Faktorisierungstheoreme und Anwendungen

Bachelorarbeit aus Analysis

Fabian Mußnig

Juni 2012

Betreuer:
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Martin Blümlinger

Inhaltsverzeichnis

Notationen

- Der Körper $\mathbb{K}$ steht im Folgenden für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.
- Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, sei $\Re(z) = x$ der Realteil und $\Im(z) = y$ der Imaginärteil von z.
- Für einen lokal kompakten Raum $\mathcal{X}$ ist $C_0(\mathcal{X})$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : \mathcal{X} \to \mathbb{K}$, die im Unendlichen verschwinden, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein kompaktes $K \subset \mathcal{X}$, sodass $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathcal{X} \backslash K$.

  Der Raum $C_{00}(\mathcal{X}) \subset C_0(\mathcal{X})$ beinhaltet alle Funktionen mit kompaktem Träger. Schließlich setzen wir $C_{00}^+(\mathcal{X}) = \{f \in C_{00}(\mathcal{X}) : f \geq 0, f \neq 0\} \subset C_{00}(\mathcal{X})$.

Einleitung

Diese Arbeit ist in drei Teile gegliedert. Im ersten Teil werden gleich die Hauptresultate gezeigt, nämlich inwiefern sich Banachmoduln über Banachalgebren faktorisieren lassen und welche weiteren Eigenschaften sich dabei ergeben. Es wird sich herausstellen, dass die Banachalgebra über kein Einselement verfügen muss, sondern eine beschränkte Approximation der Eins ausreichend ist. Man kann sie dann zunächst in eine Banachalgebra mit Einselement einbetten und stellt im Nachhinein fest, dass dieses gar nicht benötigt wird.
Im zweiten Abschnitt wird mit positiven Funktionalen eine Anwendung des Faktorisierungstheorems gegeben. Es lässt sich damit zeigen, dass jedes positive Funktional auf einer Banach-*-Algebra mit beschränkter Approximation der Eins stetig ist. Dabei wird wiederum das Einbetten in eine Banach-*-Algebra mit Einselement benötigt.
Schließlich behandelt das dritte Kapitel lokal kompakte Gruppen und insbesondere das Haar Maß. Dabei wird sich herausstellen, dass man die entsprechenden L^p-Räume als Banachalgebren und Banachmoduln auffassen kann. Schlussendlich wird mit einer entsprechenden Approximation der Eins gezeigt, dass sich die L^p-Räume über L^1 faktorisieren lassen, wobei in diesem Schritt natürlich auf die Resultate des ersten Kapitels zurückgegriffen wird.

1 Faktorisierung von Banachalgebren und Moduln

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit Banachalgebren und Banachmoduln und der Frage ob und wann sich Banachmoduln über Banachalgebren faktorisieren lassen. Die entsprechenden Aussagen stellen zugleich auch die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit dar. Die Abschnitte 1.2 und 1.3 wurden dabei überwiegend Teilen von „Positive-definite functions and factorization theorems“ aus [6], S. 263-270, nachempfunden.

1.1 Banachalgebren

Definition 1.1. Wir nennen einen Vektorraum $(\mathcal{A}, +)$ über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit einer Norm $\|\cdot\|$ und einer Abbildung $\circ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ eine *Banachalgebra*, wenn

1. $\circ$ biliniear und assoziativ ist,
2. $(\mathcal{A}, +, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist,
3. $\|a \circ b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$, für alle $a, b \in \mathcal{A}$.

Wir verwenden auch a^k anstatt $\underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{k-mal}$. Gibt es zusätzlich ein Element $u \in \mathcal{A}$ mit $\|u\| = 1$ und $u \circ a = a \circ u = a$ für alle $a \in \mathcal{A}$, so nennen wir u ein *Einselement* und sprechen von einer *Banachalgebra mit Eins*. Für $a \in \mathcal{A}$ verwenden wir dann $a^0 := u$. In einer Banachalgebra mit Eins heißt ein Element $a \in \mathcal{A}$ invertierbar, falls es ein $b \in \mathcal{A}$ gibt, sodass $a \circ b = b \circ a = u$. Wir bezeichnen b mit a^{-1} und nennen es die Inverse von

a. Offensichtlich gilt $(a^{-1})^{-1} = a$. Somit können wir die Menge $\mathrm{Inv}(\mathcal{A}) := \{a \in \mathcal{A} : a \text{ ist invertierbar}\}$ einführen.

Aus der Funktionalanalysis ist folgendes Resultat bekannt (vgl. [4], S. 358):

Satz 1.1. *Die Menge* $\mathrm{Inv}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ *ist offen. Zudem ist die Abbildung* $^{-1} : \mathrm{Inv}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Inv}(\mathcal{A}) : a \mapsto a^{-1}$ *stetig und bijektiv.*

Definition 1.2. Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra. Ein Netz $\{e_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{A}$ wird *beschränkte links-Approximation der Eins* genannt, wenn $\{\|e_i\|, i \in I\}$ eine beschränkte Menge positiver reeller Zahlen ist und $\lim_{i\in I} e_i \circ a = a$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Analog definiert man eine *beschränkte rechts-Approximation der Eins.*

Bemerkung 1.1. Ist $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins, so stellt das einelementige Netz $\{u\} \subset \mathcal{A}$ eine beschränkte links/rechts-Approximation der Eins dar bzw. eine (beidseitige) Approximation der Eins.

Aus der Definition einer links-Approximation der Eins folgt ganz elementar das folgende Lemma.

Lemma 1.1. *Sei* $\mathcal{A}$ *eine Banachalgebra mit beschränkter links-Approximation der Eins. Dann gibt es eine Konstante* $d \geq 1$, *sodass für jede endliche Teilmenge* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathcal{A}$ *und* $\varepsilon > 0$ *ein* $e \in \mathcal{A}$ *existiert mit* $\|e\| \leq d$ *und* $\|e\circ a_j - a_j\| < \varepsilon$ *für alle* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Beweis. Ist $\{e_i\}_{i\in I}$ eine beschränkte links-Approximation der Eins, so gibt es laut Voraussetzung ein $d \geq 1$ mit $\|e_i\| \leq d$ für alle $i \in I$. Ist eine Teilmenge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathcal{A}$ gegeben, so gilt zunächst

$$\lim_{i\in I} e_i \circ a_j = a_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\forall \varepsilon > 0, \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \exists i_j \in I : \|e_i \circ a_j - a_j\| < \varepsilon, \quad \forall i \succeq i_j.$$

Da gerichtete Mengen die Richtungseigenschaft haben, gibt es zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $i^* \in I$ mit $i^* \succeq i_j$, für alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Setzt man nun $e := e_{i^*}$, folgt die Aussage. ■

1.2 Banach-Moduln

Definition 1.3. Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Norm $\|\cdot\|$ über einem Körper $\mathbb{K}$ und $\mathcal{X}$ ein normierter linearer Raum über $\mathbb{K}$ mit Norm $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$. Zusätzlich sei eine Abbildung $\bullet : \mathcal{A} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

1. $(a + b) \bullet x = a \bullet x + b \bullet x$
2. $a \bullet (x + y) = a \bullet x + a \bullet y$
3. $(\alpha a) \bullet x = a \bullet (\alpha x) = \alpha(a \bullet x)$

4. $(a \circ b) \bullet x = a \bullet (b \bullet x)$
5. $\|a \bullet x\| \leq \kappa \cdot \|a\| \cdot \|x\|$

wobei $a, b \in \mathcal{A}$ und $x, y \in \mathcal{X}$ beliebig sind und $\kappa \geq 1$ eine Konstante ist. Wir nennen $\mathcal{X}$ dann ein *normiertes $\mathcal{A}$-Linksmodul*. *Normierte $\mathcal{A}$-Rechtsmoduln* definiert man analog. Ist $\mathcal{X}$ sogar eine Banachraum, so verwenden wir die Bezeichnung *Banach-$\mathcal{A}$-Links/Rechtsmodul*.

Bemerkung 1.2. Die Bedingung $\kappa \geq 1$ in obiger Definition erspart spätere Fallunterscheidungen und stellt keine Einschränkung dar, da man im Fall von $\kappa < 1$ jederzeit κ durch 1 ersetzen kann.

Bemerkung 1.3. Jede Banachalgebra $\mathcal{A}$ kann mit $\bullet := \circ$ und $\kappa := 1$ kann als Banach-$\mathcal{A}$-Links/Rechtsmodul aufgefasst werden.

Eine wesentliche Aussage dieses Kapitels wird nun sein, dass für ein $\mathcal{A}$ mit beschränkter links-Approximation der Eins $\mathcal{A} \bullet \mathcal{X} = \mathcal{X}$ gilt, falls $\mathcal{A} \bullet \mathcal{X}$ dicht in $\mathcal{X}$ ist, sowie insbesondere $\mathcal{A} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}$. Dazu werden wir $\mathcal{A}$ homomorph in eine Banachalgebra mit Eins einbetten.

Definition 1.4. Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra. Wir definieren $\mathcal{A}_u$ als die Menge der Paare (a, λ) mit $a \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, sowie folgende Operationen:

1. $\alpha(a, \lambda) = (\alpha a, \alpha\lambda)$
2. $(a, \lambda) + (b, \mu) = (a + b, \lambda + \mu)$
3. $(a, \lambda) \circ (b, \mu) = (a \circ b + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$ für $(a, \lambda), (b, \mu) \in \mathcal{A}_u$ und $\alpha \in \mathbb{K}$.

Lemma 1.2. *Die Menge $\mathcal{A}_u$ ist eine Algebra mit Einselement $(0, 1)$ und die Teilmenge $\{(a, 0) : a \in \mathcal{A}\}$ ist isomorph zu $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}_u$ ist genau dann kommutativ, wenn $\mathcal{A}$ es ist. Versieht man $\mathcal{A}_u$ noch mit der Norm $\|x + \lambda u\| = \|x\| + |\lambda|$, so handelt es sich sogar um eine Banachalgebra mit Eins und obige Einbettung ist eine Isometrie.*

Beweis. Es gilt

$$(0, 1) \circ (a, \lambda) = (a, \lambda) = (a, \lambda) \circ (0, 1) \quad \forall (a, \lambda) \in \mathcal{A}_u,$$

sowie $\|(0, 1)\| = 1$, womit $(0, 1)$ ein Einselement ist.

Mit der Abbildung $f : (a, 0) \mapsto a$ ist obige Teilmenge offensichtlich isomorph zu $\mathcal{A}$, da

$$f((a, 0) \circ (b, 0)) = f((a \circ b, 0)) = a \circ b = f((a, 0)) \circ f((b, 0)).$$

Genauso sieht man die Aussage über die Kommutativität.

Da $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra ist, ist $\circ$ auch auf $\mathcal{A}_u$ bilinear und assoziativ. Fasst man $(\mathcal{A}_u, +, \|\cdot\|)$ als den Produktraum $\mathcal{A} \times \mathbb{K}$, versehen mit der Summennorm auf, so folgt die Vollständigkeit. Schlussendlich gilt

$$\begin{aligned}\|(a,\lambda)\circ(b,\mu)\| &= \|(a\circ b + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)\| = \|a\circ b + \lambda b + \mu a\| + |\lambda\mu| \\ &\leq \|a\|\cdot\|b\| + |\lambda|\cdot\|b\| + |\mu|\cdot\|a\| + |\lambda|\cdot|\mu| = (\|a\| + |\lambda|)(\|b\| + |\mu|) \\ &= \|(a,\lambda)\|\cdot\|(b,\mu)\|\end{aligned}$$

■

Für ein $a \in \mathcal{A}$ identifizieren wir von nun an das zugehörige Element $(a, 0) \in \mathcal{A}_u$ ebenfalls mit $a \in \mathcal{A}_u$ und mit $u \in \mathcal{A}_u$ ist das Element $(0, 1) \in \mathcal{A}_u$ gemeint. Ist $\mathcal{X}$ ein Banach-$\mathcal{A}$-Linksmodul, so können wir die Abbildung $\bullet : \mathcal{A} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ zu einer Abbildung $\bullet : \mathcal{A}_u \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ erweitern, indem wir $\underbrace{(a + \lambda u)}_{\in\mathcal{A}_u} \bullet x = \underbrace{a}_{\in\mathcal{A}} \bullet x + \lambda x$ setzen.

1.3 Faktorisierungstheoreme

Im Folgenden sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit beschränkter links-Approximation der Eins, $\mathcal{A}_u$ die zugehörige Banachalgebra mit Einselement u, d die Konstante aus Lemma 1.1 und $\mathcal{X}$ ein Banach-$\mathcal{A}$-Linksmodul mit Konstante κ.

Lemma 1.3. *Für jedes $e \in \mathcal{A}$ mit $\|e\| \leq d$ definieren wir eine Abbildung $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_u$ mit*

$$\varphi(e) = \left(\frac{2d+1}{2d}\right)\left(u + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2d)^{-k}e^k\right).$$

Dann gilt

(i) $\varphi(e) = \left(\frac{2d}{2d+1}u + \frac{1}{2d+1}e\right)^{-1}$,

(ii) $\frac{1}{3}(2 + d^{-1}) \leq \|\varphi(e)\| \leq 2 + d^{-1}$,

(iii) $\|\varphi(e) \bullet x - x\| \leq (2 + d^{-1})\kappa\,\|e \bullet x - x\|$

für alle $x \in \mathcal{X}$.

Beweis. Zunächst sei bemerkt, dass $\varphi(e)$ existiert, da $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}_u$ vollständig ist und

$$\begin{aligned}\|\varphi(e)\| &\leq \frac{2d+1}{2d}\left(\|u\| + \left\|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2d)^{-k}e^k\right\|\right) \leq \frac{2d+1}{2d}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}(2d)^{-k}\cdot\|e\|^k\right) \\ &\leq \frac{2d+1}{2d}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\right) = \frac{2d+1}{d} = 2 + d^{-1},\end{aligned}$$

was auch die zweite Ungleichung in (ii) zeigt. Zudem gilt

$$\varphi(e) \circ \left(\frac{2d}{2d+1}u + \frac{1}{2d+1}e\right) = \left(u + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2d)^{-k}e^k\right) \circ (u + (2d)^{-1}e)$$

$$= u + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2d)^{-k}e^k + (2d)^{-1}e + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2d)^{-k-1}e^{k+1}$$

$$= u + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2d)^{-k}e^k + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(2d)^{-k}e^k = u,$$

womit (i) gezeigt ist.

Verwenden wir diese Gleichheit, so bekommen wir

$$1 = \|u\| \leq \|\varphi(e)\| \left(\frac{2d}{2d+1}\|u\| + \frac{1}{2d+1}\|e\|\right) \leq \|\varphi(e)\| \left(\frac{2d}{2d+1} + \frac{d}{2d+1}\right)$$

$$= \frac{3d}{2d+1}\|\varphi(e)\|$$

und weiters

$$\|\varphi(e)\| \geq \frac{2d+1}{3} = \frac{1}{3}(2 + d^{-1}),$$

womit (ii) folgt.

Um (iii) zu zeigen, betrachten wir zunächst ein beliebiges Element $x \in \mathcal{X}$. Dann gilt

$$\varphi(e) \bullet x - x = \frac{2d+1}{2d}\left(x + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2d)^{-k}\left(e^k \bullet x\right)\right) - x$$

$$= \frac{2d+1}{2d}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2d)^{-k}\left(e^k \bullet x\right) + \underbrace{\left(1 - \frac{2d}{2d+1}\right)}_{=-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2d)^{-k}} x\right)$$

$$= \frac{2d+1}{2d}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2d)^{-k}\left(e^k \bullet x - x\right)\right)$$

Nun gilt für jedes $k \geq 1$

$$\left\|e^k \bullet x - x\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{k} e^j \bullet x - e^{j-1} \bullet x\right\| \leq \sum_{j=1}^{k} \|e^j \bullet x - e^{j-1} \bullet x\|$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left\| e^{j-1} \bullet (e \bullet x - x) \right\| \leq \sum_{j=1}^{k} \kappa \left\| e^{j-1} \right\| \cdot \| e \bullet x - x \|$$

$$\leq \kappa \| e \bullet x - x \| \sum_{j=1}^{k} d^{j-1} \overset{d \geq 1}{\leq} \kappa k d^k \| e \bullet x - x \|$$

Setzt man die letzten beiden Ungleichungen zusammen, so erhält man mit Lemma 4.1

$$\| \varphi(e) \bullet x - x \| \leq \frac{2d+1}{2d} \sum_{k=1}^{\infty} (2d)^{-k} \kappa k d^k \| e \bullet x - x \| = \frac{2d+1}{2d} \kappa \| e \bullet x - x \| \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}}_{=2}$$

$$= \frac{2d+1}{d} \kappa \| e \bullet x - x \| = (2 + d^{-1}) \kappa \| e \bullet x - x \|$$

■

Definition 1.5. Bezeichne $\mathcal{A} \bullet \mathcal{X}$ die Menge $\{a \bullet x : a \in \mathcal{A}, x \in \mathcal{X}\}$, so definieren wir $\mathcal{S}$ als den Abschluss der linearen Hülle von $\mathcal{A} \bullet \mathcal{X}$ bezüglich $\|\cdot\|$.

Im Folgenden bezeichne φ die Abbildung aus Lemma 1.3.

Lemma 1.4. *Seien $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ eine endliche Teilmenge von $\mathcal{A}$, z ein Element aus $\mathcal{S}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $e \in \mathcal{A}$, sodass*

(i) $\|e\| \leq d$,

(ii) $\|\varphi(e) \circ a_j - a_j\| < \varepsilon, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

(iii) $\| e \bullet z - z \| < \varepsilon$,

(iv) $\| \varphi(e) \bullet z - z \| < \varepsilon$.

Beweis. Wir setzen $\delta = \frac{\varepsilon}{(2+d^{-1})\kappa}$. Dann existiert ein z' aus der linearen Hülle von $\mathcal{A} \bullet \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$ mit

$$\left\| z - z' \right\| < \frac{\delta}{3\kappa d} \leq \frac{\delta}{3},$$

wobei $z' = \sum_{k=1}^{m} b_k \bullet y_k$ mit $m \in \mathbb{N}$, $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathcal{A}$, sowie $y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathcal{X}$.

Nach Lemma 1.1 existiert nun ein $e \in \mathcal{A}$, sodass $\|e\| \leq d$, $\|e \circ a_j - a_j\| < \delta$ für $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sowie $\|e \circ b_k - b_k\| < \frac{\delta}{3\kappa m} \frac{1}{\max_k \|y_k\|}$, für $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, womit $\|e \circ b_k - b_k\| \cdot \|y_k\| < \frac{\delta}{3\kappa m}$ folgt. Damit bekommen wir

$$\| e \bullet z - z \| = \left\| e \bullet z - e \bullet z' + e \bullet z' - z' + z' - z \right\|$$

$$\leq \left\| e \bullet z - e \bullet z' \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{m} (e \circ b_k) \bullet y_k - \sum_{k=1}^{m} b_k \bullet y_k \right\| + \underbrace{\left\| z - z' \right\|}_{< \frac{\delta}{3}}$$

$$< \kappa \underbrace{\|e\|}_{\leq d} \cdot \underbrace{\left\|\!\left| z - z' \right|\!\right\|}_{< \frac{\delta}{3\kappa d}} + \left\|\!\left| \sum_{k=1}^{m} (e \circ b_k - b_k) \bullet y_k \right|\!\right\| + \frac{\delta}{3}$$

$$< \kappa d \frac{\delta}{3\kappa d} + \sum_{k=1}^{m} \kappa \underbrace{\|e \circ b_k - b_k\| \cdot \left\|\!\left| y_k \right|\!\right\|}_{< \frac{\delta}{3\kappa m}} + \frac{\delta}{3}$$

$$< \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta < \varepsilon$$

Zusammen mit Lemma 1.3 (iii) folgt nun

$$\left\|\!\left| \varphi(e) \bullet z - z \right|\!\right\| \leq \left(2 + d^{-1}\right) \kappa \left\|\!\left| e \bullet z - z \right|\!\right\| < \left(2 + d^{-1}\right) \kappa\delta = \varepsilon.$$

Wenden wir nochmals Lemma 1.3 (iii) - diesmal mit $(\mathcal{X}, \left\|\!\left| \cdot \right|\!\right\|) = (\mathcal{A}, \| \cdot \|)$, $\bullet = \circ$, $\kappa = 1$ (vgl. Bemerkung 1.3) - an, so bekommen wir

$$\|\varphi(e) \circ a_j - a_j\| \leq \left(2 + d^{-1}\right) \|e \circ a_j - a_j\| < \left(2 + d^{-1}\right) \delta \leq \varepsilon,$$

womit alles gezeigt ist. ■

Lemma 1.5. *Es existieren Folgen* $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ *in* $\mathcal{A}_u$ *und* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *in* $\mathcal{A}$*, sodass*

$$b_0 = u, \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} (2d)^{k-1}(2d+1)^{-k} e_k + (2d)^n (2d+1)^{-n} u, \quad n \geq 1,$$

sowie

$$\|e_n\| \leq d, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zudem existiert $b_n^{-1} \in \mathcal{A}_u$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *und es gilt*

$$\left\|\!\left| b_n^{-1} \bullet z - b_{n-1}^{-1} \bullet z \right|\!\right\| < \frac{\delta}{2^n} \quad \forall n \geq 1, \forall z \in \mathcal{S}, \forall \delta > 0.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion. Nach Lemma 1.4 existiert ein $e_1 \in \mathcal{A}$ mit $\|e_1\| \leq d$ und

$$\left\|\!\left| \varphi(e_1) \bullet z - z \right|\!\right\| < \frac{\delta}{2}.$$

Damit bekommen wir für den Induktionsanfang

$$b_1 = \frac{1}{2d+1} e_1 + \frac{2d}{2d+1} u,$$

womit aus Lemma 1.3 (i) folgt, dass $b_1^{-1} = \varphi(e_1)$ und somit

$$\left\|\!\left| b_1^{-1} \bullet z - b_0^{-1} \bullet z \right|\!\right\| = \left\|\!\left| \varphi(e_1) \bullet z - z \right|\!\right\| < \frac{\delta}{2}.$$

Wir setzen nun voraus, dass $e_1, e_2, \dots, e_n$ so definiert sind, dass b_k^{-1} für $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit den geforderten Eigenschaften in $\mathcal{A}_u$ existieren. Für beliebiges $e \in \mathcal{A}$ mit $\|e\| \leq d$ definieren wir nun

$$\psi(e) = \sum_{k=1}^{n} (2d)^{k-1}(2d+1)^{-k} e_k + (2d)^n (2d+1)^{-n-1} e + (2d)^{n+1}(2d+1)^{-n-1} u.$$

Können wir e nun so wählen, dass $\psi(e)^{-1}$ in $\mathcal{A}_u$ existiert und dass

$$\left\| \psi(e)^{-1} \bullet z - z \right\| < \frac{\delta}{2^{n+1}},$$

so können wir offensichtlich $e_{n+1} := e$ und $b_{n+1} := \psi(e)$ setzen und sind fertig.

Wir definieren weiters

$$\psi_0(e) = \sum_{k=1}^{n} (2d)^{k-1}(2d+1)^{-k} \varphi(e) \circ e_k + (2d)^n (2d+1)^{-n} u.$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned}\psi(e) = \varphi(e)^{-1} \circ \sum_{k=1}^{n} (2d)^{k-1}(2d+1)^{-k} \varphi(e) \circ e_k + \underbrace{\left(\frac{2d}{2d+1} u + \frac{1}{2d+1} e \right)}_{\varphi(e)^{-1}} \circ (2d)^n (2d+1)^{-n} u \\ = \varphi(e)^{-1} \circ \psi_0(e).\end{aligned}$$

Somit existiert $\psi(e)^{-1}$ also genau dann, wenn auch $\psi_0(e)^{-1}$ existiert.
Wenden wir Lemma 1.4 auf $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ und z an, so bekommen wir die Existenz eines $e \in \mathcal{A}$ mit $\|e\| \leq d$ und

$$\|\varphi(e) \circ e_k - e_k\| < \frac{\eta}{n} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

sowie

$$\|\psi(e) \bullet z - z\| \leq \frac{\delta}{M \cdot 2^{n+2}},$$

wobei $\eta > 0$ und $M > 0$ beliebig sind. Damit folgt

$$\begin{aligned}\|\psi_0(e) - b_n\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n} (2d)^{k-1}(2d+1)^{-k} (\varphi(e) \circ e_k - e_k) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \left\| (2d)^{k-1}(2d+1)^{-k} (\varphi(e) \circ e_k - e_k) \right\| < \eta.\end{aligned}$$

Da jedoch b_n^{-1} existiert, $\eta > 0$ beliebig war und $\mathrm{Inv}(\mathcal{A}_u)$ offen ist, folgt damit die Existenz von $\psi_0(e)^{-1}$ und somit von $\psi(e)^{-1}$. Wählt man η klein genug, bekommt man sogar

$$\left\| \psi_0(e)^{-1} - b_n^{-1} \right\| < \frac{\delta}{M \cdot 2^{n+2}},$$

da das Bilden von Inversen stetig ist (vgl. Satz 1.1).

Für die Abschätzung in der Norm folgt schließlich mit $M = \kappa\left(2 + d^{-1}\right)|||z||| + \kappa\left\|b_n^{-1}\right\|$

$$
\begin{aligned}
&\left|\left|\left|\psi(e)^{-1} \bullet z - b_n^{-1} \bullet z\right|\right|\right| \\
&= \left|\left|\left|\left(\psi_0(e)^{-1} \circ \varphi(e)\right) \bullet z - \left(b_n^{-1} \circ \varphi(e)\right) \bullet z + \left(b_n^{-1} \circ \varphi(e)\right) \bullet z - b_n^{-1} \bullet z\right|\right|\right| \\
&\leq \left|\left|\left|\left(\psi_0(e)^{-1} \circ \varphi(e)\right) \bullet z - \left(b_n^{-1} \circ \varphi(e)\right) \bullet z\right|\right|\right| + \left|\left|\left|\left(b_n^{-1} \circ \varphi(e)\right) \bullet z - b_n^{-1} \bullet z\right|\right|\right| \\
&\leq \kappa\left\|\psi_0(e)^{-1} - b_n^{-1}\right\| \cdot \|\varphi(e)\| \cdot |||z||| + \kappa\left\|b_n^{-1}\right\| \cdot |||\varphi(e) \bullet z - z||| \\
&\leq M\left(\underbrace{\left\|\psi_0(e)^{-1} - b_n^{-1}\right\|}_{<\frac{\delta}{M \cdot 2^{n+2}}} + \underbrace{|||\varphi(e) \bullet z - z|||}_{<\frac{\delta}{M \cdot 2^{n+2}}}\right) \\
&< \frac{\delta}{2^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

■

Satz 1.2. *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Norm $\|\cdot\|$ und einer mit d beschränkten links-Approximation der Eins und $\mathcal{X}$ ein Banach-$\mathcal{A}$-Linksmodul mit Norm $|||\cdot|||$. Bezeichnet $\mathcal{S}$ den Abschluss der linearen Hülle von $\mathcal{A} \bullet \mathcal{X}$, dann gibt es für alle $z \in \mathcal{S}$ und $\delta > 0$ ein $a \in \mathcal{A}$ und ein $y \in \mathcal{X}$, sodass*

(i) $z = a \bullet y$,

(ii) $\|a\| \leq d$,

(iii) $|||y - z||| < \delta$.

Es gilt also, dass $\mathcal{S} = \mathcal{A} \bullet \mathcal{X}$ bzw. dass $\mathcal{A} \bullet \mathcal{X}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{X}$ ist.

Beweis. Verwenden wir die Folge $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ aus Lemma 1.5, dann gilt für $n > m$

$$
\left|\left|\left|b_n^{-1} \bullet z - b_m^{-1} \bullet z\right|\right|\right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left|\left|\left|b_{k+1}^{-1} \bullet z - b_k^{-1} \bullet z\right|\right|\right| < \sum_{k=m}^{n-1} \frac{\delta}{2^{k+1}} < \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\delta}{2^{k+1}} = \frac{\delta}{2^m},
$$

womit $(b_n^{-1} \bullet z)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{X}$ ist. Damit können wir $y = \lim_{n\to\infty} b_n^{-1} \bullet z$ setzen und bekommen

$$
\left|\left|\left|y - b_m^{-1} \bullet z\right|\right|\right| < \frac{\delta}{2^m} \quad \forall m \geq 0.
$$

Speziell für $m = 0$ ($b_0 = u$) folgt damit

$$
|||y - z||| < \delta.
$$

Wir definieren weiters

$$a = \lim_{n\to\infty} b_n = \sum_{k=1}^{\infty} (2d)^{k-1}(2d+1)^{-k} e_k + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2d}{2d+1}\right)^n u}_{=0}.$$

Der Ausdruck existiert, da $\|e_k\| \leq d$ und somit

$$\|a\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (2d)^{k-1}(2d+1)^{-k} d = \frac{d}{2d+1} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2d}{2d+1}\right)^k}_{=\frac{1}{1-\frac{2d}{2d+1}}=2d+1} = d.$$

Zudem gilt sicher $a \in \mathcal{A}$, da der u-Anteil verschwindet. Da die Abbildung $(a,x) \mapsto a \bullet x$ stetig auf $\mathcal{A}_u \times \mathcal{X}$ ist, folgt schließlich

$$z = u \bullet z = \lim_{n\to\infty} b_n \bullet (b_n^{-1} \bullet z) = a \bullet y.$$

■

Bemerkung 1.4. Liegt $\mathcal{A} \bullet \mathcal{X}$ dicht in $\mathcal{X}$, also $\mathcal{S} = \mathcal{X}$, so besagt Satz 1.2, dass $\mathcal{A} \bullet \mathcal{X} = \mathcal{X}$. Dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn die Approximation der Eins in $\mathcal{A}$ mittels $\bullet$ auch Elemente aus $\mathcal{X}$ approximiert.

Da jede Banachalgebra $\mathcal{A}$ selbst als Banach-$\mathcal{A}$-Linksmodul aufgefasst werden kann (vgl. Bemerkung 1.3) und $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}$ dicht in $\mathcal{A}$ liegt, folgt schließlich das ursprünglich von Cohen bewiesene Resultat (vgl. [1], S. 199-205).

Korollar 1.1 (Cohen). *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Norm $\|\cdot\|$ und einer beschränkten links-Approximation der Eins. Dann gibt es für alle $z \in \mathcal{A}$ und $\delta > 0$ Elemente $x, y \in \mathcal{A}$, sodass*

(i) $z = x \circ y$,

(ii) $\|z - y\| < \delta$.

Satz 1.3. *Es gelten dieselben Voraussetzugen wie in Satz 1.2 und zusätzlich sei $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathcal{S}$ mit $\lim_{i\to\infty} z_i = 0$ und $\delta > 0$. Dann existieren ein Element $a \in \mathcal{A}$ und eine Folge $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ in $\mathcal{X}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $z_i = a \bullet y_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}$,

(ii) $\|a\| \leq d$,

(iii) $\|y_i - z_i\| \leq \delta$,

(iv) $\lim_{i\to\infty} y_i = 0$.

Beweis. Wir definieren $\mathcal{X}_0$ als den Raum aller Folgen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, wobei jedes x_i ein Element aus $\mathcal{A} \bullet \mathcal{X}$ ist und $\lim_{i\to\infty} x_i = 0$ gilt. Definiert man lineare Operationen auf $\mathcal{X}_0$ koordinatenweise und führt eine Norm $\|\mathbf{x}\|_0 = \max\{\|x_i\| : i \in \mathbb{N}\}$ ein, so ist $\mathcal{X}_0$ offenbar ein Banachraum, da ja $\mathcal{A} \bullet \mathcal{X}$ laut Satz 1.2 abgeschlossen ist. Mit $\bullet : \mathcal{A} \times \mathcal{X}_0 \to \mathcal{X}_0 : (a, \mathbf{x}) \mapsto (a \bullet x_1, a \bullet x_2, \ldots)$ folgt schließlich, dass $\mathcal{X}_0$ sogar ein Banach-$\mathcal{A}$-Linksmodul ist.

Offensichtlich bilden die Elemente $\mathbf{x}$, für die es ein k gibt, sodass $x_i = 0$ für $i \neq k$ und $0 \neq x_k \in \mathcal{A} \bullet \mathcal{X}$, eine Basis von $\mathcal{X}_0$. Es gilt jedoch $\mathcal{A} \bullet \mathcal{X} = (\mathcal{A} \circ \mathcal{A}) \bullet \mathcal{X} = \mathcal{A} \bullet (\mathcal{A} \bullet \mathcal{X})$ (vgl. Korollar 1.1 und Definition 1.3, 4.). Nun können wir aber für ein $\mathbf{x}$ aus einer Basis von $\mathcal{X}_0$ das entsprechende x_k als $x_k = a \bullet y_k$ mit $a \in \mathcal{A}$ und $y_k \in \mathcal{A} \bullet \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$ schreiben und wenn wir $\mathbf{y} = (0, 0, \ldots, 0, y_k, 0, \ldots)$ setzen, folgt $\mathbf{x} = a \bullet \mathbf{y}$. Da $\mathbf{y}$ jedoch offensichtlich in $\mathcal{X}_0$ liegt, folgt damit, dass $\mathcal{A} \bullet \mathcal{X}_0$ dicht in $\mathcal{X}_0$ liegt.

Setzen wir nun $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots) \in \mathcal{X}_0$ und wenden Satz 1.2 an, so folgt, dass $\mathcal{A} \bullet \mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_0$ und damit die Existenz eines $a \in \mathcal{A}$ und eines $\mathbf{y} \in \mathcal{X}_0$, sodass $\mathbf{z} = a \bullet \mathbf{y}$, $\|a\| \leq d$ und $\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_0 \leq \delta$, womit alles bewiesen ist. ■

2 Positive Funktionale

Eine Anwendung der Faktorisierungstheoreme des vorigen Abschnitts, insbesondere von Satz 1.3, stellen positive Funktionale dar. Der Satz von Varopoulos - Satz 2.3 - besagt, dass jedes positive Funktional auf einer Banach-*-Algebra mit links-beschränkter Approximation der Eins stetig ist. Die wichtigsten Beweise wurden dabei aus [5], S. 316-319, sowie [6], S. 270, übernommen.

Definition 2.1. Man bezeichnet eine Banachalgebra $\mathcal{A}$ über $\mathbb{C}$ als *Banach-*-Algebra* (oder auch *involutive Banachalgebra*) wenn sie mit einer Abbildung $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A} : a \mapsto a^*$ versehen ist, die für alle $a, b \in \mathcal{A}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $a^{**} = a$, (involutiv)
2. $(a \circ b)^* = b^* \circ a^*$ (anti-multiplikativ)
3. $(\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*$ (anti-linear)
4. $\|a^*\| = \|a\|$ (isometrisch)

Ein Element $a \in \mathcal{A}$ mit $a = a^*$ nennt man auch selbstadjungiert.

Bemerkung 2.1. Ist $\mathcal{A}$ eine Banach-*-Algebra mit Einselement u, so gilt offenbar

$$a = (a^*)^* = (u \circ a^*)^* = a \circ u^*, \quad \forall a \in \mathcal{A},$$

womit u^* ein rechtsneutrales Element ist. Genauso sieht man, dass u^* auch ein linksneutrales Element ist, woraus $u = u^*$ folgt.

Definition 2.2. Sei $\mathcal{A}$ eine Banach-*-Algebra. Ein lineares Funktional $\mathfrak{p}$ auf $\mathcal{A}$ wird als *positives Funktional* bezeichnet, wenn

$$\mathfrak{p}(a^* \circ a) \geq 0, \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Lemma 2.1. *Sei $\mathfrak{p}$ ein positives Funktional auf einer Banach-*-Algebra $\mathcal{A}$. Dann gilt für alle $a, b \in \mathcal{A}$:*

(i) $\mathfrak{p}(b^* \circ a) = \overline{\mathfrak{p}(a^* \circ b)}$

(ii) $|\mathfrak{p}(b^* \circ a)| \leq \sqrt{\mathfrak{p}(a^* \circ a)\mathfrak{p}(b^* \circ b)}$

Beweis. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathfrak{p}\left((a + \alpha b)^* \circ (a + \alpha b)\right) &= \mathfrak{p}\left(a \circ a^* + \overline{\alpha} b^* \circ a + \alpha a^* \circ b + |\alpha|^2 b^* \circ b\right) \\ &= \mathfrak{p}(a^* \circ a) + \overline{\alpha}\mathfrak{p}(b^* \circ a) + \alpha\mathfrak{p}(a^* \circ b) + |\alpha|^2\mathfrak{p}(b^* \circ b). \end{aligned}$$

Da $\mathfrak{p}$ ein positives Funktional ist, sind die Ausdrücke $\mathfrak{p}(a^* \circ a)$, sowie $\mathfrak{p}(b^* \circ b)$ nichtnegativ und insbesondere reell. Somit muss auch $\overline{\alpha}\mathfrak{p}(b^* \circ a) + \alpha\mathfrak{p}(a^* \circ b)$ reel sein. Setzt man nun für α die Werte 1 bzw. i ein, so bekommt man

$$\Im\left(\mathfrak{p}(b^* \circ a) + \mathfrak{p}(a^* \circ b)\right) = 0 \Rightarrow \Im\left(\mathfrak{p}(b^* \circ a)\right) = -\Im\left(p(a^* \circ b)\right)$$

$$\Re\left(-\mathfrak{p}(b^* \circ a) + \mathfrak{p}(a^* \circ b)\right) = 0 \Rightarrow \Re\left(\mathfrak{p}(b^* \circ a)\right) = \Re\left(p(a^* \circ b)\right)$$

Damit ist (i) gezeigt.

Um (ii) zu zeigen schreiben wir nun obige Ungleichung um und erhalten

$$0 \leq \mathfrak{p}(a^* \circ a) + 2\Re\left(\alpha\mathfrak{p}(a^* \circ b)\right) + |\alpha|^2\mathfrak{p}(b^* \circ b).$$

O.B.d.A. können wir annehmen, dass $\mathfrak{p}(a^* \circ b) \neq 0$, da sonst die Aussage trivialerweise aus (i) folgt, da dann $0 = |\mathfrak{p}(a^* \circ b)| = |\mathfrak{p}(b^* \circ a)|$. Setzen wir nun $\alpha = -\frac{\mathfrak{p}(a^* \circ a)}{\mathfrak{p}(a^* \circ b)}$, so gilt

$$0 \leq \mathfrak{p}(a^* \circ a) - 2\mathfrak{p}(a^* \circ a) + \frac{\mathfrak{p}(a^* \circ a)^2\mathfrak{p}(b^* \circ b)}{|\mathfrak{p}(a^* \circ b)|^2}$$

$$\mathfrak{p}(a^* \circ a)\underbrace{|\mathfrak{p}(a^* \circ b)|^2}_{\overset{(i)}{=}|\mathfrak{p}(b^* \circ a)|^2} \leq \mathfrak{p}(a^* \circ a)^2\mathfrak{p}(b^* \circ b)$$

Ist nun $\mathfrak{p}(a^* \circ a)$ positiv, so sind wir fertig. Dasselbe gilt auch, wenn $\mathfrak{p}(b^* \circ b)$ positiv ist, da laut (i) die Aussage erhalten bleibt, wenn a und b die Rollen vertauschen. Im verbleibenden Fall gilt also $\mathfrak{p}(a^* \circ a) = \mathfrak{p}(b^* \circ b) = 0$. Dann folgt aber aus

$$0 \leq \mathfrak{p}(a^* \circ a) + 2\Re\left(\alpha\mathfrak{p}(a^* \circ b)\right) + |\alpha|^2\mathfrak{p}(b^* \circ b),$$

dass $\Re\left(\alpha\mathfrak{p}(a^* \circ b)\right) \geq 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$, was jedoch nur möglich sein kann, wenn $\mathfrak{p}(a^* \circ b) = 0 \overset{(i)}{=} \mathfrak{p}(b^* \circ a)$. ■

Für eine Banach-*-Algebra $\mathcal{A}$ können wir die zugehörige Banachalgebra mit Eins $\mathcal{A}_u$ betrachten (vgl. Definition 1.4). Wenn wir für $a + \lambda u \in \mathcal{A}_u$ eine Operation $*$ definieren mit $(a + \lambda u)^* = x^* + \overline{\lambda} u$, so wird auch $\mathcal{A}_u$ zu einer Banach-*-Algebra.

Satz 2.1. *Sei $\mathfrak{p}$ ein positives Funktional auf einer Banach-*-Algebra $\mathcal{A}$. Ein positives Funktional $\mathfrak{p}^\dagger$ auf $\mathcal{A}_u$ mit $\mathfrak{p}^\dagger|_{\mathcal{A}} = \mathfrak{p}$ existiert genau dann, wenn die Bedingungen*

(i) $\mathfrak{p}(a^*) = \overline{\mathfrak{p}(a)}$,

(ii) $|\mathfrak{p}(a)|^2 \leq c\mathfrak{p}(a^* \circ a)$

für alle $a \in \mathcal{A}$ und eine konstante positive Zahl c erfüllt sind. Für $\mathfrak{p}^\dagger(u)$ kann dann jede beliebige Zahl größergleich c gewählt werden.

Beweis. Sei zunächst vorausgesetzt, dass $\mathfrak{p}^\dagger$ existiert. Dann folgt Bedingung (i) aus Lemma 2.1 (i) mit $b = u$. Setz man ebenso $b = u$ in Lemma 2.1 (ii), so erhält man

$$|\mathfrak{p}(a)| = \left|\mathfrak{p}^\dagger(u^* \circ a)\right| \leq \sqrt{\mathfrak{p}^\dagger(a^* \circ a)\mathfrak{p}^\dagger(u)},$$

woraus Bedingung (ii) mit $c = \mathfrak{p}^\dagger(u)$ folgt.
Gelten umgekehrt die Bedingungen (i) und (ii), so definieren wir ein lineares Funktional

$$\mathfrak{p}^\dagger(a + \lambda u) = \mathfrak{p}(a) + \lambda c$$

auf $\mathcal{A}_u$. Mit $\Re(\alpha) \geq -|\alpha|,\ \alpha \in \mathbb{C}$ folgt nun

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}^\dagger\left((a + \lambda u)^* \circ (a + \lambda u)\right) &= \mathfrak{p}^\dagger\left(a^* \circ a + \lambda a^* + \overline{\lambda} a + |\lambda|^2 u\right) \\
= \mathfrak{p}(a^* \circ a) + \lambda \mathfrak{p}(a^*) + \overline{\lambda}\mathfrak{p}(a) + |\lambda|^2 c &= \mathfrak{p}(a^* \circ a) + 2\Re\left(\lambda \mathfrak{p}(a^*)\right) + |\lambda|^2 c \\
\geq \mathfrak{p}(a^* \circ a) - 2|\lambda| \underbrace{|\mathfrak{p}(a^*)|}_{\overset{(i)}{=}|\mathfrak{p}(a)|} + |\lambda|^2 c &\overset{(ii)}{\geq} \mathfrak{p}(a^* \circ a) - 2|\lambda|\sqrt{c}\sqrt{\mathfrak{p}(a^* \circ a)} + |\lambda|^2 c \\
&= \left(\sqrt{p(a^* \circ a)} - |\lambda|\sqrt{c}\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Offensichtlich können wir in der Definition von $\mathfrak{p}^\dagger$ die Konstante c auch durch einen beliebigen größeren Wert ersezten. ∎

Satz 2.2. *Sei $\mathcal{A}$ eine Banch-*-Algebra mit Einselement u. Dann ist jedes positive Funktional $\mathfrak{p}$ auf $\mathcal{A}$ beschränkt mit Abbildungsnorm $\|\mathfrak{p}\| = \mathfrak{p}(u)$.*

Beweis. Wir wollen zu gegebenem $a \in \mathcal{A}$ ein $b \in \mathcal{A}$ konstruieren, sodass $b^2 = u - a$. Dazu betrachten wir zunächst die binomische Reihe

$$(1 - \alpha)^z = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{z}{k} (-\alpha)^k, \quad z \in \mathbb{N}$$

wobei die Reihe für $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$ absolut konvergiert. Das gilt auch dann noch, wenn wir $z \in \mathbb{C}$ zulassen, wobei wir für die absolute Konvergenz $\Re(z) > 0$ verlangen müssen. Dabei betrachten wir den verallgemeinerten Binomialkoeffizienten

$$\binom{z}{k} = \begin{cases} \frac{z(z-1)(z-2)\cdots(z-(k-1))}{k!}, & \text{wenn } k > 0 \\ 1, & \text{wenn } k = 0 \\ 0, & \text{wenn } k < 0 \end{cases}.$$

Nun definieren wir

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} \binom{\frac{1}{2}}{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \alpha^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{k} \binom{\frac{1}{2}}{n-k} \alpha^n \\ &= -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{\frac{1}{2}}{k} (-\alpha)^k \right) \left(\binom{\frac{1}{2}}{n-k} (-\alpha)^{n-k} \right). \end{aligned} \qquad (*)$$

Die letzte Reihe ist aber genau das Cauchy-Produkt der binomischen Reihe von $(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}$ mit sich selbst, welche für $|\alpha| \leq 1$ absolut konvergiert. Wenden wir Satz 4.1 auf die komplexen Zahlen an, so sehen wir, dass das Cauchy-Produkt gegen das Produkt der Reihen konvergiert. Somit bekommen wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \alpha^n = -1 + (1-\alpha)^{\frac{1}{2}} (1-\alpha)^{\frac{1}{2}} = -\alpha.$$

Betrachtet man nun ein reelles α, so sieht man, dass offenbar $c_1 = -1$ und $c_n = 0$ für $n \geq 2$.

Für $a \in \mathcal{A}$ mit $\|a\| \leq 1$ definieren wir

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-a)^k.$$

Für $m < n$ folgt

$$\|b_n - b_m\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \underbrace{\left| \binom{\frac{1}{2}}{k} \right|}_{\leq \frac{1}{k^2}} \|a\|^k,$$

womit die b_n eine Cauchy-Folge bilden. Da $\mathcal{A}$ vollständig ist, existiert somit ein $b \in \mathcal{A}$ mit $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Da die b_n absolut konvergent sind, können wir analog ein Cauchy-Produkt bilden, dass dann gegen das Produkt der einzelnen Reihen konvergiert (vgl.

Satz 4.1). Mit obiger Umformung $(*)$ des Cauchy-Produkts (das Resultat ist analog wie im Zahlenkörper, nur mit u anstelle von 1) gilt dann

$$b^2 = u + \sum_{k=1}^{\infty} c_k a^k.$$

Da jedoch nur der Summand mit $k = 1$ einen Beitrag liefert, bekommen wir

$$b^2 = u - a.$$

Setzen wir nun noch voraus, dass a selbstadjungiert ist, so ist auch b^2 selbstadjungiert, womit schlussendlich b selbstadjungiert ist und $b^2 = b^* \circ b = u - a$. Damit erhalten wir

$$0 \leq \mathfrak{p}(b^* \circ b) = \mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(a) = \mathfrak{p}(u^* \circ u) - \mathfrak{p}(a).$$

Daraus folgt aber, dass $\mathfrak{p}(a)$ reell ist und weiters, dass $\mathfrak{p}(a) \leq \mathfrak{p}(u)$.

Für allgemeine a mit $\|a\| \leq 1$ ist $a^* \circ a$ selbstadjungiert mit $\|a^* \circ a\| \leq \|a\|^2 \leq 1$ und wir bekommen

$$\mathfrak{p}(a^* \circ a) \leq \mathfrak{p}(u).$$

Nach Lemma 2.1 (ii) gilt

$$|\mathfrak{p}(a)|^2 = |\mathfrak{p}(u^* \circ a)|^2 \leq \mathfrak{p}(a^* \circ a)\mathfrak{p}(u^* \circ u) \leq \mathfrak{p}(u)^2.$$

Mit $\|\mathfrak{p}\| = \sup_{\|a\| \leq 1} |\mathfrak{p}(a)|$ folgt $\|\mathfrak{p}\| \leq \mathfrak{p}(u)$. Da jedoch $\|u\| = 1$ folgt $\|p\| = \mathfrak{p}(u)$. ■

Korollar 2.1. *Sei $\mathcal{A}$ eine Banach-*-Algebra und $\mathfrak{p}$ ein positives Funktional auf $\mathcal{A}$. Erfüllt $\mathfrak{p}$ die Bedingungen aus Satz 2.1, dann ist $\mathfrak{p}$ beschränkt.*

Beweis. Nach Satz 2.1 lässt sich $\mathfrak{p}$ zu einem positiven Funktional $\mathfrak{p}^\dagger$ auf $\mathcal{A}_u$ fortsetzen. Laut Satz 2.2 ist $\mathfrak{p}^\dagger$ beschränkt mit Abbildungsnorm $\|\mathfrak{p}^\dagger\| = \mathfrak{p}^\dagger(u)$. Damit gilt aber auch $\|\mathfrak{p}\| = \|\mathfrak{p}^\dagger|_{\mathcal{A}}\| \leq \|\mathfrak{p}^\dagger\|$, womit $\mathfrak{p}$ ein beschränktes Funktional ist. ■

Zusammen mit Satz 1.3 können wir nun beweisen, dass jedes positive Funktional auf einer Banach-*-Algebra mit beschränkter links-Approximation der Eins stetig ist. Der ursprüngliche Beweis stammt von Varopoulos, vgl. [7], S. 2465-2467.

Satz 2.3 (*Satz von Varopoulos*)**.** *Sei $\mathcal{A}$ eine Banach-*-Algebra mit einer beschränkten links-Approximation der Eins. Dann ist jedes positive Funktional $\mathfrak{p}$ auf $\mathcal{A}$ stetig.*

Beweis. Für ein festes $a \in \mathcal{A}$ betrachten wir zunächst das Funktional ${}_{a^*}\mathfrak{p}_a : x \mapsto \mathfrak{p}(a^* \circ x \circ a)$. Da

$${}_{a^*}\mathfrak{p}_a(x^* \circ x) = \mathfrak{p}(a^* \circ x^* \circ x \circ a) = \mathfrak{p}((x \circ a)^* \circ (x \circ a)) \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{A},$$

ist ${}_{a^*}\mathfrak{p}_a$ ein positives Funktional auf $\mathcal{A}$. Nun folgt mit Lemma 2.1 (i), dass

$${}_{a^*}\mathfrak{p}_a(x^*) = \mathfrak{p}((a^* \circ x^*) \circ a) = \overline{\mathfrak{p}(a^* \circ (x \circ a))} = \overline{{}_{a^*}\mathfrak{p}_a(x)}$$

und mit Lemma 2.1 (ii), dass

$$|{}_{a^*}\mathfrak{p}_a(x)|^2 = |\mathfrak{p}(a^* \circ (x \circ a))|^2 \leq \underbrace{\mathfrak{p}(a^* \circ a)}_{=c} \mathfrak{p}((a^* \circ x^*) \circ (x \circ a)) = c \cdot {}_{a^*}\mathfrak{p}_a(x^* \circ x).$$

Somit erfüllt ${}_{a^*}\mathfrak{p}_a$ die Bedingungen aus Satz 2.1 und mit Korollar 2.1 folgt, dass ${}_{a^*}\mathfrak{p}_a$ stetig ist.
Definiert man nun für beliebige $a, b \in \mathcal{A}$ ein Funktional ${}_a\mathfrak{p}_b : x \mapsto \mathfrak{p}(a \circ x \circ b)$, so sieht man mithilfe der Polarformel (Lemma 4.2),

$$4(a \circ x \circ b) = \sum_{k=0}^{3} i^k \left(a^* + i^{-k}b\right)^* \circ x \circ \left(a^* + i^{-k}b\right),$$

dass

$$4\left({}_a\mathfrak{p}_b(x)\right) = \sum_{k=0}^{3} i^k \left({}_{(a^*+i^{-k}b)^*}\mathfrak{p}_{(a^*+i^{-k}b)}(x)\right),$$

womit auch ${}_a\mathfrak{p}_b$ stetig ist.
Ist nun $\{e_i\}_{i\in I}$ eine beschränkte links-Approximation der Eins, so folgt aus

$$a = (a^*)^* = \left(\lim_{i\in I} e_i \circ a^*\right)^* = \lim_{i\in I} a \circ e_i^*,$$

dass $\{e_i^*\}_{i\in I}$ eine beschränkte rechts-Approximation der Eins ist.
Sei schließlich $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathcal{A}$ mit $\lim_{i\to\infty} z_i = 0$, so können wir Satz 1.3 mit $\mathcal{X} = \mathcal{A}$ anwenden und bekommen die Existenz eines Elements $a \in \mathcal{A}$ und einer Folge $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, mit $z_i = a \circ y_i$, für alle $i \in \mathbb{N}$. Da wir aber auch eine beschränkte rechts-Approximation der Eins haben, können wir analog eine rechts-Version von Satz 1.3 auf die Folge $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ anwenden und bekommen ein $b \in \mathcal{A}$, sowie eine Folge $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$, mit $y_i = w_i \circ b$, für alle $i \in \mathbb{N}$ und insgesamt

$$z_i = a \circ w_i \circ b, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Aus der Stetigkeit von ${}_a\mathfrak{p}_b$ folgt nun

$$\lim_{i\to\infty} \mathfrak{p}(z_i) = \lim_{i\to\infty} {}_a\mathfrak{p}_b(w_i) = 0.$$

Mit dem Folgenkriterium der Stetigkeit und der Berücksichtigung der Tatsache, dass lineare Funktionale genau dann stetig sind, wenn sie es in einem Punkt sind, folgt die Aussage. ■

3 Integration auf lokal kompakten Gruppen

Eine weitere Anwendung der Faktorisierungstheoreme aus Abschnitt 1 stellen die L^p-Räume dar. Dazu wollen wir insbesondere das Haar Maß auf lokal kompakten Gruppen betrachten. Der Aufbau des Kapitels folgt dabei Ausschnitten aus „Locally Compact Groups", [3], S. 31-54.

3.1 Lokal kompakte Gruppen

Definition 3.1. Wir bezeichnen eine Gruppe $(G, \cdot)$ als *topologische Gruppe*, wenn G mit einer Topologie versehen ist, sodass die Abbildungen $(x, y) \mapsto x \cdot y$ auf $G \times G$, sowie $x \mapsto x^{-1}$ auf G stetig sind. Wir schreiben auch xy anstelle von $x \cdot y$ und bezeichnen das neutrale Element der Gruppe mit u. Weiters verwenden wir für Teilmengen $A, B \subseteq G$ die Schreibweisen

$$Ax = \{yx : \ y \in A\}, \quad xA = \{xy : \ y \in A\}, \quad A^{-1} = \{y^{-1} : \ y \in A\}$$

$$AB = \{xy : \ x \in A, y \in B\}$$

Ist die Topolgie auf G lokal kompakt und Hausdorff, so sprechen wir von einer *lokal kompakten Gruppe*.

Ist f eine Funktion auf einer topologischen Gruppe G und $y \in G$, so können links- und rechts-Translationen (in Abhängigkeit von y) auf f via

$$L_y f(x) = f(y^{-1}x), \quad R_y f(x) = f(xy)$$

definieren.

Definition 3.2. Wir sagen eine Funktion f von G nach $\mathbb{K}$, wobei G eine topologische Gruppe sei, ist *links* (bzw. *rechts*) *gleichmäßig stetig*, falls

$$\|L_y f - f\|_{\sup} \xrightarrow{y \to u} 0 \quad (\text{bzw. } \|R_y f - f\|_{\sup} \xrightarrow{y \to u} 0),$$

wobei $\|\cdot\|_{\sup}$ die Supremumsnorm ist.

Lemma 3.1. *Jedes $f \in C_{00}(G)$ ist links und rechts gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir beweisen zunächst, dass f rechts gleichmäßig stetig ist. Sei also $K = \operatorname{supp}(f)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da die Gruppenoperationen stetig sind, gibt es für jedes $x \in K$ eine Umgebung U_x von u mit $|f(xy) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $y \in U_x$. Zu U_x sei nun V_x eine symmetrische Umgebung (d.h. $V_x = V_x^{-1}$) von u mit $V_x V_x \subseteq U_x$. Die Mengen xV_x mit $x \in K$ bilden somit eine Überdeckung von K und es gibt endliche viele $x_1, \ldots, x_n \in K$, sodass

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i V_{x_i}.$$

Wir definieren nun $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ und wählen $y \in V$ beliebig aber fest. Für $x \in K$ existiert dann ein i mit $x \in x_i V_{x_i}$ und weiters $x_i^{-1}x \in V_{x_i} \subseteq U_{x_i}$. Damit folgt $x_i^{-1}xy \in V_{x_i} V_{x_i} \subseteq U_{x_i}$. Dann folgt aber

$$|f(xy) - f(x)| \leq |\underbrace{f(xy)}_{=f(x_i(x_i^{-1}xy))} - f(x_i)| + |f(x_i) - \underbrace{f(x)}_{=f(x_i(x_i^{-1}x))}| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Ähnlich behandelt man den Fall, dass $x \notin K$, jedoch $xy \in K$, denn dann gibt es wieder ein i mit $xy \in x_i V_{x_i}$ und somit $x \in x_i U_{x_i}$ und schließlich $x_i^{-1} x \in U_{x_i}$. Im Fall $x, xy \notin K$ gilt trivialerweise $f(x) = f(xy) = 0$. Somit folgt

$$\|R_y f - f\|_{\sup} < \varepsilon.$$

Der Beweis für die links gleichmäßige Stetigkeit verläuft analog, indem man die Multiplikationen kommutiert und bedenkt, dass man U_x o.B.d.A. symmetrisch wählen kann. ■

3.2 Haar Maß

Definition 3.3. Ein *Radonmaß* ist ein Maß auf der Borelschen σ-Algebra eines Hausdorff-Raums, das lokal endlich und von innen regulär ist. Zur Erinnerung: *Lokal endlich* bedeutet (für ein Maß μ), dass es für alle x des Raums eine offene Umgebung U von x gibt, sodass $\mu(U) < \infty$. Bezeichne $\mathfrak{A}$ die σ-Algebra, so heißt *von innen regulär*, dass für alle A aus $\mathfrak{A}$ gilt $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : \; K \subseteq \mathfrak{A}, \; K \text{ ist kompakt}\}$.
Somit können wir nun ein *linkes* (bzw. *rechtes*) *Haar Maß* definieren. Dies ist ein nichtnegatives, nichttriviales Radonmaß μ (d.h. $\mu \neq 0$) auf einer lokal kompakten Gruppe G, das für jede Borelmenge A sowie jedes Gruppenelement x die Beziehung

$$\mu(xE) = \mu(E) \quad (\text{bzw. } \mu(Ex) = \mu(E))$$

erfüllt - das heißt, das Maß ist linksinvariant (bzw. rechtsinvariant).

Bemerkung 3.1. Beispielsweise ist das Lebesgue-Maß auf der additiven Gruppe von $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ ein Haar Maß.

Bemerkung 3.2. Ist μ ein linkes (bzw. rechtes) Haar Maß auf G, so folgt aus der Forderung der lokalen Endlichkeit und der lokalen Kompaktheit von G, dass μ auf kompakten Mengen endlich ist.

Bemerkung 3.3. Auf lokal kompakten Gruppen G mit einem Radonmaß μ wird $L^\infty(G)$ wie folgt definiert:
Eine Menge $E \subset X$ heißt *lokal borel*, wenn für jede Borelmenge F, mit $\mu(F) < \infty$, $E \cap F$ eine Borelmenge ist. Eine lokale Borelmenge ist *lokal null*, wenn $\mu(E \cap F) = 0$, für alle Borelmengen F mit $\mu(F) < \infty$. *Lokal fast überall* bedeutet dann überall, bis auf eine lokale Nullmenge. Eine Funktion heißt *lokal messbar*, falls Urbilder von Borelmengen lokal borel sind. Somit können wir den Banachraum $L^\infty(G)$ als den Raum aller lokal messbaren Funktionen, die lokal fast überall beschränkt sind, mit der Norm

$$\|f\|_\infty = \inf\{c : |f(x)| \leq c \text{ lokal f.ü.}\},$$

definieren.
Mit dieser Definition wird dann $L^\infty(G)$ tatsächlich zum Dualraum von $L^1(G)$, was sonst für nicht sigma-endliche Maße im Allgemeinen nicht stimmt. Für sigma-endliche Räume fällt diese „neue“ Definition des L^∞ mit der aus der Maßtheorie bekannten zusammen. Für Details siehe [3], S. 45 f., sowie [2], S. 324.

Lemma 3.2. *Sei μ ein Radonmaß auf einer lokal kompakten Gruppe G. Es gilt: μ ist genau dann ein linkes Haar Maß, wenn $\int L_y f d\mu = \int f d\mu$ für alle $f \in C_{00}^+(G)$ und jedes $y \in G$.*

Beweis. Approximiert man f durch Treppenfunktionen, so kann man sich leicht überzeugen, dass für ein Radonmaß μ die Gleichheit $\int L_y f d\mu = \int f d\mu_y$ gilt, wobei $\mu_y(A) = \mu(yA)$. Für ein linkes Haar Maß folgt somit $\int L_y f d\mu = \int f d\mu$. Gilt die Gleichheit umgekehrt für alle $f \in C_{00}^+(G)$, so gilt sie aufgrund der Linearität des Integrals auch für alle $f \in C_{00}(G)$ und aus der Eindeutigkeisaussage im Satz von Riesz-Markov folgt die Gleichheit $\mu = \mu_y$. ∎

Lemma 3.3. *Ist μ ein linkes Haar Maß auf G, so gilt $\mu(U) > 0$ für jede nichtleere offene Menge U.*

Beweis. Angenommen U sei eine nichtleere offene Menge und $\mu(U) = 0$. Dann folgt, dass auch $\mu(xU) = 0$ für alle $x \in G$. Da jede kompakte Menge K durch endlich viele Translationen xU überdeckt werden kann, gilt auch $\mu(K) = 0$. Aus der inneren Regularität folgt dann jedoch $\mu(G) = 0$, was ein Widerspruch zur Nichttrivialität ist. ∎

Lemma 3.4. *Ist μ ein linkes Haar Maß auf G und $f \in C_{00}^+(G)$, dann gilt $\int f d\mu > 0$.*

Beweis. Sei $U = \{x : \ f(x) > \frac{1}{2}\|f\|_{\sup}\}$. U ist nichtleer und offen und zusammen mit Lemma 3.3 folgt

$$\int f d\lambda > \frac{1}{2}\|f\|_{\sup} \mu(U) > 0.$$

∎

Satz 3.1 (Eindeutigkeit)**.** *Sind λ und μ linke Haar Maße auf G, so existiert ein $c \in (0, \infty)$, sodass $\mu = c\lambda$.*

Beweis. Berücksichtigt man, dass für $f \in C_{00}^+(G)$ die Integrale $\int f d\lambda$ und $\int f d\mu$ positiv sind (vgl. Lemma 3.4), so ist die Aussage $\mu = c\lambda$ äquivalent zu

$$\frac{\int f d\lambda}{\int f d\mu} = \text{const.} \quad \forall f \in C_{00}^+(G).$$

Wir nehmen im Folgenden an, dass $f, g \in C_{00}^+(G)$ und fixieren eine kompakte Umgebung V_0 von u. Weiters setzen wir

$$A = (\text{supp}(f))\, V_0 \cup V_0\, (\text{supp}(f))\,, \quad B = (\text{supp}(g))\, V_0 \cup V_0\, (\text{supp}(g))\,.$$

A und B sind kompakt und für $y \in V_0$ sind die Träger der Funktionen $x \mapsto f(xy) - f(yx)$ bzw. $x \mapsto g(xy) - g(yx)$ in A bzw. B enthalten.
Sei nun $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 3.1 existiert eine symmetrische Umgebung $V \subseteq V_0$ von u, sodass für $y \in V$

$$|f(xy) - f(yx)| < |f(xy) - f(x)| + |f(x) - f(yx)| < \varepsilon$$

und analog $|g(xy) - g(yx)| < \varepsilon$ für alle $x \in G$.
Wir wählen nun ein $h \in C_{00}^{+}(G)$ mit $h(x) = h(x^{-1})$ und $\operatorname{supp}(h) \subset V$. Mit Lemma 3.2 und dem Satz von Fubini (anwendbar, da die Integrale über kompakte Mengen mit endlichem Maß gehen), folgt

$$\int h d\mu \int f d\lambda = \int \int h(y) f(x) d\lambda(x) d\mu(y) = \int \int h(y) f(yx) d\lambda(x) d\mu(y)$$

und weiters mit $h(x) = h\left(x^{-1}\right)$

$$\begin{aligned} \int h d\lambda \int f d\mu &= \int \int h(x) f(y) d\lambda(x) d\mu(y) = \int \int h\left(y^{-1}x\right) f(y) d\lambda(x) d\mu(y) \\ &= \int \int h\left(x^{-1}y\right) f(y) d\mu(y) d\lambda(x) = \int \int h(y) f(xy) d\mu(y) d\lambda(x) \\ &= \int \int h(y) f(xy) d\lambda(x) d\mu(y). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \left| \int h d\lambda \int f d\mu - \int h d\mu \int f d\lambda \right| &= \left| \int \int h(y) \left(f(xy) - f(yx) \right) d\lambda(x) d\mu(y) \right| \\ &\overset{\operatorname{supp}(h) \subset V}{\leq} \varepsilon \lambda(A) \int h d\mu. \end{aligned}$$

Genauso sieht man, dass

$$\left| \int h d\lambda \int g d\mu - \int h d\mu \int g d\lambda \right| \leq \varepsilon \lambda(B) \int h d\mu.$$

Dividiert man nun die erste Ungleichung durch $\int h d\mu \int f d\mu$ und die zweite durch $\int h d\mu \int g d\mu$ und fasst sie zusammen, so bekommt man

$$\begin{aligned} \left| \frac{\int f d\lambda}{\int f d\mu} - \frac{\int g d\lambda}{\int g d\mu} \right| &\leq \left| \frac{\int f d\lambda}{\int f d\mu} - \frac{\int h d\lambda}{\int h d\mu} \right| + \left| \frac{\int h d\lambda}{\int h d\mu} - \frac{\int g d\lambda}{\int g d\mu} \right| \\ &\leq \varepsilon \left(\frac{\lambda(A)}{\int f d\mu} + \frac{\lambda(B)}{\int g d\mu} \right). \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Gleichheit der Verhältnisse der Integrale für beliebige $f, g \in C_{00}^{+}$, womit $\frac{\int f d\lambda}{\int f d\mu}$ als Funktion von f konstant ist. ■

Ein weiteres wichtiges Resultat stellt der folgende Satz dar. Für den Beweis siehe [3], S. 37-39.

Satz 3.2 (Existenz)**.** *Jede lokal kompakte Gruppe G besitzt ein linkes Haar Maß.*

3.3 Faltung

Definition 3.4. Sei G eine lokal kompakte Gruppe und $M(G)$ der Raum aller komplexen Radonmaße auf G. Für zwei Maße $\mu, \nu \in M(G)$ definieren wir eine Abbildung I auf $C_0(G)$ mit $I(\phi) = \int\int \phi(xy)\ d\mu(x)\ d\nu(y)$. I ist offensichtlich linear und es gilt $|I(\phi)| \leq \|\phi\|_{\sup}\|\mu\|\|\nu\|$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz ist diese Abbildung durch ein Maß $\mu * \nu \in M(G)$ mit $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\|\|\nu\|$ gegeben, also

$$\int \phi\ d(\mu * \nu) = \int\int \phi(xy)\ d\mu(x)\ d\nu(y).$$

Wir nennen $\mu * \nu$ auch die *Faltung* von μ und ν.

Lemma 3.5. *Die Faltung als Abbildung $* : M(G) \times M(G) \to M(G)$ ist assoziativ. Des weiteren ist sie kommutativ genau dann, wenn G abelsch ist.*

Beweis. Seien $\mu, \nu, \sigma \in M(G)$ und $\phi \in C_{00}(G)$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned}\int \phi\ d(\mu * (\nu * \sigma)) &= \int\int \phi(xy)\ d\mu(x)\ d(\nu * \sigma)(y) = \int\int\int \phi(xyz)\ d\mu(x)\ d\nu(y)\ d\sigma(z)\\ &= \int\int \phi(yz)\ d(\mu * \nu)(y)\ d\sigma(z) = \int \phi\ d((\mu * \nu) * \sigma).\end{aligned}$$

Da $\phi \in C_{00}(G)$ beliebig war, sind die Maße gleich.
Ist G abelsch, so gilt

$$\int \phi\ d(\mu * \nu) = \int\int \phi(xy)\ d\mu(x)\ d\nu(y) = \int\int \phi(yx)\ d\nu(y)\ d\mu(x) = \int \phi\ d(\nu * \mu).$$

Sei umgekehrt $\delta_x \in M(G)$ das Punktmaß in $x \in G$, so gilt

$$\int \phi\ d(\delta_x * \delta_y) = \int\int \phi(uv)\ d\delta_x(u)\ d\delta_y(v) = \phi(xy) = \int \phi\ d\delta_{xy},$$

womit $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$. Aus $\delta_x * \delta_y = \delta_y * \delta_x$ folgt somit $xy = yx$. ∎

Von nun an nehmen wir an, dass jede lokal kompakte Gruppe G mit einem bestimmten linken Haar Maß λ versehen ist (vgl. Satz 3.2). Wir schreiben dann auch dx anstelle von $d\lambda(x)$ bzw. $\int f$ für $\int f\ d\lambda$. Damit können wir jeder Funktion $f \in L^1(G) = L^1(G, \lambda)$ das Maß $\mu(A) = \int_A f(x)\ dx$ zuordnen und bekommen somit, dass $L^1(G)$ als Unterraum von $M(G)$ aufgefasst werden kann.

Lemma 3.6. *Für $f, g \in L^1(G)$ gilt*

$$f * g(x) = \int f(y)g(y^{-1}x)\ dy.$$

Insbesondere kann die Faltung ausgedehnt werden auf $g \in L^p(G)$ mit $1 \leq p \leq \infty$ und es gilt $f * g \in L^p(G)$ mit

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p.$$

Beweis. Für $f, g \in L^1(G)$ und $\phi \in C_{00}(G)$ gilt

$$\int \phi \, d(f * g) = \int \phi(yx) f(y) g(x) \, dx \, dy = \int \int \phi(x) f(y) g(y^{-1}x) \, dx \, dy,$$

womit das Faltungsmaß $f * g$ dem durch die Funktion $\int f(y)g(y^{-1}x)dy$ induzierten Maß entspricht. Ist nun $g \in L^p(G)$ mit $1 \leq p \leq \infty$, so bekommen wir mit der Minkowski-Ungleichung für Integrale, Satz 4.2, angewandt auf $f(y)L_y g(x)$,

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p &= \left\| \int f(y) L_y g(\cdot) \, dy \right\|_p \leq \int \|f(y) L_y g\|_p \, dy \\ &= \int |f(y)| \|L_y g\|_p \, dy = \|f\|_1 \|g\|_p, \end{aligned}$$

wobei $\|L_y g\|_p = \|g\|_p$ aus der links-Invarianz des linken Haar Maßes λ folgt. ∎

Bemerkung 3.4. Mit der Ungleichung $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \|\nu\|$ wird $M(G)$ mit der Faltung offenbar zu einer Banachalgebra, der sogenannten Maß-Algebra. Weiters ist $L^1(G) \subset M(G)$ als abgeschlossener Unterraum selbst eine Banachalgebra bzw. eine sogenannte Faltungsalgebra. Setzt man $\mathcal{A} = L^1(G)$, so ist offensichtlich $M(G)$ ein Banach-$\mathcal{A}$-Modul. Insbesondere zeigt Lemma 3.6, dass auch der Banachraum $L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$ ein linkes Banach-$\mathcal{A}$-Modul ist.

Bemerkung 3.5. Ist G diskret, so ist die skalierte Indikatorfunktion bei u, $c \cdot \mathbb{1}_u$, ein neutrales Element der Faltungsalgebra $L^1(G)$, da dann

$$f * (c \cdot \mathbb{1}_u) = (c \cdot \mathbb{1}_u) * f = f,$$

wobei $c = \frac{1}{\lambda(x)}$. Ist G nicht diskret, so kann man den Fall $c \to \infty$ betrachten und bekommt das Punktmaß bei u, das genau diese Eigenschaft erfüllt, jedoch hat man dann keine Funktion mehr. Man kann sich jedoch Approximationen der Eins konstruieren.

Definition 3.5. Für $x \in G$ können wir ein Maß folgendermaßen definieren

$$\lambda_x(E) = \lambda(Ex).$$

Da $y(Ex) = (yE)x$ ist auch λ_x ein linkes Haar Maß. Nach Satz 3.1 existiert somit eine Konstante $\Delta(x) > 0$, sodass $\lambda_x = \Delta(x)\lambda$. Damit bekommen wir aber eine Funktion $\Delta : G \to (0, \infty)$, die sogenannte *modulare Funktion* auf G.

Lemma 3.7. *Sei $f \in L^p(G)$ mit $1 \leq p < \infty$. Dann gehen $\|L_y f - f\|_p$ und $\|R_y f - f\|_p$ gegen 0, für $y \to u$.*

Beweis. Sei V eine fixierte beliebige kompakte symmetrische Umgebung von u. Sei zunächst $f \in C_{00}(G)$ und definiere $K = (\mathrm{supp}(f))V \cup V(\mathrm{supp}(f))$. Dann ist K kompakt und die Träger von $L_y f$ und $R_y f$ liegen in K, falls $y \in V$. Mit Lemma 3.1 folgt dann

$$\|L_y f - f\|_p \leq \lambda(K)^{1/p} \|L_y f - f\|_\infty \xrightarrow{y \to u} 0$$

und analog $\|R_y f - f\|_p \overset{y \to u}{\longrightarrow} 0$.

Sei nun $f \in L^p(G)$. Es gilt $\|Lyf\|_p = \|f\|_p$ sowie $\|R_y f\|_p = \Delta(y)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_p \leq C\|f\|_p$ für $y \in V$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest, so können wir ein $g \in C_{00}(G)$ wählen, sodass $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Dann folgt aber

$$\|R_y f - f\|_p \leq \|R_y(f - g)\|_p + \|R_y g - g\|_p + \|g - f\|_p \leq (C + 1)\varepsilon + \|R_y g - g\|_p,$$

wobei der letzte Term für $y \to u$ verschwindet. Analog zeigt man die Ungleichung für $L_y f$. ■

Lemma 3.8. *Sei $\mathcal{U}$ eine Umgebungsbasis von u in G. Für jedes $U \in \mathcal{U}$ sei ψ_U eine Funktion, sodass $\operatorname{supp}(\psi_U)$ kompakt und in U enthalten ist. Weiters sei $\psi_U \geq 0$ und $\int \psi_U = 1$. Für $f \in L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$ konvergiert dann $\|\psi_U * f - f\|_p$ gegen 0, wenn U gegen $\{u\}$ geht. Die Aussage gilt auch dann, wenn $p = \infty$ und f links gleichmäßig stetig ist. Analoge Aussagen gelten für $f * \psi_U$.*

Beweis. Mit $\int \psi_U = 1$ bekommen wir

$$\psi_U * f(y) - f(y) = \int \psi_U(x) f\left(x^{-1}y\right)\, dx - f(y)\int \psi_U(x)\, dx = \int \left(L_x f(y) - f(y)\right)\psi_U(x)\, dx.$$

Mit der Minkowski-Ungleichung für Integrale - Satz 4.2 - folgt nun

$$\begin{aligned}\|\psi_U * f - f\|_p = \left\|\int (L_x f - f)\,\psi_U(x)\, dx\right\|_p &\leq \int \left\|(L_x f - f)\,\psi_U(x)\right\|_p\, dx \\ &= \int \|L_x f - f\|_p\, \psi_U(x)\, dx \leq \sup_{x \in U} \|L_x f - f\|_p\,.\end{aligned}$$

Im Fall $p < \infty$ geht nach Lemma 3.7 der Ausdruck aber gegen 0, für $x \to u$ bzw. $U \to \{u\}$. Im Fall $p = \infty$ folgt die Aussage aus der links gleichmäßigen Stetigkeit. ■

Die Familie $\{\psi_U\}$ bildet für $U \to \{u\}$ somit eine beschränkte Approximation der Eins. Da wir die Mengen U kompakt wählen können, existiert mit $\psi_U = \frac{1}{\lambda(U)}\mathbb{1}_U$ immer eine beschränkte Approximation der Eins in $L^1(G)$. Insbesondere liegt $L^1(G) * L^p(G)$ für $1 \leq p < \infty$ dicht in $L^p(G)$ und wir bekommen mit Satz 1.2, sowie Bemerkung 3.4 folgendes Korollar:

Korollar 3.1. *Sei G eine lokal kompakte Gruppe mit einem ausgezeichneten linken Haar Maß λ. Für jedes $f \in L^p(G) = L^p(G, \lambda)$, $1 \leq p < \infty$ und jedes $\delta > 0$ existieren Funktionen $g \in L^p(G)$ und $h \in L^1(G)$, sodass*

(i) $f = h * g$,

(ii) $\int h\, d\lambda \leq 1$,

(iii) $\|g - f\|_p \leq \delta$.

Insbesondere ist die Faltung als Abbildung $* : L^1(G) \times L^p(G) \to L^p(G)$ surjektiv bzw. $L^1(G) * L^p(G) = L^p(G)$.

4 Anhang

Hier findet sich eine Auflistung von einigen Resultaten, die im Laufe des Textes verwendet wurden.

Lemma 4.1. *Es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2.$$

Beweis. Zunächst sei bemerkt, dass aus $g(n) - g(n-1) = f(n)$ und $g(0) = 0$ für die Folge der Partialsummen $\sum_{k=1}^{n} f(k) = g(n)$ folgt. Wir setzen also $f(k) = \frac{k}{2^k}$ und $g(n) = 2^{-n}\left(-n + 2^{n+1} - 2\right)$. Dann gilt

$$g(0) = 2^0(2-2) = 0,$$

sowie

$$\begin{aligned} g(n) - g(n-1) &= 2^{-n}\left(-n + 2^{n+1} - 2\right) - 2^{-n+1}\left(-n + 1 + 2^n - 2\right) \\ &= 2^{-n}\left(-n + 2 - 2 - 2(-n+1) - 2 + 4\right) = \frac{n}{2^n} = f(n). \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \lim_{n\to\infty} g(n) = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{n}{2^n} + 2 - \frac{2}{2^n}\right) = 2.$$

■

Satz 4.1. *Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ Folgen in einer Banachalgebra $\mathcal{A}$. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ gegen ein $B \in \mathcal{A}$ und konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut gegen ein $A \in \mathcal{A}$, so konvergiert das Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k \circ b_{n-k}$ gegen $A \circ B \in \mathcal{A}$.*

Beweis. Wir definieren die Folgen der Partialsummen als

$$A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n, \quad B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n, \quad C_N = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k \circ b_{n-k}.$$

Durch Umordnen erhält man

$$\begin{aligned} C_N = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k \circ b_{n-k} = \sum_{n=0}^{N} a_{N-n} \circ B_n &= \sum_{n=0}^{N} a_{N-n} \circ (B_n - B) + \left(\sum_{n=0}^{N} a_{N-n}\right) \circ B \\ &= \sum_{n=0}^{N} a_{N-n} \circ (B_n - B) + A_N \circ B. \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Da die Summe der $(b_n)_{n\geq 0}$ konvergiert und die Summe der $(a_n)_{n\geq 0}$ absolut konvergiert, existiert ein M, sodass

$$\|B_N - B\| < \frac{\varepsilon/3}{\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|}, \quad \forall N \geq M.$$

Außerdem folgt aus der Konvergenz der Summe der $(a_n)_{n\geq 0}$, dass diese eine Nullfolge bilden und somit existiert ein $L \geq M$ mit

$$\|a_{N-M}\| < \frac{\varepsilon/3}{M \sup_N \|B_N - B\|}, \quad \forall N \geq L.$$

(Man beachte, dass im Falle von $\sup_N \|B_N - B\| = 0$, die Folge der Partialsummen konstant ist, womit $B = b_0$. Dann ist die Aussage aber trivial.) Zudem gibt es entsprechend für die Folge der Partialsummen A_N ein K, sodass

$$\|A_N - A\| < \frac{\varepsilon/3}{\|B\|}, \quad \forall N \geq K.$$

Wählt man nun $N \geq \max\{K, L, M\} = \max\{K, L\}$, so gilt

$$\|C_N - A \circ B\| = \left\| \sum_{n=0}^{N} a_{N-n} \circ (B_N - B) + (A_N - A) \circ B \right\|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{M-1} \|a_{\underbrace{N-n}_{\geq N-M}}\| \cdot \|B_n - B\| + \sum_{n=M}^{N} \|a_{N-n}\| \cdot \|B_n - B\| + \|A_N - A\| \cdot \|B\|$$

$$< \frac{\varepsilon/3}{M \sup_N \|B_N - B\|} M \sup_N \|B_N - B\| + \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \frac{\varepsilon/3}{\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|} + \frac{\varepsilon/3}{\|B\|}\|B\| = \varepsilon,$$

womit alles gezeigt ist. ■

Lemma 4.2 (Polarformel). *Ist $\mathcal{A}$ eine Banach-*-Algebra, so gilt für $a, b, x \in \mathcal{A}$:*

$$4(a \circ x \circ b) = \sum_{k=0}^{3} i^k \left(a^* + i^{-k} b\right)^* \circ x \circ \left(a^* + i^{-k} b\right).$$

Beweis. Es gilt

$$\pm(a^* \pm b)^* \circ x \circ (a^* \pm b) = (\pm a + b^*) \circ x \circ (a^* \pm b)$$
$$= \pm a \circ x \circ a^* + b^* \circ x \circ a^* + a \circ x \circ b \pm b^* \circ x \circ b,$$

sowie

$$\pm i(a^* \mp ib)^* \circ x \circ (a^* \mp ib) = (\pm ia - b^*) \circ x \circ (a^* \mp ib)$$
$$= \pm i(a \circ x \circ a^*) + a \circ x \circ b - b^* \circ x \circ a^* \pm i(b^* \circ x \circ b).$$

Addiert man diese vier Gleichungen, so bekommt man

$$\sum_{k=0}^{3} i^k \left(a^* + i^{-k} b\right)^* \circ x \circ \left(a^* + i^{-k} b\right) = 4(a \circ x \circ b) + 2(b^* \circ x \circ a^*) - 2(b^* \circ x \circ a^*)$$
$$= 4(a \circ x \circ b).$$

■

Satz 4.2 (Minkowski-Ungleichung für Integrale)**.** *Seien* $(\mathfrak{A}, \mu)$ *und* $(\mathfrak{B}, \nu)$ *zwei Messräume und* $F(x, y) : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathbb{K}$ *eine messbare Funktion, dann gilt für* $1 \leq p < \infty$

$$\left\| \int_{\mathfrak{A}} F(x, \cdot)\ d\mu(x) \right\|_{L^p(\mathfrak{B})} \leq \int_{\mathfrak{A}} \|F(x, \cdot)\|_{L^p(\mathfrak{B})}\ d\mu(x),$$

sofern die rechte Seite existiert. Die Ungleichung gilt auch für $p = \infty$*, sofern die Räume sigma-endlich sind.*

Beweis. Sei q der konjugierte Exponent zu p und $g \in L^q(\mathfrak{B})$ beliebig, dann folgt mit der Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathfrak{B}} \left(\int_{\mathfrak{A}} F(x, y)\ d\mu(x) \right) g(y)\ d\nu(y) \right| &\leq \int_{\mathfrak{A}} \int_{\mathfrak{B}} |F(x, y)||g(y)|\ d\nu(y)\ d\mu(x) \\ &\leq \int_{\mathfrak{A}} \|F(x, \cdot)\|_{L^p(\mathfrak{B})} \|g\|_{L^q(\mathfrak{B})}\ d\mu(x). \end{aligned}$$

Da $L^q(\mathfrak{B})$ der Dualraum zu $L^p(\mathfrak{B})$ ist, gilt für ein $h \in L^p(\mathfrak{B})$, dass

$$\|h\|_{L^p(\mathfrak{B})} = \sup \left\{ \left| \int_{\mathfrak{B}} hg\ d\nu \right| :\ \|g\|_{L^q(\mathfrak{B})} = 1 \right\},$$

wobei hier im Fall $p = \infty$ die sigma-Endlichkeit einfließt. Setzt man nun $h(y) = \int_{\mathfrak{A}} F(x, y)\ d\mu(x)$ und bedenkt, dass in obiger Ungleichung $g \in L^q(\mathfrak{B})$ beliebig war, so folgt die Aussage. ■

Bemerkung 4.1. Im Fall von lokal kompakten Gruppen mit einem Radonmaß kann in Satz 4.2 auf die Voraussetzung der sigma-Endlichkeit im Fall $p = \infty$ verzichtet werden (vgl. Bemerkung 3.3).

Literaturverzeichnis

[1] Paul J. Cohen. *Factorization in Group Algebras.* Duke Mathematical Journal 26, 1959.

[2] Donald L. Cohn. *Measure Theory.* Birkhäuser, 1980.

[3] Gerald B. Folland. *A Course in Abstract Harmonic Analysis.* CRC Press, 1995.

[4] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, third edition, 1987.

[5] Edwin Hewitt, Kenneth A. Ross. *Abstract Harmonic Analysis: Volume 1.* Springer-Verlag, second edition, 1979.

[6] Edwin Hewitt, Kenneth A. Ross. *Abstract Harmonic Analysis: Volume 2.* Springer-Verlag, third printing, 1997.

[7] Nicolas Th. Varopoulos. *Sur les formes positives d'une algèbre de Banach.* Comptes rendus de l'Académie des Sciences 258, 1964.