n}{2}\, dt = 1,$$

und wegen der Stetigkeit von $a(t)$ bei t_0, gilt

$$\|A\|^2 \geq \|A\varphi_n\|^2 = \frac{n}{2} \int\limits_{t_0-\frac{1}{n}}^{t_0+\frac{1}{n}} |a(t)|^2\, dt \to |a(t_0)|^2 .$$

Das heißt $\|A\| \geq |a(t_0)| = M$ und insgesamt $\|A\| = M$.

Beispiel 1.2.4. Sei $a(t)$ eine stetige komplexwertige Funktion auf dem abgeschlossenen Interval $[a,b]$ und definieren wir einen beschränkten linearen Operator A auf $\mathcal{H} = L_2([a,b])$ mit $(Af)(t) = a(t)f(t)$. In Beispiel 1.2.3. haben wir gezeigt, dass $\|A\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |a(t)|$. Nun betrachten wir die Invertierbarkeit des Operators. Wenn $a(t) \neq 0$ und $\forall t \in [a,b]$, dann ist A invertierbar (da $(A^{-1}g)(t) = \frac{1}{a(t)} g(t)$, und

$$\left\|A^{-1}\right\| = \max_{t\in[a,b]} \frac{1}{|a(t)|}.$$

Umgekehrt, sei A invertierbar. Jetzt ist unsere Behauptung $a(t) \neq 0,\ \forall t \in [a,b]$. Für jedes $f \in \mathcal{H}$, $\|Af\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} \|f\|$. Setzen wir $a(t_0) = 0,\ t_0 \in [c,d]$. Dann gilt

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |t - t_0| < \delta \Rightarrow |a(t)| < \epsilon.$$

Definieren wir

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t - t_0| \leq \delta \\ 0, & |t - t_0| > 0 \end{cases}.$$

Dann gilt

$$\|Af\|^2 = \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |a(t)|^2 \, |f(t)|^2 \leq \epsilon^2 \|f\|^2 .$$

Aber wenn $\epsilon < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ ist, ist das ein Widerspruch zu $\|Af\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} \|f\|$. Insgesamt gilt:

$$\text{Der beschränkte lineare Operator } A \text{ ist invertierbar} \Leftrightarrow a(t) \neq 0,\ \forall t \in [a,b]. \tag{4}$$

Nun betrachten wir die Matrixdarstellungen von beschränkten linearen Operatoren. Sei $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter linearer Operator, und $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ eine Orthonormalbasis. Dann gilt für alle $x \in \mathcal{H}$, $x = \sum_j \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j$. Weil A stetig und linear ist, können wir folgende Gleichung erhalten:

$$Ax = \sum_j \langle x, \varphi_j \rangle A\varphi_j.$$

Anstelle von x in Ax benutzen wir φ_j.

$$A\varphi_j = \sum_k \langle A\varphi_j, \varphi_k\rangle \varphi_k.$$

Wenn diese zwei Gleichungen kombiniert werden, bekommen wir

$$Ax = \sum_j \sum_k \langle x, \varphi_j\rangle \langle A\varphi_j, \varphi_k\rangle \varphi_k = \sum_k \sum_j \langle x, \varphi_j\rangle \langle A\varphi_j, \varphi_k\rangle \varphi_k.$$

Wenn $Ax = y$, impliziert die obige Gleichung

$$\begin{pmatrix} \langle A\varphi_1, \varphi_1\rangle & \langle A\varphi_2, \varphi_1\rangle & \cdots \\ \langle A\varphi_1, \varphi_2\rangle & \langle A\varphi_2, \varphi_2\rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle x, \varphi_1\rangle \\ \langle x, \varphi_2\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle y, \varphi_1\rangle \\ \langle y, \varphi_2\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Sei $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ eine Orthonormalbasis auf $\mathcal{H}$ und sei $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter linearer Operator. Dann wird die Matrix $(\langle A\varphi_j, \varphi_j\rangle)_{i,j}$ die Matrixdarstellung.

Beispiel 1.2.5. Sei $\mathcal{H} = L_2([-\pi, \pi])$ und sei $a(t)$ die beschränkte komplexwertige Lebesgue messbare Funktion auf $[-\pi, \pi]$. Definieren wir $A \in L(\mathcal{H})$ als $(Af)(t) = a(t)f(t)$. Wir bestimmen die matrixdarstellung $\{a_{jk}\}_{j,k=-\infty}^{\infty}$ von A bezüglich der Orthonormalbasis $\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Sei

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(t) e^{-int}\, dt. \tag{5}$$

Dann gilt

$$a_{jk} = \langle A\varphi_k, \varphi_j\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(t) e^{i(k-j)t}\, dt = a_{j-k}.$$

Also ist die Matrixdarstellung von A gleich

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & & \\ & \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & \\ & & \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Definition 1.2.6. *Eine Matrix der Gestalt $\{a_{j-k}\}_{j,k=-\infty}^{\infty}$ heißt eine Toeplitz Matrix.*

1.3 Invertierbare Operatoren

Definition 1.3.1. *Der Operator $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ heißt invertierbar, wenn $A^{-1} \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ mit*

$$A^{-1}Ax = x \quad \forall x \in \mathcal{H}_1$$

und

$$AA^{-1}y = y \quad \forall y \in \mathcal{H}_2$$

existiert.
Der Operator A^{-1} heißt die Inverse von A.

Natürlich hat A höchstens eine Inverse. Wenn A invertierbar ist, bildet jedes $y \in \mathcal{H}_2$ nur ein $x \in \mathcal{H}_1$ ab. D.h. wir können $Ax = y$ als $x = A^{-1}y$ darstellen.

Theorem 1.3.2. *Sei $A \in L(\mathcal{H})$ und $\|A\| < 1$. Dann ist $I - A$ invertierbar und für jedes $y \in \mathcal{H}$*

$$(I - A)^{-1}y = \sum_{k=0}^{\infty} A^k y \quad (A^0 = I). \tag{6}$$

Zusätzlich ist

$$\left\| (I - A)^{-1} - \sum_{k=0}^{n} A^k \right\| \to 0$$

und

$$\left\| (I - A)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Beweis. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ ist konvergent. Sei $y \in \mathcal{H}$, und definiere $S_n := \sum_{k=0}^{n} A^k y$. Dann gilt für $n > m$

$$\|S_n - S_m\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \left\| A^k y \right\| \leq \|y\| \sum_{k=m+1}^{n} \|A\|^k \to 0,$$

da $\sum_{k=m+1}^{\infty} \|A\|^k = \frac{\|A\|^m}{1 - \|A\|}$.
Jetzt definieren wir eine Abbildung $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit $By = \sum_{k=0}^{\infty} A^k y$. Dann ist B linear und

$$\|By\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k \|y\| = \left(\frac{1}{1 - \|A\|} \right) \|y\| .$$

Also ist $\|B\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$ und

$$\begin{aligned}
(I - A)By &= (I - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k y = \sum_{k=0}^{\infty} (I - A) A^k y \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} A^k (I - A) y = B(I - A)y \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} A^k y - \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} y = y.
\end{aligned}$$

Folglich ist $I - A$ invertierbar und $(I-A)^{-1} = B$. Schließlich ist

$$\left\|(I-A)^{-1} - \sum_{k=0}^{n} A^k\right\| = \sup_{\|y\|=1} \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} A^k y\right\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A\|^k \to 0.$$

□

Nun betrachten wir Projektionen und einseitige Invertierbarkeit von Operatoren.

Definition 1.3.3 (Direkte Summe und Projektion). *Sind M und N lineare Teilräume eines linearen Raumes X, so schreiben wir $X = M \dotplus N$, wenn gilt $M + N$, $M \cap N = \{0\}$. Man spricht in diesem Fall von einer direkten Summe. Ist auf X ein inneres Produkt gegeben und gilt zusätzlich $M \perp N$, so schreibt man $X = M \oplus N$ und spricht von einer orthogonalen Summe. Für einen Vektorraum X sei an das Konzept einer Projektion aus der Linearen Algebra erinnert. Das ist eine lineare Abbildung $P : X \to X$, für die $P^2 = P$ gilt.*

Bemerkung 1.3.4. Wenn P eine Projektion auf $\mathcal{H}$ ist, dann ist $I - P$ auch eine Projektion auf $\mathcal{H}$, da $(I-P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$.

Theorem 1.3.5. *Sei $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ein Operator und dieser Operator habe eine linksseitige Inverse $\mathcal{L}$. Dann ist* $\operatorname{ran} A$ *und* $\ker \mathcal{L}$ *abgeschlossen, und* $\operatorname{ran} A \dotplus \ker \mathcal{L} = \mathcal{H}$. *Der Operator $A\mathcal{L}$ ist eine Projektion auf* $\operatorname{ran} A$ *und* $\ker A\mathcal{L} = \ker \mathcal{L}$.

Beweis. Nach der Voraussetzung hat A eine linksseitige Inverse $\mathcal{L}$. Also ist $\ker A \subseteq \ker \mathcal{L}A = \ker I = \{0\}$. Der beschränkte Operator $A\mathcal{L}$ ist eine Projektion, da $(A\mathcal{L})^2 = A(\mathcal{L}A)\mathcal{L} = A\mathcal{L}$. Wegen $\operatorname{ran} A\mathcal{L} \subseteq \operatorname{ran} A$ und $\operatorname{ran} A = \operatorname{ran}(A\mathcal{L})A \subseteq \operatorname{ran} A\mathcal{L}$, gilt $\operatorname{ran} A\mathcal{L} = \operatorname{ran} A$. Also $\ker A\mathcal{L} \subseteq \ker \mathcal{L}A\mathcal{L} = \ker \mathcal{L}$ und $\ker \mathcal{L} \subseteq \ker A\mathcal{L}$. D.h. $\ker A\mathcal{L} = \ker \mathcal{L}$ und

$$\mathcal{H} = \operatorname{ran} A \oplus \ker \mathcal{L}. \tag{7}$$

□

Theorem 1.3.6. *Sei $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ein Operator und dieser Operator habe eine linksseitige Inverse $\mathcal{L} \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$. Wenn $B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ein Operator mit $\|A - B\| < \|\mathcal{L}\|^{-1}$ ist, dann hat B eine linksseitige Inverse*

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(I - (A-B)\mathcal{L})^{-1} = \mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{\infty} [(A-B)\mathcal{L}]^k\right) \tag{8}$$

und zusätzlich ist

$$\operatorname{codim} \operatorname{ran} B = \operatorname{codim} \operatorname{ran} A.$$

Beweis. Nach $\|A - B\| < \|\mathcal{L}\|^{-1}$ und Theorem 1.3.2 ist der Operator $I - (A-B)\mathcal{L}$ invertierbar und $(I - (A-B)\mathcal{L})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} [(A-B)\mathcal{L}]^k$. Also ist

$$\mathcal{L}_1 B = \mathcal{L}(I - (A-B)\mathcal{L})^{-1} B = \mathcal{L}(I - (A-B)\mathcal{L})^{-1} [I - (A-B)\mathcal{L}]A = \mathcal{L}A = I.$$

Nun definieren wir $C := (I - (A-B)\mathcal{L})$. Dann gilt

$$\mathcal{H}_2 = C\mathcal{H}_2 \underbrace{=}_{(7)} \operatorname{ran} CA \oplus C \ker \mathcal{L} \operatorname{ran} B \oplus C \ker \mathcal{L}.$$

Schließlich ist

$$\operatorname{codim} \operatorname{ran} B = \dim C \ker \mathcal{L} = \dim \ker \mathcal{L} = \operatorname{codim} \operatorname{ran} A.$$

□

Definition 1.3.7. *Sei $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ein Operator. Man sagt, dass A rechtsseitig invertierbar ist, wenn ein Operator $\mathcal{R} \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ mit $A\mathcal{R}$ existiert. Der Operator $\mathcal{R}$ heißt eine rechtsseitige Inverse von A.*

Theorem 1.3.8. *Sei $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ein Operator und dieser Operator habe eine rechtsseitige Inverse $\mathcal{R} \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$. Wenn $B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ein Operator mit $\|A - B\| < \|\mathcal{R}\|^{-1}$ ist, dann ist B eine rechitsseitige Inverse von A.*

$$\mathcal{R}_1 = (I - \mathcal{R}(A-B))^{-1}\mathcal{R} = \sum_{k=0}^{\infty} [\mathcal{R}(A-B)]^k \mathcal{R} \tag{9}$$

Zusätzlich ist

$$\dim \ker A = \dim \ker B.$$

Beweis. Nach $\|\mathcal{R}(A-B)\| < 1$ und Theorem 1.3.2 ist der Operator $I - \mathcal{R}(A-B)$ invertierbar und $(I - \mathcal{R}(A-B))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} [\mathcal{R}(A-B)]^k \mathcal{R}$. Also ist

$$B\mathcal{R}_1 = B(I - \mathcal{R}(A-B))^{-1}\mathcal{R} = A[(I - \mathcal{R}(A-B)][(I - \mathcal{R}(A-B))^{-1}\mathcal{R}] = A\mathcal{R} = I.$$

Nun definieren wir $C := (I - \mathcal{R}(A-B))$. Wegen $B = A[I - \mathcal{R}(A-B) = AC$ und der Invertierbarkeit von C gilt

$$\dim \ker B = \dim \ker(AC) = \dim(C^{-1} \ker A) = \dim \ker A.$$

□

2 Operatoren auf l_2

In diesem Abschnitt betrachten wir Operatoren auf $l_2(\mathbb{Z})$ bzw. $l_2(\mathbb{N})$ mit der Eigenschaften, dass die Matrix relativ zu der kanonischen Basis in diesem Raum eine besondere Struktur hat. Nämlich

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \ddots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \\ \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \textit{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Die Elemente der obigen Matrix auf den Diagonalen sind parallel zu der Hauptdiagonalen, d.h. jedes Element a_{jk} ist nur abhängig von $j - k$. Man nennt einen der ersten Gestalt Laurent Operator, einen der zweiten Gestalt Töplitz Operator.

2.1 Der Laurent Operator auf $l_2(\mathbb{Z})$

Definition 2.1.1 (Laurent Operator auf $l_2(\mathbb{Z})$)**.** *Ein Laurent Operator A ist ein beschränkter linearer Operator auf $l_2(\mathbb{Z})$ mit der Eigenschaft, dass die Matrix mit der kanonischen Orthonormalbasis $\{e_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ von $l_2(\mathbb{Z})$ die Form (10) hat. Das heißt, ein beschränkter linearer Operator A auf $l_2(\mathbb{Z})$ ist genau dann ein Laurent Operator, wenn $\langle Ae_k, e_j\rangle$ nur abhängig von $j - k$ ist.*

Lemma 2.1.2. *Ein beschränkter linearer Operator A auf $l_2(\mathbb{Z})$ ist genau dann ein Laurent Operator, wenn A mit dem bilateralen Shift auf $l_2(\mathbb{Z})$*[1] *kommutiert.*

Beweis. Sei $\{e_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ die kanonishe Orthonormalbasis auf $l_2(\mathbb{Z})$. Dann können wir nach der Definition 2.1.1 $a_{jk} = \langle Ae_k, e_j\rangle$ setzen. Nun ist

$$V(\cdots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \cdots) = (\cdots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \cdots).$$

Also ist $Ve_j = e_{j+1}$, $\forall j \in \mathbb{Z}$ und wegen der Orthonormalität $V^* = V^{-1}$.[2] Daraus folgt

$$\langle VAe_k, e_j\rangle = \langle Ae_k, V^*e_j\rangle = \left\langle Ae_k, V^{-1}e_j\right\rangle = \langle Ae_k, e_{j-1}\rangle = a_{j-1,k}, \tag{11}$$

$$\langle AVe_k, e_j\rangle = \langle Ae_{k+1}, e_j\rangle \underbrace{=}_{(11)} a_{j,k+1}.$$

Es folgt dass $VA = AV$ genau dann, wenn $\langle VAe_k, e_j\rangle = \langle AVe_k, e_j\rangle$, $j, k \in \mathbb{Z}$. Das heißt

$$A \text{ kommutiert mit } V \Leftrightarrow a_{j-1,k} = a_{j,k+1} \Leftrightarrow \; A \text{ ist ein Laurent Operator}$$

□

Proposition 2.1.3. *Sei a eine beschränkte komplexwertige Lebesgue messbare Funktion auf $[-\pi, \pi]$ und sei M der Multiplikationsoperator mit a am $L_2[-\pi, \pi]$, d.h.*

$$(Mf)(t) = a(t)f(t), \quad f \in L_2([-\pi, \pi]).$$

Dann ist der Operator $A = \mathcal{F}M\mathcal{F}^{-1}$ ein Laurent Operator, wobei $\mathcal{F}$ Fourier Transformation auf $L_2[-\pi, \pi]$ ist. Wir bezichnen A als den Laurent Operator mit Symbol a.

Beweis. Im Beispiel 1.2.3. haben wir schon gezeigt, dass M ein linearer beschränkter Operator auf $L_2[-\pi, \pi]$ ist. Die Matrix von M bezüglich der Orthonormalbasis $\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ hat nach Beispiel 1.2.6. die Gestalt (10) mit $a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} a(t)e^{-int}\, dt, \quad n \in \mathbb{Z}$. Also ist $A = \mathcal{F}M\mathcal{F}^{-1}$ ein linearer beschränkter Operator auf $l_2(\mathbb{Z})$ und die Matrix von A mit der kanonischen Orthonormalbasis von $l_2(\mathbb{Z})$ wird als die Matrix (10) dargestellt. Also ist A ein Laurent Operator. □

Bemerkung 2.1.4. Normalerweise benutzt man $a(t) = \omega(e^{it})$, wobei ω am Einheitskreis definiert ist.

Die Relation $A = \mathcal{F}M\mathcal{F}^{-1}$ ergibt auch das folgende Theorem.

Theorem 2.1.5. *Sei A der Laurent Operator mit der stetigen Funktion a. Dann ist A genau dann invertierbar, wenn $a(t) \neq 0$, $-\pi \leq t \leq \pi$. Wenn A invertierbar ist, ist A^{-1} der Laurent Operator mit der Funtion $\frac{1}{a}$. D.h. es gilt*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \ddots & b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \\ \ddots & b_1 & b_0 & b_{-1} & \ddots \\ & b_2 & b_1 & b_0 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

[1] Ein unendlichdimensionaler separabler Hilbertraum ist nach dem Satz von Fischer-Riesz isometrisch isomorph zu $I := \{(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I ; \sum_{i\in I} |a_i|^2 < \infty\}$, wobei I eine abzählbar unendliche Menge ist, zum Beispiel $I = \mathbb{Z}$ oder $I = \mathbb{N}$. Der Operator $V : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (a_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ heißt bilateraler Shiftoperator.

[2] Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Hilberträume und $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ein linearer beschränkter Operator. Der adjungierte Operator $T^* : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ ist durch die Gleichung $\langle Tx, y\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, T^*y\rangle_{\mathcal{H}_1}$ definiert.

wobei

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a(t)} e^{-int}\, dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Sei M der Multiplikationsoperator mit a auf $L_2([-\pi, \pi])$. Nach dem Beispiel 1.4. wissen wir schon, dass M invertierbar ist genau dann, wenn $a(t) \neq 0$ für $[-\pi, \pi]$. Und in diesem Fall ist M^{-1} der Multiplikationsoperator mit $b = \frac{1}{a}$. Wegen $A = \mathcal{F} M \mathcal{F}^{-1}$, ist A genau dann invertierbar, wenn M invertierbar ist. Weiters ist $A^{-1} = \mathcal{F}^{-1} M^{-1} \mathcal{F}$. □

Korollar 2.1.6. *Das Spektrum*[3] *des Laurent Operators A mit der stetigen Funktion a ist*

$$\sigma(A) = \{a(t) | -\pi \leq t \leq \pi\}. \tag{12}$$

Beweis. Setzen wir $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist $\lambda I - A$ wieder ein Laurent Operator, nämlich der Laurent Operator mit der stetigen Funktion $t \mapsto \lambda - a(t)$. Wenn wir Theorem 2.1.5 anwenden, erhalten wir

$$\lambda I - A \text{ ist nicht invertierbar} \Leftrightarrow \lambda - a(t) = 0,\ t \in [-\pi, \pi].$$

Das ist äquivalent zu

$$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda = a(t),\ t \in [-\pi, \pi].$$

□

2.2 Der Toeplitz Operator auf $l_2(\mathbb{N})$

Definition 2.2.1 (Toeplitz Operator auf $l_2(\mathbb{N})$)**.** *Sei T ein beschränkter linearer Operator auf l_2. Dann besagt die folgende Matrix*

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{13}$$

dass die rechte Seite dieser Matrix die Matrix bezüglich T und die kanonische Orthonormalbasis e_1, e_2, $\cdots$ in l_2 ist. Man sagt, dass T ein Toeplitz Operator ist, wenn

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall beziehen wir uns auf der diesen Matrix als Standardmatrix-Darstellung. Denken wir, dass $e_j = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$, wo der erscheint in des j-th Elements. Dann ist T genau dann ein Toeplitz Operator, wenn $\langle Te_k, e_j \rangle$ nur abhängig von $j - k$ ist.

Lemma 2.2.2. *Sei S der Rechtsshift. Ein Operator T auf $l_2(\mathbb{N})$ ist genau dann ein Toeplitz Operator, wenn $T = S^*TS$ ist.*

[3] Sei A eine Algebra mit Einselement. Für $a \in A$ heißt $\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (a - \lambda I) \text{ ist nicht invertierbar}\}$ das Spektrum von a.

Beweis. Sei T eine Matrix (13). Dann gilt für alle $j, k = 1, 2, \cdots$

$$\langle S^*TSe_k, e_j\rangle = \langle TSe_k, Se_j\rangle = \langle TSe_{k+1}, e_{j+1}\rangle = a_{k+1,j+1}.$$

Das heißt

$$T = S^*TS \Leftrightarrow a_{kj} = a_{k+1,j+1} \Leftrightarrow T \text{ ist ein Toeplitz Operator.}$$

□

Jetzt überlegen wir uns, ob das Produkt der Zwei Toeplitz Operatoren wieder ein Toeplitz Operator ist. Sei S der rechtsshift und sei S^* der Linksshift. Beide Operatoren sind Toeplitz Operatoren. Dann ist S^*S identischer Operator auf l_2 und

$$SS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Also ist $SS^* \neq S^*S$, d.h. S und S^* sind nicht normal und das Produkt der zwei Toeplitz Operatoren ist kein Toeplitz Operator. Aber für jedes $n \geq 0$ und $m \geq 0$ gilt

$$(S^*)^m S^n = \begin{cases} (S^*)^{m-n}, & m \geq n, \\ S^{n-m}, & n \geq m \end{cases}. \tag{14}$$

In der Folge identifizieren wir den Raum l_2 mit dem abgeschlossenen Teilraum von $l_2(\mathbb{Z})$ aus allen Folgen $(\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, so dass $\xi_j = 0$ für $j \leq -1$ und bezeichnen mit P_{l_2} die orthogonale Projektion von $l_2(\mathbb{Z})$ auf l_2. Mit einer beschränkten komplexwertigen Funktion auf $\mathbb{T}$ können wir einen Toeplitz Operator auf $l_2(\mathbb{N})$ assoziieren. Für eine solche Funktion ω betrachte den Laurent Operator mit Symbol ω, und setze

$$T = P_{l_2} A|_{l_2}, \tag{15}$$

Dann ist T ein beschränkter linearer Operator auf l_2. Weiters ist T ein Toeplitz Operator[4].

Nun betrachten wir einen Toeplitz Operator mit stetigem Symbol ω.

Theorem 2.2.3. *Die Norm des Toeplitz Operators mit stetigem Symbol ω ist gegeben durch*

$$\|T\| = \max_{|\lambda|=1} |\omega(\lambda)|.$$

Beweis.
" $\leq$ " $\quad \|T\| = \|PA\| \leq \|A\| = \max_{-\pi\leq t\leq\pi} |a(t)| = \max_{|\lambda|=1} |\omega(\lambda)|.$
" $\geq$ " Jetzt ist unsere Behauptung $\|T\| \geq \|A\|$. Sei $\mathcal{H}_N$, $N \in \mathbb{N}_0$ der abgeschlossene Teilraum von $l_2(\mathbb{Z})$ aus allen Folgen $(\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, so dass $\xi_j = 0$ für $j \leq -N-1$. Dann gilt $\mathcal{H}_0 = l_2$ und $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2 \subset \cdots$. Bezeichnen wir mit $P_{\mathcal{H}_N}$ die orthogonale Projektion von $l_2(\mathbb{Z})$ nach $\mathcal{H}_N$, dann gilt für jedes $x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ in $l_2(\mathbb{Z})$

$$\|x - P_{\mathcal{H}_N} x\|^2 = \sum_{j=-\infty}^{-N-1} |\xi_j|^2 \to 0 \quad (N \to \infty). \tag{16}$$

[4] Sei $A = \sum_{n=N}^{N} a_n t^n$, $t \in \mathbb{T}$ ein Laurent Polynom. Dann nach der Projektion wird A als $\sum_{n=0}^{N} a_n t^n$ sein. D.h. PA ist ein Toeplitz Operator.

Wenn $\cdots, e_1, e_0, e_1, \cdots$ die kanonische Basis auf $l_2(\mathbb{Z})$ ist, ist $e_{-N}, e_{-N+1}, e_{-N+2}, \cdots$ eine Orthonormalbasis auf $\mathcal{H}_N$. Daraus folgt, dass wie (15) mit diesen Basen die Matrix von $P_{\mathcal{H}_N}A|_{\mathcal{H}_N}$ durch

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

gegeben ist, d.h. $\|P_{\mathcal{H}_N}A|_{\mathcal{H}_N}\| = \|T\|$ für jedes N.

Nun fixieren wir $\epsilon > 0$ und wählen $x \in l_2(\mathbb{Z})$, sodass $\|x\| = 1$ und $\|Ax\| > \|A\| - \epsilon$. Wegen (16) gilt $P_{\mathcal{H}_N}x \to x$ und $P_{\mathcal{H}_N}Ax \to Ax$ für $N \to \infty$. Also können wir ein positives N' mit $x' = P_{\mathcal{H}'_N}x$ finden und es gelten folgende Eigenschaften.

$$0 \neq \left\|x'\right\| < 1 + \epsilon, \ \left\|Ax'\right\| > \|A\| - \epsilon.$$

Natürlich gilt nach (15) das auch $P_{\mathcal{H}_N}Ax' \to Ax'$ für $N \to \infty$. Daraus folgt $\exists N'' \geq N'$, $\left\|P_{\mathcal{H}''_N}Ax'\right\| > \|A\| - \epsilon$. Wegen $x' \in \mathcal{H}'_N$ und $N'' \geq N'$ gilt $x' \in \mathcal{H}''_N$ und

$$\left\|P_{\mathcal{H}''_N}A|_{\mathcal{H}''_N}\right\| \geq \frac{\left\|P_{\mathcal{H}''_N}Ax'\right\|}{\|x'\|} > \frac{\|A\| - \epsilon}{1 + \epsilon}.$$

Also ist $\|T\| > \frac{\|A\|-\epsilon}{1+\epsilon}$. Weil ϵ beliebig war, ist $\|T\| \geq \|A\|$. $\square$

2.3 Band Toeplitz Operatoren

Seien $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p, q \geq 0$. Dann heißt eine Matrix A eine Bandmatrix der Bandbreite $l = p + q + 1$, falls für ihre Elemente a_{ij} gilt:

$$a_{ij} = 0 \text{ für } j + p < i \text{ oder } i + q < j.$$

Neben der Hauptdiagonale sind also nur p der unteren und q der oberen Nebendiagonalen besetzt.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(q+1)} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ a_{(p+1)1} & & \ddots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & & a_{(n-q)n} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{n(n-p)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

In diesem Abschnitt betrachten wir die Invertierbarkeit eines Toeplitz Operators mit einem Symbol ω von der Gestalt

$$\omega(\lambda) = \sum_{k=-p}^{q} \lambda^k a_k, \qquad \forall p, q \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Die Matrix eines solchers Operators ist eine Bandmatrix. Daher spricht man auch von einem Band Töplitz Operator.

Lemma 2.3.1. *Der Band Töplitz Operator R mit Symbol $\omega(\lambda) = \sum_{k=-p}^{q} \lambda^k a_k$, $\forall p, q \in \mathbb{N}$ ist gegeben als*

$$R = a_{-p}S^{*p} + \cdots + a_{-1}S^* + a_0 I + a_1 S + \cdots + a_q S^q.$$

Beweis. $\omega(\lambda) = a_{-p}\lambda^{-p} + \cdots + a_{-1}\lambda^{-1} + a_0 + a_1\lambda^1 + \cdots + a_q\lambda^q$. In dieser Gleichung sind $-p, \cdots, -1$ negativ, so nach (14) ist $(S^*)^m S^n = S^{n-m}$. Natürlich sind $1, \cdots, q$ positiv, so verwenden wir $(S^*)^m S^n = (S^*)^{m-n}$. Also

$$R := a_{-p}S^{*p} + \cdots + a_{-1}S^* + a_0 I + a_1 S + \cdots + a_q S^q.$$

□

Wir wissen schon $S^*S = I$, sodass der Operator $R(a + bS)$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$ wieder ein Band Toeplitz Operator ist. Natürlich ist das Symbol R gegeben durch $\omega(\lambda)(a + \lambda b)$. Ähnlich ist $(c + dS^*)R$, $\forall c, d \in \mathbb{C}$ ein Toeplitz Operator und sein Symbol ist die Funktion $(c + d\lambda^{-1})\omega(\lambda)$. Aber wegen des Theorem 2.2.1 sind $(a + bS)R$ und $R(c + dS^*)$ im Allgemeinen keine Toeplitz Operatoren.

Eine Funktion ω der Gestalt (17) kann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\omega(\lambda) = c\lambda^{-r}(\lambda - \alpha_1)\cdots(\lambda - \alpha_l)(\lambda - \beta_1)\cdots(\lambda - \beta_m), \; c \neq 0, \; r > 0, \tag{18}$$

wobei $\alpha_1, \cdots \alpha_l \in \mathbb{C}$ im offenen Einheitskreis[5] sind und $\beta_1, \cdots \beta_m \in \mathbb{C}$ auf dem Rand des abgeschlossenen Einheitskreises oder im Äußeren des abgeschlossenen Einheitskreis[6] sind.

Sei $k := l - r$. Wenn $\omega(\lambda) \neq 0$, $\forall |\lambda| = 1$ (d.h $|\beta_j|$, $1 \leq j \leq m$), so ist k die Anzahl der Umläufe der Kurve $t \mapsto \omega(e^{it})$, $-\pi \leq t \leq \pi$, um der Nullpunkt. Man spricht daher von der Windungszahl bezüglich 0. Wählt man ein stetiges Argument $\arg \omega(e^{it})$, so ist

$$k = \frac{1}{2\pi}[\arg \omega(e^{it})]_{t=-\pi}^{\pi}.$$

Die Frage nach der Invertierbarkeit eines Band Töplitz Operators wird durch den folgenden Theorem beantwortet.

Theorem 2.3.2. *Sei ω eine Funktion der Gestalt (17), und T der Band Toeplitz Operator mit Symbol ω. Schreibe ω in der Form (18), und setzt $k := l - r$. Dann gilt*

(i) Fall $k \geq 0$: $\quad T = c\prod_{i=1}^{l}(I - \alpha_i S^*)S^k \prod_{j=1}^{m}(S - \beta_j I).$

(ii) Fall $k \leq 0$: $\quad T = c\prod_{i=1}^{l}(I - \alpha_i S^*)(S^*)^{-k} \prod_{j=1}^{m}(S - \beta_j I).$

[5] Die Menge von Punkten, deren Abstand von 0 kleiner als 1 ist, d.h $D_1(0) := \{Q : |Q| < 1\}$.

[6] $\{Q : |Q| > 1\}$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\omega(\lambda) = \sum_{k=-q}^{p} \lambda^k a_k &= c\lambda^{-r}(\lambda-\alpha_1)\cdots(\lambda-\alpha_l)(\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_m) \\
&= c\lambda^{-r}\prod_{i=1}^{l}(\lambda-\alpha_i)\prod_{j=1}^{m}(\lambda-\beta_j) \\
&= c\lambda^{-r}\prod_{i=1}^{l}\left(\frac{\lambda-\alpha_i}{\lambda}\right)\lambda^l\prod_{j=1}^{m}(\lambda-\beta_j) \\
&= c\prod_{i=1}^{l}(I-\alpha_i\lambda^{-1})\lambda^{l-r}\prod_{j=1}^{m}(\lambda-\beta_j) \\
&= c\prod_{i=1}^{l}(I-\alpha_i\lambda^{-1})\lambda^{k}\prod_{j=1}^{m}(\lambda-\beta_j) =: S
\end{aligned}$$

Sei $k := l - r \geq 0$. Nach (14) ist $(S^*)^m = S^{n-m}$, d.h. Der Band Toeplitz Operator mit Symbol S ist

$$T = c\prod_{i=1}^{l}(I-\alpha_i S^*)S^k\prod_{j=1}^{m}(S-\beta_j I).$$

Die Beweis von (ii) ist analog. $\square$

Lemma 2.3.3. *Für $|\alpha| < 1$ und $|\beta| > 1$ sind die Operatoren $I - \alpha S^*$ und $S - \beta I$ invertierbar, und*

$$(I-\alpha S^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \cdots \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix},$$

$$(S-\beta I)^{-1} = -\beta\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \beta^{-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \beta^{-2} & \beta^{-1} & 1 & 0 & \\ \beta^{-3} & \beta^{-2} & \beta^{-1} & 1 & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Für $|\alpha| = |\beta| = 1$ sind die Operatoren $I - \alpha S^*$ und $S - \beta I$ nicht invertierbar.

Beweis. Für $|\alpha| < 1$ gilt $\|\alpha S^*\| < 1$. Nach dem Theorem 1.3.2 ist $I - \alpha S^*$ invertierbar und wegen $S - \beta I = -\beta(I - \beta^{-1}S)$ ist $S - \beta I$ auch invertierbar. Und wenn $A = 1$ ist, geht die Rechtsseite von (6) gegen unendlich. Also die Operatoren die Operatoren $I - \alpha S^*$ und $S - \beta I$ werden nicht invertierbar für $|\alpha| = |\beta| = 1$ sein. $\square$

Theorem 2.3.4. *Sei T der Band Toeplitz Operator mit Symbol ω wie in* (18) *und setze $k := l - r$.*
(i) Der Operator T ist linksseitig invertiervar, genau dann wenn $\omega(e^{it}) \neq 0$, $-\pi \leq t \leq \pi$ und $\operatorname{Im} T$ *linksseitig invertierbar, so ist* $\operatorname{codim}\operatorname{Im} T = k$, *und*

$$T^{-1} = \frac{1}{c}\prod_{j=1}^{m}(S-\beta_j I)^{-1}(S^*)^k\prod_{i=1}^{l}(I-\alpha_i S^*)^{-1}, \tag{20}$$

ist eine linksseitige Inverse von T.

(ii) T ist rechtsseitig, genau dann wenn $\omega(e^{it}) \neq 0$, $-\pi \leq t \leq \pi$ und $\operatorname{Im} T$ *linksseitig invertierbar, so ist* $\operatorname{codim} \ker T = k$, *und*

$$T^{-1} = \frac{1}{c} \prod_{j=1}^{m} (S - \beta_j I)^{-1} S^{-1} \prod_{i=1}^{l} (I - \alpha_i S^*)^{-1}, \tag{21}$$

ist eine rechtsseitige Inverse von T.

Beweis. Um das zu zeigen, teilen wir den Beweis in zwei Schritte.

Schritt 1)

Sei $\omega(e^{it}) \neq 0$ für $-\pi \leq t \leq \pi$. Daraus folgt, dass $\beta_1, \cdots, \beta_m$ im Äußeren des abgeschlossenen Einheitskreises sind, d.h. $|\beta_j| > 1$ für $j = 1, \cdots, m$.

Sei $k = l - r \geq 0$. Nach dem Theorem 2.3.2 erhalten wir

$$T = c \prod_{i=1}^{l} (I - \alpha_i S^*) S^k \prod_{j=1}^{m} (S - \beta_j I). \tag{22}$$

Wie vorhin erwähnt ist S^{l-r} der Band Toeplitz Operator mit Symbol λ^{l-r}. Also ist die rechte Seite von (22) ist der Band Toeplitz Operator mit Symbol

$$\widetilde{\omega}(\lambda) := c \prod_{i=1}^{l} (I - \alpha_i \lambda^{-1}) \lambda^{l-r} \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \beta_i).$$

Weil $\widetilde{\omega} = \omega$, gilt (22).

Nach dem Lemma 2.3.3 sind $I - \alpha_i S^*$ und $S - \beta_j I$ für $|\alpha_i| < 1$ und $|\beta_j| > 1$ invertierbar, sodass die Operatoren

$$\prod_{i=1}^{l} (I - \alpha_i S^*) \text{ und } \prod_{j=1}^{m} (S - \beta_j I) \tag{23}$$

auch invertierbar sind. Also ist der Operator T^{-1} von (20) wohldefiniert und mit $(S^*)^k S^k = I$ gilt $T^{-1} T = I$. D.h. T ist linkssetig invertierbar und T^{-1} ist eine linksseitige Inverse von T. Nach (22) und der Invertierbarkeit von (23) können wir wissen, dass

$$\operatorname{codim} \operatorname{Im} T = \operatorname{codim} \operatorname{Im} S^k = k.$$

Nun zeigen wir (ii). Sei $k \leq 0$, d.h. $l \leq r$. Nach der Produktregel, was wir schon oben verwendet haben, gilt

$$T = c \prod_{i=1}^{l} (I - \alpha_i S^*) (S^*)^{-k} \prod_{j=1}^{m} (S - \beta_j I). \tag{24}$$

Weil die Operatoren $(I - \alpha_i S^*)$ und $(S - \beta_j I)$ invertierbar sind, ist der Operator T^{-1} wohldefiniert. Und mit $(S^*)^{-k} S^{-k} = I$ gilt $T T^{-1} = I$. D.h. T ist rechtsseitig invertierbar und T^{-1} ist eine rechtssetige Inverse von T. Nach der Invertierbarkeit von (23), können wir wissen, dass

$$\operatorname{codim} \ker T = \dim \ker (S^*)^{-k} = -k.$$

Schritt 2)

Jetzt zeigen wir, dass T links oder rechtsseitig invertierbar ist. Unsere Behauptung ist $\omega(e^{it}) \neq 0$ für $-\pi \leq t \leq \pi$. Verwenden wir für unsere Behauptung die Widerspruchsannahme. Wir nehmen an, dass ω eine 0 auf dem Einheitskreis mit $|\lambda| = 1$ hat. Dann gilt $|\beta_k|$ für mindestens ein k. Wählen wir ein solches β_k und setzen wir

$$\omega_1(\lambda) := \frac{\omega(\lambda)}{\lambda - \beta_k},\ \omega_2(\lambda) := \lambda \frac{\omega(\lambda)}{\lambda - \beta_k}.$$

Dann sind ω_1 und ω_2 die Funktionen von dem gleichen Typ wie ω. Seien T_1 und T_2 die Band Toeplitz Operatoren mit den Symbolen ω_1 und ω_2. Weil

$$\omega(\lambda) = \omega_1(\lambda)(\lambda - \beta_k),\ \omega(\lambda) = (1 - \beta_k \lambda^{-1})\omega_2(\lambda),$$

erhalten wir

$$T = T_1(S - \beta_k I),\ T = (I - \beta_k S^*)T_2. \tag{25}$$

Nach des Lemma 2.3.3, ist $S - \beta_k I$ nicht invertierbar, weil $|\beta_k| = 1$. Also wird T der ersten Gleichung von (25) nicht linksseitig invertierbar sein, d.h. T muss rechtsseitig invertierbar sein. Und $(I - \beta_k S^*)$ ist rechtsseitig invertierbar, sodass $(I - \bar{\beta}_k S)$ linkssetig invertierbar ist. Aber nach dem Lemma 2.3.3 ist Letzteres nicht möglich, weil $|\beta_k| = 1$. ☐

Theorem 2.3.5. *Sei T der Band Toeplitz Operator mit Symbol ω wie in* (18) *und setze $k := l-r$ Dann ist T invertiervar, genau dann wenn $\omega(e^{it}) \neq 0$, $-\pi \leq t \leq \pi$ und $k = l - r = 0$.*
Ist T invertierbar, so gilt

$$T^{-1} = \frac{1}{c} \prod_{j=1}^{m} (S - \beta_j I)^{-1} \prod_{i=1}^{l} (I - \alpha_i S^*)^{-1}, \tag{26}$$

wobei S der Rechtsshift auf l_2 ist.

Beweis. folgt sofort aus Theorem 2.3.4. ☐

Korollar 2.3.6. *Sei ω von der Gestalt (17), und sei T der Band Toeplitz Operator mit Symbol ω. Dann ist die Resolventen Menge $\sigma(T)$ von T gleich der Menge aller Punkte $\lambda \in \mathbb{C}$ für die $\lambda \neq \omega(e^{it})$, $-\pi \leq t \leq \pi$ gilt und die Windungszahl von $\omega(\cdot) - \lambda$ bezüglich Null ist gleich Null. Zusätzlich ist der Spektralradius von T gleich der Norm von T.*

Beweis. Wir wissen schon, dass der Operator $T - \lambda I$ der Band Toeplitz Operator mit Symbol $\omega(\cdot) - \lambda$ ist. Die Behauptung über $\sigma(T)$ folgt aus Theorem 2.3.5. Weil $\omega(e^{it}) \in \sigma(T)$ für jedes $-\pi \leq t \leq \pi$, ist der Spektralradius $r(T) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\} \geq \max_{-\pi \leq t \leq \pi} \left|\omega(e^{it})\right|$. Nach dem Theorem 2.2.3 ist $\max\{\omega(e^{it})\} = \|T\|$. ☐

3 Operator auf l_p

3.1 Der Laurent Operator auf $l_p(\mathbb{Z})$

In diesem Abschnitt, setzen wir die Theorien des Laurent Operators auf $l_p(\mathbb{Z})$ mit $1 \leq p < \infty$ fort. Um die Präsentation so einfach wie möglich zu halten, muss man eine Klasse der speziellen Symbole, nämlich die analitisch in einem Kreisring um den Einheitskreis liegen wählen. Für diese Klasse der Symbole sind die Resultate unabhängig von p. Ab jetzt diskutieren wir über die linke und rechte Invertierbarkeit und betrachten die Eigenschaften von Fredholm.

Zuerst betrachten wir die Invertierbarkeit des Laurent Operators auf $l_p(\mathbb{Z})$[7] mit $1 \leq p < \infty$. Sei L so ein Operator, $x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ ein Element in $l_p(\mathbb{Z})$ und $y = (y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ ein Element mit

$$Lx = y,\ y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}x_k,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{27}$$

Zusätzlich nehmen wir an, dass die Konstante $C \geq 0$ und $0 \leq \rho < 1$ existieren, sodass

$$|a_n| \leq c\rho^{|n|},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{28}$$

Dann ist der Operator L wohldefiniert und beschränkt. Um die Wohldefiniertheit zu zeigen, stellen wir Lx mit bilateralem Shiftoperator auf $l_p(\mathbb{Z})$ dar. Sei V ein folgender Operator:

$$V((x_j)_{j\in\mathbb{Z}}) = (x_{j-1})_{j\in\mathbb{Z}}.$$

Natürlich ist V invertierbar und $\|V^n\| = 1$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

Jetzt ist unsere Behauptung

$$Lx = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu V^\nu x,\ x \in l_p(\mathbb{Z}).$$

Weil

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (V^\nu x)_n = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu x_{n-\nu} \underbrace{=}_{\nu:=n-k} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}x_k = (Lx)_n,$$

ist unsere Behauptung gezeigt.

Der Beweis der Beschränktheit ist nicht schwierig.

$$\|Lx\| \leq \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |a_\nu| \, \|V^\nu x\| \underbrace{\leq}_{\|V^\nu\|=1} (\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |a_\nu|) \, \|x\| \,.$$

Also L ist beschränkt und $\|L\| \leq \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |a_\nu|$.

Nun überlegen wir uns die folgende komplexe Funktion:

$$\alpha(\lambda) = \sum_{n=\infty}^{\infty} a_n \lambda^n, \quad \lambda \in \mathbb{T} \tag{29}$$

Wir stellen fest, dass die Bedingung (28) äquivalent zu der Forderung, dass α analytisch in einem Kreisring mit dem Einheitskreis sein muss. Wir können den Koefizient a_n von (29) durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(e^{it}) e^{-int}\, dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

finden. Nennen wir α das Symbol des Laurent Operators L.

Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller komplexwertigen Funktion α auf dem Einheitskreis, die sich auf einige analytische Kreisringe mit dem Einheitskreis befinden. Dann ist $\mathcal{A}$ abgeschlossen bezüglich der Addition und Multiplikation der Funktion. Also wenn $\alpha \in \mathcal{A}$ ist und nicht auf dem Einheitskreis verschwindet, gehört α^{-1} zu $\mathcal{A}$, wobei $\alpha^{-1}(\lambda) = 1/\alpha(\lambda)$, $\forall \lambda \in \mathbb{T}$.

[7] $l_p(\mathbb{Z})$ ist ein Banachraum.

Theorem 3.1.1. *Sei L_α der Laurent Operator auf $l_p(\mathbb{Z})$ mit $\alpha \in \mathcal{A}$. Dann gilt,*

$$L_\alpha \text{ist invertierbar} \Leftrightarrow L_\alpha \text{ verschwindet nicht auf dem Einheitskreis} .$$

Und zusätzlich gilt $(L_\alpha)^{-1} = L_{\alpha^{-1}}$.

Beweis. Zuerst betrachten wir $(L_\alpha)^{-1} = L_{\alpha^{-1}}$, falls L_α nicht auf dem Einheitskreis verschwindet.(Widerspruchsannahme!)

Schritt 1.

Es ist zweckmäßig, dass für jedes α und β in $\mathcal{A}$

$$L_\alpha L_\beta = L_{\alpha\beta} \tag{30}$$

gezeigt wird. Um (30) zu beweisen genügt es zu zeigen, dass $L_\alpha L_\beta e_j = L_{\alpha\beta} e_j$, wobei $e_j = (\delta_{jn})_{n\in\mathbb{Z}}$ Kronecker delta ist. Wegen $L_\beta e_j = (b_{n-j})_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $b_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \beta(e^{it})e^{-int}\,dt,\ n \in \mathbb{Z}$ (L ist ein Laurent Operator!), können wir nach der Formel (27) folgendes erhalten:

$$(L_\alpha L_\beta e_j)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} b_{k-j}. \tag{31}$$

Die rechte Seite von (31) ist gleich dem Koeffizient γ_{n-j} von λ^{n-j} in der Laurent Reihenentwicklung von $\gamma(\lambda) := \alpha(\lambda)\beta(\lambda)$, d.h.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} b_{k-j} = (L_{\alpha\beta} e_j)_n.$$

Also haben wir (12) gezeigt.

Nun nehmen wir an, dass α nicht auf $\mathbb{T}$ verschwindet und setzen $\beta = \alpha^{-1}$. Wegen (30) erhalten wir

$$L_\alpha L_{\alpha^{-1}} = I,\ L_{\alpha^{-1}} L_\alpha = I,$$

wobei ein I identischer Operator auf $L_p(\mathbb{Z})$ ist. Also $(L_\alpha)^{-1} = L_{\alpha^{-1}}$.

Schritt 2.

Nun betrachten wir die umgekehert Richtung. Sei L_α invertierbar. Unsere Behauptung ist $\alpha(\lambda) \neq 0$ für jedes $\lambda \in \mathbb{T}$. Um diese Behauptung zu zeigen, machen wir die Widerspruchsannahme. Sei $\alpha(\lambda_0) = 0$ für $\lambda_0 \in \mathbb{T}$ und setzen wir $\epsilon := \left\|L_\alpha^{-1}\right\|^{-1}$. Dann wird nach dem Theorem 1.3.6 ein Operator $\tilde{L}$ auf $l_p(\mathbb{Z})$ invertierbar sein, falls $\left\|\tilde{L} - L_\alpha\right\| < \epsilon$. Und wir haben auch schon im Therorem 1.3.6 gezeigt, dass $\sum_{n=\infty}^{\infty} |a_n| < \epsilon/2$. Also können wir natürlich ein positive ganze Zahl N mit $\sum_{|n|>N}^{\infty} |a_n| < \epsilon/2$ wählen. Nun definieren wir $\alpha_n(\lambda) := \sum_{n=-N}^{N} a_n \lambda^n$ und sei L_{α_N} der Laurent Operator mit Symbol α_N. Dann gilt

$$\|L_\alpha - L_{\alpha_N}\| = \sum_{|n|>N}^{\infty} |a_n| < \epsilon/2, \tag{32}$$

$$\|\alpha(\lambda) - \alpha_N(\lambda)\| \leq \sum_{|n|>N}^{\infty} |a_n| < \epsilon/2,\ \lambda \in \mathbb{T}. \tag{33}$$

Setzen wir $\tilde{L} = L_{\alpha_N} - \alpha_n(\lambda_0)I$. Wegen (33) gilt $\alpha(\lambda_0) = 0$ d.h. $|\alpha_N(\alpha_0)| < \epsilon/2$. Dann erhalten wir nach (32) $\left\|L_\alpha - \tilde{L}\right\| < \epsilon$ und zusätzlich ist $\tilde{L}$ invertierbar. Jetzt setzen wir

$$\omega(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{-1}(\alpha_N(\lambda) - \alpha_N(\lambda_0)).$$

Weil ω eine trigonometrische Reihe ist, ist ω analytisch auf $\mathbb{T}$. Sei L_ω der entsprechende Laurent Operator. Weil $\tilde{L}$ der Laurent Operator mit Symbol $\alpha_N(\lambda) - \alpha_N(\lambda_0)$ ist, wissen wir nach (30) und $(\lambda - \lambda_0)\omega(\lambda) = \alpha_N(\lambda) - \alpha_N(\lambda_0)$, dass

$$\tilde{L} = (V - \lambda_0 I)L_\omega = L_\omega(V - \lambda_0 I). \tag{34}$$

Wegen der Invertierbarkeit von $\tilde{L}$ erhalten wir, dass $V - \lambda_0 I$ beidseitig invertierbar und λ_0 nicht im Spektrum von V ist. Aber das ist ein Widerspruch zu $|\lambda_0| = 1$, da $\sigma(V) = \mathbb{T}$. Also ist $\alpha(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{T}$. □

Bevor wir das Theorem über den Laurent Operator ansehen, betrachten wir einen Fredholm Operator.

Definition 3.1.2 (Fredholm Operator)**.** *Seien X und Y die Banachräume. Ein Operator $A \in L(X,Y)$ heißt ein Fredholm Operator, wenn die Nummer $n(A) := \dim\ker A$ und $d(A) := \operatorname{codim}\operatorname{Im} A$ endlich sind. In diesem Fall ist die Nummer*

$$\operatorname{ind} A = n(A) - d(A),$$

Wir nennen $\operatorname{ind} A$ den Index von A.

Theorem 3.1.3. *Sei L der Laurent Operator auf $l_p(\mathbb{Z})$ mit Symbol $\alpha \in \mathcal{A}$. Dann gilt*

$$L \textit{ ist invertierbar} \Leftrightarrow L \textit{ ist Fredholm.}$$

Beweis. Sei ein L Fredholm Operator. Wie Theorem 3.1.1 ist es für unsere Behauptung genug zu zeigen, dass $\alpha(\lambda) \neq 0$ für jedes $\lambda \in \mathbb{T}$. Wir verwenden dafür die Widerspruchsannahme. Sei $\alpha(\lambda_0) = 0$ für $\lambda_0 \in \mathbb{T}$. Nach dem Stabilitätstheorem für Fredholm[8] existiert $\epsilon > 0$, sodass ein Operator $\tilde{L}$ Fredholm werden kann, wenn $\left\|L - \tilde{L}\right\| < \epsilon$. Also nach des Theorem 3.1.1, ist $\tilde{L}$ Fredholm, sodass (34) gilt. D.h. der Operator $V - \lambda_0 I$ ist Fredholm. Aber das ist ein Widerspruch, weil $|\lambda_0| = 1$. Also $\alpha(\lambda) \neq 0$ für $\lambda \in \mathbb{T}$ und L ist invertierbar. □

3.2 Der Toeplitz Operator auf $l_p(\mathbb{N})$

In disem Abschnitt betrachten wir die Invertierbarkeit des Toeplitz Opertors auf dem Banachraum l_p für $1 \leq p < \infty$. Sei T so ein Operator, $x = (x_j)_{j=0}^\infty$ ein Element in l_p und $y = (y_j)_{j=0}^\infty$ ein Element mit

$$Tx = y,\ y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k}x_k,\ n = 0, 1, 2, \cdots . \tag{35}$$

Nehmen wir an, dass die Koeffizienten a_n durch

$$a_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \alpha(e^{it})e^{-int}dt,\ n \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \mathcal{A} \tag{36}$$

[8] Sei $\Phi(E,F)$ die Menge der Fredholm Operatoren E nach F. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist die Menge $\Phi_n(E,F) := \{T \in \Phi(E,F) | \operatorname{ind} T = n\}$ offen in $L(E,F)$. Insbesondere ist $\Phi(E,F)$ offen und $\operatorname{ind} : \Phi(E,F) \to \mathbb{Z}$ stetig.

gegeben sind, wobei $\alpha \in \mathcal{A}$ heißt, dass α analytisch in $\mathbb{T}$ ist. Mit anderen Worten: Es gilt für $c \geq 0$ und $0 \leq \rho < 1$, dass

$$|a_n| \leq c\rho^{|n|}, \ (n \in \mathbb{Z}). \tag{37}$$

Die Funktion α heißt das Symbol von T.

Nach (37) können wir herleiten, dass T ein beschränkter linearer Operator auf l_p ist. Um diese Behauptnung zu zeigen, bemerken wir, dass l_p als Teilraum von $l_p(\mathbb{Z})$ bestehend aus alle $(X_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, so wie $x_j = 0$ für $j < 0$ identifiziert werden kann. Sei $P : l_p(\mathbb{Z}) \to l_p$ mit $P(\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots) = (\cdots, 0, 0, x_0, x_1, \cdots)$ die Projektion. Also ist $\|P\| = 1$ und $T = PL|\operatorname{Im} P$, wobei L der Laurent Operator auf $l_p(\mathbb{Z})$ mit Symbol α ist. Also ist

$$\|T\| \leq \|L\| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty. \tag{38}$$

Sei $e_0, e_1, e_2, \cdots$ die kanonische Basis von l_p. Dann heißt (35), dass

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Also, können wir anstelle von (35) T als folgende Matrix vereinfachen.

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Nun brauchen wir eine Wiener-Hopf Faktorisierung für die Invertierbarkeit des Toeplitz Operators.

Definition 3.2.1. *Sei $\alpha \in \mathcal{A}$. Eine Faktorisierung*

$$\alpha(\lambda) = \alpha_-(\lambda)\lambda^k \alpha_+(\lambda), \ \lambda \in \mathbb{T}, \ k \in \mathbb{Z} \tag{39}$$

heißt eine Wiener-Hopf Faktorisierung von α, wenn die Funktionen α_- und α_+ in $\mathcal{A}$ liegen, nicht auf dem Einheitskreis $\mathbb{T}$ verschwinden und

(i) $\alpha_+(\cdot)^{\pm 1}$ sich zu einer Funktion, die analytisch auf dem Einheitskreis ist,
(ii) $\alpha_-(\cdot)^{\pm 1}$ sich zu einer Funktion, die analytisch im Äußeren des Einheitskreises mit der Unendlichkeit ist,
erstreckt.

Weil $\alpha \in \mathcal{A}$, nach (i) und (ii) sind $\alpha_+(\cdot)^{\pm 1}$ und $\alpha_-(\cdot)^{\pm 1}$ auch in $\mathcal{A}$. Zusätzlich gilt

$$\alpha_+(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^+ \lambda^j, \qquad \alpha_+(\lambda)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j^+ \lambda^j, \qquad (|\lambda| \leq 1),$$
$$\alpha_-(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{-j}^- \lambda^{-j}, \qquad \alpha_-(\lambda)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{-j}^- \lambda^{-j}, \qquad (|\lambda| \geq 1).$$

Also werden die Toeplitz Operatoren mit Symbolen $\alpha_+(\cdot)$ und $\alpha_+(\cdot)^{-1}$ wird durch dine untere Dreiecksmatrix und die Toeplitz Operatoren mit Symbolen $\alpha_-(\cdot)$ und $\alpha_-(\cdot)^{-1}$ durch eine obere Dreiecksmatrix dargestellt.

Theorem 3.2.2. *Eine Funktion $\alpha \in \mathcal{A}$ lässt ein Wiener-Hopf Faktorisierung zu, wenn α nicht auf $\mathbb{T}$ verschwindet. In diesem Fall, ist k wie in (39) gleich die Windungszahl von α bezüglich 0.*

Beweis. Zuerst betrachten wir, dass $\alpha(\lambda) \neq 0$ für $\lambda \in \mathbb{T}$. Um diese Behauptung zu zeigen, sei k die Windungszahl von α bezüglich 0. Jetzt wählen wir $\omega(\lambda) = \lambda^{-k}\alpha(\lambda)$. Dann ist ω analytisch auf dem Einheitskreis und verschwindet nicht auf $\mathbb{L}$. Zusätzlich ist die Windungszahl von ω bezüglich 0 gleich 0. D.h. nach der Theorie der komplexen Funktion existiert eine analytische Funktion f auf $\mathbb{T}$ mit $\omega(\lambda) = \exp f(\lambda)$. Also kann nach $f = \log \omega$ die Funktion f mit $\delta > 0$ als folgende Laurent Reihe dargestellt werden.

$$f(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \lambda^n, \qquad 1 - \delta < |\lambda| < 1 + \delta.$$

Nun wählen wir

$$f_+(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \lambda^n, \qquad |\lambda| < 1 + \delta,$$
$$f_-(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n \lambda^n, \qquad |\lambda| > 1 - \delta,$$

und setzen

$$\alpha_+(\lambda) = \exp f_+(\lambda), \qquad \alpha_-(\lambda) = \exp f_-(\lambda).$$

Dann gilt $\omega(\lambda) = \alpha_-(\lambda)\alpha_+(\lambda)$ und

$$\alpha(\lambda) = \alpha_(\lambda)\lambda^k \alpha_+(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{T}. \tag{40}$$

Also nach (39) ist (40) eine Wiener-Hopf Faktorisierung von α.

Wir schließen daraus, indem in einer Faktorisierung von α die ganze Zahl k eindeutig durch α bestimmt wird. Also wird k immer gleich die Windungszahl von α bezüglich 0 sein. Sei $\alpha(\lambda) = \tilde{\alpha}_-(\lambda)\lambda^\mu \tilde{\alpha}_+(\lambda)$ eine zweite Wiener-Hopf Faktorisierung. Sei $\mu > k$. Dann gilt

$$\tilde{\alpha}_-(\lambda)^{-1}\alpha_-(\lambda)\lambda^{k-\mu} = \tilde{\alpha}_+(\lambda)\alpha_+(\lambda)^{-1}. \tag{41}$$

Die rechte Seite von (41) erstreckt sich über eine analytische Funktion auf $|\lambda| < 1 + \delta_+$ für $\delta_+ > 0$, und die links Seite von (41) erstreckt sich eine analytische Funktion auf $|\lambda| > 1 - \delta_-$ für $\delta_- > 0$. Weil die links Seite im Unendlichen analytisch und gegen 0 geht nach dem Liouville's Theorem[9], ist es unmöglich, dass beide Seiten identisch mit 0 sind. Also kann μ nicht streng größer als k werden. In ähnlicher Weise zeigt man, dass k nicht streng größer als μ ist. Also ist $k = \mu$ und k eindeutig durch α bestimmt. □

Theorem 3.2.3. *Seien T_α, T_β die Toeplitz Operatoren auf $l_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p \leq \infty$ mit Symbolen α und β in $\mathcal{A}$. Wenn α sich zu einer Funktion erstreckt, die analytisch im Äußeren des Einheitskreises mit der Unendlichkeit ist, oder β sich zu einer Funktion erstreckt, die analytisch auf der Einheitskreises ist, dann gilt*

$$T_{\alpha\beta} = T_\alpha T_\beta. \tag{42}$$

[9] Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine beschränkte, ganze Funktion, d.h. f ist holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ und es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $|f(z)| \leq c$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist f konstant.

Beweis. Seien L_α und L_β die Laurent Operatoren auf $l_p(\mathbb{Z})$ mit Symbolen α und β, und sei P von $l_p(\mathbb{Z}) \to l_p$ mit $P(\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots) = (\cdots, 0, 0, x_0, x_1, \cdots)$ die Projektion. Wegen der Identifizierung von $\operatorname{Im} P$ mit l_p, erhalten wir

$$T_\alpha = PL_\alpha | \operatorname{Im} P, \qquad T_\beta = PL_\beta | \operatorname{Im} P.$$

Wählen wir $Q = I - P$. Weil $L_{\alpha\beta} = L_\alpha L_\beta$, gilt

$$\begin{aligned} PL_{\alpha\beta}P &= PL_\alpha L_\beta P = PL_\alpha(P+Q)L_\beta P \\ &= (PL_\alpha P)(PL_\beta P) + (PL_\alpha Q)(QL_\beta P). \end{aligned}$$

Nun beobachten wir, dass α sich genau dann zu einer Funktion, die analytisch im Äußeren des Einheitskreises mit der Unendlichkeit ist, erstreckt, wenn

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(e^{it}) e^{-int}\, dt = 0, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

D.h. α hat genau dann diese analytische Eigenschaften, wenn $PL_\alpha Q = 0$. In ähnlicher Weise erstreckt β sich genau dann zu einer Funktion, die analytisch auf dem Einheitskreis ist, wenn $QL_\beta P = 0$. Also implizieren unsere Hypothesen, dass der Operator $(PL_\alpha Q)(QL_\beta P)$ den Wert 0 hat. Also ist $PL_{\alpha\beta}P = (PL_\alpha P)(PL_\beta P)$, sodass wir (42) zeigen. $\square$

Theorem 3.2.4. *Sei T der Toeplitz Operator auf $l_p(\mathbb{N})$, $1 \le p < \infty$ mit Symbol $\alpha \in \mathcal{A}$. Dann gilt*

$$T \text{ ist beidseitig inverierbar.} \Leftrightarrow \alpha(e^{it}) \neq 0 \text{ für } -\pi \le t \le \pi.$$

Angenommen die letzte Bedingung sei erfüllt, und sei $\alpha(\lambda) = \alpha_-(\lambda)\lambda^k\alpha_+(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{T}$ eine Wiener-Hopf Faktorisierung von α. Dann gilt

(i) T ist linksseitig invertierbar, genau dann wenn $\alpha(e^{it}) \neq 0$, $\pi \le t \le \pi$ und $k \ge 0$. $\operatorname{Im} T$ ist invertierbar, so $\operatorname{codim} \operatorname{Im} T = k$.
(ii) T ist rechtsseitig invertierbar, genau dann wenn $\alpha(e^{it}) \neq 0$, $\pi \le t \le \pi$ und $k \ge 0$. $\ker T$ ist invertierbar, so ist $\dim \ker T = -k$.
Und in beiden Fällen ist eine links- oder rechtsseitige Inverse

$$T^{-1} = T_{\alpha_+^{-1}} s^{-k} T_{\alpha_-^{-1}}, \tag{43}$$

wobei $T_{\alpha_+^{-1}}$ und $T_{\alpha_-^{-1}}$ die Toeplitz Operatoren mit Symbole $1/\alpha_+(\lambda)$ und $1/\alpha_-(\lambda)$ sind. Zusätzlich ist

$$S^{(n)} = \begin{cases} S^n, & n = 0, 1, 2, \cdots \\ (S^{(-1)})^{-n}, & n = -1, -2, \cdots \end{cases}, \tag{44}$$

wobei S der Rechtsshift ist und $S^{(-1)}$ der linksshift auf l_p ist.

Beweis. Teilen wir den Beweis in Zwei Schritte. Im ersten Schritt zeigen wir die Notwendigkeit der Bedingung $\alpha(\lambda) \neq 0$ für $\lambda \in \mathbb{T}$. Der zweite Schritt betrifft die umgekehrte Implikation und den Nachweis von (43).

Schritt 1.

Zeigen wir mit der Widerspruchsannahme unsere Behauptung. Sei T links- oder rechtsseitig invertierbar, und sei $\alpha(\lambda_0) = 0$ für $\lambda_0 \in \mathbb{T}$. Eigentlich ist dieser Beweis ähnlich wie der zweite Schritt des Beweises vom Theorem 3.1.1. Weil T links- oder rechtsseitig invertierbar ist, existiert $\epsilon > 0$, sodass $\tilde{T}$ auf l_p mit $\left\|T - \tilde{T}\right\| < \epsilon$ links- oder rechtsseitig invertierbar ist. Wählen wir eine positive ganze Zahl N, sodass

$$\sum_{|n|>N} |a_n| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{45}$$

und setzen wir

$$T_{\alpha_N} = \sum_{n=-N}^{N} a_n S^{(n)}, \qquad \alpha_N(\lambda) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \lambda^n. \tag{46}$$

Dann gilt

$$\|T - T_{\alpha_N}\| = \left\| \sum_{|n|>N} a_n S^{(n)} \right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

und

$$|\alpha_N(\lambda_0)| = |\alpha(\lambda_0) - \alpha_N(\lambda_0)| = \left| \sum_{n=-N}^{N} a_n \lambda_0^n \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Wählen wir $\tilde{T} := T_{\alpha_N} - \alpha_N(\lambda_0)I$. Dann gilt $\left\|T - \tilde{T}\right\| < \epsilon$, deshalb ist $\tilde{T}$ links- oder rechtsseitig invertierbar, je nach der links- oder rechtsseitig invertierbarkeit von T.
Wählen wir

$$\omega_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda_0}(\alpha_N(\lambda) - \alpha_N(\lambda_0)), \qquad \omega_2(\lambda) = \lambda\omega_1(\lambda).$$

Dann gilt

$$\alpha_N(\lambda) - \alpha_N(\lambda_0) = \omega_1(\lambda)(\lambda - \lambda_0) = (1 - \lambda_0\lambda^{-1})\omega_2(\lambda). \tag{47}$$

ω_1 und ω_2 sind die trigonometirschen Reihen und gehören zu $\mathcal{A}$. Seien T_{ω_1} und T_{ω_2} die Toeplitz Operatoren. Wir wissen, dass $\tilde{T}$ der Toeplitz Operator mit Symbol $\alpha_N(\cdot) - \alpha_N(\lambda_0)$ ist. Also gilt nach (47) und Theorem 3.2.3

$$\tilde{T} = T_{\omega_1}(S - \lambda_0 I), \qquad \tilde{T} = (I - \lambda_0 S^{(-1)})T_{\omega_2}. \tag{48}$$

Wir haben schon gezeigt, dass $\tilde{T}$ links- oder rechtsseitig invertierbar ist. Also ist $S - \lambda_0 I$ linksseitig und $I - \lambda_0 S^{(-1)}$ rechtsseitig invertierbar. Aber beide sind Widerspruch, weil $\lambda_0 \in \mathbb{T}$. Also $\alpha(\lambda) \neq 0$ für jedes $\lambda \in \mathbb{T}$.

Schritt 2.
Nehmen wir an, dass α nicht auf $\mathbb{T}$ verschwindet. Nach dem Theorem 3.2.2 hat α eine Wiener-Hopf Faktorisierung. Definieren wir diese Faktorisierung wie (39). Dann gilt nach des Theorem 3.2.3

$$T = T_{\alpha_-} S^{(k)} T_{\alpha_+}. \tag{49}$$

Wir haben schon gesehen, dass $\alpha_-^{\pm 1}$ sich zu einer Funktion, die analytisch im Äußeren des Einheitskreises mit der Unendlichkeit ist, erstreckt. Also gilt

$$T_{\alpha_-}T_{\alpha_-^{-1}} = I, \qquad T_{\alpha_-^{-1}}T_{\alpha_-} = I.$$

D.h. T_{α_-} ist invertierbar und $(T_{\alpha_-})^{-1} = T_{\alpha_-^{-1}}$. Ähnlich ist T_{α_+} invertierbar und $(T_{\alpha_+})^{-1} = T_{\alpha_+^{-1}}$. Also

$$T = T_{\alpha_-}S^{(k)}T_{\alpha_+} \Leftrightarrow (T_{\alpha_-})^{-1}T(T_{\alpha_+})^{-1} = S^{(k)}, \text{ und}$$
$$T^{(-1)} = T_{\alpha_+^{-1}}S^{(-k)}T_{\alpha_-^{-1}} \Leftrightarrow (T_{\alpha_+^{-1}})^{-1}T^{(-1)}(T_{\alpha_-}^{-1})^{-1} = S^{(-k)}.$$

Nach (44) gilt

$$S^{(-k)}S^{(k)} = I \ (k \geq 0), \qquad S^{(k)}S^{(-k)} = I \ (k \leq 0). \tag{50}$$

Also ist T genau dann linksseitig invertierbar, wenn $k \geq 0$, und in diesem Fall ist

$$\dim\ker T = \dim\ker S^k = k.$$

(ii) wird in ähnlicher Weise gezeigt. Schließlich ist nach (49) und (50) $T^{(-1)}$ die links- oder rechtsseitige Inverse von T. □

Theorem 3.2.5. *Seien T_α und T_β die Toeplitz Operatoren auf $l_p(\mathbb{N})$ mit Symbolen α und β in $\mathcal{A}$. Dann ist $T_\alpha T_\beta - T_\beta T_\alpha$ kompakt.*

Beweis. Seien L_α und L_β die Laurent Operatoren auf $l_p(\mathbb{Z})$ mit den Symbolen α und β. Sei P von $l_p(\mathbb{Z}) \to l_p$ mit $P(\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots) = (\cdots, 0, 0, x_0, x_1, \cdots)$ die Projektion. Setzen wir $Q = I - P$. Nach dem Beweis des Theorems 3.2.3 gilt

$$PL_\alpha L_\beta P = (PL_\alpha P)(PL_\beta P) + (PL_\alpha Q)(QL_\beta P).$$

Und natürlich gilt nach der Vertauschung von α und β

$$PL_\beta L_\alpha P = (PL_\beta P)(PL_\alpha P) + (PL_\beta Q)(QL_\alpha P).$$

Weil $L_\alpha L_\beta = L_\beta L_\alpha$ (Siehe Theorem 3.1.1), ist

$$(PL_\alpha P)(PL_\beta P) - (PL_\beta P)(PL_\alpha P) = (PL_\beta Q)(QL_\alpha P) - (PL_\alpha Q)(QL_\beta P). \tag{51}$$

Ähnlich wie beim Beweis des Theorems 3.2.3 können wir

$$T_\alpha = PL_\alpha |\operatorname{Im} P, \qquad T_\beta = PL_\beta |\operatorname{Im} P$$

setzen. Somit, um zu beweisen, dass $T_\alpha T_\beta - T_\beta T_\alpha$ kompakt ist, ist es genug zu zeigen, dass die rechte Seite von (51) kompakt ist.

Setzen wir $\alpha_N(\lambda) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \lambda^n$, wobei a_n die Gleichung (36) ist und sei L_{α_N} der Laurent Operator auf $l_P(\mathbb{Z})$ mit Symbol α_N. Dann ist

$$\|L_\alpha - L_{\alpha_N}\| \leq \sum_{|n|>N} |a_n| \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

Also sind

$$\|PL_\alpha Q - PL_{\alpha_N} Q\| \to 0, \qquad \|QL_\alpha P - QL_{\alpha_N} P\| \to 0.$$

D.h. um zu beweisen, dass $PL_\alpha Q$ und $QL_\alpha P$ kompakt sind, ist es genug zu zeigen, dass $PL_{\alpha_N}Q$ und $QL_{\alpha_N}P$ Operatoren sind[10]. Aber die letztere ist eine Folge der Tatsache, dass α_N eine trigonometrische Polynom. Also gilt für jedes $x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ auf $l_p(\mathbb{Z})$

$$(PL_{\alpha_N}Qx)_n = \sum_{k=1}^{N-n} a_{n+k}x_{-k}, \qquad n = 0, \cdots, N-1$$

und $(PL_{\alpha_N}Qx)_n = 0$. D.h. der Rang von $PL_{\alpha_N}Q$ ist höchstens N. Ähnlich ist $QL_{\alpha_N}P \leq N$. □

Theorem 3.2.6. *Sei T der Toeplitz Operator auf $l_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$ mit Symbol $\alpha \in \mathcal{A}$. Dann ist T genau dann ein Fredholm Operator, wenn α nicht auf dem Einheitskreis verschwindet. In diesem Fall, ist* $\operatorname{ind} T$ *gleich dem negativen Wert der Windungszahl von α bezüglich 0.*

Beweis.
"$\Leftarrow$" Verschwinde α nicht auf dem Einheitskreis. Nach dem Theorem 3.2.2 lässt $\alpha \in \mathcal{A}$ ein Wiener-Hopf Faktorisierung zu. Danach verwenden wir Theorem 3.2.4 (i) und (ii). ähnlich wie beim Beweis des Theorems 3.2.4 können wir $\alpha(\lambda_0) = 0$ zeigen. Dieser Ausdruck ist Widerspruch zur Annahme.
"$\Rightarrow$" Sei T ein Fredholm Operator und $\alpha(\lambda_0) = 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{T}$. Dann existiert es $\epsilon > 0$, sodass $\widetilde{T}$ auf l_p Fredholm Operator mit $\left\|T - \widetilde{T}\right\| < \epsilon$ ist. Wähle $N \in \mathbb{Z}^+$ und setze wie (45) und definieren wir T_{α_N} und α_N wie (46). Jetzt sei $\widetilde{T}$ der Toeplitz Operator mit Symbol $\alpha_N - \alpha_N(\lambda_0)$. Dann ist $\left\|T - \widehat{T}\right\| < \epsilon$ und $\widetilde{T}$ ist der Fredholm Operator. Setze

$$\omega(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{-1}(\alpha_N(\lambda) - \alpha_N(\lambda_0)), \tag{52}$$

und sei T_ω der Toeplitz Operator mit Symbol ω. Nach dem Theorem 3.2.3 und (52) gilt es $\widetilde{T} = T_\omega(S - \lambda_0 I)$, wobei S Rechtsshift auf l_p ist. Also $T_\omega(S - \lambda_0 I)$ ist der Fredholm Operator. Nun betrachten wir $(S - \lambda_0 I)T_\omega$. Nach dem Theorem 3.2.5 ist $(S - \lambda_0 I)T_\omega$ kompakt. Dann nach der Eigenschaft[11] des Fredolm Operators ist $(S - \lambda_0 I)T_\omega$ der Fredholm Operator. D.h. $(S - \lambda_0 I)$ ist auch der Fredholm Operator. Aber dieser Ausdruck ist Widerspruch[12], weil $\lambda_0 \in \mathbb{T}$ ist und $\alpha(\lambda) \neq 0$ für jedes $\lambda \in \mathbb{T}$ wenn T der Fredholm Operator ist. □

[10] Siehe Israel Gohberg, Seymour Goldberg, Marimus A.Kaashoek: *Basic classes of linear operators* Kap.13 Corollary 3.2

[11] Sei $A \in L(X, Y)$ der Fredholm Operator und sei $K \in L(X, Y)$ kompakt. Dann ist $A + K$ auch der Fredholm Operator mit $\operatorname{ind}(A + k) + \operatorname{ind} A$. Siehe Israel Gohberg, Seymour Goldberg, Marimus A.Kaashoek: *Basic classes of linear operators* kap.15.4 Theorem 4.1.

[12] Siehe Israel Gohberg, Seymour Goldberg, Marimus A.Kaashoek: *Basic classes of linear operators* kap.15 Corollary 3.2.

4 Beispiele

4.1 Die Beispiel der Laurent Operator

Beispiel 4.1.1. Sei A folgende tridiagonale Matrixdarstellung gegeben Laurent Operator auf $l_2(\mathbb{Z})$ werden.

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & & \\ \ddots & 7/5 & -3/5 & 0 & 0 & 0 & \\ & -2/5 & 7/5 & -3/5 & 0 & 0 & \\ \cdots & 0 & -2/5 & 7/5 & -3/5 & 0 & \cdots \\ & 0 & 0 & -2/5 & 7/5 & -3/5 & \\ & 0 & 0 & 0 & -2/5 & 7/5 & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Die Funktion $a(t) = -\frac{2}{5}e^{it} + \frac{7}{5} - \frac{3}{5}e^{-it}$ ist die erzeugende Funktion von A. Daraus folgt $a(t) = \omega(e^{it})$ wobei $\omega(\lambda) = -\frac{2}{5}\lambda + \frac{7}{5} - \frac{3}{5}\lambda^{-1} = \frac{1}{5}(\frac{1}{\lambda} - 2)(\lambda - 3)$ ist. Weil $a(t) \neq 0$ für jedes t ist, können wir Theorem 2.1.5 anwenden. wir wissen

$$\frac{1}{\omega(\lambda)} = \frac{\frac{1}{2}\lambda^{-1}}{1 - \frac{1}{2}\lambda^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}\lambda}, \qquad |\lambda| = 1,$$

und weiters

$$b(t) := \frac{1}{a(t)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} e^{-ijt} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^j} e^{-ijt}.$$

Also A^{-1} hat die folgende Form:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & & \\ \ddots & 1 & 1/2 & 1/2^2 & 1/2^3 & 1/2^4 & \\ & 1/3 & 1 & 1/2 & 1/2^2 & 1/2^3 & \\ \cdots & 1/3^2 & 1/3 & 1 & 1/2 & 1/2^2 & \cdots \\ & 1/3^3 & 1/3^2 & 1/3 & 1 & 1/2 & \\ & 1/3^4 & 1/3^3 & 1/3^2 & 1/3 & 1 & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Weil $e^{it} = \cos t + i \sin t$ ist, können wir $a(t)$ als folgende Form wechseln.

$$a(t) = \left(\frac{7}{5} - \cos t\right) + \frac{1}{5} i \sin t.$$

Also $\cos t = \frac{7}{5} - \mathfrak{Re}a(t)$ und $\sin t = 5\mathfrak{Im}a(t)$. Nach Korollar 2.1.6 erhalten wir, dass das Spektrum von A genau durch die Ellipse

$$\left(\mathfrak{Re}\lambda - \frac{7}{5}\right)^2 + 25(\mathfrak{Im}\lambda)^2 = 1 \tag{54}$$

gegeben.

4.2 Die Beispiel der Toeplitz Operator

Beispiel 4.2.1. Sei T folgende tridiagonale Matrixdarstellung gegeben Toeplitz Operator auf $l_2(\mathbb{N})$ werden.

$$T = \begin{pmatrix} 7/5 & -3/5 & 0 & \cdots \\ -2/5 & 7/5 & -3/5 & \cdots \\ 0 & -2/5 & 7/5 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

Wie Beispiel 4.1.1 können wir wissen, dass die erzeugende Funktion von T $\omega(\lambda) = -\frac{2}{5}\lambda + \frac{7}{5} - \frac{3}{5}\lambda^{-1} = \frac{2}{5}\lambda^{-1}(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - 3)$ ist. Weil $\omega(\lambda) \neq 0$ für jedes $|\lambda| = 1$ und $k = 1 - 1 = 0$ sind, nach Theorem 2.3.5 ist T invertierbar und

$$T^{-1} = -\frac{5}{2}(S - 3I)^{-1}\left(I - \frac{1}{2}S^*\right)^{-1}. \tag{55}$$

Weiters nach Lemma 2.3.3 gilt es

$$\left(I - \frac{1}{2}S^*\right)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j}(S^*)^j, \tag{56}$$

und

$$-(S - 3I)^{-1} = (3I - S)^{-1} = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^j}S^j. \tag{57}$$

Also die Gestalt von T^{-1} wird als folgende Matrix darstellen.

$$T^{-1} = \frac{5}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/3 & 1 & 0 & \\ 1/3^2 & 1/3 & 1 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2^2 & \cdots \\ 0 & 1 & 1/2 & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \frac{5}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2^2 & \cdots \\ 1/3 & 7/6 & 7/12 & \cdots \\ 1/3^2 & 7/18 & 43/36 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Nun betrachten wir die Matrixelementen $t_{jk}^{\times}$ von T^{-1}. Wegen (55), (56) und (57) gilt es

$$t_{jk}^{\times} = \frac{5}{6}\sum_{v=0}^{\min(j,k)} \left(\frac{1}{3}\right)^{j-v}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-v},$$

d.h.

$$t_{jk}^{\times} = \begin{cases} \frac{1}{3^{j+1}2^{k+1}}(6^{j+1} - 1), & \text{falls } j \leq k, \\ \frac{1}{3^{j+1}2^{k+1}}(6^{k+1} - 1), & \text{falls } j \geq k. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln ergibt sich, dass $t_{jk}^{\times}$ in der Form $t_{jk}^{\times} = g_{j-k} - f_{jk}, \quad \forall j, k = 0, 1, 2, \cdots$ dargestellt werden, wobei

$$g_{j-k} = \begin{cases} 3^{k-j}, & \text{falls } j \geq k, \\ 2^{j-k}, & \text{falls } j \leq k, \end{cases}$$

und

$$f_{jk} = \frac{1}{3^{j+1}2^{k+1}}, \qquad j,k = 0,1,2,\cdots$$

sind. Also der Operator

$$G := (g_{j-k})_{j,k=0}^{\infty} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2^2 & \cdots \\ 1/3 & 1 & 1/2 & \\ 1/3^2 & 1/3 & 1 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

ist ein Toeplitz Operator und

$$F := (f_{jk})_{j,k=0}^{\infty} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\cdot 2} & \frac{1}{3\cdot 2^2} & \frac{1}{3\cdot 2^3} & \cdots \\ \frac{1}{3^2\cdot 2} & \frac{1}{3^2\cdot 2^2} & \frac{1}{3^2\cdot 2^3} & \cdots \\ \frac{1}{3^3\cdot 2} & \frac{1}{3^3\cdot 2^2} & \frac{1}{3^3\cdot 2^3} & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

ist ein Operator mit Rang 1.

Nun betrachten wir das Spektrum $\sigma(T)$ der Toeplitz Operator T mit Symbol ω. Wir haben schon gezeigt, dass die Kurve $t \mapsto \omega(e^{it})$ ganz gleich die Ellipse (54) ist. Also nach Korollar 2.3.6 wissen wir, dass $\sigma(T)$ aus allen Punkten $\lambda \in \mathbb{C}$, die auf liegen oder in der Ellipse (54) besteht, d.h.

$$\sigma(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} | \left(\mathfrak{Re}\lambda - \frac{7}{5} \right)^2 + 25(\mathfrak{Im}\lambda)^2 \leq 1 \right\}.$$

Literatur

[1] Israel Gohberg, Seymour Goldberg, Marimus A.Kaashoek: *Basic classes of linear operators*, 2000 Birkhäuser.

[2] Vern Paulsen: *Completely bounded maps and operator algebras*, Cambridge University Press 2002.

[3] Harald Woracek, Michael Kaltenbäck, Martin Blümlinger: *Funktionalanalysis*, 2012, Institut für Analysis und Scientific Computing