B A C H E L O R A R B E I T

Über verallgemeinerte Folgenräume

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.
Michael Kaltenbäck

durch

Anni Lü
Matrikelnummer: 1403656

Wien, am 12. Oktober 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit wollen wir uns mit der Verallgemeinerung von Folgenräumen beschäftigen und deren Eigenschaften studieren. Speziell werden wir für eine beliebige Menge L und Banachräume $(X_k, \|.\|_k), k \in L$, folgende Räume betrachten:

- $\ell^\infty(X_k, k \in L) := \left\{(x_k)_{k\in L} \in \prod_{k\in L} X_k : \sup_{k\in L} \|x_k\|_k < +\infty\right\}$ versehen mit
$$\|(x_k)_{k\in L}\|_\infty = \sup_{k\in L} \|x_k\|_k.$$
- $c_0(X_k, k \in L) := \left\{(x_k)_{k\in L} \in \ell^\infty(X_k, k \in L) : \lim_{E\in\mathcal{E}(L)} \sup_{k\in L\setminus E} \|x_k\|_k = 0\right\}$ versehen mit
$$\|(x_k)_{k\in L}\|_\infty := \sup_{k\in L} \|x_k\|_k.$$
- $\ell^p(X_k, k \in L) := \left\{(x_k)_{k\in L} \in \prod_{k\in L} X_k : \sum_{k\in L} \|x_k\|_k^p < +\infty\right\}$ für $1 \le p < +\infty$ versehen mit
$$\|(x_k)_{k\in L}\|_p = \left(\sum_{k\in L} \|x_k\|_k^p\right)^{1/p}.$$

Wir werden im zweiten Kapitel sehen, dass diese Räume sogar Banachräume ergeben. Anschließend werden wir die Dualräume der verallgemeinerten Folgenräumen untersuchen. Dabei orientieren wir uns an den entsprechenden Aussagen für die klassischen Folgenräume, wie sie etwa in [Wer18] behandelt werden.

Im Kapitel 4 beschäftigen wir uns mit einer Anwendung dieser Folgenräume, genauer wollen wir einen Beweis des Satzes von Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński mit Hilfe dieser Folgenräume anführen. Die Idee dieses Beweises orientiert sich an [Woj91].

2 Verallgemeinerte Folgenräume

Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränken wir uns in dieser Arbeit, wenn nichts anderes angegeben ist, auf Vektorräumen über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Fast alle Ergebnisse gelten aber genauso für Vektorräume über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Zunächst rufen wir in Erinnerung, dass für eine nichtleere Menge I und $M_i, i \in I$, das Produkt der $M_i, i \in I$, mengentheoretisch definiert ist als

$$\prod_{i\in I} M_i := \left\{ f\colon I \to \bigcup_{i\in I} M_i : f(i) \in M_i \right\},$$

also die Menge aller Funktionen definiert auf I, deren Wert an der Stelle i in der Menge M_i liegt. Die *kanonische Projektion* $\pi_i\colon \prod_{j\in I} M_j \to M_i$ ist definiert als

$$\pi_i(f) := f(i), f \in \prod_{j\in I} M_j.$$

Im Folgenden seien L eine nichtleere Menge und $(X_k, \|.\|_k), k \in L$, normierte Räume. Bekannterweise bildet $\prod_{k\in L} X_k$ versehen mit der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation einen Vektorraum.

2.1 Der $\ell^\infty(X_k, k \in L)$-Raum

2.1.1 Definition. Wir bezeichnen mit $\ell^\infty(X_k, k \in L)$ die Menge aller *beschränkten Elemente* von $\prod_{k\in L} X_k$, also

$$\ell^\infty(X_k, k \in L) := \left\{ (x_k)_{k\in L} \in \prod_{k\in L} X_k : \sup_{k\in L} \|x_k\|_k < +\infty \right\}.$$

Weiters definieren wir die *Supremumsnorm* $\|.\|_\infty\colon \ell^\infty(X_k, k \in L) \to [0, +\infty)$ durch

$$\|(x_k)_{k\in L}\|_\infty := \sup_{k\in L} \|x_k\|_k.$$

2.1.2 Lemma. *$\ell^\infty(X_k, k \in L)$ ist ein Vektorraum und die Supremumsnorm $\|.\|_\infty$ bildet eine Norm darauf.*

Beweis. Seien $(x_k)_{k\in L}, (y_k)_{k\in L}$ aus $\ell^\infty(X_k, k \in L)$ und λ, μ aus $\mathbb{C}$ beliebig. Für ein festes $k_0 \in L$ gilt

$$\|\lambda\, x_{k_0} + \mu\, y_{k_0}\|_{k_0} \leq \lambda\, \|x_{k_0}\|_{k_0} + \mu\, \|y_{k_0}\|_{k_0} \leq \lambda \cdot \sup_{k\in L} \|x_k\|_k + \mu \cdot \sup_{k\in L} \|y_k\|_k,$$

und infolge

$$\sup_{k_0\in L} \|\lambda\, x_{k_0} + \mu\, y_{k_0}\|_{k_0} \leq \lambda \cdot \sup_{k\in L} \|x_k\|_k + \mu \cdot \sup_{k\in L} \|y_k\|_k.$$

Daraus folgt die Abgeschlossenheit von $\ell^\infty(X_k, k \in L)$ in $\prod_{k\in L} X_k$ bezüglich der Addition und der skalaren Multiplikation sowie die Dreiecksungleichung für $\|.\|_\infty$. Zudem folgt für $\lambda \neq 0$ und $\mu = 0$

$$\|\lambda \cdot (x_k)_{k\in L}\|_\infty \leq |\lambda| \cdot \|(x_k)_{k\in L}\|_\infty = |\lambda| \cdot \|\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \cdot (x_k)_{k\in L}\|_\infty \leq \|\lambda \cdot (x_k)_{k\in L}\|_\infty$$

sowie für $\lambda = 0 = \mu$

$$\|0 \cdot (x_k)_{k\in L}\|_\infty \leq 0 \cdot \|(x_k)_{k\in L}\|_\infty,$$

womit $\|\lambda\cdot(x_k)_{k\in L}\|_\infty = |\lambda|\cdot\|(x_k)_{k\in L}\|_\infty$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt. Weiters hat man $\|(x_k)_{k\in L}\|_\infty = 0$ genau dann, wenn $\|x_k\|_k = 0$ für alle $k \in L$, also genau dann, wenn $x_k = 0$ für alle $k \in L$. Somit bildet $\|.\|_\infty$ eine Norm auf $\ell^\infty(X_k, k \in L)$. ☐

2.1.3 Satz. *Sind $(X_k, \|.\|_k), k \in L$, Banachräume, so ist $(\ell^\infty(X_k, k \in L), \|.\|_\infty)$ ebenfalls ein Banachraum.*

Beweis. Sei $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\ell^\infty(X_k, k \in L)$ mit $x_j = (x_k^j)_{k\in L}$. Wir wollen die Existenz eines Elementes $(x_k)_{k\in L}$ in $\ell^\infty(X_k, k \in L)$ derart nachweisen, dass

$$\lim_{j\to\infty} x_j = (x_k)_{k\in L} \quad \text{bzgl. } d_\infty,$$

wobei d_∞ die von $\|.\|_\infty$ induzierte Metrik ist. Nach Definition einer Cauchy-Folge existiert für ein beliegiges $\varepsilon > 0$ ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{k\in L} \|x_k^j - x_k^i\|_k < \varepsilon \qquad \text{für alle } i, j \geq j_0.$$

Folglich gilt diese Beziehung auch für ein festes $k \in L$, also

$$\|x_k^j - x_k^i\|_k < \varepsilon \qquad \text{für alle } i, j \geq j_0, \tag{2.1}$$

womit sich $(x_k^j)_{j\in\mathbb{N}}$ als eine Cauchy-Folge in X_k herausstellt. Aufgrund der Vollständigkeit von X_k besitzt $(x_k^j)_{j\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert in X_k, also

$$x_k := \lim_{j\to\infty} x_k^j \quad \text{bzgl. } d_k,$$

wobei d_k die von $\|.\|_k$ induzierte Metrik ist. Fixiert man in (2.1) den Index j, so erhält man für $i \to \infty$

$$\|x_k^j - x_k\|_k \leq \varepsilon \qquad \text{für jedes } j \geq j_0 \text{ und für jedes } k \in L.$$

Da j_0 unabhängig von $k \in L$ ist, erhalten wir

$$\sup_{k \in L} \|x_k^j - x_k\|_k \leq \varepsilon, \qquad j \geq j_0. \tag{2.2}$$

Also liegt $(x_k^{j_0} - x_k)_{k\in L}$ und infolge $(x_k)_{k\in L} = (x_k^{j_0})_{k\in L} - (x_k^{j_0} - x_k)_{k\in L}$ in $\ell^\infty(X_k, k \in L)$, und gemäß (2.2) konvergiert die Cauchy-Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gegen $(x_k)_{k\in L}$. □

2.2 Der $c_0(X_k, k \in L)$-Raum

Bezeichnet $\mathcal{E}(L)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von L, die durch die Teilmengenrelation $\subseteq$ gerichtet ist.

2.2.1 Definition. Wir bezeichnen mit $c_0(X_k, k \in L)$ die Menge aller Tupel in $\prod_{k\in L} X_k$, also

$$c_0(X_k, k \in L) := \left\{ (x_k)_{k\in L} \in \ell^\infty(X_k, k \in L) : \lim_{E\in\mathcal{E}(L)} \sup_{k\in L\setminus E} \|x_k\|_k = 0 \right\}.$$

Wir bemerken, dass

$$\lim_{E\in\mathcal{E}(L)} \sup_{k\in L\setminus E} \|x_k\|_k = \inf_{E\in\mathcal{E}(L)} \sup_{k\in L\setminus E} \|x_k\|_k,$$

da $(\sup_{k\in L\setminus E} \|x_k\|_k)_{E\in\mathcal{E}(L)}$ ein monoton fallendes Netz ist.

2.2.2 Satz. *$c_0(X_k, k \in L)$ ist ein abgeschlossener, linearer Unterraum von $(\ell^\infty(X_k, k \in L), \|.\|_\infty)$.*

Beweis. Für beliebige $(x_k)_{k\in L}, (y_k)_{k\in L} \in c_0(X_k, k \in L)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ sowie $\varepsilon > 0$ gibt es $E, F \in \mathcal{E}(L)$ mit $\sup_{k\in L\setminus E} \|x_k\|_k \leq \varepsilon$ und $\sup_{k\in L\setminus F} \|y_k\|_k \leq \varepsilon$. Wir erhalten

$$\sup_{k\in L\setminus(E\cup F)} \|\lambda\, x_k + \mu\, y_k\|_k \leq \sup_{k\in L\setminus(E\cup F)} (|\lambda| \cdot \|x_k\|_k + |\mu| \cdot \|y_k\|_k) \leq |\lambda|\,\varepsilon + |\mu|\,\varepsilon,$$

womit $c_0(X_k, k \in L)$ bezüglich der Addition und der skalaren Multiplikation abgeschlossen ist. Also bildet $c_0(X_k, k \in L)$ einen linearen Unterraum von $\ell^\infty(X_k, k \in L)$. Sei $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $c_0(X_k, k \in L)$ mit $x_j = (x_k^j)_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $(x_k)_{k\in L}$ aus $\ell^\infty(X_k, k \in L)$ bezüglich $\|.\|_\infty$ konvergiert, also

$$\lim_{j\to\infty} x_j = (x_k)_{k\in L} \qquad \text{bzgl. } \|.\|_\infty$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|(x_k^j)_{k\in L} - (x_k)_{k\in L}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } j \geq j_0.$$

Nach Voraussetzung ist $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $c_0(X_k, k \in L)$. Also gibt es für jedes $j \geq j_0$ ein $E_j \in \mathcal{E}(L)$ mit

$$\sup_{k\in L\setminus E_j} \|x_k^j\|_k \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir erhalten für $j = j_0$ und $E \in \mathcal{E}(L), E \supseteq E_j$

$$\sup_{k\in L\setminus E} \|x_k\|_k \leq \sup_{k\in L\setminus E} \left(\|x_k - x_k^j\|_k + \|x_k^j\|_k\right) \leq \|(x_\ell)_{\ell\in L} - (x_\ell^j)_{\ell\in L}\|_\infty + \sup_{k\in L\setminus E} \|x_k^j\|_k \leq \varepsilon,$$

womit der Grenzwert $(x_k)_{k\in L}$ sogar in $c_0(X_k, k \in L)$ liegt. □

Als unmittelbare Folgerung der Abgeschlossenheit von $c_0(X_k, k \in L)$ in $\ell^\infty(X_k, k \in L)$ erhalten wir das folgende Korollar aus Satz 2.1.3.

2.2.3 Korollar. *Sind $(X_k, \|.\|_k), k \in L$, Banachräume, so ist $(c_0(X_k, k \in L), \|.\|_\infty)$ ebenfalls ein Banachraum.*

2.3 Der $\ell^p(X_k, k \in L)$-Raum

2.3.1 Definition. Für $1 \leq p < +\infty$ bezeichnen wir mit $\ell^p(X_k, k \in L)$ die Menge aller *p-summierbaren Folgen* in $\prod_{k\in L} X_k$, also

$$\ell^p(X_k, k \in L) := \left\{ (x_k)_{k\in L} \in \prod_{k\in L} X_k : \sum_{k\in L} \|x_k\|_k^p < +\infty \right\}.$$

2.3.2 Lemma. *Mit den $X_k, k \in L$, ist auch $\ell^p(X_k, k \in L)$ ein Vektorraum, wobei die Operationen punktweise definiert sind.*

Beweis. Für beliebige $(x_k)_{k\in L} \in \ell^p(X_k, k \in L)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ erhalten wir die Abgeschlossenheit bezüglich der Skalarmultiplikation aus den Rechenregeln für unbedingt konvergenten Reihen

$$\sum_{k\in L} \|\lambda \cdot x_k\|_k^p = \sum_{k\in L} \left(|\lambda|^p \cdot \|x_k\|_k^p\right) = |\lambda|^p \cdot \sum_{k\in L} \|x_k\|_k^p < +\infty.$$

Aus der Dreiecksgleichung und aus den Rechenregeln für unbedingt konvergenten Reihen erhalten wir für beliebige $(x_k)_{k\in L}$ und $(y_k)_{k\in L}$ aus $\ell^p(X_k, k \in L)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in L} \|x_k + y_k\|_k^p &\leq \sum_{k\in L} (\|x_k\|_k + \|y_k\|_k)^p \leq \sum_{k\in L} (2 \cdot \max\{\|x_k\|_k, \|y_k\|_k\})^p \\
&= 2^p \sum_{k\in L} \max\left\{\|x_k\|_k^p, \|y_k\|_k^p\right\} \leq 2^p \sum_{k\in L} \left(\|x_k\|_k^p + \|y_k\|_k^p\right) \\
&= 2^p \left(\sum_{k\in L} \|x_k\|_k^p + \sum_{k\in L} \|y_k\|_k^p \right) < +\infty,
\end{aligned}$$

womit $\ell^p(X_k, k \in L)$ verträglich mit der Addition ist. Zudem ist der Nullvektor in $\ell^p(X_k, k \in L)$ enthalten, da $\sum_{k\in L} \|0\|_k^p = 0 < +\infty$. $\square$

2.3.3 Satz. *Die Abbildung* $\|.\|_p \colon \ell^p(X_k, k \in L) \to [0, +\infty)$*, definiert durch*

$$\|(x_k)_{k\in L}\|_p := \left(\sum_{k\in L} \|x_k\|_k^p\right)^{1/p},$$

bildet eine Norm auf $\ell^p(X_k, k \in L)$.

Der Beweis für Satz 2.3.3 wird weiter unten geführt, da er noch einer zusätzlichen Vorbereitung bedarf. Zunächst erinnern wir uns an die Youngsche Ungleichung.

2.3.4 Satz. (Youngsche Ungleichung)
Sind $x, y \geq 0, \delta > 0$ *und* $p, q \in (1, +\infty)$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, dann gilt*

$$xy \leq \frac{\delta}{p} x^p + \frac{1}{q \cdot \delta^{\frac{q}{p}}} y^q.$$

Beweis. Siehe [[Jue20], Kapitel 5, Lemma 5.19]. $\square$

2.3.5 Satz. (Höldersche Ungleichung)

(i) Für $(x_k)_{k\in L} \in \ell^1(X_k, k \in L)$ *und* $(y_k)_{k\in L} \in \ell^\infty(X_k, k \in L)$ *gilt*

$$\sum_{k\in L} (\|x_k\|_k \|y_k\|_k) \leq \|(x_k)_{k\in L}\|_1 \|(y_k)_{k\in L}\|_\infty. \tag{2.3}$$

(ii) Seien $p, q \in (1, +\infty)$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Für* $(x_k)_{k\in L} \in \ell^p(X_k, k \in L)$ *und* $(y_k)_{k\in L} \in \ell^q(X_k, k \in L)$ *gilt*

$$\sum_{k\in L} (\|x_k\|_k \|y_k\|_k) \leq \|(x_k)_{k\in L}\|_p \|(y_k)_{k\in L}\|_q. \tag{2.4}$$

Beweis. Die Aussage (i) folgt aus der Beschränktheit von $(y_k)_{k\in L}$ und aus der Ungleichung $\|x_k\|_k \|y_k\|_k \leq \|x_k\|_k \|(y_\ell)_{\ell\in L}\|_\infty$ für alle $k \in L$. Für den Beweis von Aussage (ii) benötigen wir die Youngsche Ungleichung im Fall $\delta = 1$, also

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q. \tag{2.5}$$

Sei zunächst bemerkt, dass (2.4) für $\|(x_k)_{k\in L}\|_p = 0$ oder $\|(y_k)_{k\in L}\|_q = 0$ offenbar richtig ist. Im Folgenden gelte also $\|(x_k)_{k\in L}\|_p, \|(y_k)_{k\in L}\|_q > 0$. Wir setzen $\alpha := \|(x_k)_{k\in L}\|_p$ und $\beta := \|(y_k)_{k\in L}\|_q$. Für $x = \frac{1}{\alpha}\|x_k\|_k$ und $y = \frac{1}{\beta}\|y_k\|_k$ erhalten wir aus (2.5) nach Summation über alle $k \in L$

$$\frac{\sum_{k\in L} (\|x_k\|_k \|y_k\|_k)}{\alpha \cdot \beta} \leq \frac{1}{p \cdot \alpha^p} \sum_{k\in L} \|x_k\|_k^p + \frac{1}{q \cdot \beta^q} \sum_{k\in L} \|y_k\|_k^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

woraus unmittelbar (2.4) folgt. □

Die wesentliche Schwierigkeit im Beweis von Satz 2.3.3 ist die Dreiecksungleichung, die auch als *Minkowskische Ungleichung* bekannt ist.

2.3.6 Satz. (Minkowskische Ungleichung)
Für $1 \leq p < +\infty$ *und* $(x_k)_{k\in L}, (y_k)_{k\in L} \in \ell^p(X_k, k \in L)$ *gilt* $(x_k + y_k)_{k\in L} \in \ell^p(X_k, k \in L)$, *und*

$$\|(x_k + y_k)_{k\in L}\|_p \leq \|(x_k)_{k\in L}\|_p + \|(y_k)_{k\in L}\|_p.$$

Beweis. Für $p = 1$ folgt die Ungleichung aus der Dreiecksgleichung der Normen $\|.\|_k, k \in L$, und aus Lemma A.2, also

$$\sum_{k\in L} \|x_k + y_k\|_k \leq \sum_{k\in L} (\|x_k\|_k + \|y_k\|_k) = \sum_{k\in L} \|x_k\|_k + \sum_{k\in L} \|y_k\|_k.$$

Für $p > 1$ gilt wegen der Dreiecksgleichung, wegen des Satzes 2.3.5 und wegen $q = \frac{p}{p-1}$

$$\begin{aligned}
\|(x_k + y_k)_{k\in L}\|_p^p &= \sum_{k\in L} \|x_k + y_k\|_k^p \\
&\leq \sum_{k\in L} (\|x_k\|_k + \|y_k\|_k) \|x_k + y_k\|_k^{p-1} \\
&\leq \|(x_k)_{k\in L}\|_p \left(\sum_{k\in L} \|x_k + y_k\|_k^p \right)^{\frac{p-1}{p}} + \|(y_k)_{k\in L}\|_p \left(\sum_{k\in L} \|x_k + y_k\|_k^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= (\|(x_k)_{k\in L}\|_p + \|(y_k)_{k\in L}\|_p) \cdot \|(x_k + y_k)_{k\in L}\|_p^{p-1}.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\|(x_k + y_k)_{k\in L}\|_p \leq \|(x_k)_{k\in L}\|_p + \|(y_k)_{k\in L}\|_p.$$

□

Nach diesen Vorbereitungen ist der Satz 2.3.3 im Wesentlichen schon bewiesen.

Beweis. (von Satz 2.3.3). Für $(x_k)_{k\in L} \in \ell^p(X_k, k \in L)$ mit $(x_k)_{k\in L} \neq 0$ haben wir

$$\|(x_k)_{k\in L}\|_p^p = \sum_{k\in L} \|x_k\|_k^p > 0.$$

Weiters gilt für $(x_k)_{k\in L} \in \ell^p(X_k, k \in L)$ und für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|\lambda \cdot (x_k)_{k\in L}\|_p^p = \sum_{k\in L} \|\lambda x_k\|_k^p = |\lambda|^p \sum_{k\in L} \|x_k\|_k^p = |\lambda|^p \cdot \|(x_k)_{k\in L}\|_p^p.$$

Die Dreiecksungleichung ist die soeben bewiesene Minkowskische Ungleichung, weshalb sich $\|.\|_p$ als eine Norm auf $\ell^p(X_k, k \in L)$ erweist. □

Ähnlich wie im Beweis von Satz 2.1.3 zeigt man das folgende Resultat.

2.3.7 Satz. *Sind $(X_k, \|.\|_k), k \in L$, Banachräume, so ist $(\ell^p(X_k, k \in L), \|.\|_p)$ ebenfalls ein Banachraum.*

Beweis. Sei $((x_k^j)_{k\in L})_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\ell^p(X_k, k \in L)$. Wir wollen die Existenz eines Elementes $(x_k)_{k\in L} \in \ell^p(X_k, k \in L)$ mit

$$\lim_{j\to\infty} (x_k^j)_{k\in L} = (x_k)_{k\in L} \qquad \text{bzgl. } \|.\|_p$$

zeigen. Nach Definition einer Cauchy-Folge gibt es für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $j_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\left(\sum_{\ell\in L} \|x_\ell^j - x_\ell^i\|_\ell^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \qquad \text{für alle } i, j \geq j_0. \tag{2.6}$$

Aus (2.6) folgt für ein festes $k \in L$

$$\|x_k^j - x_k^i\|_k \leq \left(\sum_{\ell\in L} \|x_\ell^j - x_\ell^i\|_\ell^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \qquad \text{für alle } i, j \geq j_0.$$

Also bildet $(x_k^j)_{j\in\mathbb{N}}$ für festes $k \in L$ eine Cauchy-Folge in X_k. Aufgrund der Vollständigkeit von X_k besitzt $(x_k^j)_{j\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert in X_k, den wir mit $x_k := \lim_{j\to\infty} x_k^j$ notieren. Aus (2.6) folgt für jedes $E \in \mathcal{E}(L)$

$$\left(\sum_{\ell\in E} \|x_\ell^j - x_\ell^i\|_\ell^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \text{für } i, j \geq j_0.$$

Lassen wir i gegen ∞ streben, so erhalten wir

$$\left(\sum_{\ell\in E} \|x_\ell^j - x_\ell\|_\ell^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \quad \text{für } j \geq j_0.$$

Das Supremum über alle $E \in \mathcal{E}(L)$ ergibt

$$\left(\sum_{\ell\in L} \|x_\ell^j - x_\ell\|_\ell^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \quad \text{für } j \geq j_0,$$

womit $(x_k^j - x_k)_{k\in L} \in \ell^p(X_k, k \in L)$ und infolge $(x_k)_{k\in L} = (x_k^j)_{k\in L} - (x_k^j - x_k)_{k\in L} \in \ell^p(X_k, k \in L)$ sowie $\|(x_k^j)_{k\in L} - (x_k)_{k\in L}\|_p \leq \varepsilon$ für alle $j \geq j_0$. Also konvergiert die Cauchy-Folge $((x_k^j)_{k\in L})_{j\in\mathbb{N}}$ gegen $(x_k)_{k\in L} \in \ell^p(X_k, k \in L)$ bezüglich $\|.\|_p$. □

3 Dualräume

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Dualräume der verallgemeinerten Folgenräume. Zunächst wollen wir uns an die Definition eines Dualraumes erinnern.

3.0.1 Definition. Ist $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum, so heißt die Menge aller beschränkten linearen Abbildungen von X in dem Skalarkörper $\mathbb{C}$ der *Dualraum* von X und wird mit X' notiert.

Wir bemerken, dass X' mit der punktweisen Addition und der skalaren Multiplikation einen Vektorraum bildet, welcher versehen mit der Abbildungsnorm vollständig ist.

Im Folgenden betrachten wir für $1 \leq p \leq +\infty$ und ein festes $\ell \in L$ die Abbildung $\delta_\ell : X_\ell \to \ell^p(X_k, k \in L)$ mit $(\delta_\ell(x))_k = x$ für $\ell = k$ und $(\delta_\ell(x))_k = 0$ sonst. Aus $\|\delta_\ell(x)\|_p = \|x\|_\ell, x \in X_\ell$, folgt die Wohldefiniertheit, Linearität und Isometrie von δ_ℓ.

3.1 Der Dualraum von $\ell^p(X_k, k \in L)$

Bevor wir uns mit dem Studium von Dualräumen der Folgenräumen beschäftigen, benötigen wir das folgende Lemma.

3.1.1 Lemma. *Sind L eine Menge und $(X_k, \|.\|_k), k \in L$, normierte Räume, dann gilt für $1 \leq p < +\infty$*

$$\ell^p(X_k, k \in L) = \overline{\bigcup_{\ell \in L} \delta_\ell(X_\ell)},$$

wobei der Abschluss bezüglich $\|.\|_p$ zu verstehen ist.

Beweis. Für $E \in \mathcal{E}(L)$ und $(x_k)_{k \in L} \in \ell^p(X_k, k \in L)$ gilt

$$\|(x_k)_{k \in L} - \sum_{k \in E} \delta_k(x_k)\|_p^p = \sum_{k \in L \setminus E} \|x_k\|_k^p = \sum_{k \in L} \|x_k\|_k^p - \sum_{k \in E} \|x_k\|_k^p.$$

Dabei gilt für die rechte Seite

$$\lim_{E \in \mathcal{E}(L)} \left(\sum_{k \in L} \|x_k\|_k^p - \sum_{k \in E} \|x_k\|_k^p \right) = 0,$$

womit $(x_k)_{k \in L}$ in $\overline{\cup_{\ell \in L} \delta_\ell(X_\ell)}$ liegt. □

3.1.2 Satz. *Für* $p, q \in (1, +\infty)$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *ist die Abbildung*

$$\Phi\colon \begin{cases} \ell^q(X'_k, k \in L) & \to & \ell^p(X_k, k \in L)', \\ (x'_k)_{k\in L} & \mapsto & \big((y_k)_{k\in L} \mapsto \sum_{k\in L} x'_k(y_k)\big), \end{cases}$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Für festes $(x'_k)_{k\in L} \in \ell^q(X'_k, k \in L)$ betrachten wir die Abbildung

$$\Phi\left((x'_k)_{k\in L}\right) : \begin{cases} \ell^p(X_k, k \in L) & \to & \mathbb{C}, \\ (y_k)_{k\in L} & \mapsto & \sum_{k\in L} x'_k(y_k). \end{cases}$$

Zunächst erhalten wir mit der Hölderschen Ungleichung, Satz 2.3.5, die absolute Konvergenz von $\sum_{k\in L} x'_k(y_k)$, wobei

$$\left|\sum_{k\in L} x'_k(y_k)\right| \le \sum_{k\in L} \left|x'_k(y_k)\right| \le \sum_{k\in L} \|x'_k\|_k \|y_k\|_k \le \|(x'_k)_{k\in L}\|_q \|(y_k)_{k\in L}\|_p. \tag{3.1}$$

Aus der Linearität von x'_k und der Rechenregeln für unbedingt konvergente Reihen folgt für beliebige $(y_k)_{k\in L}, (z_k)_{k\in L} \in \ell^p(X_k, k \in L)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \Phi\left((x'_k)_{k\in L}\right)(\lambda \cdot (y_k)_{k\in L} + \mu \cdot (z_k)_{k\in L}) &= \sum_{k\in L} x'_k(\lambda \cdot y_k + \mu \cdot z_k) \\ &= \lambda \cdot \sum_{k\in L} x'_k(y_k) + \mu \cdot \sum_{k\in L} x'_k(z_k) \\ &= \lambda \cdot \Phi\left((x'_k)_{k\in L}\right)((y_k)_{k\in L}) + \mu \cdot \Phi\left((x'_k)_{k\in L}\right)((z_k)_{k\in L}) \end{aligned}$$

und daher die Linearität von $\Phi((x'_k)_{k\in L})$. Aus (3.1) folgt sogar die Beschränkheit von $\Phi((x'_k)_{k\in L})$ mit $\|\Phi((x'_k)_{k\in L})\| \le \|(x'_k)_{k\in L}\|_q$, weshalb $\Phi((x'_k)_{k\in L})$ in $\ell^p(X_k, k \in L)'$ enthalten ist. Insbesondere ist Φ wohldefiniert. Da für beliebige $(v'_k)_{k\in L}, (w'_k)_{k\in L} \in \ell^q(X'_k, k \in L)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \Phi\left(\lambda \cdot (v'_k)_{k\in L} + \mu \cdot (w'_k)_{k\in L}\right)((y_k)_{k\in L}) &= \sum_{k\in L} (\lambda \cdot v'_k + \mu \cdot w'_k)(y_k) \\ &= \lambda \cdot \sum_{k\in L} v'_k(y_k) + \mu \cdot \sum_{k\in L} w'_k(y_k) \\ &= \lambda \cdot \Phi((v'_k)_{k\in L})((y_k)_{k\in L}) + \mu \cdot \Phi((w'_k)_{k\in L})((y_k)_{k\in L}), \end{aligned}$$

ist Φ linear und erfüllt $\|\Phi\| \le 1$.

Für den Beweis der Surjektivität und Isometrieeigenschaft von Φ setzen wir für ein beliebiges $f \in \ell^p(X_k, k \in L)'$

$$x'_\ell := f \circ \delta_\ell\colon X_\ell \to \mathbb{C},$$

wobei δ_ℓ die zuvor definierte Abbildung von X_ℓ nach $\ell^p(X_k, k \in L)$ ist. Als Zusammensetzung von linearen und beschränkten Abbildungen ist x'_ℓ wieder eine lineare und beschränkte Abbildung. Somit ist $(x'_k)_{k\in L}$ in $\prod_{k\in L} X'_k$ enthalten. Wir wollen

$$(x'_k)_{k\in L} \in \ell^q(X'_k, k \in L) \text{ mit } \|(x'_k)_{k\in L}\|_q \le \|f\| \qquad \text{und} \qquad \Phi((x'_k)_{k\in L}) = f$$

nachweisen. Seien $E \in \mathcal{E}(L)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Für jedes $k \in E$ sei $x_k \in X_k$ mit $\|x_k\|_k = 1$ so, dass

$$x'_k(x_k) = |x'_k(x_k)| \geq \|x'_k\|_k - \varepsilon. \tag{3.2}$$

Definieren wir $(y_k)_{k \in L}$ durch

$$y_k := \begin{cases} \|x'_k\|_k^{\frac{q}{p}} \cdot x_k, & k \in E, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann gilt

$$\|(y_k)_{k\in L}\|_p = \left(\sum_{k \in E} \| \|x'_k\|_k^{\frac{q}{p}} \cdot x_k\|_k^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k \in E} (\|x'_k\|_k^q \cdot \underbrace{\|x_k\|_k^p}_{=1}) \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k \in E} \|x'_k\|_k^q \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.3}$$

womit $(y_k)_{k\in L}$ in $\ell^p(X_k, k \in L)$ enthalten ist. Wegen $(y_k)_{k \in L} = \sum_{k \in E} \delta_k(\|x'_k\|_k^{\frac{q}{p}} \cdot x_k)$ erhalten wir

$$f((y_k)_{k\in L}) = f\left(\sum_{k \in E} \delta_k(\|x'_k\|_k^{\frac{q}{p}} \cdot x_k) \right) = \sum_{k \in E} \left(\|x'_k\|_k^{\frac{q}{p}} \cdot x'_k(x_k) \right).$$

Dabei gilt wegen (3.2)

$$|f((y_k)_{k\in L})| = f((y_k)_{k\in L}) \geq \sum_{k \in E} \left(\|x'_k\|_k^{\frac{q}{p}} \cdot (\|x'_k\| - \varepsilon) \right). \tag{3.4}$$

Andererseits gilt wegen der Beschränktheit von f und wegen (3.3)

$$|f((y_k)_{k\in L})| \leq \|f\| \|(y_k)_{k\in L}\|_p = \|f\| \left(\sum_{k \in E} \|x'_k\|_k^q \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.5}$$

Mit (3.4) und (3.5) bekommen wir die Abschätzung

$$\sum_{k \in E} \left(\|x'_k\|_k^{\frac{q}{p}} \cdot (\|x'_k\| - \varepsilon) \right) \leq \|f\| \cdot \left(\sum_{k \in E} \|x'_k\|_k^q \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Da diese Ungleichung für alle $\varepsilon > 0$ gilt, erhalten wir wegen $q = \frac{q}{p} + 1$

$$\sum_{k \in E} \|x'_k\|_k^q = \sum_{k \in E} \|x'_k\|_k^{\frac{q}{p}+1} \leq \|f\| \cdot \left(\sum_{k \in E} \|x'_k\|_k^q \right)^{\frac{1}{p}},$$

also

$$\left(\sum_{k \in E} \|x'_k\|_k^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k \in E} \|x'_k\|_k^q \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|f\|.$$

Da $E \in \mathcal{E}(L)$ beliebig war, folgt

$$\|(x'_k)_{k\in L}\|_q \leq \|f\|, \tag{3.6}$$

womit $(x'_k)_{k\in L}$ in $\ell^q(X'_k, k \in L)$ ist. Wir wollen $\Phi((x'_k)_{k\in L}) = f$ zeigen. Für festes $k_0 \in L$ gilt

$$\Phi((x'_k)_{k\in L})(\delta_{k_0}(x_{k_0})) = x'_{k_0}(x_{k_0}) = f(\delta_{k_0}(x_{k_0})),$$

und folglich

$$\Phi((x'_k)_{k\in L})((y_k)_{k\in L}) = f((y_k)_{k\in L}) \quad \text{für alle } (y_k)_{k\in L} \in \operatorname{span}\left\{\bigcup_{k_0\in L} \delta_{k_0}(X_{k_0})\right\}.$$

Nach Lemma 3.1.1 stimmen $\Phi((x'_k)_{k\in L})$ und f aus Stetigkeitsgründen auf ganz $\ell^p(X_k, k \in L)$ überrein. Wegen (3.6) und wegen $\|\Phi\| \leq 1$ erhalten wir

$$\|(x'_k)_{k\in L}\|_q \leq \|\Phi\left((x'_k)_{k\in L}\right)\| \leq \|(x'_k)_{k\in L}\|_q,$$

womit sich Φ als Isometrie erweist. □

3.2 Der Dualraum von $\ell^1(X_k, k \in L)$

3.2.1 Satz. *Die Abbildung*

$$\Phi\colon \begin{cases} \ell^\infty(X'_k, k \in L) & \to \quad \ell^1(X_k, k \in L)', \\ \quad (x'_k)_{k\in L} & \mapsto \quad \left((y_k)_{k\in L} \mapsto \sum_{k\in L} x'_k(y_k)\right), \end{cases}$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Zunächst erhalten wir mit der Hölderschen Ungleichung, Satz 2.3.5, die absolute Konvergenz von $\sum_{k\in L} x'_k(y_k)$, wobei

$$\left|\sum_{k\in L} x'_k(y_k)\right| \leq \sum_{k\in L} \left|x'_k(y_k)\right| \leq \sum_{k\in L} \|x'_k\|_k \|y_k\|_k \leq \|(x'_k)_{k\in L}\|_\infty \|(y_k)_{k\in L}\|_1. \tag{3.7}$$

Die Linearität von $\Phi((x'_k)_{k\in L})$ erhält man genauso wie im Beweis von Satz 3.1.2. Aus (3.7) folgt sogar die Beschränkheit von $\Phi\left((x'_k)_{k\in L}\right)$ mit $\|\Phi\left((x'_k)_{k\in L}\right)\| \leq \|(x'_k)_{k\in L}\|_\infty$. Somit ist Φ wohldefiniert mit Werten in $\ell^1(X_k, k \in L)'$. Die Linearität von Φ zeigt man auch wie im Beweis von Satz 3.1.2. Dabei erhalten wir $\|\Phi\| \leq 1$.

Für beliebiges $f \in \ell^1(X_k, k \in L)'$ betrachten wir $(x'_k)_{k\in L} \in \prod_{k\in L} X'_k$ wie in Satz 3.1.2, wobei

$$x'_\ell := f \circ \delta_\ell \colon X_\ell \to \mathbb{C}.$$

Hier bezeichnet δ_ℓ die zuvor definierte Abbildung von X_ℓ nach $\ell^1(X_k, k \in L)$ ist. Wir wollen

$$(x'_k)_{k\in L} \in \ell^\infty(X'_k, k \in L) \quad \text{mit} \quad \|(x'_k)_{k\in L}\|_\infty \leq \|f\|$$

nachweisen. Für ein festes $k_0 \in L$ gilt

$$|x'_{k_0}(x_{k_0})| = |(f \circ \delta_{k_0})(x_{k_0})| \leq \|f\|\|\delta_{k_0}(x_{k_0})\|_1 = \|f\|\|x_{k_0}\|_{k_0},$$

also $\|x'_{k_0}\|_{k_0} \leq \|f\|$. Der Übergang zum Supremum über alle $k_0 \in L$ liefert

$$\|(x'_k)_{k\in L}\|_\infty \leq \|f\|. \tag{3.8}$$

Wir wollen $\Phi((x'_k)_{k\in L}) = f$ zeigen. Für festes $k_0 \in L$ gilt

$$\Phi((x'_k)_{k\in L})(\delta_{k_0}(x_{k_0})) = x'_{k_0}(x_{k_0}) = f(\delta_{k_0}(x_{k_0})),$$

und folglich

$$\Phi((x'_k)_{k\in L})((y_k)_{k\in L}) = f((y_k)_{k\in L}) \quad \text{für alle } (y_k)_{k\in L} \in \operatorname{span}\left\{\bigcup_{k_0\in L} \delta_{k_0}(X_{k_0})\right\}.$$

Nach Lemma 3.1.1 stimmen $\Phi((x'_k)_{k\in L})$ und f aus Stetigkeitsgründen auf ganz $\ell^1(X_k, k \in L)$ überrein. Wegen (3.8) und wegen $\|\Phi\| \leq 1$ erhalten wir

$$\|(x'_k)_{k\in L}\|_\infty \leq \|\Phi\left((x'_k)_{k\in L}\right)\| \leq \|(x'_k)_{k\in L}\|_\infty,$$

womit sich Φ als Isometrie erweist. □

3.3 Der Dualraum von $c_0(X_k, k \in L)$

Ein entsprechendes Resultat wie in Lemma 3.1.1 gilt für den Raum $c_0(X_k, k \in L)$.

3.3.1 Lemma. *Sind L eine Menge und $(X_k, \|.\|_k), k \in L$, normierte Räume, dann gilt*

$$c_0(X_k, k \in L) = \overline{\bigcup_{\ell\in L} \delta_\ell(X_\ell)},$$

wobei der Abschluss bezüglich $\|.\|_\infty$ zu verstehen ist.

Beweis. Für $E \in \mathcal{E}(L)$ und $(x_k)_{k\in L} \in c_0(X_k, k \in L)$ gilt

$$\|(x_k)_{k\in L} - \sum_{k\in E} \delta_k(x_k)\|_\infty = \sup_{k\in L\setminus E} \|x_k\|_k.$$

Mit der Grenzwertbildung erhalten wir, dass die rechte Seite Null ist, womit $(x_k)_{k\in L}$ in $\overline{\bigcup_{\ell\in L} \delta_\ell(X_\ell)}$ liegt. □

3.3.2 Satz. *Die Abbildung*

$$\Phi\colon \begin{cases} \ell^1(X'_k, k\in L) & \to & c_0(X_k, k\in L)', \\ (x'_k)_{k\in L} & \mapsto & \left((y_k)_{k\in L} \mapsto \sum_{k\in L} x'_k(y_k)\right), \end{cases}$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Zunächst erhalten wir mit der Hölderschen Ungleichung, Satz 2.3.5, die absolute Konvergenz von $\sum_{k\in L} x'_k(y_k)$, wobei

$$\left|\sum_{k\in L} x'_k(y_k)\right| \le \sum_{k\in L} |x'_k(y_k)| \le \sum_{k\in L} \|x'_k\|_k \|y_k\|_k \le \|(x'_k)_{k\in L}\|_1 \|(y_k)_{k\in L}\|_\infty. \tag{3.9}$$

Die Linearität von $\Phi((x'_k)_{k\in L})$ erhält man genauso wie im Beweis von Satz 3.1.2. Aus (3.9) folgt sogar die Beschränkheit von $\Phi((x'_k)_{k\in L})$ mit $\|\Phi((x'_k)_{k\in L})\| \le \|(x'_k)_{k\in L}\|_1$. Somit ist $\Phi((x'_k)_{k\in L})$ in $c_0(X_k, k\in L)'$ enthalten. Die Linearität von Φ zeigt man auch wie im Beweis von Satz 3.1.2. Dabei erhalten wir $\|\Phi\| \le 1$.

Für ein beliebiges $f \in c_0(X_k, k\in L)'$ ist das lineare Funktional

$$x'_\ell := f\circ \delta_\ell\colon X_\ell \to \mathbb{C}$$

als Hintereinanderausführung von linear beschränkten Abbildungen in X'_ℓ, womit $(x'_k)_{k\in L}$ in $\prod_{k\in L} X'_k$ liegt. Wir wollen zeigen, dass

$$(x'_k)_{k\in L} \in \ell^1(X_k, k\in L) \ \text{ mit } \ \|(x'_k)_{k\in L}\|_1 \le \|f\|.$$

Sei $E\in\mathcal{E}(L)$ und $\varepsilon > 0$. Für $k\in E$ wählen wir $x_k\in X_k$ mit $\|x_k\|_k = 1$ und

$$x'_k(x_k) = |x'_k(x_k)| \ge \|x'_k\|_k - \varepsilon. \tag{3.10}$$

Wir definieren $(y_k)_{k\in L} \in c_0(X_k, k\in L)$ durch

$$y_k := \begin{cases} x_k, & k\in E, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

und erhalten

$$\|(y_k)_{k\in L}\|_\infty = \sup_{k\in E} \|x_k\|_k = 1. \tag{3.11}$$

Aufgrund der Linearität von f und der Wahl von x'_k gilt

$$f((y_k)_{k\in L}) = f\left(\sum_{k\in E} \delta_k(x_k)\right) = \sum_{k\in E} x'_k(x_k). \tag{3.12}$$

Zusammen mit (3.10), (3.11) und (3.12) haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{k\in E} \left(\|x'_k\| - \varepsilon\right) \le \sum_{k\in E} |x'_k(x_k)| = \sum_{k\in E} x'_k(x_k) &= f((y_k)_{k\in L}) \\ &= |f((y_k)_{k\in L})| \le \|f\| \|(y_k)_{k\in L}\|_\infty = \|f\|. \end{aligned}$$

Da diese Ungleichung für alle $\varepsilon > 0$ gilt, erhalten wir

$$\sum_{k \in E} \|x'_k\|_k \leq \|f\|. \tag{3.13}$$

Da $E \in \mathcal{E}(L)$ beliebig war, gilt sogar

$$\|(x'_k)_{k \in L}\|_1 \leq \|f\|,$$

womit $(x'_k)_{k \in L} \in \ell^1(X'_k, k \in L)$. Wir wollen $\Phi((x'_k)_{k \in L}) = f$ zeigen. Für festes $k_0 \in L$ gilt

$$\Phi((x'_k)_{k \in L})(\delta_{k_0}(x_{k_0})) = x'_{k_0}(x_{k_0}) = f(\delta_{k_0}(x_{k_0})),$$

und folglich

$$\Phi((x'_k)_{k \in L})((y_k)_{k \in L}) = f((y_k)_{k \in L}) \qquad \text{für alle } (y_k)_{k \in L} \in \operatorname{span} \left\{ \bigcup_{k_0 \in L} \delta_{k_0}(X_{k_0}) \right\}.$$

Nach Lemma 3.3.1 stimmen $\Phi((x'_k)_{k \in L})$ und f aus Stetigkeitsgründen auf ganz $c_0(X_k, k \in L)$ überrein. Wegen (3.13) und wegen $\|\Phi\| \leq 1$ erhalten wir

$$\|(x'_k)_{k \in L}\|_1 \leq \|\Phi((x'_k)_{k \in L})\| \leq \|(x'_k)_{k \in L}\|_1,$$

womit sich Φ als Isometrie erweist. $\square$

4 Satz von Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński

Für die Hauptaussage dieses Abschnittes wiederholen wir zuerst ein paar grundlegende Definitionen und relevante Resultate aus der Topologie und Funktionalanalyis. Für den Beweis dieser Aussagen wird auf die entsprechende Literatur verwiesen. Danach werden wir einige Ergebnisse über schwach-kompakten Abbildungen bringen, die wir für den Beweis des Satzes von Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński benötigen.

4.1 Wichtige Definitionen und Resultate der Funktionalanalysis

Die schwache Topologie

4.1.1 Definition. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, so bezeichnet X' den Vektorraum aller beschränkten linearen Abbildungen $f\colon X \to \mathbb{C}$. Die initiale Topologie $\sigma(X, X')$ bezüglich der Familie von Abbildungen $f \in X'$ nennt man die *schwache Topologie* oder *w-Topologie* auf X.

4.1.2 Satz. *Für einen Vektorraum X und einen punktetrennenden linearen Unterraum Y des algebraischen Dualraumes X^* gilt $(X, \sigma(X, Y))' = Y$.*

Beweis. Siehe [[WKM20], Kapitel 5, Satz 5.3.3]. □

4.1.3 Korollar. *Sei X ein Vektorraum und Y_1, Y_2 punktetrennende lineare Unterräume des algebraischen Dualraumes X^*. Dann gilt $\sigma(X, Y_1) \subseteq \sigma(X, Y_2)$ genau dann, wenn $Y_1 \subseteq Y_2$. Insbesondere gilt $\sigma(X, Y_1) = \sigma(X, Y_2)$ genau dann, wenn $Y_1 = Y_2$.*

Beweis. Siehe [[WKM20], Kapitel 5, Korollar 5.3.5]. □

4.1.4 Satz. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Ist $A \subseteq X$ konvex, so gilt $\overline{A}^{\mathcal{T}} = \overline{A}^{\sigma(X,X')}$.*

Beweis. Siehe [[WKM20], Kapitel 5, Satz 5.3.8]. □

Annihilatoren

4.1.5 Definition. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topoloischer Vektorraum, so bezeichne für $M \subseteq X$

$$M^{\perp} := \{x' \in X' : \langle x, x' \rangle = 0, x \in M\}$$

den *Annihilator* von M bezüglich dem punktetrennenden Unterraum X' von X^*, also bezüglich der Dualität

$$(.,.) : \begin{cases} X \times X' & \to \quad \mathbb{C}, \\ (x, x') & \mapsto \quad x'(x). \end{cases}$$

Offenbar gilt

$$M^\perp = \bigcap_{x\in M} \ker \iota(x), \tag{4.1}$$

wobei $\iota : X \to (X')^*$ die lineare Abbildung, definiert durch $\iota(x)(y) = y(x)$ bezeichnet.

4.1.6 Proposition. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und M ein linearer Unterraum von X. Dann gelten die folgenden Aussagen, wobei die auftretenden Annihilatoren bezüglich dem Paar (X, X') gebildet werden.*

(i) Die Abbildung

$$\sigma : \begin{cases} X'/M^\perp & \to & M', \\ x' + M^\perp & \mapsto & x'|_M \end{cases}$$

ist wohldefiniert und stellt eine lineare Bijektion dar.

(ii) Für einen abgeschlossenen Unterraum M von X ist die Abbildung

$$\tau : \begin{cases} (X/M)' & \to & M^\perp, \\ f & \mapsto & f\circ\pi \end{cases}$$

eine lineare Bijektion, wobei $\pi : X \to X/M$ die kanonische Projektion bezeichnet.

Wird $\mathcal{T}$ von einer Norm $\|.\|$ auf X erzeugt, so sind σ und τ isometrisch, wenn man X' mit der Abbildungsnorm und die auftretenden Faktorräume mit der entsprechenden Faktorraumnorm versieht; vgl. [[WKM20], Proposition 2.4.9].

Beweis. Siehe [[WKM20], Kapitel 5, Proposition 5.4.8]. □

Topologien auf $X' = (X, \|.\|)'$ und Satz von Goldstine

4.1.7 Definition. Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum. Der *topologische Bidualraum* $X'' := (X', \|.\|_{X'})'$ ist der topologische Dualraum von X' bezüglich der Abbildungsnorm $\|.\|_{X'}$ auf X'.

4.1.8 Lemma. *Seien $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum und ι eine Abbildung, die einem $x \in X$ das Punktauswertungsfunktional $(f \mapsto f(x)) \in (X')^*$ zuordnet. Dann bildet ι sogar in X'' hinein ab. Die sogenannte* kanonische Einbettung *$\iota\colon X \to X''$ ist linear und isometrisch, wenn man X'' mit der Abbildungsnorm $\|.\|_{X''}$ versieht.*

Beweis. Siehe [[WKM20], Kapitel 5, Lemma 5.5.2]. □

4.1.9 Definition. Sind $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $X' := (X, \mathcal{T})'$ ein punktetrennender Unterraum von X^*, so nennen wir die schwache Topologie $\sigma(X', X) := \sigma(X', \iota(X))$ die *schwach*-Topologie (w^*-Topologie)* auf X', wobei $\iota : X \to X''$ die kanonische Einbettung aus Lemma 4.1.8 bezeichnet.

4.1.10 Definition. Ein normierter Raum $(X, \|.\|)$ heißt *reflexiv*, falls $X'' = \iota(X)$.

4.1.11 Bemerkung. Da $\sigma(X, X')$ die initiale Topologie bezüglich der Abbildungen $X \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{C}, f \in X'$, und $\sigma(X'', X')|_{\iota(X)}$ die initiale Topologie bezüglich der Abbildungen $\iota(X) \ni \iota(x) \mapsto \iota(x)(f) = f(x) \in \mathbb{C}, f \in X'$, ist, dann stellt

$$\iota : (X, \sigma(X, X')) \to (\iota(X), \sigma(X'', X')\big|_{\iota(X)})$$

einen Homöomorphismus dar. //

4.1.12 Satz. (von Banach-Alaoglu)
Für einen normierten Raum $(X, \|.\|)$ ist die bezüglich der Abbildungsnorm abgeschlossene Einheitskugel um die Null in X'

$$K_1^{X'}(0) := \{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$$

kompakt bezüglich der w^*-Topologie $\sigma(X', X)$.

Beweis. Siehe [[WKM20], Kapitel 5, Satz 5.5.6]. □

4.1.13 Satz. (von Goldstine)
Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum und bezeichne $K_1^X(0)$ die abgeschlossene Einheitskugel von X sowie $K_1^{X''}(0)$ jene von X''. Weiters sei ι_X die kanonische Einbettung von X in X'' und $\iota_{X'}$ jene von X' in X'''. Dann gilt

$$\overline{\iota_X(K_1^X(0))}^{\sigma(X'', \iota_{X'}(X'))} = K_1^{X''}(0).$$

Beweis. Siehe [[WKM20], Kapitel 5, Satz 5.5.5]. □

4.2 Schwach-kompakte Abbildungen

Seien X, Y normierte Räume. Wir bezeichnen die Menge aller *beschränkten linearen Abbildungen* von X nach Y mit $L_b(X, Y)$.

4.2.1 Definition. Seien X und Y Banachräume. Eine lineare Abbildung $T\colon X \to Y$ heißt *schwach kompakt*, in Zeichen *w-kompakt*, falls

$$\overline{T(K_1^X(0))}^w$$

w-kompakt in Y ist, wobei der Abschluss bezüglich der schwachen Topologie $\sigma(Y, Y')$ in Y zu verstehen ist.

4.2.2 Satz. *Sind X, Y Banachräume und $T\colon X \to Y$ ein kompakter Operator, also*

$$\overline{T(K_1^X(0))}^{\|.\|}$$

in Y kompakt bezüglich $\|.\|$, so ist T w-kompakt.

Beweis. Aus der Linearität von T und der Konvexität von $K_1^X(0)$ folgt die Konvexität von $T(K_1^X(0))$. Schließlich folgt die Behauptung aus Satz 4.1.4, da

$$\overline{T(K_1^X(0))}^{\|.\|} = \overline{T(K_1^X(0))}^{w}.$$

□

4.2.3 Lemma. *In einem normierten Raum $(X, \|.\|)$ ist jede w-kompakte Teilmenge von X beschränkt bezüglich $\|.\|$.*

Beweis. Sei K eine w-kompakte Teilmenge von X. Für jedes $f \in X'$ ist das Bild $f(K)$ kompakt in $\mathbb{R}$ und damit auch beschränkt. Also gilt

$$\sup_{x \in K} |f(x)| = \sup_{x \in K} |\iota(x)(f)| < +\infty,$$

wobei $\iota : X \to X''$ die kanonische Einbettung aus Lemma 4.1.8 ist. Da X' versehen mit der Abbildungsnorm einen Banachraum bildet, erhalten wir mit dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit

$$\sup_{x \in K} \|\iota(x)\| < +\infty.$$

Wegen $\|\iota(x)\| = \|x\|$ gilt

$$\sup_{x \in K} \|x\| < +\infty,$$

womit K bezüglich $\|.\|$ beschränkt ist. □

4.2.4 Korollar. *Sind X, Y Banachräume und $T \colon X \to Y$ eine w-kompakte Abbildung, dann ist T beschränkt.*

Für $T \in L_b(X, Y)$ ist $T' \in L_b(Y', X')$ der *konjugierte Operator* von T mit

$$y'(Tx) = T'y'(x) \qquad \text{für alle } x \in X \text{ und } y' \in Y'. \tag{4.2}$$

Insbesondere gilt $\|T'\| = \|T\|$.

4.2.5 Lemma. *Seien X, Y Banachräume. Eine lineare Abbildung $T \colon X \to Y$ liegt genau dann in $L_b(X, Y)$, wenn $T : (X, \sigma(X, X')) \to (Y, \sigma(Y, Y'))$ stetig ist.*

Beweis. Sei $T \in L_b(X, Y)$. Um die Stetigkeit von $T \colon (X, \sigma(X, X')) \to (Y, \sigma(Y, Y'))$ zu zeigen, genügt es nach einem Resultat aus [Kal15], die Stetigkeit von

$$f \circ T \colon (X, \sigma(X, X')) \to \mathbb{C}$$

für alle $f \in Y'$ nachzuweisen. Gemäß (4.2) gilt für $x \in X, f \in Y'$

$$f(T(x)) = (T'f)(x),$$

was wegen $(T'f) \in X'$ die $\sigma(X, X')$-Stetigkeit von $f \circ T$ impliziert.

Für die Umkehrung sei $T\colon (X, \sigma(X, X')) \to (Y, \sigma(Y, Y'))$ stetig. Wir betrachten den Graph von T, also

$$\operatorname{graph} T := \{(x, T(x)) \in X \times Y : x \in X\},$$

versehen mit der Produkttopologie $\sigma(X, X') \times \sigma(Y, Y') = \sigma(X \times Y, (X \times Y)')$. Aus der Linearität von T folgt die Konvexität von $\operatorname{graph} T$. Um die Abgeschlossenheit von $\operatorname{graph} T$ bezüglich w zu zeigen, sei $((x_i, T(x_i)))_{i\in I}$ ein Netz in $\operatorname{graph} T$, das gegen $(x, y) \in X \times Y$ schwach konvergiert. Aufgrund der komponentenweisen Konvergenz gilt $x_i \xrightarrow{w} x$ in X. Da T w-w-stetig ist, folgt $T(x_i) \xrightarrow{w} T(x)$ in Y. Wir erhalten

$$(x_i, T(x_i)) \xrightarrow{w} (x, T(x)) \in \operatorname{graph} T,$$

womit $\operatorname{graph} T$ w-abgeschlossen ist. Als w-abgeschlossene konvexe Menge in $X \times Y$ ist $\operatorname{graph} T$ nach Satz 4.1.4 sogar abgeschlossen bezüglich der Norm. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen gilt daher $T \in L_b(X, Y)$. $\square$

4.2.6 Lemma. *Seien X, Y Banachräume. Für $T \in L_b(X, Y)$ ist der konjugierte Operator $T' : (Y', \sigma(Y', Y)) \to (X', \sigma(X', X))$ stetig.*

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass $\sigma(X', X)$ die initiale Topologie bezüglich $\iota_X(X) \subseteq X''$ ist. Nach einem Resultat aus [Kal15] genügt es, die Stetigkeit von

$$\iota_X(x) \circ T' : (Y, \sigma(Y', Y)) \to \mathbb{C}$$

für alle $x \in X$ nachzuweisen. Nach Definition der kanonischen Einbettung und des konjugierten Operators gilt für $g \in Y'$

$$(\iota_X(x) \circ T')(g) = \iota_X(x)(T'g) = (T'g)(x) = g(Tx) = \iota_Y(Tx)(g),$$

womit $\iota_X(x) \circ T'$ stetig bezüglich $\sigma(Y', Y)$ ist. $\square$

4.2.7 Bemerkung. Seien X, Y Banachräume, $T \in L_b(X, Y)$ und $\iota_X : X \to X''$, $\iota_Y : Y \to Y''$ kanonische Einbettungen. Für $T'' : X'' \to Y''$ gilt

$$T'' \circ \iota_X = \iota_Y \circ T. \tag{4.3}$$

In der Tat haben wir für $x \in X, g \in Y'$

$$\left((T'' \circ \iota_X(x)\right)(g) = \iota_X(x)\left(T'g\right) = (T'g)(x) = g(Tx) = \iota_Y(Tx)(g).$$

//

4.2.8 Satz. *Seien X, Y Banachräume und $T \in L_b(X, Y)$. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

(i) T ist w-kompakt.

(ii) Es gilt $T''(X'') \subseteq \iota_Y(Y)$.

(iii) $T' \colon (Y', \sigma(Y', Y)) \to (X', \sigma(X', X''))$ *ist* w^**-*w*-stetig.*

(iv) $T' \colon Y' \to X'$ *ist* w*-kompakt.*

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* Sei $T : X \to Y$ ein w-kompakter Operator. Zunächst merken wir an, dass nach Lemma 4.2.6 der konjugierter Operator T'' von T' w^*-w^*-stetig ist. Wir erhalten mit Satz von Goldstine, der Stetigkeit von T'' und (4.3)

$$\begin{aligned} T''(K_1^{X''}(0)) &= T''(\overline{\iota_X(K_1^X(0))}^{w^*}) \subseteq \overline{T''(\iota_X(K_1^X(0)))}^{w^*} = \overline{\iota_Y(T(K_1^X(0)))}^{w^*} \\ &\subseteq \overline{\iota_Y(\overline{T(K_1^X(0))}^{w})}^{w^*} \overset{(*)}{=} \iota_Y(\overline{T(K_1^X(0))}^{w}) \subseteq \iota_Y(Y), \end{aligned}$$

wobei $(*)$ gilt, da $\iota_Y : (Y, \sigma(Y, Y')) \to (\iota_Y(Y), \sigma(Y'', Y')|_{\iota_Y(Y)})$ nach Bemerkung 4.1.11 einen Homöomorphismus bildet und T nach Voraussetzung w-kompakt ist, woraus die w^*-Kompaktheit von $\iota_Y(\overline{T(K_1^X(0))}^{w})$ in $\iota_Y(Y)$ folgt.

Schließlich gilt für alle $x'' \in X''\backslash\{0\}$

$$T''\left(\frac{x''}{\|x''\|}\right) \in \iota_Y(Y),$$

woraus man durch Skalieren $T''(x'') \in \iota_Y(Y)$ erhält. Somit ist $T''(X'') \subseteq \iota_Y(Y)$.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)* Gelte $T''(X'') \subseteq \iota_Y(Y)$. Nach Satz von Banach-Alaoglu ist $K_1^{X''}(0)$ w^*-kompakt. Daher ist wegen der Stetigkeit von $T'' : (X'', \sigma(X'', X')) \to (Y'', \sigma(Y'', Y'))$

$$T''(K_1^{X''}(0))$$

w^*-kompakt in $\iota_Y(Y)$. Da $\iota_Y : (Y, \sigma(Y, Y')) \to (\iota_Y(Y), \sigma(Y'', Y')|_{\iota_Y(Y)})$ einen Homöomorphismus bildet, ist

$$\iota_Y^{-1}(T''(K_1^{X''}(0)))$$

w-kompakt in Y. Insgesamt erhalten wir mit (4.3)

$$Y \supseteq \iota_Y^{-1}(T''(K_1^{X''}(0))) = T(\iota_X^{-1}(K_1^{X''}(0))) \supseteq T(K_1^X(0)).$$

Also ist $T(K_1^X(0))$ in einer w-kompakten Menge enthalten, womit

$$\overline{T(K_1^X(0))}^{w}$$

w-kompakt in Y ist. Also ist T ein w-kompakter Operator.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* Es gelte $T''(X'') \subseteq \iota_Y(Y)$. Um die w^*-w-Stetigkeit von T' zu zeigen, überprüfen wir die Stetigkeit von

$$F \circ T' : (Y', \sigma(Y', Y)) \to \mathbb{C}$$

für alle $F \in X''$. Gemäß (4.2) gilt für $g \in Y'$

$$(F \circ T')(g) = F(T'(g)) = (T''(F))(g),$$

wobei $T''(F)$ nach Voraussetzung sogar in $\iota_Y(Y)$ enthalten ist. Somit gibt es ein $y \in Y$ so, dass $F \circ T' = \iota_Y(y)$. Die schwache*-Topologie $\sigma(Y', Y)$ werden genau von solchen Punktauswertungsfunktionalen $F \circ T'$ induziert. Da $\sigma(Y', Y)$ die gröbste Topologie auf Y' so ist, dass alle Abbildungen bezüglich $\iota_Y(Y)$ stetig sind, folgt die Stetigkeit von $F \circ T'$ bezüglich $\sigma(Y', Y)$.

(iii) $\Rightarrow$ *(iv)* Sei $T' \colon (Y', \sigma(Y', Y)) \to (X', \sigma(X', X''))$ w^*-w-stetig. Nach Satz von Banach-Alaoglu ist $K_1^{Y'}(0)$ w^*-kompakt in Y', woraus die Kompaktheit von $T'(K_1^{Y'}(0))$ in X' bezüglich w folgt. Wegen

$$T'(K_1^{Y'}(0)) = \overline{T'(K_1^{Y'}(0))}^{w}$$

ist somit T' ein w-kompakter Operator.

(iv) $\Rightarrow$ *(ii)* Sei $T' : Y' \to X'$ w-kompakt. Der konjugierte Operator

$$T'' : (X'', \sigma(X'', X')) \to (Y'', \sigma(Y'', Y'''))$$

von T' ist dann nach dem oben Bewiesenem w^*-w-stetig ist. Wegen des Satzes von Goldstine und (4.3) schließen wir daher auf

$$\begin{aligned} T''(K_1^{X''}(0)) &= T''\left(\overline{\iota_X(K_1^X(0))}^{w^*}\right) \subseteq \overline{T''(\iota_X(K_1^X(0)))}^{w} = \overline{\iota_Y(T(K_1^X(0)))}^{w} \\ &\overset{(*)}{=} \overline{\iota_Y(T(K_1^X(0)))}^{\|\cdot\|_{X''}} \subseteq \overline{\iota_Y(Y)}^{\|\cdot\|_{X''}} = \iota_Y(Y). \end{aligned}$$

wobei $(*)$ wegen Satz 4.1.4 gilt, da das Bild linearer Abbildungen einer konvexen Menge wieder konvex ist. Die letzte Gleichung gilt, da die kanonische Einbettung ι_Y isometrisch ist und somit $\iota_Y(Y)$ eine abgeschlossene Teilmenge von Y'' ist.

Schließlich gilt für $x'' \in X'' \setminus \{0\}$ mit $\frac{x''}{\|x''\|} \in K_1^{X''}(0)$

$$\frac{1}{\|x''\|} T''(x'') = T''\left(\frac{x''}{\|x''\|}\right) \in \iota_Y(Y).$$

Somit folgt $T''(X'') \subseteq \iota_Y(Y)$.

□

Für unsere Zwecke ist eine Konsequenz des Satzes von Eberlein-Šmulian interessant, die wir ohnen Beweis zitieren wollen.

4.2.9 Korollar. (Folgerung des Satzes von Eberlein-Šmulian)
Ist X ein Banachraum, dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Die abgeschlossene Einheitskugel $K_1^X(0)$ in X ist w-kompakt.

(ii) *X ist reflexiv.*

(iii) *Ist Y ein Norm-abgeschlosser Teilraum von X, dann ist Y reflexiv.*

(iv) *Jeder Norm-abgeschlossene und separable Teilraum von X ist reflexiv. Dabei heißt ein topologischer Raum separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge hat.*

(v) *Jede beschränkte Folge in X hat eine w-konvergente Teilfolge.*

4.2.10 Proposition. *Seien X, Y, Z Banachräume, $S, T \in L_b(X, Y), R \in L_b(Y, Z)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.*

(i) *$\alpha S + \beta T \colon X \to Y$ ist w-kompakt, falls S, T beide w-kompakt sind.*

(ii) *$RS \colon X \to Z$ ist w-kompakt, falls R oder S w-kompakt ist.*

(iii) *Die Menge*

$$w\text{-}L_b(X, Y) = \{B \in L_b(X, Y) : B \text{ ist } w\text{-kompakt}\}$$

ist abgeschlossen bezüglich der Operatornorm.

(iv) *Falls X oder Y reflexiv ist, dann gilt*

$$L_b(X, Y) = w\text{-}L_b(X, Y).$$

Beweis.

(i): Seien S, T w-kompakte Operatoren. Wegen Satz 4.2.8 gilt für $x'' \in X''$

$$\alpha\, S''(x'') + \beta\, T''(x'') \in \iota_Y(Y),$$

also $(\alpha S + \beta T)''(X'') \subseteq \iota_Y(Y)$. Somit ist $\alpha S + \beta T$ nach Satz 4.2.8 ein w-kompakter Operator.

(ii): Sei S ein w-kompakter Operator. Aus $R \in L_b(Y, Z)$ folgt nach Lemma 4.2.5 die Stetigkeit von $R : (Y, \sigma(Y, Y')) \to (Z, \sigma(Z, Z'))$. Zusammen mit der w-Kompaktheit von S erhalten wir die w-Kompaktheit von $R(\overline{S(K_1^X(0))}^w)$ in Z. Zudem gilt

$$R(\overline{S(K_1^X(0))}^w) \supseteq (RS)(K_1^X(0)),$$

folglich

$$R(\overline{S(K_1^X(0))}^w) \supseteq \overline{(RS)(K_1^X(0))}^w.$$

Als w-abgeschlossene Menge in einer w-kompakten Menge ist $\overline{(RS)(K_1^X(0))}^w$ selbst w-kompakt, womit RS ein w-kompakter Operator ist.

Sei R w-kompakt. Wegen $S \in L_b(X,Y)$ gilt

$$(RS)(K_1^X(0)) \subseteq R(K_{\|S\|}^Y(0)) = \|S\| \cdot R(K_1^Y(0)),$$

somit gilt

$$\overline{(RS)(K_1^X(0))}^w \subseteq \|S\| \cdot \overline{R(K_1^Y(0))}^w.$$

Da das Multiplizieren mit einem Skalar einen Homöomorphismus bildet, erhalten wir mit der gleichen Argumentation wie vorhin, dass RS ein w-kompakter Operator ist.

(iii): Zu $T \in \overline{w\text{-}L_b(X,Y)}^{\|\cdot\|}$ gibt es eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus w-$L_b(X,Y)$ mit

$$\|T_n - T\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wegen $\|T'\| = \|T\|$ erhalten wir

$$\|T_n'' - T''\| = \|(T_n - T)''\| = \|T_n - T\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Aus der Konvergenz bezüglich der Operatornorm folgt die punktweise Konvergenz, also für alle $x'' \in X''$ gilt

$$\|T_n''(x'') - T''(x'')\|_{Y''} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Aufgrund der Schwach-Kompaktheit von T_n'' gilt $T_n''(X'') \subseteq \iota_Y(Y)$ nach Satz 4.2.8. Also ist $(T_n''(x''))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge im abgeschlossenen Unterraum $\iota_Y(Y)$, womit der Grenzwert $T''(x'')$ in $\iota_Y(Y)$ enthalten ist. Nach Satz 4.2.8 ist T w-kompakt.

(iv): Sei $T \in L_b(X,Y)$. Nach Lemma 4.2.5 ist $T : (X, \sigma(X,X')) \to (Y, \sigma(Y,Y'))$ stetig. Ist X reflexiv, so ist $K_1^X(0)$ nach Korollar 4.2.9 w-kompakt. Zusammen mit der Stetigkeit von T folgt die Kompaktheit von $T(K_1^X(0))$ bezüglich w in Y. Folglich ist

$$\overline{T(K_1^X(0))}^w$$

w-kompakt in Y, womit $T \in w$-$L_b(X,Y)$. Ist Y reflexiv, so ist $K_1^Y(0)$ nach Korollar 4.2.9 w-kompakt. Wegen $T \in L_b(X,Y)$ gilt

$$T(K_1^X(0)) \subseteq K_{\|T\|}^Y(0) = \|T\| \cdot K_1^Y(0).$$

Da das Multiplizieren mit einem Skalar einen Homöomorphismus bildet, ist $\|T\| \cdot K_1^Y(0)$ w-kompakt. Folglich erhalten wir

$$\overline{T(K_1^X(0))}^w \subseteq \|T\| \cdot K_1^Y(0).$$

Als w-abgeschlossene Menge, die in einer w-kompakten Menge enthalten ist, ist $\overline{T(K_1^X(0))}^w$ selbst w-kompakt, womit $T \in w$-$L_b(X,Y)$.

□

4.3 Satz von Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński

Bevor wir uns das Hauptresultat dieses Abschnittes zuwenden, rufen wir ein paar grundlegende Begriffe topologischer Vektorräume sowie das Minkowski-Funktional in Erinnerung.

4.3.1 Definition. Die Teilmenge A eines Vektorraumes X heißt

(i) *absorbierend*, wenn es zu jedem $x \in X$ ein $t > 0$ gibt mit $tx \in A$.

(ii) *kreisförmig*, wenn für alle $x \in A$ und $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1$, auch $\lambda x \in A$ gilt.

(iii) *konvex*, wenn für alle $x, y \in A$ und $\lambda \in [0, 1]$ auch

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$$

gilt, also wenn die Menge A mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält.

4.3.2 Definition. Sei A eine nichtleere, absorbierende Teilmenge eines Vektorraumes X. Eine Abbildung $\mu_A \colon X \to [0, +\infty)$, die definiert ist durch

$$\mu_A(x) := \inf \left\{ t > 0 : \frac{1}{t} x \in A \right\},$$

heißt das *Minkowski-Funktional* von A.

4.3.3 Lemma. *Sei A eine nichtleere, absorbierende Teilmenge eines Vektorraumes X.*

(i) *Es gilt $A \subseteq \{x \in X : \mu_A(x) \leq 1\}$.*

(ii) *Es gilt $\mu_A(0) = 0$ sowie*

$$\mu_{\frac{1}{r}A}(x) = \mu_A(rx) = r\mu_A(x) \qquad \text{für alle } x \in X, r > 0.$$

(iii) *Ist A zusätzlich konvex, so gilt*

$$\mu_A(x + y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y) \qquad \text{für alle } x, y \in X.$$

(iv) *Ist A kreisförmig, dann gilt*

$$\mu_A(\lambda x) = |\lambda|\mu_a(x) \qquad \text{für alle } x \in X, \lambda \in \mathbb{C}.$$

(v) *Für konvexes A gilt $\{x \in X : \mu_A(x) < 1\} \subseteq A$.*

(vi) *Ist A zudem konvex und offen bezüglich irgendeiner Topologie auf X, die X zu einem topologischen Vektorraum macht, so gilt*

$$A = \{x \in X : \mu_A(x) < 1\}.$$

(vii) Für ein konvexes und kreisförmiges A ist μ_A eine Seminorm.

Beweis. Siehe [[WKM20], Kapitel 5, Lemma 5.1.9]. □

Die folgende Aussage über absorbierenden Mengen wird sich im Beweis des Satzes von Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński als nützlich erweisen.

4.3.4 Lemma. *Seien $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum und $A \subseteq X$ eine nichtleere offene, absorbierende, kreisförmige und konvexe Menge. Für $c, d > 0$ mit $U_c(0) \subseteq A \subseteq U_d(0)$ und $x \in X$ gilt*

$$\frac{1}{d}\|x\| \leq \mu_A(x) \leq \frac{1}{c}\|x\|.$$

Infolge ist μ_A eine zu $\|.\|$ äquivalente Norm.

Beweis. Zunächst merken wir an, dass μ_A nach Lemma 4.3.3 eine Seminorm ist. Seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$, dann gilt

$$\mu_A\left(\frac{1}{\mu_A(x)+\varepsilon} \cdot x\right) = \frac{1}{\mu_A(x)+\varepsilon} \cdot \mu_A(x) < 1.$$

Nach Lemma 4.3.3 ist $\frac{1}{\mu_A(x)+\varepsilon} \cdot x$ in A enthalten, weshalb nach Voraussetzung

$$\left\|\frac{x}{\mu_A(x)+\varepsilon}\right\| < d$$

und daher $\|x\| < (\mu_A(x)+\varepsilon) \cdot d$ folgt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $\|x\| \leq \mu_A(x) \cdot d$. Andererseits gilt für $\varepsilon > 0$

$$\left\|\frac{c}{\|x\|+\varepsilon} \cdot x\right\| < c,$$

also $\frac{c}{\|x\|+\varepsilon} \cdot x \in U_c(0)$. Nach Voraussetzung ist $U_c(0)$ eine Teilmenge von A. Also folgt aus Lemma 4.3.3

$$\mu_A\left(\frac{c}{\|x\|+\varepsilon} \cdot x\right) = \frac{c}{\|x\|+\varepsilon} \cdot \mu_A(x) \leq 1.$$

Durch Umformen erhalten wir

$$\mu_A(x) \leq \frac{1}{c}\left(\|x\|+\varepsilon\right).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $\mu_A(x) \leq \frac{1}{c}\|x\|$. Insgesamt erhalten wir

$$\frac{1}{d}\|x\| \leq \mu_A(x) \leq \frac{1}{c}\|x\|.$$

□

4.3.5 Satz. (von Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński)
Seien X, Y Banachräume und $T\colon X \to Y$ eine beschränkte lineare Abbildung. Dann ist T genau dann w-kompakt, wenn es einen reflexiven Banachraum Z und zwei beschränkte lineare Abbildungen $\alpha\colon X \to Z$, $\beta\colon Z \to Y$ derart gibt, dass $T = \beta \circ \alpha$.

Beweis. Sei Z ein reflexiver Banachraum und seien α, β zwei beschränkte lineare Abbildungen so, dass $T = \beta \circ \alpha$. Aus der Reflexivität von Z folgt mit Korollar 4.2.9 die Kompaktheit von $K_1^Z(0)$ bezüglich w. Nach Lemma 4.2.5 ist das Bild $\beta(K_1^Z(0))$ ebenfalls w-kompakt, woraus die Abgeschlossenheit von $\beta(K_1^Z(0))$ bezüglich w folgt. Also ist

$$\overline{\beta(K_1^Z(0))}^w$$

w-kompakt in Y, weshalb β ein w-kompakter Operator ist. Wegen Proposition 4.2.10 ist die Zusammensetzung $T = \beta \circ \alpha$ schließlich w-kompakt. Der Beweis der Umkehrung wird aufgrund seines Umfangs in mehreren Schritten geführt.

Schritt 1. Für einen w-kompakten Operator $T\colon X \to Y$ ist

$$W := \overline{T(K_1^X(0))}^w$$

eine nichtleere konvexe, kreisförmige und beschränkte Menge. Die Konvexität bzw. die Kreisförmigkeit von W folgt aus der Linearität von T und aus der Tatsache, dass der Abschluss bezüglich w einer konvexen bzw. kreisfrömigen Mengen wieder konvex bzw. kreisförmig ist. Da T ein w-kompakter Operator ist, folgt die Beschränktheit von W aus Korollar 4.2.4. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$U_n := 2^n W + 2^{-n} U_1^Y(0).$$

Offenbar ist U_n eine Teilmenge von Y und als Summe von kreisförmigen und konvexen Mengen ist U_n wieder kreisförmig und konvex. Weiters lässt sich U_n schreiben als

$$U_n = \bigcup_{w \in W} \left(2^n w + 2^{-n} U_1^Y(0)\right),$$

womit U_n als Vereinigung von offenen Mengen wieder offen ist. Da U_n eine Umgebung der Null enthält, ist U_n zudem absorbierend. Wegen $W \subseteq \|T\| K_1^Y(0)$ haben wir

$$U_n \subseteq K_{2^n\|T\|}^Y(0) + U_{2^{-n}}^Y(0) \subseteq \left(2^n\|T\| + 2^{-n}\right) U_1^Y(0).$$

Andererseits gilt $U_n \supseteq 2^{-n} U_1^Y(0)$, womit

$$2^{-n} U_1^Y(0) \subseteq U_n \subseteq \left(2^n\|T\| + 2^{-n}\right) U_1^Y(0). \tag{4.4}$$

Schließlich betrachten wir das Minkowski-Funktional $\mu_{U_n}\colon Y \to [0, +\infty)$ von U_n. Nach Lemma 4.3.3 ist μ_{U_n} eine Seminorm. Wir setzen $\|.\|_n := \mu_{U_n}(.)$ und erhalten wegen (4.4) und Lemma 4.3.4 für alle $x \in Y$

$$\left(2^n\|T\| + 2^{-n}\right)^{-1} \|x\| \leq \|x\|_n \leq 2^n\|x\|.$$

Also ist $\|.\|_n$ eine zu $\|.\|$ äquivalente Norm auf Y.

Schritt 2. Ausgehend von $Y := (Y, \|.\|)$ konstruieren wir für $n \in \mathbb{N}$ den Raum $Y_n := (Y, \|.\|_n)$. Da Y ein Banachraum ist und $\|.\|_n$ zueinander und zu $\|.\|$ äquivalente Normen sind, bildet auch Y_n einen Banachraum. Zudem stimmen die jeweiligen Dualräume Y' und Y_n' als Vektorräume mit äquivalenten Abbildungsnormen $\|.\|$ und $\|.\|_n$ überein. Auch $(Y')'$ und $(Y_n')'$ stimmen als Vektorräume mit äquivalenten Abbildungsnormen $\|.\|$ und $\|.\|_n$ überein. Schließlich betrachten wir die kanonische Einbettung $\iota_Y : Y \to Y''$, die einem Element y aus Y das Punktauswertungsfunktional $(f \mapsto f(y))$ aus Y'' zuordnet. Wegen $Y' = Y_n'$ und $Y'' = Y_n''$ hängt ι_Y nicht von der konkreten Norm ab.

Schritt 3. Wir wollen den Raum

$$\ell^2(Y_n, n \in \mathbb{N}) = \left\{ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^{\infty} Y_n : \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_n^2 < +\infty \right\}$$

versehen mit der Norm

$$\|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

in Erinnerung rufen. Nach Satz 2.3.7 bildet $(\ell^2(Y_n, n \in \mathbb{N}), \|.\|_2)$ einen Banachraum. Für festes $n_0 \in \mathbb{N}$ betrachten wir die kanonische Projektion

$$\pi_{n_0} : \begin{cases} \ell^2(Y_n, n \in \mathbb{N}) & \to & Y_{n_0}, \\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & y_{n_0}, \end{cases}$$

wobei Y_{n_0} und Y als Vektorräume übereinstimmen. π_{n_0} ist linear und beschränkt mit $\|\pi_{n_0}\| \leq 1$. Wir definieren

$$Z := \left\{ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(Y_n, n \in \mathbb{N}) : y_n = y_m \in Y \text{ für alle } n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Nach Konstruktion lässt sich Z darstellen durch

$$Z = \bigcap_{n \neq m} \ker(\pi_n - \pi_m).$$

Aufgrund der Linearität und Beschränktheit der Abbildung $\pi_n - \pi_m : \ell^2(Y_n, n \in \mathbb{N}) \to Y$ ist $\ker(\pi_n - \pi_m)$ abgeschlossen. Somit ist Z als Schnitt abgeschlossener Unterräume wieder ein solcher. Als abgeschlossener Unterraum eines Banachraumes ist Z selbst ein Banachraum.

Schritt 4. Als Nächstes beweisen wir

$$K_1^{Y_n''}(0) = 2^n \iota_Y(W) + 2^{-n} K_1^{Y''}(0). \tag{4.5}$$

Für die kanonischen Einbettungen $\iota_Y : Y \to \iota_Y(Y)$ und $\iota_{Y'} : Y' \to \iota_{Y'}(Y')$ und die w^*-Topologie $\sigma(Y'', \iota_{Y'}(Y'))$ auf Y'' erhalten wir mit dem Satz von Goldstine

$$\begin{aligned}
K_1^{Y_n''}(0) &= \overline{\iota_Y(K_1^{Y_n}(0))}^{w^*} = \overline{\iota_Y(\overline{U_1^{Y_n}(0)}^{\|\cdot\|_n})}^{w^*} \\
&\overset{(*)}{=} \overline{\overline{\iota_Y(U_1^{Y_n}(0))}^{\|\cdot\|_n}}^{w^*} \overset{(**)}{=} \overline{\iota_Y(U_1^{Y_n}(0))}^{w^*} \\
&= \overline{2^n \iota_Y(W) + 2^{-n}\iota_Y(U_1^Y(0))}^{w^*},
\end{aligned}$$

wobei man den Abschluss in der Gleichheit $(*)$ wegen der Isometrieeigenschaft von ι_Y hinausziehen kann. Die Gleichheit $(**)$ gilt, da die w^*- Topologie gröber als, die von der Norm erzeugte Topologie ist. Die letzte Gleichheit gilt nach Lemma 4.3.3 wegen

$$U_1^{Y_n}(0) = \{x \in Y : \|x\|_n < 1\} = U_n = 2^n W + 2^{-n} U_1^Y(0). \tag{4.6}$$

Da $+ : Y'' \times Y'' \to Y''$ w^*-stetig ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\overline{2^n \iota_Y(W) + 2^{-n} \iota_Y(U_1^Y(0))}^{w^*} &\supseteq \overline{2^n \iota_Y(W)}^{w^*} + \overline{2^{-n}\iota_Y(U_1^Y(0))}^{w^*} \\
&= 2^n \iota_Y(W) + 2^{-n} \overline{\iota_Y(\overline{U_1^Y(0)}^{\|\cdot\|})}^{w^*} && (4.7a) \\
&= 2^n \iota_Y(W) + 2^{-n} \overline{\iota_Y(K_1^Y(0))}^{w^*} \\
&= 2^n \iota_Y(W) + 2^{-n} K_1^{Y''}(0) && (4.7b) \\
&\supseteq \overline{2^n \iota_Y(W) + 2^{-n} \iota_Y(U_1^Y(0))}^{w^*},
\end{aligned}$$

wobei Gleichheit in (4.7a) gilt, da ι_Y nach Bemerkung 4.1.11 ein w-w^*-Homöomorphismus und W w-kompakt ist. Die Gleichheit in (4.7b) hat wegen des Satzes von Goldstine ihre Gültigkeit. Das letzte $\supseteq$ gilt, da die Menge in (4.7b) w^*-kompakt ist. Zusammengefasst haben wir gezeigt, dass

$$K_1^{Y_n''}(0) = \overline{2^n \iota_Y(W) + 2^{-n} \iota_Y(U_1^Y(0))}^{w^*} = 2^n \iota_Y(W) + 2^{-n} K_1^{Y''}(0).$$

Schritt 5. Sei y'' ein Element aus $Y_n'' \backslash \iota_Y(Y)$, womit $\frac{y''}{\|y''\|_n} \in K_1^{Y_n''}(0) \backslash \iota_Y(Y)$. Wegen (4.5) gilt für gewisse $z \in W$ und $z'' \in K_1^{Y''}(0)$

$$\frac{y''}{\|y''\|_n} = 2^n \iota_Y(z) + 2^{-n} z''.$$

Durch Umformen erhalten wir

$$y'' - 2^n \|y''\|_n \iota_Y(z) = 2^{-n} \|y''\|_n z'',$$

und folglich

$$\|y'' - 2^n \|y''\|_n \iota_Y(z)\| \leq 2^{-n} \|y''\|_n \|z''\| \leq 2^{-n} \|y''\|_n. \tag{4.8}$$

Für den Abstand

$$0 < \eta := d^{\|\cdot\|}(y'', \iota_Y(Y)) = \inf\left\{z \in \iota_Y(Y) : \|y'' - z\|\right\}$$

erhalten wir $\eta \leq 2^{-n}\|y''\|_n$ aus (4.8), also

$$\eta\, 2^n \leq \|y''\|_n. \tag{4.9}$$

Schritt 6. Nach Satz 3.1.2 lässt sich $\ell^2(Y_n, n \in \mathbb{N})'$ mit $\ell^2(Y_n', n \in \mathbb{N})$ und $\ell^2(Y_n', n \in \mathbb{N})'$ mit $\ell^2(Y_n'', n \in \mathbb{N})$ identifizieren, weshalb sich $\ell^2(Y_n, n \in \mathbb{N})''$ mit $\ell^2(Y_n'', n \in \mathbb{N})$ identifizieren lässt. Die kanonische Einbettung $\iota : \ell^2(Y_n, n \in \mathbb{N}) \to \ell^2(Y_n'', n \in \mathbb{N})$ erfüllt dabei

$$\iota((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\iota_Y(y_n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Schritt 7. Als Nächstes wollen wir

$$Z'' \cong (Z^\perp)^\perp \subseteq \ell^2(Y_n'', n \in \mathbb{N}) \tag{4.10}$$

nachweisen. Da Z ein abgeschlossener Unterraum von $\ell^2(Y_n, n \in \mathbb{N})$ ist, gilt für den Dualraum von Z nach Proposition 4.1.6, dass $Z' \cong \ell^2(Y_n', n \in \mathbb{N})'/Z^\perp$ vermöge

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, bend left, "\sigma^{-1}"] & \ell^2(Y_n', n \in \mathbb{N})'/Z^\perp \arrow[l, bend left, "\sigma"] \end{tikzcd},$$

wobei σ die isometrische Bijektion aus Proposition 4.1.6 ist. Abermals wegen Proposition 4.1.6 haben wir $Z'' \cong (\ell^2(Y_n', n \in \mathbb{N})'/Z^\perp)' \cong (Z^\perp)^\perp (\subseteq \ell^2(Y_n'', n \in \mathbb{N}))$ vermöge

$$\begin{tikzcd} (\ell^2(Y_n', n \in \mathbb{N})'/Z^\perp)' \arrow[r, bend left, "\tau^{-1}"] & (Z^\perp)^\perp \arrow[l, bend left, "\tau"] \end{tikzcd},$$

wobei τ wie in Proposition 4.1.6 ist. Somit können wir Z'' als eine abgeschlossene Teilmenge von $\ell^2(Y_n'', n \in \mathbb{N})$ interpretieren. Für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Z$ mit in Y übereinstimmenden y_n gilt dabei

$$\iota_Z((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\iota_Y(y_n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Schritt 8. Seien $(y_n'')_{n\in\mathbb{N}} \in Z'' \cong (Z^\perp)^\perp \subseteq \ell^2(Y_n'', n \in \mathbb{N})$ und $f \in Y'$ beliebig. Wir wählen die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass für $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \neq m_0$

$$f_n = \begin{cases} 0, & n \notin \{n_0, m_0\}, \\ f, & n = n_0, \\ -f, & n = m_0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Offenbar ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\ell^2(Y'_n, n\in\mathbb{N})$ mit

$$\|(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|^2 = \|f_{n_0}\|^2 + \|f_{m_0}\|^2 = \|f\|^2 + \|-f\|^2 < +\infty.$$

Nach Konstruktion von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Z$

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(y_n) = f(y_{n_0}) - f(y_{m_0}) = 0,$$

womit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar in $Z^\perp$ enthalten ist. Wegen (4.10) gilt für alle $f \in Y'$ mit den entsprechenden f_n gemäß (4.11)

$$(y''_n)_{n\in\mathbb{N}}((f_n)_{n\in\mathbb{N}}) = f(y''_{n_0}) - f(y''_{m_0}) = 0.$$

Also hat man $y''_{n_0} = y''_{m_0} \in Y''$, weshalb jedes $(y''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Z'' aus gleichen Elementen von Y'' besteht.

Schritt 9. Angenommen, Z ist nicht reflexiv. Dann gibt es ein $(y''_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Z''\backslash\iota_Z(Z)$, welches $y''_n = y''_m =: y'' \in Y''$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ erfüllt und folglich $y'' \notin \iota_Y(Y)$. Wegen (4.9) gibt es für $y'' \in Y''\backslash\iota_Y(Y)$ ein $\eta > 0$ mit $\eta\, 2^n \le \|y''\|_n$, woraus wir

$$\|(y''_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|y''_n\|_n^2 \ge \eta \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n = +\infty$$

erhalten, was ein Widerspruch zu $(y''_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(Y''_n, n\in\mathbb{N})$ darstellt. Also gilt $Z'' = \iota_Z(Z)$, weshalb Z ein reflexiver Banachraum ist.

Schritt 10. Wir definieren die Abbildung $\alpha : X \to Z$ durch $\alpha(x) := (T(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Um die Wohldefiniertheit und Beschränktheit von α zu zeigen, betrachten wir für $T(\frac{x}{\|x\|}) \in T(K_1^X(0)) \subseteq W$. Nach Konstruktion von U_n und wegen (4.6) gilt

$$2^n\, T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \in 2^n\, W \subseteq U_n = U_1^{Y_n}(0),$$

folglich

$$\left\|2^n\, T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|_n = \left\|\frac{2^n}{\|x\|}\, T\,(x)\right\|_n < 1.$$

Durch Umformen erhalten wir

$$\|T(x)\|_n \le \|x\|\, \frac{1}{2^n}. \tag{4.12}$$

Wegen (4.12) folgt

$$\|(T(x))_{n\in\mathbb{N}}\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T(x)\|_n^2 \le \|x\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}\, \|x\|^2,$$

womit $(T(x))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(Y_n, n \in \mathbb{N})$ und nach Konstruktion gilt sogar $(T(x))_{n\in\mathbb{N}} \in Z$. Somit ist $\alpha : X \to Z$ eine lineare und beschränkte Abbildung.

Schließlich definieren wir $\beta : Z \to Y$ durch $\beta := \pi_1|_Z$, wobei $\pi_1 : \ell^2(Y_n, n \in \mathbb{N}) \to Y_1 = Y$ die kanonische Projektion ist. Offenbar ist β als eine Einschränkung einer linearen und beschränkten Abbildung wieder beschränkt und linear. Für $x \in X$ gilt

$$\beta(\alpha(x)) = T(x),$$

womit sich T als Hintereinanderausführung zweier beschränkten linearen Abbildungen darstellen lässt. $\square$

Anhang

In diesem Anhang wiederholen wir die Definition und relevante Resultate über unbedingte Konvergenz, siehe [Kal15].

A.1 Unbedingte Konvergenz

Für eine nichtleere Menge M bezeichnen wir mit $\mathcal{E}(M)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von M. Setzt man $A \preceq B :\Leftrightarrow A \subseteq B$, so wird $(\mathcal{E}(M), \preceq)$ zu einer gerichteten Menge.

A.1 Definition. Seien M eine nichtleere Menge, $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum und $a_j \in X$ für jedes $j \in M$. Falls das Netz $(\sum_{j\in A} a_j)_{A\in\mathcal{E}(M)}$ in X bezüglich $\|.\|$ konvergiert, so sagen wir, dass $\sum_{j\in M} a_j$ *unbedingt konvergiert* und setzen

$$\sum_{j\in M} a_j = \lim_{A\in\mathcal{E}(M)} \sum_{j\in A} a_j,$$

wobei wir die Summe über die leere Indexmenge Null setzen.

A.2 Lemma. *Seien M eine nichtleere Menge, $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum und $a_j, b_j \in X$, $j \in M$. Dann gilt für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$*

$$\sum_{j\in M} (\lambda\, a_j + \mu\, b_j) = \lambda \left(\sum_{j\in M} a_j \right) + \mu \left(\sum_{j\in M} b_j \right)$$

in dem Sinn, dass die linke Seite unbedingt konvergiert, wenn es die rechte tut.

Beweis. Siehe [[Kal15], Kapitel 9, Definition 9.3.4]. □

A.3 Lemma. *Seien M eine nichtleere Menge, $(X, \|.\|)$ ein Banachraum und $a_j \in X$ für jedes $j \in M$. Die Summe $\sum_{j\in M} \|a_j\|$ konvergiert unbedingt genau dann, wenn*

$$\sum_{j\in A} \|a_j\| \le C \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{E}(M) \tag{A.1}$$

mit einem von A unabhängigen $C > 0$. In dem Fall konvergiert auch $\sum_{j\in M} a_j$ unbedingt.

Beweis. Siehe [[Kal15], Kapitel 9, Fakta 9.3.5]. □

Literaturverzeichnis

[Wer18] D. Werner: *Funktionalanalysis.* Springer Verlag, 8. Edition, 2018.

[Leo76] I.E. Leonard: *Banach sequence spaces.* J. Math. Anal. Appl. 54 (1976), 245–265.

[Mor21] T.J. Morrison: *Funktional Analysis: An Introduction to Banach Space Theory.* John Wiley & Sons, Inc., 2001.

[Woj91] P. Wojtaszczyk: *Banach spaces for analysts.* Cambridge University Press, 1991.

[Kal15] M. Kaltenbäck: *Fundament Analysis.* Heldermann Verlag, 2015.

[Kal21] M. Kaltenbäck: *Aufbau Analysis*, Heldermann Verlag, 2021.

[WKM20] H. Woracek, M. Kaltenbäck, M. Blümlinger: *Funktionalanalysis.* Vorlesungsskriptum 2020.

[Jue20] A. Jüngel: *Partielle Differentialgleichungen.* Vorlesungsskriptum 2020.