BACHELORARBEIT

Uniforme Räume

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Kaltenbäck

durch

Florian Mielke-Sulz

Matrikelnummer: 11770909

Wien, am 21. Oktober 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Uniforme Räume sind spezielle topologische Räume, mit denen viele wichtige Konzepte aus der Theorie der metrischen Räume, wie gleichmäßige Stetigkeit, Vollständigkeit und totale Beschränktheit, verallgemeinert werden können.

Vorliegende Arbeit beginnt mit der einigen grundlegenden Definitionen und Aussagen über uniforme Räume, welche im Wesentlichen [1] und [3] entnommen wurden. Anschließend werden in Kapitel 3 basierend auf [3] und [7] zwei weitere Möglichkeiten angegebenen einen uniformen Raum zu definieren und die Frage, wann ein topologischer Raum ein uniformer ist, beantwortet. In Kapitel 4, welches sich nach [1] und [3] richtet, wird der Begriff der Vollständigkeit eingeführt und neben einigen aus der Theorie der metrischen Räume bekannten Eigenschaften gezeigt, dass jeder uniformer Raum eine Vervollständigung besitzt.

Notation Sei X eine Menge und $U, V \subseteq X \times X$. Wir setzen

$$U^{-1} := \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in U\},$$

$$VU := V \circ U := \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in X \text{ mit } (x, z) \in U, (z, y) \in V\}$$

sowie induktiv $U^1 := U$ und für $n \in \mathbb{N}$

$$U^n := U^{n-1} \circ U, \quad n \geq 2.$$

Man sagt, dass U symmetrisch ist, falls $U = U^{-1}$ gilt. Außerdem nennen wir die Menge

$$\Delta := \{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times X$$

Diagonale von X.

Bemerkung 1.0.1. Enthält $U \subseteq X \times X$ die Diagonale, so gilt $U \subseteq U^n$ für $n \geq 1$.

2 Grundlegendes über uniforme Räume

2.1 Definition eines uniformen Raumes

Definition 2.1.1. Sei X eine Menge. Ein Filter $\mathcal{U}$ auf $X \times X$ heißt uniforme Struktur, wenn

(i) $\Delta \subseteq U$ für jedes $U \in \mathcal{U}$ gilt,

(ii) $U^{-1} \in \mathcal{U}$ für $U \in \mathcal{U}$ und

(iii) es für jedes $U \in \mathcal{U}$ ein $V \in \mathcal{U}$ gibt mit $V^2 \subseteq U$.

Wir nennen die Mengen aus $\mathcal{U}$ Nachbarschaften und $(X,\mathcal{U})$ einen uniformen Raum.

Bemerkung 2.1.2. Im Punkt *(iii)* können wir sogar ein symmetrisches V finden mit $V^2 \subseteq U$; man nehme statt dem V in *(iii)* einfach $V \cap V^{-1}$.

Bemerkung 2.1.3. Wie wir in Beispiel 2.2.2 sehen werden, ist jeder metrische Raum (M, d) auch ein Uniformer. Außerdem kann man zu einem uniformen Raum $(X,\mathcal{U})$ und jedem $x \in X$ einen Filter durch

$$\mathcal{U}(x) := \{U(x) : U \in \mathcal{U}\}$$

definieren, wobei

$$U(x) := \{y \in X : (x, y) \in U\}.$$

In der Tat gilt stets $(X \times X)(x) = X \in \mathcal{U}(x)$ und wegen $\Delta \subseteq U$ auch $x \in U(x)$ für alle $U \in \mathcal{U}$, womit $\emptyset \notin \mathcal{U}(x)$. Für U_1, U_2 aus dem Filter $\mathcal{U}$ gilt $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ und damit

$$(U_1 \cap U_2)(x) = U_1(x) \cap U_2(x) \in \mathcal{U}(x).$$

Definieren wir schließlich für $U \in \mathcal{U}$ und $N \supseteq U(x)$

$$\hat{U} := (N \times N) \cup U,$$

so liegt diese Menge wegen der Filtereigenschaft in $\mathcal{U}$. Zudem gilt

$$\begin{aligned} \hat{U}(x) &= \{y \in X : (x, y) \in (N \times N) \cup U\} \\ &= \{y \in X : (x, y) \in (N \times N)\} \cup \{y \in X : (x, y) \in U\} \\ &= N \cup U(x) = V \end{aligned}$$

und damit $N \in \mathcal{U}(x)$.

Folgender Satz zeigt uns, dass damit für jeden uniformen Raum $(X,\mathcal{U})$ auf eindeutige Weise eine Topologie definiert wird.

Satz 2.1.4. *Für eine uniforme Struktur $\mathcal{U}$ auf X bildet*

$$\mathcal{T} := \{O \subseteq X : O \in \mathcal{U}(x) \text{ für alle } x \in O\}$$

eine Topologie auf X. Diese hat die Eigenschaft, dass für jedes $x \in X$ der Umgebungsfilter $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}(x)$ von x bzgl. $\mathcal{T}$ mit $\mathcal{U}(x)$ übereinstimmt. Diese Eigenschaft bestimmt $\mathcal{T}$ eindeutig.

Beweis. Schritt 1: Wir zeigen, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie ist. Offensichtlich liegt die leere Menge in $\mathcal{T}$. Außerdem gilt $X \in \mathcal{T}$, da für $U := X \times X$ sicher $U \in \mathcal{U}$ und damit

$$X = U(x) \in \mathcal{U}(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Für gegebene $O_i \in \mathcal{T}, i \in I$, und $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$ gibt es $j \in I$ mit $O_j \in \mathcal{U}(x)$. Weil $\mathcal{U}(x)$ nach Bemerkung 2.1.3 ein Filter ist, folgt aus $O_j \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$

$$\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{U}(x),$$

und daher $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Der Schluss von $O_1, ..., O_n \in \mathcal{T}$ auf

$$\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{T}$$

verläuft analog, wobei hier aber die Eigenschaft von Filtern, abgeschlossen unter endlichen Schnitten zu sein, verwendet wird.

Schritt 2: Um $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}(x) = \mathcal{U}(x)$ für jedes feste $x \in X$ nachzuweisen, sei $N \in \mathcal{U}_{\mathcal{T}}(x)$ gegeben. Nach Definition gibt es ein $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq N$ und

$$O = U(x) \subseteq N$$

für ein $U \in \mathcal{U}$. Weil $\mathcal{U}(x)$ ein Filter ist, folgt $N \in \mathcal{U}(x)$.

Ist umgekehrt $N \in \mathcal{U}(x)$, so setzen wir

$$\hat{N} := \{y \in X : N \in \mathcal{U}(y)\} \subseteq N,$$

wobei $\hat{N} \subseteq N$, da $N \in \mathcal{U}(y)$ auch $y \in N$ nach sich zieht. Wenn wir $x \in \hat{N} \in \mathcal{T}$ zeigen können, erhalten wir $N \in \mathcal{U}_{\mathcal{T}}(x)$. Wegen $N \in \mathcal{U}(x)$ gilt offensichtlich $x \in \hat{N}$. Wenn es für beliebiges $y \in \hat{N}$ ein $M \in \mathcal{U}(y)$ mit $N \in \mathcal{U}(w)$ für alle $w \in M$ gäbe, würde $M \subseteq \hat{N}$ folgen. Daraus wiederum würde

$$\hat{N} \in \mathcal{U}(y) \qquad \text{für alle } y \in \hat{N}$$

folgen, womit $\hat{N} \in \mathcal{T}$. Es bleibt also zu zeigen, dass es so ein M zu beliebigem $y \in \hat{N}$ gibt. Wegen $N \in \mathcal{U}(y)$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $N = U(y)$. Außerdem gibt es nach Bemerkung 2.1.2 ein symmetrisches $W \in \mathcal{U}$, das $W^2 \subseteq U$ erfüllt. Für $w \in W(y)$ und $z \in W(w)$ folgt

$$(y, w), (w, z) \in W,$$

woraus wir $(y, z) \in W^2 \subseteq U$ und damit $z \in U(y)$ erhalten. Also gilt $W(w) \subseteq U(y) = N$ für alle $w \in W(y)$ und
$$M := W(y) \in \mathcal{U}(y)$$
erfüllt wie gewünscht
$$N \in \mathcal{U}(w) \quad \text{für alle } w \in M.$$

Schritt 3: Um die Eindeutigkeit nachzuweisen, sei $\tilde{\mathcal{T}}$ eine weitere Topologie, dessen Umgebungssystem für jedes $x \in X$ mit $\mathcal{U}(x)$ übereinstimmt. Für ein $\tilde{O} \in \tilde{\mathcal{T}}$ gilt
$$\tilde{O} \in \mathcal{U}(y) \quad \text{für alle } y \in \tilde{O}.$$
Das bedeutet aber genau $\tilde{O} \in \mathcal{T}$. Ist andererseits $O \in \mathcal{T}$, so gilt $O \in \mathcal{U}(x)$ für alle $x \in O$, also $O \in \tilde{\mathcal{T}}$.

□

Alle topologischen Begriffe beziehungsweise Aussagen über uniforme Räume beziehen sich im Folgenden auf die vom uniformen Raum induzierte Topologie.

Definition 2.1.5. Eine Teilmenge $\mathcal{B}$ einer uniformen Struktur $\mathcal{U}$ auf X heißt Fundamentalsystem von $\mathcal{U}$, wenn $\mathcal{B}$ eine Filterbasis von $\mathcal{U}$ ist.

Bemerkung 2.1.6. Ist $\mathcal{B}$ ein Fundamentalsystem von $\mathcal{U}$ und $x \in X$, so ist
$$\{B(x) : B \in \mathcal{B}\}$$
eine Umgebungsbasis von x, denn zu $U \in \mathcal{U}$ gibt es $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq U$, weshalb
$$B(x) \subseteq U(x).$$

Lemma 2.1.7. *Ist $\mathcal{B}$ ein Fundamentalsystem eines uniformen Raumes $(X,\mathcal{U})$, so sind es für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ auch*
$$\hat{\mathcal{B}} := \{B \cap B^{-1} : B \in \mathcal{B}\} \quad \textit{und} \quad \mathcal{B}_n := \{B^n : B \in \mathcal{B}\}.$$

Beweis. Wegen $\mathcal{U} \ni B \cap B^{-1} \subseteq B$ für $B \in \mathcal{B}$ ist $\hat{\mathcal{B}}$ ein Fundamentalsystem. Anschließend zeigen wir, dass $\mathcal{B}_n$ ein Fundamentalsystem von $\mathcal{U}$ ist. Für ein $U \in \mathcal{U}$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}$ mit $V^2 \subseteq U$. Außerdem gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq V$, wodurch
$$B^2 \subseteq V^2 \subseteq U.$$
Für den Fall $n > 2$ sei wieder $U \in \mathcal{U}$ und $k \in \mathbb{N}$ sowie $B_1, ..., B_k \in \mathcal{B}$ so, dass $2^k > n$, $B_1^2 \subseteq U$ und $B_{m+1}^2 \subseteq B_m$ für alle $m = 1, ..., k-1$. Infolge gilt $B_k^{2^k} \subseteq U$, womit wegen
$$B_k^j = B_k \circ B_k^{j-1} \subseteq B_k^2 \circ B_k^{j-1} = B_k^{j+1}, \;\; j \in \mathbb{N},$$
auch
$$\mathcal{U} \ni B_k \subseteq B_k^n \subseteq B_k^{2^k} \subseteq U.$$

□

Folgender Satz gibt uns ein Kriterium dafür, dass eine Menge bestehen aus Teilmengen von $X \times X$ ein Fundamentalsystem einer uniformen Struktur auf X bildet.

Satz 2.1.8. *Sei $\mathcal{B}$ eine Menge bestehend aus Teilmengen von $X \times X$ mit folgenden Eigenschaften.*

($b1$) *Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq B_1 \cap B_2$.*

($b2$) *Für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt $\Delta \subseteq B$.*

($b3$) *Zu jedem $B \in \mathcal{B}$ existiert ein $\hat{B} \in \mathcal{B}$ mit $\hat{B} \subseteq B^{-1}$.*

($b4$) *Für jedes $B \in \mathcal{B}$ gibt es ein $\hat{B} \in \mathcal{B}$ mit $\hat{B}^2 \subseteq B$.*

Dann ist $\mathcal{B}$ ein Fundamentalsystem für die uniforme Struktur

$$\mathcal{U} := \{U \subseteq X \times X : \textit{Es gibt ein } B \in \mathcal{B} \textit{ mit } B \subseteq U\}.$$

Beweis. Da jede Obermenge einer Menge $U \in \mathcal{U}$ wieder in $\mathcal{U}$ liegt, wegen ($b2$) die leere Menge nicht in $\mathcal{U}$ enthalten sein kann und wegen ($b1$) der Durchschnitt von zwei Mengen aus $\mathcal{U}$ wieder in $\mathcal{U}$ liegt, ist $\mathcal{U}$ ein Filter auf $X \times X$. Außerdem folgt aus ($b2$), dass jedes $U \in \mathcal{U}$ die Diagonale enthält. Für $U \in \mathcal{U}$ und $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq U$ gibt es wegen ($b3$) ein $\hat{B}$ mit

$$\hat{B} \subseteq B^{-1} \subseteq U^{-1}$$

und deshalb $U^{-1} \in \mathcal{U}$. Schließlich gibt es zu $U \in \mathcal{U}$ und $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq U$ wegen ($b4$) ein $\hat{B} \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ mit

$$\hat{B}^2 \subseteq B \subseteq U.$$

□

Lemma 2.1.9. *Ist $(X,\mathcal{U})$ ein uniformer Raum und $\mathcal{B}$ ein Fundamentalsystem, so sind auch*

$$\{B^\circ : B \in \mathcal{B}\} \quad \textit{und} \quad \{\overline{B} : B \in \mathcal{B}\}$$

Fundamentalsysteme, wobei der Abschluss und das Innere bezüglich der Produkttopologie auf $X \times X$ zu verstehen sind.

Beweis. Um zu zeigen, dass $\{B^\circ : B \in \mathcal{B}\}$ ein Fundamentalsystem ist, müssen wir wegen $B^\circ \subseteq B$ nur $B^\circ \in \mathcal{U}$ zeigen. In der Tat gibt es ein symmetrisches $W \in \mathcal{U}$ mit

$$W^3 \subseteq B.$$

Zudem existieren für $(x, y) \in W$ offene $O_x, O_y \subseteq X$ mit

$$(x, y) \in O_x \times O_y \subseteq W(x) \times W(y) = \{(w, w') \in X \times X : (x, w), (y, w') \in W\} \subseteq W^3.$$

Es folgt

$$W \subseteq \bigcup_{(x,y)\in W} O_x \times O_y \subseteq W^3 \subseteq B,$$

womit $W \subseteq B^\circ$ und daher $B^\circ \in \mathcal{U}$.

Für ein $U \in \mathcal{U}$ gibt es ein symmetrisches $W \in \mathcal{U}$ mit $W^3 \subseteq U$ und ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq W$. Wenn wir $\overline{W} \subseteq U$ zeigen können, folgt $\overline{B} \subseteq \overline{W} \subseteq U$, womit sich $\{\overline{B} : B \in \mathcal{B}\}$ als Fundamentalsystem herausstellt. Für $(x, y) \in \overline{W}$ gibt es $(w, w') \in X \times X$ mit

$$(w, w') \in W \cap (W(x) \times W(y)),$$

wodurch für $(x, w), (y, w') \in W$ wegen $W = W^{-1}$

$$(x, y) \in W^3.$$

□

Bemerkung 2.1.10. Ist $U \in \mathcal{U}$ bezüglich der Produkttopologie auf $X \times X$ offen, so ist für jedes $x \in X$ die Menge $U(x)$ bezüglich der von $\mathcal{U}$ induzierten Topologie $\mathcal{T}$ offen. Ist nämlich $y \in U(x)$, so gibt es aufgrund der Offenheit von U Mengen $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ mit $(x, y) \in O_1 \times O_2 \subseteq U$ und damit

$$y \in O_2 \subseteq U(x).$$

2.2 Beispiele uniformer Räume

Beispiel 2.2.1. Auf jeder Menge X gibt es zwei triviale uniforme Strukturen. Die indiskrete, die nur $X \times X$ enthält und die diskrete uniforme Struktur, bestehend aus allen $U \subseteq X \times X$ mit $\Delta \subseteq U$. Desweiteren induziert die diskrete uniforme Struktur $\mathcal{U}$ die diskrete Topologie $\mathcal{T}_d$. Um das einzusehen, sei $O \in \mathcal{T}_d$, also eine beliebige Teilmenge von X. Da die Menge

$$U := O \times O \cup \Delta$$

offensichtlich in $\mathcal{U}$ enthalten ist und erhalten wir für jedes $x \in O$

$$U(x) = \{y \in X : x = y \text{ oder } y \in O\} = O,$$

weshalb $O \in \mathcal{U}(x)$. Also ist O in der von $\mathcal{U}$ induzierten Topologie $\mathcal{T}$ enthalten und damit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Beispiel 2.2.2. Jeder metrischer Raum (M, d) induziert eine uniforme Struktur über das Fundamentalsystem

$$\mathcal{B} := \{U_\epsilon : \epsilon > 0\},$$

wobei $U_\epsilon := \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \epsilon\}$. In der Tat erfüllt $\mathcal{B}$ die Bedingungen aus 2.1.8, denn aus

$$U_{\min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}} \subseteq U_{\epsilon_1} \cap U_{\epsilon_2}$$

für alle $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ folgt $(b1)$, aus $d(x, x) = 0 < \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$ und $x \in X$ folgt $(b2)$, wegen der Symmetrie von d gilt $(b3)$ und aus der Dreiecksungleichung folgt

$$(U_{\frac{\epsilon}{2}})^2 \subseteq U$$

und damit $(b4)$.

Beispiel 2.2.3. Ist p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$ und

$$U_n := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : p^n \text{ teilt } x - y\},$$

so wird durch

$$\mathcal{B} := \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ein Fundamentalsystem für die sogenannte p-adische uniforme Struktur auf $\mathbb{Z}$ definiert.

Beispiel 2.2.4. Sei $(G, *, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe, also eine Gruppe $(G, *)$ versehen mit einer Topologie $\mathcal{T}$ derart, dass die Gruppenverknüpfung $(x, y) \mapsto x * y$ und die Inversenabbildung $x \mapsto x^{-1}$ stetig sind. Desweiteren bezeichne $\mathcal{U}(e)$ den Umgebungsfilter des neutralen Elements $e \in G$. Ist $\mathcal{R}$ die Menge aller

$$U_N := \{(g, h) \in G \times G : gh^{-1} \in N\}, \;\; N \in \mathcal{U}(e),$$

so erfüllt $\mathcal{R}$ die Bedingungen aus Satz 2.1.8 und ist somit ein Fundamentalsystem einer uniformen Struktur $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ auf G, die sogenannte rechte uniforme Struktur. Außerdem stimmt die von $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ induzierte Topologie mit $\mathcal{T}$ überein. Für einen Beweis, siehe Lemma 2.1 in [2]. Die Struktur $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ macht die Rechtstranslation $\tau_g : h \mapsto h * g$ für jedes $g \in G$ gleichmäßig stetig (siehe Definition 2.4.1), denn sind $(g_1, g_2) \in U_N, N \in \mathcal{U}(e)$ so gilt

$$g_1 * g * (g_2 * g)^{-1} = g_1 * g_2^{-1} \in N$$

und damit

$$(g_1 * g, g_2 * g) \in U_N,$$

also $(\tau_g \times \tau_g)(U_N) \subseteq U_N$.

Ist $\mathcal{L}$ die Menge aller

$${}_N U := \{(g, h) \in G \times G : g^{-1}h \in N\}, \;\; N \in \mathcal{U}(e),$$

dann erfüllt $\mathcal{L}$ auch die Bedingungen für ein Fundamentalsystem einer uniformen Struktur $\mathcal{U}_{\mathcal{L}}$, die im Allgemeinen verschieden von $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ ist. Sie wird die linke uniforme Struktur von G genannt und macht die Linkstranslation $h \mapsto g * h$ für jedes $g \in G$ gleichmäßig stetig. Ist G abelsch, so gilt $\mathcal{U}_{\mathcal{R}} = \mathcal{U}_{\mathcal{L}}$.

Beispiel 2.2.5. Sei X eine Menge und $\mathcal{P}$ die Menge seiner endlichen Partitionen, also die Menge aller $P = (P_1, ..., P_n)$, wobei die P_i nichtleere Teilmengen von X sind, die $P_i \cap P_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i=1}^n P_i = X$ erfüllen. Setzen wir für $P \in \mathcal{P}$

$$V_P := \{(x, y) \in X \times X : \exists\, i = 1, ..., n \text{ mit } x, y \in P_i\} = \bigcup_{i=1}^{n} P_i \times P_i,$$

so ergibt

$$\{V_P : P \in \mathcal{P}\}$$

ein Fundamentalsystem für eine uniforme Struktur $\mathcal{U}$ auf X. Man nennt sie die uniforme Struktur der endlichen Partitionen. Ist die Menge X endlich, so stimmt die uniforme Struktur der endlichen Partitionen mit der diskreten uniformen Struktur überein. In jedem Fall induziert die uniforme Struktur der endlichen Partitionen $\mathcal{U}$ die diskrete Topologie $\mathcal{T}_d$. Um das einzusehen, sei O eine beliebige Teilmenge von X und $x \in O$. Setzen wir

$$U := (O \times O) \cup (O^c \times O^c),$$

so folgt aus $x \notin O^c$

$$U(x) = \{y \in X : y \in O \text{ oder } (x, y) \in O^c \times O^c\} = O.$$

Wenn wir zeigen können, dass U in $\mathcal{U}$ liegt, erhalten wir $O \in \mathcal{U}(x)$ und damit die Offenheit von O bezüglich der von $\mathcal{U}$ induzierten Topologie. Setzen wir $P = (O, O^c)$, so gilt $V_P = U$ und damit $U \in \mathcal{U}$.

2.3 Topologische Eigenschaften uniformer Räume

Definition 2.3.1. Ein uniformer Raum heißt Hausdorff'sch, kompakt beziehungsweise T_3-Raum, wenn der induzierte topologische Raum Hausdorff'sch, kompakt beziehungsweise ein T_3-Raum ist.

Satz 2.3.2. *Für einen uniformer Raum $(X,\mathcal{U})$ gelten folgende Aussagen:*

(i) X ist genau dann Hausdorff'sch, wenn

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \Delta.$$

(ii) X ist ein T_3-Raum.

Beweis. (i): Ist X Hausdorff'sch und sind $x \neq y$ aus X, so gibt es $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ mit

$$U_1(x) \cap U_2(y) = \emptyset.$$

Insbesondere gilt $U := U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ und

$$U(x) \cap U(y) = \emptyset,$$

womit $(x, y) \notin U$, also $(x, y) \notin \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$. Gilt andererseits $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \Delta$, so gibt es zu $x \neq y$ aus X ein $U \in \mathcal{U}$ mit $(x, y) \notin U$. Nach Bemerkung 2.1.2 existiert ein symmetrisches $W \in \mathcal{U}$ mit $W^2 \subseteq U$, wodurch

$$(x, y) \notin W^2.$$

Also kann es kein $z \in X$ mit $(x, z) \in W$ und $(z, y) \in W^{-1} = W$ geben. Das bedeutet aber gerade

$$W(x) \cap W(y) = \emptyset.$$

(ii): Satz 6.6 in [1] besagt, dass X genau dann ein T_3-Raum ist, wenn es für $O \in \mathcal{T}$ und $x \in O$ ein $N \in \mathcal{T}$ derart gibt, dass

$$x \in N \subseteq \overline{N} \subseteq O.$$

Für $O \in \mathcal{T}$ und $x \in O$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U(x) \subseteq O$. Für dieses U gibt es wegen Lemma 2.1.9 ein symmetrisches und bezüglich der Produkttopologie auf $X \times X$ offenes $W \in \mathcal{U}$ mit $W^2 \subseteq U$. Wegen $W(y) \in \mathcal{U}(y)$ folgt aus $y \in \overline{W(x)}$

$$W(x) \cap W(y) \neq \emptyset.$$

Für $z \in W(x) \cap W(y)$ gilt $(x,z),(y,z) \in W$ und wegen der Symmetrie auch $(z,y) \in W$, wodurch $(x,y) \in W^2$ und damit

$$y \in W^2(x), \quad \text{also} \quad \overline{W(x)} \subseteq W^2(x).$$

Für die gemäß Bemerkung 2.1.10 offene Menge $N := W(x)$ erhalten wir wegen $W^2 \subseteq U$ die gewünschte Aussage

$$x \in W(x) \subseteq \overline{W(x)} \subseteq W^2(x) \subseteq U(x) \subseteq O.$$

□

2.4 Gleichmäßig stetige Abbildungen

Definition 2.4.1. Eine Abbildung $f : X \to Y$ mit zwei uniformen Räumen $(X,\mathcal{U})$ und $(Y,\mathcal{V})$ heißt gleichmäßig stetig, wenn es für jedes $V \in \mathcal{V}$ ein $U \in \mathcal{U}$ derart gibt, dass $(f \times f)(U) \subseteq V$.

Bemerkung 2.4.2.
- Offenbar ist f genau dann gleichmäßg stetig, wenn obige Bedingung für Fundamentalsysteme anstatt der Uniformitäten $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ gelten.
- Die gleichmäßige Stetigkeit von f ist zu $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}$ für alle $V \in \mathcal{V}$ äquivalent.
- Jede gleichmäßig stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig bezüglich der von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ induzierten Topologien, denn für $x \in X$ und eine Umgebung $V(f(x)), V \in \mathcal{V}$, von $f(x)$ gibt es wegen der gleichmäßigen Stetigkeit ein $U \in \mathcal{U}$ mit $(f \times f)(U) \subseteq V$, weshalb auch

$$f(U(x)) \subseteq V(f(x)).$$

- Ist Y mit der diskreten uniformen Struktur versehen, so ist jede Abbildung $f : X \to Y$ gleichmäßig stetig.

In Analogie zu metrischen Räumen gilt der folgende Satz.

Satz 2.4.3. *Sei $(X,\mathcal{U})$ ein kompakter uniformer Raum und $(Y,\mathcal{V})$ ein uniforme Raum. Ist $f : X \to Y$ stetig, so ist f sogar gleichmäßig stetig.*

Beweis. Für ein $V \in \mathcal{V}$ gibt es ein symmetrisches $W \in \mathcal{V}$ mit $W^2 \subseteq V$. Wegen der Stetigkeit von f gibt es zu jedem $x \in X$ ein $U_x \in \mathcal{U}$ mit

$$f(U_x(x)) \subseteq W(f(x)).$$

Wieder finden wir ein symmetrisches $S_x \in \mathcal{U}$ mit $S_x^2 \subseteq U_x$. Wegen $S_x(x) \in \mathcal{U}(x)$ gilt $x \in S_x(x)^\circ$. Aus

$$\bigcup_{x \in X} S_x(x)^\circ = X$$

folgt aufgrund der Kompaktheit die Existenz einer endliche Teilmenge E von X mit $X = \bigcup_{x \in E} S_x(x)^\circ$. Wir setzen

$$U := \bigcap_{x \in E} S_x \in \mathcal{U}$$

und wollen $(f \times f)(U) \subseteq V$ zeigen. Zu $(x, y) \in U$ gibt es ein $z \in E$ mit $(z, x) \in S_z$. Wegen

$$f(x) \in f(S_z(z)) \subseteq f(S_z^2(z)) \subseteq f(U_z(z)) \subseteq W(f(z))$$

gilt auch $(f(z), f(x)) \in W$ und aus

$$(z, y) \in U \circ S_z \subseteq S_z^2$$

folgt analog $(f(z), f(y)) \in W$. Wir erhalten schließlich

$$(f(x), f(y)) \in W \circ W^{-1} = W^2 \subseteq V.$$

□

Proposition 2.4.4. *Seien $(X,\mathcal{U}), (Y, \mathcal{V})$ und $(Z, \mathcal{Z})$ uniforme Räume. Sind die Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ gleichmäßig stetig, so auch $g \circ f$.*

Beweis. Zu einem $W \in \mathcal{Z}$ gibt es wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von g ein $V \in \mathcal{V}$ mit $(g \times g)(V) \subseteq W$. Weiters gibt es aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f ein $U \in \mathcal{U}$ mit $(f \times f)(U) \subseteq V$. Insgesamt erhalten wir

$$((g \circ f) \times (g \circ f))(U) \subseteq (g \times g)(V) \subseteq W.$$

□

2.5 Die initial uniforme Struktur

Das Konzept der Initialtopologie kann man in analoger Weise auf uniforme Räume übertragen, wobei man statt der Stetigkeit die gleichmäßige Stetigkeit der Abbildungen fordert.

Definition 2.5.1. Seien $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ uniforme Strukturen auf einer Menge X. Die Struktur $\mathcal{U}_1$ heißt feiner beziehungsweise gröber als $\mathcal{U}_2$, wenn $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1$ beziehungsweise $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$ gilt.

Lemma 2.5.2. *Zu einer Familie $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ von uniformen Strukturen auf einer Menge X gibt es eine gröbste uniforme Struktur $\mathcal{U}$, die alle $\mathcal{U}_i$ enthält.*

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ jene uniforme Struktur, die alle Mengen der Bauart

$$\bigcap_{i\in E} U_i,\;\; U_i \in \mathcal{U}_i,\;\; E \subseteq I, |E| < \infty,$$

als Fundamentalsystem besitzt. Wir überprüfen die Vorraussetzungen aus Satz 2.1.8. Offenbar gelten $(b1)$, $(b2)$ und $(b3)$. Um $(b4)$ zu zeigen, sei E eine endliche Teilmenge von I und $U_i \in \mathcal{U}_i$, $i \in E$. Es existieren $V_i \in \mathcal{U}_i$ mit

$$V_i^2 \subseteq U_i$$

und daher

$$\left(\bigcap_{i\in E} V_i\right)^2 \subseteq \bigcap_{i\in E} V_i^2 \subseteq \bigcap_{i\in E} U_i.$$

Ist $\hat{\mathcal{U}}$ eine weiter uniforme Struktur, die alle $\mathcal{U}_i$ enthält, so enthält $\hat{\mathcal{U}}$ auch alle $\bigcap_{i\in E} U_i, U_i \in \mathcal{U}_i, E \subseteq I, |E| < \infty$, und damit $\mathcal{U} \subseteq \hat{\mathcal{U}}$.

□

Definition 2.5.3. Sind $f_i : X \to Y_i, i \in I$, Abbildungen von einer Menge X in uniforme Räume $(Y_i, \mathcal{V}_i)$, so nennt man die gröbste uniforme Struktur $\mathcal{U}$ auf X derart, dass alle f_i gleichmäßig stetig sind, initial uniform bezüglich $(f_i)_{i\in I}$.

Bemerkung 2.5.4. Für eine uniforme Struktur $\mathcal{U}$ auf X sind alle f_i genau dann gleichmäßig stetig, wenn sie alle Mengen $(f_i \times f_i)^{-1}(\mathcal{V}_i)$ umfasst. Also ist die initial uniforme Struktur bezüglich der $(f_i)_{i\in I}$ gemäß Lemma 2.5.2 wohldefiniert. Nach dem Beweis von Lemma 2.5.2 ist ein Fundamentalsystem $\mathcal{B}$ von $\mathcal{U}$ gegeben durch die Menge aller

$$\bigcap_{i\in E} (f_i \times f_i)^{-1}(V_i), \tag{2.1}$$

wobei $E \subseteq I, |E| < \infty$ und $V_i \in \mathcal{V}_i$ für $i \in E$.

Satz 2.5.5. *Mit der Notation aus Definition 2.5.3 gelten folgende Aussagen.*

(i) Ist $h : Z \to X$ eine Abbildung von einem uniformen Raum $(Z, \mathcal{W})$ in $(X,\mathcal{U})$, so ist h genau dann gleichmäßig stetig, wenn alle $f_i \circ h, i \in I$, es sind.

(ii) Die Topologie $\mathcal{T}$, die von $\mathcal{U}$ erzeugt wird, stimmt mit der Initialtopologie $\mathcal{I}$ der $(f_i)_{i\in I}$ überein.

Beweis. (i): Gemäß Proposition 2.4.4 folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von h und f_i die von $f_i \circ h$. Seien also umgekehrt alle $f_i \circ h$, $i \in I$, gleichmäßig stetig. Für ein $U \in \mathcal{U}$ gibt es ein

$$B = \bigcap_{i\in E} (f_i \times f_i)^{-1}(V_i),$$

wobei $E \subseteq I, |E| < \infty$ und $V_i \in \mathcal{V}_i$ für $i \in E$, mit $B \subseteq U$. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit der $f_i \circ h$ bekommen wir für jedes $i \in E$ ein $W_i \in \mathcal{W}$ mit

$$(f_i \times f_i) \circ (h \times h)(W_i) \subseteq V_i$$

und infolge

$$(h \times h)(W_i) \subseteq (f_i \times f_i)^{-1}(V_i).$$

Für $W := \bigcap_{i \in E} W_i \in \mathcal{W}$ folgt

$$(h \times h)(W) \subseteq \bigcap_{i \in E} (f_i \times f_i)^{-1}(V_i) \subseteq U.$$

(ii): Für den Beweis von (iii) zeigen wir im ersten Schritt, dass die Mengen der Bauart

$$\bigcap_{i \in E} f_i^{-1}(V_i(f_i(x))), \quad E \subseteq I, |E| < \infty, (f_i \times f_i)^{-1}, V_i \in \mathcal{V}_i \text{ für } i \in E,$$

eine Umgebungsbasis von x bezüglich der Initialtopologie $\mathcal{I}$ bilden. Dafür sei N eine Umgebung von x bezüglich der Initialtopologie $\mathcal{I}$. Folglich existieren eine endliche Menge $E \subseteq I$ und in Y_i offene $O_i, i \in E$, mit

$$x \in \bigcap_{i \in E} f_i^{-1}(O_i) \subseteq N.$$

O_i ist eine Umgebung von $f_i(x)$, wodurch es ein $V_i \in \mathcal{V}_i$ gibt mit

$$O_i = V_i(f_i(x))$$

und infolge

$$x \in \bigcap_{i \in E} f_i^{-1}(V_i(f_i(x))) \subseteq N.$$

Da alle f_i stetig sind, erweist sich $f_i^{-1}(V_i(f_i(x)))$ als Umgebung bezüglich der Initialtopologie $\mathcal{I}$, wodurch auch

$$\bigcap_{i \in E} f_i^{-1}(V_i(f_i(x)))$$

eine solche ist.

Im zweiten Schritt zeigen wir, dass obige Umgebungsbasis bezüglich der Initialtopologie gerade mit

$$\{B(x) : B \in \mathcal{B}\}$$

übereinstimmt. Hierfür sei $B \in \mathcal{B}$ gemäß (2.1) gegeben durch

$$B = \bigcap_{i \in E} (f_i \times f_i)^{-1}(V_i), \quad \text{wobei} \quad E \subseteq I, |E| < \infty, V_i \in \mathcal{V}_i \text{ für } i \in E.$$

Dann ist $y \in B(x)$ äquivalent zu $(x, y) \in (f_i \times f_i)^{-1}(V_i)$ beziehungsweise zu $(f_i(x), f_i(y)) \in V_i$ für alle $i \in E$. Das bedeutet genau $f_i(y) \in V_i(f_i(x))$ bzw. $y \in f_i^{-1}(V_i(f_i(x)))$ für alle $i \in E$. Insgesamt erhalten wir

$$B(x) = \bigcap_{i \in E} f_i^{-1}(V_i(f_i(x))).$$

Gemäß Bemerkung 2.1.6 ist $\{B(x) : B \in \mathcal{B}\}$ eine Umgebungsbasis von x bezüglich der von der initial uniformen Struktur $\mathcal{U}$ induzierten Topologie $\mathcal{T}$, weshalb $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{T}$ übereinstimmt. $\square$

Definition 2.5.6. *(i)* Sei $(X,\mathcal{U})$ ein uniformer Raum und $A \subseteq X$. Wird A mit der initialen uniformen Struktur $\mathcal{A}$ bezüglich der Einbettungsabbildung $\iota : A \to X, x \mapsto x$, versehen, so nennt man $(A, \mathcal{A})$ einen uniformen Unterraum von $(X,\mathcal{U})$. Dabei gilt

$$\mathcal{A} = \{U \cap (A \times A) : U \in \mathcal{U}\}.$$

(ii) Sei $(X_i,\mathcal{U}_i), i \in I$, eine Familie uniformer Räume. Versieht man das Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ mit der initial uniformen Struktur bezüglich der Projektionsabbildungen

$$\pi_k : \prod_{i\in I} X_i \to X_k, (x_i)_{i\in I} \mapsto x_k, \quad k \in I,$$

symbolisch $\prod_{i\in I} \mathcal{U}_i$, so nennt man

$$\left(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \mathcal{U}_i\right)$$

das Produkt der uniformen Räume $(X_i,\mathcal{U}_i), i \in I$.

3 Alternative Zugänge

Wir stellen in diesem Kapitel noch zwei weitere Möglichkeiten vor, uniforme Räume zu definieren.

3.1 Pseudometriken

Definition 3.1.1. Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty)$ heißt Pseudometrik, wenn für alle $x, y, z \in X$

$$d(x,x) = 0,\ d(x,y) = d(y,x) \ \text{ und } \ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

gilt.

Offenbar ist jede Pseudometrik mit $d(x,y) \neq 0$ für $x \neq y$ eine Metrik.

Beispiel 3.1.2.
- Auf der Menge aller reellwertingen Funktionen auf einer Menge D wird durch

$$d(f,g) := |f(x_0) - g(x_0)|,\ \ x_0 \in D,$$

eine Pseudometrik definiert.
- Jede Seminorm p auf einem Vektorraum V induziert durch

$$d(x,y) := p(x-y)$$

auf V eine Pseudometrik.
- Auf der Menge aller auf $[0,1]$ quadratisch integrierbaren und reellwertigen Funktionen $L^2([0,1])$ wird durch

$$d(f,g) := \left(\int_{[0,1]} (f-g)^2 d\lambda \right)^2$$

eine Pseudometrik definiert, die keine Metrik ist. Hier wird $L^2([0,1])$ als Raum von Funktionen und nicht als Restklassenraum betrachtet.

Wir wollen zeigen, dass jede uniforme Struktur durch eine Familie von Pseudometriken erzeugt wird. Ist eine Pseudometrik d auf einer Menge X gegeben, so wird durch das Fundamentalsystem

$$\{d^{-1}([0,t]) : t > 0\}$$

jedenfalls eine uniforme Struktur auf X definiert. Man nennt sie die von der Pseudometrik d induzierte uniforme Struktur. Tatsächlich erfüllt $\{d^{-1}([0,t]) : t > 0\}$ die Vorraussetzungen aus Satz 2.1.8. Aus

$$d^{-1}([0, \min(t_1, t_2)]) \subseteq d^{-1}([0,t_1]) \cap d^{-1}([0,t_2])$$

folgt $(b1)$, aus $d(x,x)=0$ folgt $(b2)$, weil die $d^{-1}([0,t])$ symmetrisch sind, gilt $(b3)$, und aus der Dreiecksungleichung folgt schließlich

$$d^{-1}([0,\frac{t}{2}]) \circ d^{-1}([0,\frac{t}{2}]) \subseteq d^{-1}([0,t]),$$

also $(b4)$.

Lemma 3.1.3. *Ein uniformen Raum $(X,\mathcal{U})$ hat genau dann ein abzählbares Fundamentalsystem $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn $\mathcal{U}$ durch eine Pseudometrik d induziert wird.*

Beweis. Wird $\mathcal{U}$ von einer Pseudometrik induziert, so wird durch

$$\{d^{-1}([0,\frac{1}{n}]) : n \in \mathbb{N}\}$$

ein abzählbares Fundamentalsystem definiert.

Für die Umkehrung wollen wir uns eine Pseudometrik d konstruieren. Zunächst zeigt ein einfaches induktives Argument mithilfe von Lemma 2.1.7 die Existenz symmetrischer $U_n \in \mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$U_1 \subseteq B_1, \;\; U_{n+1}^3 \subseteq U_n \cap B_n.$$

Offenbar ist $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wieder ein abzählbares Fundamentalsystem. Wir definieren eine Funktion g auf $X \times X$ durch

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (x,y) \notin U_1, \\ \inf\{2^{-k} : (x,y) \in U_k\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem sei $P_{x,y}$ die Menge aller

$$(p_1, ..., p_n) \in \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\geq 2}} X^k, \;\; n \in \mathbb{N}$$

derart, dass $p_1 = x$ und $p_n = y$. Wir definieren die gewünschte Pseudometrik durch

$$d(x,y) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{n-1} g(p_j,p_{j+1}) : (p_j)_{j=1}^n \in P_{x,y}\right\}.$$

In der Tat folgt aus $\Delta \subseteq U_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $d(x,x) = 0$ für jedes $x \in X$. Mit g erfüllt auch d die Symmetriebedingung. Für $x,y,z \in X$, $n \in \mathbb{N}$ und $(p_1,...,p_n) \in X^n$ mit $p_1 = x, p_n = y$ und $p_l = z$ für ein $l = 1,...,n$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n-1} g(p_j,p_{j+1}) = \sum_{j=1}^{l-1} g(p_j,p_{j+1}) + \sum_{j=l}^{n-1} g(p_j,p_{j+1}).$$

Bezeichnen wir mit $\tilde{P}$ die Menger aller $(p_1,...,p_n)$ obiger Bauart, so erhalten wir

$$\inf_{(p_1,...,p_n)\in\tilde{P}}\left\{\sum_{j=1}^{n-1} g(p_j,p_{j+1})\right\} = \inf_{(p_1,...,p_n)\in\tilde{P}}\left\{\sum_{j=1}^{l-1} g(p_j,p_{j+1}) + \sum_{j=l}^{n-1} g(p_j,p_{j+1})\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} g(p_j, p_{j+1}) : (p_j)_{j=1}^n \in P_{x,z} \right\} + \inf \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} g(p_j, p_{j+1}) : (p_j)_{j=1}^n \in P_{z,y} \right\} \\
&= d(x,z) + d(z,y).
\end{aligned}
$$

Schließlich gilt wegen $\tilde{P} \subseteq P_{x,y}$

$$
d(x,y) \leq \inf_{(p_1,\ldots,p_n) \in \tilde{P}} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} g(p_j, p_{j+1}) \right\},
$$

weshalb d tatsächlich eine Pseudometrik ist.

Um zu zeigen, dass $\mathcal{U}$ von d induziert wird, wollen wir zunächst

$$
\frac{1}{2} g(x,y) \leq d(x,y) \leq g(x,y)
$$

für alle $x, y \in X$ nachweisen. Wegen $(x,y) \in P$ ergibt sich die rechte Ungleichung aus der Definition von d. Um die linke Ungleichung zu beweisen, zeigen wir mittels Induktion nach $n \geq 2$

$$
\frac{1}{2} g(x,y) \leq \sum_{j=1}^{n-1} g(p_j, p_{j+1}) \quad \text{für alle } (p_j)_{j=1}^n \in P.
$$

Für $n = 2$ ist die Ungleichung klarerweise erfüllt. Gelte die zu beweisende Ungleichung für $n \geq 2$ und sei $(p_j)_{j=1}^{n+1}$ aus P gegeben. Um

$$
\frac{1}{2} g(x,y) \leq \sum_{j=1}^{n} g(p_j, p_{j+1}) =: s
$$

zu zeigen, können wir wegen $g \leq 1$ die Ungleichung $s < \frac{1}{2}$ annehmen. Im Fall $s = 0$ gilt $(p_j, p_{j+1}) \in U_{k+n}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $j = 0, \ldots, n$. Das bedingt

$$
(p_0, p_n + 1) \in U_{v+n} \quad \text{für alle } v \in \mathbb{N},
$$

woraus $g(x,y) = 0$ folgt. Für den Fall $0 < s < \frac{1}{2}$ sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ größtmöglich, sodass noch

$$
\sum_{j=1}^{m-1} g(p_j, p_{j+1}) \leq \frac{s}{2}
$$

gilt. Wir erhalten

$$
\sum_{j=1}^{m} g(p_j, p_{j+1}) > \frac{s}{2} \quad \text{und damit} \quad \sum_{j=m+1}^{n} g(p_j, p_{j+1}) \leq \frac{s}{2}.
$$

In dem wir $n - m$ mal den Summanden $g(p_m, p_m) = 0$ hinzufügen, können wir die Induktionsannahme anwenden und erhalten

$$
\frac{1}{2} g(x, p_m) \leq \sum_{j=1}^{m-1} g(p_j, p_{j+1}) \leq \frac{s}{2}
$$

und entsprechend im Fall $m < n$

$$\frac{1}{2}g(p_{m+1}, y) \leq \sum_{j=m+1}^{n} g(p_j, p_{j+1}) \leq \frac{s}{2}.$$

Außerdem gilt $\frac{1}{2}g(p_m, p_{m+1}) \leq \frac{s}{2}$. Ist k die kleinste natürliche Zahl mit $2^{-k} \leq s$, so folgt

$$(x, p_m), (p_m, p_{m+1}) \in U_k$$

und im Fall $m < n$ auch $(p_{m+1}, y) \in U_k$. Wir erhalten jedenfalls

$$(x, y) \in U_k^3 \subseteq U_{k-1},$$

weshalb schließlich

$$\frac{1}{2}g(x, y) \leq \frac{1}{2}2^{-(k-1)} \leq s.$$

Für ein $(x, y) \in U_k, k \in \mathbb{N}$, folgt $d(x, y) \leq g(x, y) \leq 2^{-k}$ und damit $(x, y) \in d^{-1}([0, 2^{-k}])$. Andererseits folgt aus $(x, y) \in d^{-1}([0, 2^{-k}])$

$$\frac{1}{2}g(x, y) \leq d(x, y) \leq 2^{-k}$$

und damit $g(x, y) \leq 2^{-(k-1)}$. Weil $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Mengenfolge ist, schließen wir auf $(x, y) \in U_{k-1}$, woraus sich insgesamt

$$U_k \subseteq d^{-1}([0, 2^{-k}]) \subseteq U_{k-1}$$

ergibt. Wir sehen also, dass die von d induzierte uniforme Struktur mit $\mathcal{U}$ übereinstimmt. □

Korollar 3.1.4. *Ein uniforme Struktur $\mathcal{U}$ auf einer Menge X wird genau dann von einer Metrik induziert, wenn $\mathcal{U}$ ein abzählbarers Fundamentalsystem besitzt und X Hausdorff'sch ist.*

Beweis. Wird $\mathcal{U}$ von einer Metrik induziert, dann wissen wir wegen Lemma 3.1.3, dass $\mathcal{U}$ ein abzählbares Fundamentalsystem besitzt. Außerdem ist jeder metrische Raum Hausdorff'sch. Für die Umkehrung erhalten wir wieder wegen Lemma 3.1.3 eine Pseudometrik d, wobei für $x, y \in X$ mit $d(x, y) = 0$ aus Satz 2.3.2

$$(x, y) \in \bigcap_{t>0} d^{-1}([0, t]) \subseteq \bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = \Delta$$

und daher $x = y$ folgt. □

Proposition 3.1.5. *Sei $(X, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum und $\mathcal{T}$ die von $\mathcal{U}$ induzierte Topologie. Wird $\mathcal{U}$ von einer Metrik d induziert, so stimmt $\mathcal{T}$ mit der von d induzierten Topologie $\mathcal{T}_d$ überein. Insbesondere folgt aus der Metrisierbarkeit von $\mathcal{U}$ die von $\mathcal{T}$.*

Beweis. Ist $O \subseteq X$ offen bezüglich $\mathcal{T}$, so gibt es für jedes $x \in O$ ein $U \in \mathcal{U}$ und ein $t > 0$ mit $U(x) = O$ und $d^{-1}([0,t]) \subseteq U$. Für ein

$$y \in U_t(x) := \{y \in X : d(x,y) < t\}$$

folgt $(x,y) \in d^{-1}([0,t]) \subseteq U$ und deshalb $y \in U(x) = O$, also insgesamt

$$U_t(x) \subseteq O$$

und damit die Offenheit von O bezüglich $\mathcal{T}_d$. Sei umgekehrt $O \in \mathcal{T}_d$ und $x \in O$ sowie $t > 0$ mit $U_t(x) \subseteq O$. Wenn wir

$$U := (X \times O) \cup \{(u,v) \in X \times X : d(u,v) < t\}$$

setzen folgt aus $U_t(x) \subseteq O$

$$U(x) = \{y \in X : y \in O\} \cup \{y \in X : d(x,y) < t\} = O.$$

Außerdem gilt wegen $d^{-1}([0,t/2]) \subseteq U$ auch $U \in \mathcal{U}$, weshalb die Offenheit von O bezüglich $\mathcal{T}$ folgt. $\square$

Beispiel 3.1.6. Das folgende Beispiel zeigt, dass aus der Metrisierbarkeit der von $\mathcal{U}$ induzierten Topologie $\mathcal{U}$ im Allgemeinen nicht die Metrisierbarkeit von $\mathcal{U}$ folgt. Dabei heißt eine uniforme Struktur $\mathcal{U}$ metrisierbar, wenn es eine Metrik d auf X gibt, die $\mathcal{U}$ wie in Beispiel 2.2.2 induziert. Sei X eine überabzählbare Menge versehen mit der in Beispiel 2.2.5 definierten uniformen Struktur $\mathcal{U}$ der endlichen Partitionen. Die von $\mathcal{U}$ induzierte Topologie ist die diskrete Topologie, welche bekanntlich metrisierbar ist. Wäre auch $\mathcal{U}$ metrisierbar, so gäbe es nach Korollar 3.1.4 ein abzählbares Fundamentalsystem in Form einer abzählbaren Menge

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P},$$

sodass für jedes $P = (P_1, ..., P_n) \in \mathcal{P}$ ein $R = (R_1, ..., R_k) \in \mathcal{R}$ existiert mit

$$V_R \subseteq V_P.$$

Somit ist jedes der R_i in genau einer Menge P_j enthalten. Also gibt es zu jedem $j = 1, ..., n$ eine Menge $E_j \subseteq \{1, ..., k\}$ mit

$$P_j = \bigcup_{i \in E_j} R_i$$

mit paarweise disjunkten $E_1, ..., E_n$. Da es aber nur endliche viele Möglichkeiten gibt, eine endliche Folge $F_1, ..., F_n$ bestehend aus paarweise disjunkten Teilmengen von $\{1, ..., k\}$ zu wählen, kann ein einziges $R = (R_1, ..., R_k) \in \mathcal{R}$ nur endlich viele $P = (P_1, ..., P_n) \in \mathcal{P}$ als

$$P_j = \bigcup_{i \in F_j} R_i, \ \ j = 1, ..., n,$$

darstellen. Demnach folgt aus der Abzählbarkeit von $\mathcal{R}$ die von $\mathcal{P}$, was aber der Überabzählbarkeit von X widerspricht.

Um allgemeine uniforme Räume über den Begriff der Pseudometrik zu konstrukieren, benötigen wir nicht nur eine, sondern eine Familie von Pseudometriken.

Definition 3.1.7. Seien $d_i, i \in I$, Pseudometriken auf einer Menge X und $\mathcal{U}_i$ die von d_i induzierte uniforme Struktur. Die gröbste uniforme Struktur $\mathcal{U}$, die alle $\mathcal{U}_i$ enthält, nennt man die von der Familie $(d_i)_{i\in I}$ induzierte uniforme Struktur.

Bemerkung 3.1.8. Nach Lemma 2.5.2 existiert die von $(d_i)_{i\in I}$ induzierte uniforme Struktur stets. Außerdem erkennt man aus dem Beweis von Lemma 2.5.2 leicht, dass $\mathcal{U}$ alle Mengen der Bauart

$$\bigcap_{i\in E} d_i^{-1}([0,t]), \quad t > 0, E \subseteq I, |E| < \infty,$$

als Fundamentalsystem besitzt.

Satz 3.1.9. *Zu jeder uniformen Struktur $\mathcal{U}$ auf einer Menge X gibt es eine Familie $(d_i)_{i\in I}$ von Pseudometriken, die $\mathcal{U}$ induziert.*

Beweis. Zu $U \in \mathcal{U}$ gibt es eine Folge symmetrischer $B_n \in \mathcal{U}, n \in \mathbb{N}$, derart, dass $B_1 \subseteq U$ und

$$B_{n+1}^3 \subseteq B_n \quad \text{für } n > 1$$

gilt. Da die $B_n, n \in \mathbb{N}$, die Vorraussetzungen von Satz 2.1.8 erfüllen, erhalten wir eine uniforme Struktur $\mathcal{U}_U$ mit dem abzählbaren Fundamentalsystem $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. Nach Satz 3.1.3 gibt es eine Pseudometrik d_U auf X, die $\mathcal{U}_U$ induziert. Wegen $\mathcal{U}_U \subseteq \mathcal{U}$ für alle $U \in \mathcal{U}$ und

$$\bigcup_{U\in\mathcal{U}} \mathcal{U}_U \supseteq \bigcup_{U\in\mathcal{U}} \{U\} = \mathcal{U}$$

schließen wir, dass $\mathcal{U}$ die gröbste uniforme Struktur ist, die alle $\mathcal{U}_U, U \in \mathcal{U}$, enthält. Nach Bemerkung 3.1.8 bedeutet das aber genau, dass $\mathcal{U}$ von der Familie $(d_U)_{U\in\mathcal{U}}$ induziert wird. $\square$

3.2 Uniformisierbarkeit

Man kann sich die Frage stellen, wann es zu einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ eine uniforme Struktur $\mathcal{U}$ gibt, die $\mathcal{T}$ induziert. In dem Falle nennt man X uniformisierbar. Wir wollen zeigen, dass die Uniformisierbarkeit dazu äquivalent ist, dass X ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum ist. Dabei nennt man einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ einen $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, wenn es für jede abgeschlossene Menge A und jeden Punkt $x \in X \backslash A$ eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ derart gibt, dass

$$f(A) \subseteq \{0\} \text{ sowie } f(x) = 1.$$

Nach Satz 6.7 in [1] ist das äquivalent zur Tatsache, dass die Menge

$$\{f^{-1}(U) : U \subseteq \mathbb{R} \text{ offen und } f \in C(X)\}$$

eine Basis für $\mathcal{T}$ bildet. Hier bezeichnet $C(X)$ die Menge aller reellwertigen stetigen Funktionen auf X.

Satz 3.2.1. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist dann und nur dann uniformisierbar, wenn er ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum ist.*

Beweis. Angenommen, X ist ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum. Sei $\mathcal{U}$ die initial uniforme Struktur bezüglich aller $f \in C(X)$, wobei die Stetigkeit der Funktionen in $C(X)$ bezüglich $\mathcal{T}$ zu verstehen ist. Wegen Satz 2.5.5 stimmt die von $\mathcal{U}$ induzierte Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ mit der Initialtopologie der $f \in C(X)$ überein. Insbesondere gilt $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{T}$. Um $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ zu zeigen, sei $O \in \mathcal{T}$ und $x \in O$. Da $(X, \mathcal{T})$ ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum ist, bildet

$$\{f^{-1}(U) : U \subseteq \mathbb{R} \text{ offen und } f \in C(X)\}$$

eine Basis von $\mathcal{T}$. Also gibt es ein offenes $U \subseteq \mathbb{R}$ und eine bezüglich $\mathcal{T}$ stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit

$$x \in f^{-1}(U) \subseteq O.$$

Weil f stetig bezüglich $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ ist und somit $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ gilt, erweist sich O als Umgebung von x bezüglich $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$, also $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$.

Für die Umkehrung müssen wir zeigen, dass jeder von einer uniformen Struktur $\mathcal{U}$ auf X induzierter topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum ist. Nach Satz 3.1.9 wird $\mathcal{U}$ durch eine Familie $(d_i)_{i \in I}$ von Pseudometriken induziert. Gibt man zu dieser Familie auch alle Pseudometriken der Form

$$\min\{d_i : i \in E\}, \quad E \subseteq I, |E| < \infty,$$

hinzu, ändert sich die durch die Familie induzierte uniforme Struktur nicht, da für $d(x, y) := \min\{d_i(x, y) : i \in E\}$

$$d^{-1}([0, t]) = \bigcap_{i \in E} d_i^{-1}([0, t]) \in \mathcal{U}$$

gilt. Infolge bildet nach Bemerkung 3.1.8 die Menge aller $d^{-1}([0, t])$ ein Fundamentalsystem. Für eine abgeschlossene Menge $A \subseteq X$, ein $x \in X \backslash A$ und eine Umgebung $U(x), U \in \mathcal{U}$ von x mit $A \cap U(x) = \emptyset$ gibt es wegen obiger Hinzugabe eine Pseudometrik d aus $(d_i)_{i \in I}$ und ein $t > 0$ mit

$$d^{-1}([0, t]) \subseteq U.$$

Die gewünschte stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$, für die $f(A) \subseteq \{0\}$ sowie $f(x) = 1$ gilt, ist gegeben durch

$$f(y) := \max\{0, 1 - \frac{1}{t} d(x, y)\},$$

wonach sich X als $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum erweist. □

3.3 Gleichmäßige Überdeckungen

Die dritte Möglichkeit, uniforme Räume zu definieren, ist jene mit Hilfe von gleichmäßigen Überdeckungen.

Definition 3.3.1. Seien $\alpha, \beta \subseteq \mathcal{P}(X)$ Überdeckungen von X, wobei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X bezeichne. Man nennt α eine Sternverfeinerung von β, symbolisch $\alpha <^* \beta$, falls es für jedes $A \in \alpha$ ein $B \in \beta$ gibt, sodass für ein $A_0 \in \alpha$ aus $A \cap A_0 \neq \emptyset$ schon $A_0 \subseteq B$ folgt.

Sei X eine Menge und θ eine Familie von Überdeckungen von X mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\{X\} \in \theta$.

(ii) Wenn α und β Überdeckungen derart sind, dass $\alpha \in \theta$ und $\alpha <^* \beta$, so folgt $\beta \in \theta$.

(iii) Für $\alpha, \beta \in \theta$ gibt es ein $\gamma \in \theta$ mit $\gamma <^* \alpha$ und $\gamma <^* \beta$.

Dann nennt man θ Überdeckungsstruktur auf X und die Elemente aus θ heißen gleichmäßige Überdeckungen.

Dass die Definition über gleichmäßige Überdeckungen äquivalent zu der über Nachbarschaften ist liefert der folgende Satz, der hier nicht bewiesen wird, da er den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

Satz 3.3.2. *Sei $(X,\mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Durch*

$$\theta := \{\alpha \subseteq \mathcal{P}(X) : \exists U \in \mathcal{U} : \forall x \in X\ \exists A \in \alpha \textit{ mit } U(x) \subseteq A\}$$

wird eine Überdeckungsstruktur auf X definiert. Ist umgekehrt θ eine Überdeckungsstruktur auf X, so ergibt

$$\left\{\bigcup_{A \in \alpha} A \times A : \alpha \in \theta\right\}$$

eine Filterbasis für eine uniforme Struktur $\mathcal{U}$ auf X.

Beweis. Siehe Lemma 2.1.6 in [7]. □

4 Vollständigkeit

4.1 Cauchy-Filter

Definition 4.1.1. Sei $(X,\mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt Cauchy-Filter, wenn es für jedes $U \in \mathcal{U}$ ein $F \in \mathcal{F}$ gibt mit

$$F \times F \subseteq U.$$

Ein Cauchy-Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt minimal, wenn für jeden Cauchy-Filter $\hat{\mathcal{F}}$ mit $\hat{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$ bereits $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ gilt.

Lemma 4.1.2. *Ist $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter auf einem uniformen Raum $(X,\mathcal{U})$, so gibt es einen minimalen Cauchy-Filter $\mathcal{F}_{min}$, der $\mathcal{F}_{min} \subseteq \mathcal{F}$ erfüllt.*

Beweis. Um gewünschten minimalen Cauchy-Filter $\mathcal{F}_{min}$ zu definieren, geben wir eine Filterbasis von $\mathcal{F}_{min}$ an

$$\mathcal{B}_{min} := \{U(F) : F \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{U}\},$$

wobei $U(F) := \bigcup_{x \in F} U(x)$. Wegen $F \neq \emptyset$ und

$$U(F_1 \cap F_2) \subseteq U(F_1) \cap U(F_2)$$

für beliebige $F, F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ erweist sich $\mathcal{B}_{min}$ tatsächlich als Filterbasis. Um $\mathcal{F}_{min} \subseteq \mathcal{F}$ einzusehen, sei $F_{min} \in \mathcal{F}_{min}$ und $F \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{U}$ derart, dass

$$U(F) \subseteq F_{min}.$$

Wegen $F \subseteq U(F) \subseteq F_{min}$, gilt $F_{min} \in \mathcal{F}$.

Wir zeigen, dass $\mathcal{F}_{min}$ ein Cauchy-Filter ist. Zu einem $U \in \mathcal{U}$ gibt es wegen Satz 2.1.7 ein symmetrisches $V \in \mathcal{U}$ mit $V^3 \subseteq U$ und, weil $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter ist, ein $F \in \mathcal{F}$ mit $F \times F \subseteq V$. Wegen $V(F) \in \mathcal{F}_{min}$ erweist sich $\mathcal{F}_{min}$ als Cauchy-Filter, wenn wir

$$V(F) \times V(F) \subseteq V^3 \ \ (\subseteq U)$$

zeigen können. Sei also $(v_1, v_2) \in V(F) \times V(F)$. Nach Definition gibt es $x_1, x_2 \in F$ mit

$$(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in V.$$

Einerseits folgt aus der Symmetrie von V, dass $(v_1, x_1) \in V$, und andererseits folgt aus $F \times F \subseteq V$, dass $(x_1, x_2) \in V$. Insgesamt erhalten wir

$$(v_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, v_2) \in V, \quad \text{also } (v_1, v_2) \in V^3.$$

Für den Beweis der Minimalität von $\mathcal{F}_{min}$ zeigen wir, dass für jeden Cauchy-Filter $\hat{\mathcal{F}}$ auf X mit $\hat{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$ bereits $\mathcal{F}_{min} \subseteq \hat{\mathcal{F}}$ folgt. Sei $F_{min} \in \mathcal{F}_{min}$ gegeben. Es gibt ein $F \in \mathcal{F}$ und $U \in \mathcal{U}$ mit $U(F) \subseteq F_{min}$. Weil $\hat{\mathcal{F}}$ ein Cauchy-Filter ist, gibt es ein $\hat{F} \in \hat{\mathcal{F}}$ mit

$$\hat{F} \times \hat{F} \subseteq U$$

und wegen $\hat{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$ gilt $\hat{F} \in \mathcal{F}$, weshalb

$$F \cap \hat{F} \neq \emptyset.$$

Für ein $y \in \hat{F}$ und ein $x \in F \cap \hat{F}$ folgt aus $\hat{F} \times \hat{F} \subseteq U$

$$(x, y) \in U, \quad \text{also} \quad y \in U(F).$$

Insgesamt erhalten wir

$$\hat{F} \subseteq U(F) \subseteq F_{min}$$

und damit $F_{min} \in \hat{\mathcal{F}}$. □

Bemerkung 4.1.3. Wie man aus dem Beweis erkennen kann, ist der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ ein minimaler Cauchy-Filter. In der Tat wird $\mathcal{U}(x)$ von der Filterbasis

$$\{U(F) : F \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{U}\}$$

erzeugt, wobei $\mathcal{F}$ der Filter $\{N \subseteq X : x \in N\}$ ist.

Definition 4.1.4.
- Man nennt einen Filter $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ konvergent gegen ein $x \in X$, symbolisch $\mathcal{F} \to x$, falls $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$ gilt.
- Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so ist der Bildfilter $f(\mathcal{F})$ definiert als jener Filter, der

$$\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$$

als Filterbasis besitzt.

Bemerkung 4.1.5. In Analogie zu metrischen Räumen ist jeder konvergente Filter auf einem uniformen Raum $(X,\mathcal{U})$ auch ein Cauchy-Filter. Um das einzusehen, gelte $\mathcal{F} \to x \in X$. Zu $U \in \mathcal{U}$ gibt es ein symmetrisches $V \in \mathcal{U}$ mit $V^2 \subseteq U$. Außerdem gilt nach Annahme $V(x) \in \mathcal{F}$. Wir erhalten

$$V(x) \times V(x) \subseteq V^2 \subseteq U.$$

Bemerkung 4.1.6. Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{Y})$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X, der gegen x konvergiert, $f(\mathcal{F}) \to f(x)$ folgt. Um das einzusehen, sei $f : X \to Y$ in $x \in X$ stetig und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X mit $\mathcal{F} \to x$. Zu jedem $V \in \mathcal{U}(f(x))$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$. Wegen $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$ folgt $U \in \mathcal{F}$ und damit $V \in f(\mathcal{F})$, also $f(\mathcal{F}) \to f(x)$. Umgekehrt folgt aus $\mathcal{U}(x) \to x$ die Konvergenz von $f(\mathcal{U}(x))$ gegen $f(x)$, also $\mathcal{U}(f(x)) \subseteq f(\mathcal{U}(x))$. Also gibt es zu jedem $V \in \mathcal{U}(f(x))$ ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$.

4.2 Vollständigkeit

Definition 4.2.1. Ein uniformer Raum $(X,\mathcal{U})$ heißt vollständig, wenn es zu jedem Cauchy-Filter $\mathcal{F}$ ein $x \in X$ gibt mit $\mathcal{F} \to x$.

Lemma 4.2.2. *Sei $f : X \to Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung zwischen zwei uniformen Räumen $(X,\mathcal{U})$ und $(Y,\mathcal{V})$. Ist $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter auf X, so ist $f(\mathcal{F})$ ein Cauchy-Filter auf Y.*

Beweis. Zu $V \in \mathcal{V}$ gibt es aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f ein $U \in \mathcal{U}$ mit $(f \times f)(U) \subseteq V$. Nach Annahme existiert ein $F \in \mathcal{F}$ mit

$$F \times F \subseteq U,$$

weshalb für $f(F) \in f(\mathcal{F})$

$$f(F) \times f(F) = (f \times f)(F \times F) \subseteq (f \times f)(U) \subseteq V.$$

□

Satz 4.2.3. *Seien $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$, Abbildungen von einer Menge X in uniforme Räume $(Y_i, \mathcal{V}_i)$. Versieht man X mit der initial uniformen Struktur $\mathcal{U}$ der $(f_i)_{i \in I}$, so ist ein Filter $\mathcal{F}$ auf X genau dann ein Cauchy-Filter, wenn für jedes $i \in I$ der Bildfilter $f_i(\mathcal{F})$ ein Cauchy-Filter ist.*

Beweis. Ist $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter, so folgt aus Lemma 4.2.2, dass $f_i(\mathcal{F})$ für jedes $i \in I$ ein Cauchy-Filter ist. Für die Umkehrung sei $U \in \mathcal{U}$. Nach Bemerkung 2.5.4 gibt eine endliche Menge $E \subseteq I$ und $V_i \in \mathcal{V}_i$, $i \in E$, mit

$$\bigcap_{i \in E} (f_i \times f_i)^{-1}(V_i) \subseteq U.$$

Weil die $f_i(\mathcal{F})$ Cauchy-Filter mit $\{f_i(F) : F \in \mathcal{F}\}$ als Filterbasis sind, gibt es für jedes $i \in E$ ein $F_i \in \mathcal{F}$ mit

$$f(F_i) \times f(F_i) \subseteq V_i.$$

Wir setzen $F := \bigcap_{i \in E} F_i \in \mathcal{F}$ und erhalten wegen $F_i \times F_i \subseteq (f_i \times f_i)^{-1}(V_i)$

$$F \times F \subseteq \bigcap_{i \in E} (f_i \times f_i)^{-1}(V_i) \subseteq U.$$

□

Lemma 4.2.4. *Sei X eine Menge, $(Y_i, \mathcal{Y}_i)$, $i \in I$, topologische Räume und $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$ Abbildungen. Wird X mit der Initialtopologie $\mathcal{T}$ der $(f_i)_{i \in I}$ versehen, so konvergiert ein Filter $\mathcal{F}$ auf X genau dann gegen ein $x \in X$, wenn $f_i(\mathcal{F})$ für alle $i \in I$ gegen $f_i(x)$ konvergiert.*

Beweis. Gilt $\mathcal{F} \to x \in X$ für einen Filter $\mathcal{F}$ auf $(X, \mathcal{T})$, so folgt aus Bemerkung 4.1.6, dass $f_i(\mathcal{F}) \to f_i(x)$ für alle $i \in I$.

Berzüglich der Umkehrung gibt es zu einem $U \in \mathcal{U}(x)$ eine endliche Teilmenge $K \subseteq I$ und Mengen $V_k \in \mathcal{U}(f_k(x))$, $k \in K$ mit

$$\bigcap_{k \in K} f_k^{-1}(V_k) \subseteq U.$$

Aus $\mathcal{U}(f_k(x)) \subseteq f_k(\mathcal{F})$ für alle $k \in K$ folgt $V_k \in f_k(\mathcal{F})$ und damit die Existenz eines $F_k \in \mathcal{F}$ mit $f_k(F_k) \subseteq V_k$. Setzen wir $F := \bigcap_{k \in K} F_k \in \mathcal{F}$, so erhalten wir

$$F \subseteq \bigcap_{k \in K} f_k^{-1}(V_k) \subseteq U,$$

also $U \in \mathcal{F}$. □

Bemerkung 4.2.5. Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und $A \subseteq X$ mit $A \cap F \neq \emptyset$ für jedes $F \in \mathcal{F}$, so stellt

$$\mathcal{F} \cap A := \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$$

einen Filter auf A dar.

Proposition 4.2.6. *Sei $(A, \mathcal{A})$ ein uniformer Unterraum eines uniformen Raumes $(X,\mathcal{U})$. Es gelten folgende Aussagen.*

(i) Ist A abgeschlossen und $(X,\mathcal{U})$ vollständig, so ist $(A, \mathcal{A})$ vollständig.

(ii) Wenn $(A, \mathcal{A})$ vollständig und X ein Hausdorff-Raum ist, so ist A abgeschlossen.

(iii) Das Produkt $\left(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \mathcal{U}_i\right)$ einer Familie $(X_i,\mathcal{U}_i), i \in I$, von vollständigen uniformen Räumen ist vollständig.

Beweis. (i): Ist $\mathcal{F}_A$ ein Cauchy-Filter auf $(A, \mathcal{A})$, so ist $\mathcal{F}_A$ eine Filterbasis für einen Filter $\mathcal{F}$ auf $(X,\mathcal{U})$, der außerdem ein Cauchy-Filter auf X ist. Wegen der Vollständigkeit von $(X,\mathcal{U})$ gibt es ein $x \in X$ mit $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$. Zu einem $N \in \mathcal{U}(x)$ gibt es ein $F_A \in \mathcal{F}_A$ mit $F_A \subseteq N$, wodurch

$$N \cap A \supseteq F_A \cap A \neq \emptyset,$$

und infolge $x \in \overline{A} = A$. Wir schließen wegen $F_A \cap A \in \mathcal{F}_A$ und $x \in A$ zudem auf

$$\mathcal{U}_A(x) = \{N \cap A : N \in \mathcal{U}(x)\} \subseteq \mathcal{F}_A,$$

wobei $\mathcal{U}_A(x)$ den Umgebungsfilter von x in $(A, \mathcal{A})$ bezeichne. Das bedeutet aber genau $\mathcal{F}_A \to x \in A$.

(ii): Wenn A nicht abgeschlossen wäre, gäbe es ein $x \notin A$ im Abschluss von A. Wegen $N \cap A \neq \emptyset$ für alle $N \in \mathcal{U}(x)$ und Bemerkung 4.2.5 ist

$$\mathcal{C}_x := \{N \cap A : N \in \mathcal{U}(x)\}$$

ein Filter auf A. Da es zu $U \in \mathcal{U}$ ein symmetrisches $V \in \mathcal{U}$ mit $V^2 \subseteq U$ gibt und damit

$$(V(x) \cap A) \times (V(x) \cap A) \subseteq V(x) \times V(x) \subseteq V^2 \subseteq U$$

gilt, erweist sich $\mathcal{C}_x$ sogar als Cauchy-Filter auf $(A, \mathcal{A})$. Weil $(A, \mathcal{A})$ vollständig ist, gibt es ein $a \in A$ mit

$$\mathcal{U}_A(a) \subseteq \mathcal{C}_x.$$

Zudem ist $\mathcal{C}_x$ Filterbasis für einen Filter $[\mathcal{C}_x]$ auf X. Für $M \in \mathcal{U}(a)$ gilt

$$M \cap A \in \mathcal{U}_A(a) \subseteq \mathcal{C}_x,$$

und damit $M \in [\mathcal{C}_x]$, also $\mathcal{U}(a) \subseteq [\mathcal{C}_x]$. Für $N \in \mathcal{U}(x)$ folgt aus $\mathcal{C}_x \ni N \cap A \subseteq N$ schon $N \in [\mathcal{C}_x]$, also auch $\mathcal{U}(x) \subseteq [\mathcal{C}_x]$. Insgesamt erhalten wir

$$[\mathcal{C}_x] \to a \quad \text{und } [\mathcal{C}_x] \to x$$

und schließlich, da X Hausdorff'sch ist, den Widerspruch $a = x \notin A$.

(iii): Folgt aus Satz 4.2.3 und Lemma 4.2.4. □

4.3 Total beschränkte Mengen

Definition 4.3.1. Sei $(X,\mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt total beschränkt, wenn es zu jedem $U \in \mathcal{U}$ Elemente $a_1, ..., a_n$ aus A gibt mit

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U(a_i).$$

Für den Fall, dass X ein metrischer Raum ist, stimmt diese Definition offenbar mit jener der totalen Beschränktheit in metrischen Räumen überein.

Definition 4.3.2. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge X heißt Ultrafilter, wenn für jeden Filter $\hat{\mathcal{F}}$ mit $\hat{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{F}$ bereits $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ folgt.

Bemerkung 4.3.3. Gemäß Lemma 1.1.3 in [6] gibt es zu jedem Filter $\hat{\mathcal{F}}$ auf einer Menge X einen Ultrafilter $\mathcal{F}$, der $\mathcal{F} \supseteq \hat{\mathcal{F}}$ erfüllt.

Lemma 4.3.4. *Ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X und sind M, N Teilmengen von X, so folgt aus $M \cup N \in \mathcal{F}$ immer $M \in \mathcal{F}$ oder $N \in \mathcal{F}$.*

Beweis. Gelte weder $M \in \mathcal{F}$ noch $N \in \mathcal{F}$. Dann enthält

$$\mathcal{H} := \{N' \subseteq X : M \cup N' \in \mathcal{F}\}$$

die Menge N, ist also nichtleer, und enthält wegen $M \notin \mathcal{F}$ nicht die leere Menge. Sind $N', \tilde{N} \in \mathcal{H}$ und $\hat{N} \subseteq X$ mit $N' \subseteq \hat{N}$, so folgt aus

$$M \cup (N' \cap \tilde{N}) = (M \cup N') \cap (M \cup \tilde{N}) \in \mathcal{F}$$

und

$$M \cup \hat{N} \supseteq M \cup N' \in \mathcal{F},$$

dass $\mathcal{H}$ ein Filter ist. Wegen $N \notin \mathcal{F}$ ist er eine echte Obermenge von $\mathcal{F}$, wodurch $\mathcal{F}$ kein Ultrafilter sein kann. □

Proposition 4.3.5. *Ein uniformer Raum $(X,\mathcal{U})$ ist genau dann total beschränkt, wenn es zu jedem Filter $\mathcal{F}$ auf X einen Cauchy-Filter $\mathcal{F}'$ gibt mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$.*

Beweis. Sei X total beschränkt und $U \in \mathcal{U}$. Zu einem symmetrischen $V \in \mathcal{U}$ mit $V^2 \subseteq U$ gibt es wegen der total Beschränktheit $x_1, ..., x_n \in X$ mit

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} V(x_i).$$

Nach Bemerkung 4.3.3 existiert ein Ultrafilter $\mathcal{F}'$, der feiner als $\mathcal{F}$ ist. Wenden wir Lemma 4.3.4 iterativ an, so folgt aus $X \in \mathcal{F}'$

$$V(x_k) \in \mathcal{F}'$$

für mindestens ein $k = 1, ..., n$. Wegen

$$V(x_k) \times V(x_k) \subseteq V^2 \subseteq U$$

erweist sich $\mathcal{F}'$ als Cauchy-Filter.

Für die Umkehrung sei X nicht total beschränkt. Wir finden also ein $U \in \mathcal{U}$ mit

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i) \neq \emptyset$$

für jede endliche Teilmenge $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$. Folglich bildet

$$\{X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i) : \{x_1, ..., x_n\} \subseteq X, n \in \mathbb{N}\}$$

eine Filterbasis für einen Filter $\mathcal{F}$. Gibt es zu $\mathcal{F}$ einen Cauchy-Filter $\mathcal{F}'$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, so folgt $F' \times F' \subseteq U$ für ein $F' \in \mathcal{F}'$. Außerdem gilt für alle $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$

$$F' \cap \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i) \right) \neq \emptyset,$$

da $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i) \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Für ein

$$x \in F' \cap \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i) \right)$$

folgt aus $F' \times F' \subseteq U$, dass $F' \subseteq U(x)$, und damit der Widerspruch

$$F' \cap \left(X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} U(x_i) \cup U(x) \right) \right) = \emptyset.$$

□

Korollar 4.3.6. *Ein uniformer Raum* $(X,\mathcal{U})$ *ist genau dann total beschränkt, wenn jeder Ultrafilter* $\mathcal{F}$ *auf* X *ein Cauchy-Filter ist.*

Definition 4.3.7. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Ein $x \in X$ heißt Berührungspunkt von $\mathcal{F}$, wenn

$$F \cap N \neq \emptyset$$

für alle $F \in \mathcal{F}$ und $N \in \mathcal{U}(x)$ gilt.

Berührungspunkte von Filtern sind das Analogon von Häufungspunkten von Netzen.

Lemma 4.3.8. *Ist* $\mathcal{F}$ *ein Cauchy-Filter auf einem uniformen Raum* $(X,\mathcal{U})$ *und* $x \in X$ *ein Berührungspunkt, so gilt*

$$\mathcal{F} \to x.$$

Beweis. Zu einem $U \in \mathcal{U}$ gibt es nach Lemma 2.1.9 ein abgeschlossenes $V \in \mathcal{U}$ mit $V \subseteq U$, wofür es wiederum ein $F \in \mathcal{F}$ derart gibt, dass

$$F \times F \subseteq \overline{F} \times \overline{F} \subseteq V \subseteq U.$$

Ist $x \in X$ ein Berührungspunkt von $\mathcal{F}$, so folgt aus der Definition $x \in \overline{F}$ und damit

$$\overline{F} \subseteq U(x)$$

beziehungsweise $U(x) \in \mathcal{F}$. Insgesamt erhalten wir $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$. □

Satz 4.3.9. *Ein topologischer Raum* $(X,\mathcal{T})$ *ist dann und nur dann kompakt, wenn zu jedem Filter* $\mathcal{F}$ *auf* X *ein Berührungspunkt* $x \in X$ *existiert.*

Beweis. Sei X kompakt $\mathcal{F}$ ein Filter auf X ohne Berührungspunkt. Demnach gibt es zu jedem x ein $F_x \in \mathcal{F}$ und ein $N_x \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{T}$ derart, dass

$$F_x \cap N_x = \emptyset.$$

Weil $(N_x)_{x\in X}$ eine offene Überdeckung von X ist, gibt es endlich viele $x_1, ..., x_n \in X$ mit $\bigcup_{i=1}^n N_{x_i} = X$. Desweiteren gibt es wegen der Filtereigenschaft von $\mathcal{F}$ ein $u \in X$ mit

$$u \in \bigcap_{i=1}^n F_{x_i}.$$

Weil $u \in N_{x_k}$ für ein $k = 1, ..., n$ gilt, folgt der Widerspruch

$$u \in F_{x_k} \cap N_{x_k}.$$

Für die Umkehrung sei X nicht kompakt. Folglich gibt es eine offene Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt, weshalb insbesondere der Schnitt $O_{i_1}^c \cap ... \cap O_{i_n}^c$ für jede Wahl $i_1, ..., i_n \in I$ nicht leer ist. Wir erhalten, dass das Mengensystem, das mittels endlicher Durchschnittsbildung aus den Mengen $O_i^c, i \in I$, entsteht, eine Filterbasis eines Filters $\mathcal{F}$ bildet. Wir zeigen, dass $\mathcal{F}$ keinen Berührungspunkt besitzt. Dafür sei $x \in X$ beliebig und $i \in I$ derart, dass $x \in O_i$. Wegen $O_i \in \mathcal{U}(x)$, $O_i^c \in \mathcal{F}$ und

$$O_i \cap O_i^c = \emptyset,$$

kann x kein Berührungspunkt von $\mathcal{F}$ sein. □

Satz 4.3.10. *Ein uniformer Raum* $(X,\mathcal{U})$ *ist dann und nur dann kompakt, wenn er vollständig und total beschränkt ist.*

Beweis. Ist X kompakt, so besitzt nach Satz 4.3.9 jeder Filter $\mathcal{F}$ einen Berührungspunkt $x \in X$. Sei $\mathcal{F}'$ jener Filter auf X, der

$$\{N \cap F : N \in \mathcal{U}(x), F \in \mathcal{F}\}$$

als Filterbasis besitzt. Offenbar gilt $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}' \to x$. Nach Bemerkung 4.1.5 ist $\mathcal{F}'$ damit ein Cauchy-Filter, womit sich wegen Proposition 4.3.5 X als total beschränkt erweist. Um die Vollständigkeit von X zu zeigen, sei $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter und $x \in X$ ein Berührungspunkt von $\mathcal{F}$. Aus Lemma 4.3.8 folgt $\mathcal{F} \to x$.

Gemäß Satz 4.3.9 ist für die Umkehrung zu zeigen, dass jeder Filter $\mathcal{F}$ auf X einen Berührungspunkt $x \in X$ besitzt. Zu $\mathcal{F}$ gibt es bei vorausgesetzter totalen Beschränktheit nach Proposition 4.3.5 einen Cauchy-Filter $\mathcal{F}'$ auf X mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Ist X auch vollständig, so existiert ein $x \in X$ mit

$$\mathcal{F}' \to x.$$

Für $N \in \mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}'$ und $F \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ gilt

$$N \cap F \neq \emptyset,$$

womit sich x als Berührungspunkt von $\mathcal{F}$ herausstellt. □

4.4 Vervollständigung

Um die Existenz einer Vervollständigung zu zeigen, benötigen wir einige Lemmata.

Lemma 4.4.1. *Sei* $(D,\mathcal{D})$ *ein dichter uniformer Unterraum eines uniformen Raumes* $(X,\mathcal{U})$ *und* $f : D \to Y$ *eine gleichmäßig stetige Abbildung in einen vollständigen uniformen Hausdorff-Raum* $(Y,\mathcal{V})$. *Dann gibt es genau eine gleichmäßig stetige Funktion* $\tilde{f} : X \to Y$ *mit* $\tilde{f}|_D = f$.

Beweis.
- Wir definieren $\tilde{f}$ für jedes $x \in X$. Der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ von x in $(X,\mathcal{U})$ ist ein Cauchy-Filter auf X. Wegen Bemerkung 4.2.5 und der Dichtheit von D in X ist

$$\mathcal{C}_x := \{N \cap D : N \in \mathcal{U}(x)\}$$

ein Filter auf D, der zusätzlich ein Cauchy-Filter in $(D,\mathcal{D})$ ist. Aus Satz 4.2.2 folgt, dass $f(\mathcal{C}_x)$ ein Cauchy-Filter auf Y ist, womit es wegen der Vollständigkeit von Y ein $y \in Y$ gibt mit

$$f(\mathcal{C}_x) \to y.$$

Da Y ein Hausdorff-Raum ist, ist durch $\tilde{f}(x) := y$ eine Abbildung $\tilde{f} : X \to Y$ wohldefiniert.

- Wir zeigen, dass $\tilde{f}$ eine Fortsetzung von f ist. Für $x \in D$ gilt

$$\mathcal{C}_x = \mathcal{U}_D(x),$$

wobei $\mathcal{U}_D(x)$ den Umgebungsfilter von x bezüglich $(D, \mathcal{D})$ bezeichnet. Ist $N \in \mathcal{U}(f(x))$, so folgt aus der Stetigkeit von f, dass $f^{-1}(N) \in \mathcal{U}_D(x)$. Demnach gibt es ein $M \in \mathcal{U}(x)$ mit

$$f^{-1}(N) = M \cap D,$$

weshalb $f(M \cap D) \subseteq N$ und wegen $f(M \cap D) \in f(\mathcal{C}_x)$ auch $N \in f(\mathcal{C}_x)$ folgt. Insgesamt erhalten wir $\mathcal{U}(f(x)) \subseteq f(\mathcal{C}_x)$, also

$$f(\mathcal{C}_x) \to f(x) = \tilde{f}(x).$$

- Um die gleichmäßige Stetigkeit von $\tilde{f}$ zu zeigen, sei $V \in \mathcal{V}$ beliebig und $W \in \mathcal{V}$ symmetrisch mit $W^3 \subseteq V$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f und Satz 2.1.9 gibt es ein bezüglich der Produkttopologie auf $X \times X$ offenes $U \in \mathcal{U}$ derart, dass

$$(f \times f)(U \cap (D \times D)) \subseteq W.$$

Wir zeigen $(\tilde{f} \times \tilde{f})(U) \subseteq W^3 \subseteq V$. Weil U offen ist, gibt es zu $(x, x') \in U$ Umgebungen $N \in \mathcal{U}(x), N' \in \mathcal{U}(x')$ mit

$$(N \cap D) \ \times (N' \cap D) \subseteq N \times N' \subseteq U.$$

Insbesondere existieren $F := N \cap D \in \mathcal{C}_x, F' := N' \cap D \in \mathcal{C}_{x'}$ mit $F \times F' \subseteq U$, weshalb $f(F) \times f(F') \subseteq W$. Da definitionsgemäß $f(\mathcal{C}_x) \to \tilde{f}(x)$, folgt die Existenz eines $G \in \mathcal{C}_x$ mit $f(G) \subseteq W(\tilde{f}(x))$. Genauso gilt $f(G') \subseteq W(\tilde{f}(x'))$ für ein $G' \in \mathcal{C}_{x'}$. Wählen wir Punkte ξ, ξ' mit

$$\xi \in F \cap G \quad \text{und} \quad \xi' \in F' \cap G',$$

so erhalten wir

$$(f(\xi), f(\xi')), (f(\xi), \tilde{f}(x)), (f(\xi'), \tilde{f}(x')) \in W,$$

also $(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) \in W^3$.

- Ist $f_0 : X \to Y$ eine weitere gleichmäßig stetige Funktion mit $f_0|_D = f$, so stimmen f_0 und $\tilde{f}$ auf der in X dichten Menge D überein und aufgrund der Stetigkeit beider Abbildung und der Hausdorff-Eigenschaft von Y gilt Gleichheit sogar auf ganz X. □

Lemma 4.4.2. *Ist $\mathcal{F}$ ein minimaler Cauchy-Filter und $F \in \mathcal{F}$, so liegt das Innere F° von F wieder in $\mathcal{F}$.*

Beweis. Zu jedem $U \in \mathcal{U}$ gibt es gemäß Satz 2.1.9 ein offenes und symmetrisches $W \in \mathcal{U}$ mit $W^3 \subseteq U$. Desweiteren gibt es ein $F \in \mathcal{F}$ derart, dass

$$F \times F \subseteq W.$$

Insbesondere ist die Menge $\mathfrak{L}$ bestehend aus allen $(U, W, F) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \times \mathcal{F}$ obiger Bauart nichtleer, weshalb die Menge

$$\mathcal{G} := \left\{ \bigcup_{x \in F} W(x) : (U, W, F) \in \mathfrak{L} \right\}$$

nicht die leere Menge enthält. Wegen Bemerkung 2.1.10 ist jede Menge aus $\mathcal{G}$ offen und es gilt für $(U, W, F) \in \mathfrak{L}$

$$\bigcup_{x \in F} W(x) \times \bigcup_{x \in F} W(x) \subseteq U, \tag{4.1}$$

denn gilt $(y_1, y_2) \in W(x_1) \times W(x_2)$ für gewisse $x_1, x_2 \in F$, so folgt aus $(x_1, x_2) \in F \times F \subseteq W$ und der Symmetrie von W die Inklusion $(y_1, y_2) \in W^3 \subseteq U$.

$\rightsquigarrow$ Wir zeigen, dass $\mathcal{G}$ eine Filterbasis für einen Cauchy-Filter auf X ist. Wie oben erwähnt, enthält $\mathcal{G}$ nicht die leere Menge. Seien

$$(U_1, W_1, F_1), (U_2, W_2, F_2) \in \mathfrak{L}$$

und $y \in \bigcup_{x \in F_1 \cap F_2} (W_1 \cap W_2)(x)$ gegeben. Demnach existiert ein $x_y \in F_1 \cap F_2$ mit $(x_y, y) \in W_1 \cap W_2$. Insbesondere gilt $(x_y, y) \in W_i$ und $x_y \in F_i$, $i = 1, 2$, was gerade $y \in \bigcup_{x \in F_1} W_1(x) \cap \bigcup_{x \in F_2} W_2(x)$ bedeutet. Also gilt

$$\bigcup_{x \in F_1 \cap F_2} (W_1 \cap W_2)(x) \subseteq \bigcup_{x \in F_1} W_1(x) \cap \bigcup_{x \in F_2} W_2(x).$$

Damit die linke Seite ein Element von $\mathcal{G}$ ist, bleibt $(U_1 \cap U_2, W_1 \cap W_2, F_1 \cap F_2) \in \mathfrak{L}$ zu zeigen. Offenbar ist die Menge $W_1 \cap W_2$ symmetrisch und offen. Außerdem gilt

$$(W_1 \cap W_2)^3 \subseteq U_1 \cap U_2,$$

da $(x, y) \in (W_1 \cap W_2)^3$, also

$$(x, z_1), (z_1, z_2), (z_2, y) \in W_1 \cap W_2$$

für gewisse $z_1, z_2 \in X$, die Inklusion

$$(x, y) \in W_1^3 \cap W_2^3 \subseteq (U_1 \cap U_2)$$

nach sich zieht. Wegen

$$(F_1 \cap F_2) \times (F_1 \cap F_2) \subseteq (W_1 \cap W_2),$$

folgt schließlich $(U_1 \cap U_2, W_1 \cap W_2, F_1 \cap F_2) \in \mathfrak{L}$. Der von $\mathcal{G}$ erzeugt Filter, symbolisch $[\mathcal{G}]$, ist wegen (4.1) sogar ein Cauchy-Filter.

$\rightsquigarrow$ Offensichtlich hat der Filter $[\mathcal{G}]$ die Eigenschaft, dass mit jedem Element aus $[\mathcal{G}]$ auch sein Inneres in $[\mathcal{G}]$ liegt. Da $[\mathcal{G}]$ ein Cauchy-Filter ist, der $[\mathcal{G}] \subseteq \mathcal{F}$ erfüllt, folgt aus der Minimalität von $\mathcal{F}$

$$[\mathcal{G}] = \mathcal{F}.$$

□

Lemma 4.4.3. *Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer Menge X. Gibt es einen Filter $\mathcal{G}$ auf X mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ und $\mathcal{G} \to x$, so ist x ein Berühungspunkt von $\mathcal{F}$.*

Beweis. Für $F \in \mathcal{F}$ und $N \in \mathcal{U}(x)$ gilt $F, N \in \mathcal{G}$, weshalb $F \cap N \neq \emptyset$. □

Lemma 4.4.4. *Sei A eine dichte Teilmenge eines uniformen Raumes $(X,\mathcal{U})$ und $\iota : A \to X$ die Einbettungsabbildung. Gibt es zu jedem Cauchy-Filter $\mathcal{F}$ auf A ein $x \in X$ derart, dass $\iota(\mathcal{F})$ in X gegeben x konvergiert, so ist X vollständig.*

Beweis. Sei $\mathcal{G}$ ein Cauchy-Filter auf X und $\mathcal{G}_0$ der dazugehörige minimale Cauchy-Filter aus Lemma 4.1.2. Wegen Lemma 4.4.2 hat jedes $G \in \mathcal{G}_0$ ein nichtleeren Inneres G°, wobei wegen der Dichtheit von A

$$A \cap G \neq \emptyset.$$

Gemäß Bemerkung 4.2.5 ist damit $\mathcal{G}_0 \cap A$ ein Filter auf A. Nach Vorraussetzung gibt es ein $x \in X$ mit $\iota(\mathcal{G}_0 \cap A) \to x$. Da $\mathcal{G}_0$ gröber als $\iota(\mathcal{G}_0 \cap A)$ ist, folgt aus Lemma 4.4.3, dass x Berührungspunkt von $\mathcal{G}_0$ ist. Wegen Lemma 4.3.8 konvergiert $\mathcal{G}_0$ und damit auch $\mathcal{G}$ gegen x. □

Definition 4.4.5. Seien $(X,\mathcal{U})$ und $(Y,\mathcal{V})$ zwei uniforme Räume. Eine bijektive und in beide Richtung gleichmäßig stetige Abbildung $\phi : X \to Y$ nennt man Isomorphismus zwischen diesen uniformen Räumen.

Satz 4.4.6. *Zu jedem uniformen Raum $(X,\mathcal{U})$ gibt es einen uniformen Raum $(\hat{X},\hat{\mathcal{U}})$ und eine gleichmäßig stetige Abbildung $i : X \to \hat{X}$ mit folgenden Eigenschaften.*

(i) $\hat{X}$ ist ein vollständiger Hausdorff-Raum.

(ii) $i(X)$ liegt dicht in $\hat{X}$.

(iii) Zu jedem vollständigen uniformen Hausdorff-Raum $(Y,\mathcal{V})$ und jeder gleichmäßig stetigen Abbildung $f : X \to Y$ gibt es eine eindeutige gleichmäßig stetige Abbildung

$$\hat{f} : \hat{X} \to Y \quad \text{mit} \quad f = \hat{f} \circ i.$$

Zu einem weiteren uniformen Raum $(\hat{X}',\hat{\mathcal{U}}')$ und einer gleichmäßig stetige Abbildung $i' : X \to \hat{X}'$ mit obigen drei Eigenschaften gibt es einen eindeutigen Isomorphismus

$$\phi : \hat{X} \to \hat{X}' \quad \text{mit} \quad i' = \phi \circ i.$$

Beweis. Sei $\hat{X}$ die Menge aller minimalen Cauchy-Filter auf X. Für $U \in \mathcal{U}$ setzen wir

$$\hat{U} := \{(\mathcal{F},\mathcal{G}) \in \hat{X} \times \hat{X} : \exists M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \text{ mit } M \times M \subseteq U\}$$

und

$$\hat{\mathcal{B}} := \{\hat{U} : U \in \mathcal{U},\, U = U^{-1}\}.$$

Wir zeigen, dass $\hat{\mathcal{B}}$ die Vorrausetzungen von Satz 2.1.8 erfüllt und damit ein Fundamentalsystem für eine uniforme Struktur $\hat{\mathcal{U}}$ auf $\hat{X}$ ist. Um $(b1)$ einzusehen, setzen wir $W := U \cap V$ für $\hat{V}, \hat{U} \in \hat{\mathcal{B}}$. Die Menge W ist symmetrisch und es gilt

$$\hat{W} \subseteq \hat{V} \cap \hat{U}.$$

Zu einem symmetrischen $U \in \mathcal{U}$ und einem $\mathcal{F} \in \hat{X}$ gibt es ein $F \in \mathcal{F}$ mit $F \times F \subseteq U$, weshalb

$$(\mathcal{F},\mathcal{F}) \in \hat{U},$$

also gilt $(b2)$. $(b3)$ trifft zu, da $\hat{U}$ offenbar symmetrisch definiert ist. Um $(b4)$ zu zeigen sei $\hat{U} \in \hat{\mathcal{B}}$ beliebig und $W \in \mathcal{U}$ symmetrisch mit $W^2 \subseteq U$. Sind $(\mathcal{F}, \mathcal{G}), (\mathcal{G}, \mathcal{H})$ aus $\hat{W}$, so gibt es $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ und $N \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ derart, dass

$$M \times M \subseteq W \quad \text{und} \quad N \times N \subseteq W.$$

Wegen $M, N \in \mathcal{G}$ gilt $M \cap N \neq \emptyset$ und damit

$$(M \cup N) \times (M \cup N) \subseteq W^2.$$

Desweiteren ist $M \cup N$ eine Obermenge von $M \in \mathcal{F}$ und $N \in \mathcal{H}$, wodurch

$$M \cup N \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H},$$

also $(\mathcal{F}, \mathcal{H}) \in \widehat{W^2}$ und damit

$$\hat{W}^2 \subseteq \widehat{W^2} \subseteq \hat{U}.$$

⇝ Für die Hausdorff-Eigenschaft von $\hat{X}$, reicht es gemäß Satz 2.3.2 zu zeigen, dass der Durchschnitt aller Elemente aus $\hat{\mathcal{U}}$ die Diagonale Δ ergibt. Ist $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ in jedem Element von $\hat{\mathcal{U}}$ enthalten, so gilt

$$(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \hat{U} \quad \text{für alle symmetrischen } U \in \mathcal{U}. \tag{4.2}$$

Wegen

$$\begin{aligned}(M_1 \cup N_1) \cap (M_2 \cup N_2) &= ((M_1 \cup N_1) \cap M_2) \cup ((M_1 \cup N_1) \cap N_2) \\ &= (M_1 \cap M_2) \cup (N_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap N_2) \\ &\supseteq (M_1 \cap M_2) \cup (N_1 \cap N_2)\end{aligned}$$

für $M_1, M_2 \in \mathcal{F}$ und $N_1, N_2 \in \mathcal{G}$ ist die Menge $\{M \cup N : M \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{G}\}$ eine Filterbasis für einen Filter $\mathcal{H}$ auf X, für den

$$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F} \quad \text{und} \quad \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$$

gilt. Für $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ folgt wegen $M = M \cup M$ schon $M \in \mathcal{H}$, also $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$. Außerdem gibt es wegen (4.2) zu jedem symmetrischen $U \in \mathcal{U}$ ein $L \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ mit $L \times L \subseteq U$, womit sich $\mathcal{H}$ als Cauchy-Filter erweist. Weil aber $\mathcal{F}$ sowie $\mathcal{G}$ minimale Cauchy-Filter sind, folgt

$$\mathcal{F} = \mathcal{G} = \mathcal{H}$$

und damit $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \Delta$.

⇝ Sei i jene Abbildung, die ein $x \in X$ auf den Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ von x abbildet. Gemäß Bemerkung 4.1.3 ist $\mathcal{U}(x)$ ein minimaler Cauchy-Filter, weshalb

$$i(x) = \mathcal{U}(x) \in \hat{X}.$$

Wir zeigen, dass i gleichmäßig stetig ist. Zu einem $U \in \mathcal{U}$ gibt es ein symmetrisches $W \in \mathcal{U}$ mit $W^3 \subseteq U$. Ist $(x, y) \in W$, so schließen wir wegen

$$(W(x) \cup W(y)) \times (W(x) \cup W(y)) \subseteq W^3 \subseteq U$$

und $W(x) \cup W(y) \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{U}(y)$ auf

$$(i \times i)(x, y) = (\mathcal{U}(x), \mathcal{U}(y)) \in \hat{U}.$$

$\rightsquigarrow$ Für den Beweis der Dichtheit von $i(X)$ in $\hat{X}$ zeigen wir

$$\hat{U}(\mathcal{F}) \cap i(X) \neq \emptyset$$

für jedes symmetrische $U \in \mathcal{U}$ und $\mathcal{F} \in \hat{X}$. Für $F \in \mathcal{F}$ mit $F \times F \subseteq U$ liegt gemäß Lemma 4.4.2 sein Inneres F° wieder in $\mathcal{F}$. Ist $x \in F^\circ$, so gilt

$$F^\circ \times F^\circ \subseteq F \times F \subseteq U$$

und wegen der Offenheit von F°

$$F^\circ \in \mathcal{F} \cap \mathcal{U}(x),$$

womit $(\mathcal{F}, \mathcal{U}(x)) \in \hat{U}$, also

$$i(x) = \mathcal{U}(x) \in \hat{U}(\mathcal{F})$$

und damit $\hat{U}(\mathcal{F}) \cap i(X) \neq \emptyset$. Zudem erhalten wir aus $i(F^\circ) \subseteq \hat{U}(\mathcal{F})$

$$\hat{U}(\mathcal{F}) \in i(\mathcal{F}), \quad \text{weshalb} \quad i(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}. \tag{4.3}$$

$\rightsquigarrow$ Wir zeigen die Vollständigkeit von $\hat{X}$. Ist $\mathfrak{G}$ ein Cauchy-Filter auf $i(X)$, so gibt es zu jedem symmetrischen $U \in \mathcal{U}$ ein $\mathfrak{C} \in \mathfrak{G}$ mit

$$\mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \ \subseteq \ \hat{U} \cap (i(X) \times i(X)) \ \subseteq \ \hat{U}. \tag{4.4}$$

Weiters gilt

$$(i \times i)^{-1}(\hat{U}) \subseteq U, \tag{4.5}$$

da es für $(x, y) \in X \times X$ mit $(i \times i)(x, y) = (\mathcal{U}(x), \mathcal{U}(y)) \in \hat{U}$ definitionsgemäß ein $M \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{U}(y)$ mit $M \times M \subseteq U$ gibt, weshalb $(x, y) \in M \times M \subseteq U$. Wir wollen zeigen, dass

$$i^{-1}(\mathfrak{G}) := \{i^{-1}(\mathfrak{C}) : \mathfrak{C} \in \mathfrak{G}\}$$

eine Filterbasis für einen Cauchy-Filter $\mathcal{G}$ auf X ist. Weil $\mathfrak{G}$ nicht die leere Menge enthält, gilt dies auch für $i^{-1}(\mathfrak{G})$. Da für $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \in \mathfrak{G}$

$$i^{-1}(\mathfrak{C}_1) \cap i^{-1}(\mathfrak{C}_2) = i^{-1}(\mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2) \in i^{-1}(\mathfrak{G})$$

gilt, erweist sich $i^{-1}(\mathfrak{G})$ als Filterbasis für einen Filter $\mathcal{G}$ auf X. Desweiteren ist $\mathcal{G}$ ein Cauchy-Filter, denn für jedes symmetrische $U \in \mathcal{U}$ und gewisse $\mathfrak{C} \in \mathfrak{G}$ gelten die Inklusionen (4.4), weshalb wir zusammen mit (4.5)

$$i^{-1}(\mathfrak{C}) \times i^{-1}(\mathfrak{C}) = (i \times i)^{-1}(\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}) \subseteq (i \times i)^{-1}(\hat{U}) \subseteq U$$

erhalten. Gemäß Lemma 4.1.2 gibt es einen minimalen Cauchy-Filter $\mathcal{G}_m$ auf X mit $\mathcal{G}_m \subseteq \mathcal{G}$. Betrachten wir i als Abbildung in den uniformen Unterraum $i(X)$, versehen mit der inital uniformen Struktur der Einbettungsabbildung (siehe Definition 2.5.6), so ist i gleichmäßig stetig und wir erhalten aus Lemma 4.2.2, dass $i(\mathcal{G}_m)$ ein Cauchy-Filter auf $i(X)$ ist. Da $i : X \to i(X)$ surjektiv ist und damit $i(i^{-1}(\mathfrak{C})) = \mathfrak{C}$ für alle $\mathfrak{C} \in \mathfrak{G}$ gilt, folgt $\mathfrak{G} = i(i^{-1}(\mathfrak{G}))$ und damit $i(\mathcal{G}) = \mathfrak{G}$. Wegen der Inklusion $\mathcal{G}_m \subseteq \mathcal{G}$ erhalten wir

$$i(\mathcal{G}_m) \subseteq i(\mathcal{G}) = \mathfrak{G}$$

und aus (4.3) folgt $i(\mathcal{G}_m) \to \mathcal{G}_m$ in $\hat{X}$, weshalb auch

$$\mathfrak{G} \to \mathcal{G}_m \quad \text{in } \hat{X}.$$

Gemäß Lemma 4.4.4 erweist sich damit $\hat{X}$ als vollständig.

$\rightsquigarrow$ Wir weisen (iii) nach. Sei $f : X \to Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung, die in einen vollständigen uniformen Hausdorff-Raum $(Y, \mathcal{V})$ abbildet. Da für jedes $x \in X$ der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ ein Cauchy-Filter auf X ist, folgt aus Lemma 4.2.2, dass $f(\mathcal{U}(x))$ ein Cauchy-Filter auf Y ist. Da Y vollständig ist, gibt es einen Punkt aus Y, wir nennen ihn $f_0(x)$, mit

$$f(\mathcal{U}(x)) \to f_0(x).$$

Wir haben damit eine Abbildung $f_0 : i(X) \to Y$ definiert, die $f = f_0 \circ i$ erfüllt. Um die gleichmäßige Stetigkeit von f_0 einzusehen, sei $V \in \mathcal{V}$ beliebig und $U \in \mathcal{U}$ symmetrisch mit

$$(f \times f)(U) \subseteq V.$$

Wegen (4.5) und $f = f_0 \circ i$ gilt

$$(f_0 \times f_0)(\hat{U} \cap (i(X) \times i(X)) = (f_0 \times f_0)(i \times i((i \times i)^{-1}(\hat{U}))) \subseteq (f \times f)(U) \subseteq V$$

Schließlich folgt aus der Dichtheit von $i(X)$ in $\hat{X}$ und Lemma 4.4.1 die Existenz einer eindeutigen gleichmäßig stetige Fortsetzung $\hat{f} : \hat{X} \to Y$ von f_0 mit

$$\hat{f} \circ i = f.$$

$\rightsquigarrow$ Ist $(\hat{X}', \hat{\mathcal{U}}')$ ein weiterer uniformen Raum samt einer gleichmäßig stetige Abbildung $i' : X \to \hat{X}'$ mit den Eigenschaften (i),(ii) und (iii), so gibt es wegen (iii) gleichmäßig stetige Abbildungen $\phi : \hat{X}' \to \hat{X}$ und $\phi' : \hat{X} \to \hat{X}'$ mit

$$i' = \phi' \circ i \quad \text{und} \quad i = \phi \circ i'.$$

Wieder wegen (iii), diesmal auf die Abbildung

$$\phi \circ \phi' \circ i : X \to \hat{X}$$

angewandt, erhalten wir ein eindeutiges gleichmäßig stetiges $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{X}$, das

$$i = \phi \circ i' = \phi \circ \phi' \circ i = \hat{f} \circ i$$

erfüllt. Wegen der Eindeutigkeit muss $\hat{f}$ gleich der Identität $\mathrm{id}_{\hat{X}}$ auf $\hat{X}$ sein, weshalb wegen der Dichtheit von $i(X)$ in $\hat{X}$

$$\phi \circ \phi' = \mathrm{id}_{\hat{X}}.$$

Genauso folgt $\phi' \circ \phi = \mathrm{id}_{\hat{X}'}$, womit sich ϕ als Isomorphismus erweist.

□

Bemerkung 4.4.7. Ist mit den Vorausssetzungen aus Satz 4.4.6 X zusätzlich ein Hausdorff-Raum, so ist $i : X \to i(X)$ sogar ein Isomorphismus, da aus

$$\mathcal{U}(x) = i(x) = i(y) = \mathcal{U}(y)$$

$(x, y) \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ und sich gemäß Satz 2.3.2 daraus $x = y$ ergibt.

Literaturverzeichnis

[1] Boto von Querenburg. Mengentheoretische Topologie. 3., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Springer, 2001.

[2] W. Roelcke, S. Dierolf. Uniform Structures on Topological Groups and their Quotients. McGraw-Hill Internationale Book Company, 1981.

[3] I. M. James. Topological and Uniform Spaces. Springer-Verlag, 1987.

[4] M. Kaltenbäck. Fundament Analysis. Heldermann Verlag, 2014.

[5] H. Woracek, M. Kaltenbäck, M. Blümlinger. Funktionalanalysis. TU Wien, 13. Auflage, Februar 2019.

[6] M. Kaltenbäck. Analysis 3. TU Wien, WS 2018/2019.

[7] Raphael Pruckner. Äquivalente Formulierungen von T3, Bachelorarbeit aus Analysis. TU Wien, SS 2011.

[8] M. Kaltenbäck. Aufbau Analysis. Heldermann Verlag, 2021.