Metrisierbarkeit

Technische Universität Wien

Bachelorarbeit

SS 2015

Sinan Özcaliskan

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Bachelorarbeit ist eine Fortsetzung der Seminararbeit [1]. Die in [1] hergeleiteten Aussagen werden in dieser Arbeit verwendet. Weiters baut diese Arbeit auf die in [1] verwendete Notation auf.

Das Metrisierbarkeitsproblem ist eines der ältesten Probleme der mengentheoretischen Topologie. Ziel ist es hinreichende und notwendige Bedingungen für die Metrisierbarkeit eines topologischen Raums zu finden, wobei Metrisierbarkeit folgendermaßen definiert wird:

Definition 1.1. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt metrisierbar, falls eine Metrik d auf X existiert, sodass die von ihr induzierte Topologie $\mathcal{T}(d)$ mit $\mathcal{T}$ übereinstimmt.*

Metrisierbarkeitssätze sind Aussagen, die eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Metrisierbarkeit eines topologischen Raums liefern. Drei solche Sätze haben wir bereits in der Seminararbeit [1] bewiesen, den Satz von Alexandroff-Urysohn, den Satz von Nagata-Smirnov und den ersten Metrisierbarkeitssatz von Bing. Daneben gibt es noch andere Aussagen, die die Frage der Metrisierbarkeit für spezielle Raumklassen beantworten, z.B. für kompakte oder lokal kompakte T_2-Räume. In dieser Arbeit werden wir nicht nur solche Sätze beweisen, sondern wir werden auch untersuchen, ob die Eigenschaft der Metrisierbarkeit auf bestimmte Strukturen vererbt wird. Um diese Fragen zu beantworten werden wir immer auf wieder die Resultate aus [1] zurückgreifen.

Historisch betrachtet ist der erste Metrisierbarkeitssatz der von Alexandroff-Urysohn (Satz 2.4 aus [1]). Er stammt aus dem Jahr 1923. Der Metrisierbarkeitssatz von Nagata-Smirnov (Satz 3.15 aus [1]) wurde von Nagata im Jahr 1950 bewiesen und von Smirnov im Jahr 1951. Der erste Metrisierbarkeitssatz von Bing (Satz 3.16 aus [1]) stammt ebenfalls aus dem Jahr 1951. Im letzten Kapitel dieser Arbeit werden wir weitere Metrisierbarkeitssätze beweisen. Es ist nicht so, dass diese Problematik heute als abgeschlossen betrachtet wird. Es zeigt sich, dass einige Probleme auf diesem Bereich mengentheoretischer Natur sind. Sie führen in den Bereich der mathematischen Logik.

Zum Einstieg wollen wir nun ein Beispiel für einen metrisierbaren und einen nichtmetrisierbaren topologischen Raum betrachten.

Beispiel 1.2. Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel eines metrisierbaren Raums. Eine Menge X versehen mit der diskreten Topologie, also der topologische Raum $(X, \mathcal{P}(X))$, ist metrisierbar. Es ist offensichtlich, dass die Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik auf X ist. Es sei $A \subseteq X$ und $\epsilon \in (0, 1)$, dann gilt für jedes $x \in A$ die Beziehung $U_\epsilon(x) = \{x\} \subseteq A$. Also liegt jede Teilmenge von X in der Topologie $\mathcal{T}(d)$. Daher stimmt die von der Metrik d induzierte Topologie mit der diskreten Topologie überein.

Beispiel 1.3. Als ein einfaches Beispiel für einen nichtmetrisierbaren Raum betrachten wir eine Menge X mit mindestens zwei Elementen. Dann ist diese Menge versehen mit der Klumpentopologie, also der topologische Raum $(X, \{\emptyset, X\})$, nicht metrisierbar, da zum Beispiel das Trennungsaxiom T_0 nicht erfüllt ist.

2 Operationen mit metrisierbaren Räumen

2.1 Die Summe und das Produkt metrisierbarer Räume

Zunächst wollen wir die Metrisierbarkeit der Summe von topologischen Räumen untersuchen. Bevor wir diesen Begriff einführen brauchen wir folgendes Lemma.

Lemma 2.1.1. *Es sei $((X_s, \mathcal{T}_s))_{s \in S}$ eine Familie von paarweise disjunkten topologischen Räumen. Wir definieren nun die Menge $X := \bigcup_{s \in S} X_s$ und das Mengensystem $\mathcal{T} := \{O \subseteq X : (\forall s \in S : O \cap X_s \in \mathcal{T}_s)\}$. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*

Beweis: Offensichtlich sind die leere Menge und die Menge X im Mengensystem $\mathcal{T}$ enthalten. Es seien zwei Mengen $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ gegeben. Laut Definition der Topologie $\mathcal{T}$ gilt daher $O_1 \cap X_s \in \mathcal{T}_s$ und $O_2 \cap X_s \in \mathcal{T}_s$, für alle $s \in S$. Damit erhält man $(O_1 \cap O_2) \cap X_s = (O_1 \cap X_s) \cap (O_2 \cap X_s) \in \mathcal{T}_s$, für alle $s \in S$. Zuletzt sei eine Familie von Mengen, $(O_i)_{i\in I}$, mit $O_i \in \mathcal{T}$, für alle $i \in I$ gegeben. Laut Definition der Topologie $\mathcal{T}$ gilt daher $O_i \cap X_s \in \mathcal{T}_s$, für alle $i \in I$ und für alle $s \in S$. Damit erhält man $(\bigcup_{i\in I} O_i) \cap X_s = \bigcup_{i\in I}(O_i \cap X_s) \in \mathcal{T}_s$, für alle $s \in S$. Damit ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

■

Definition 2.1.2. *Es sei $((X_s, \mathcal{T}_s))_{s\in S}$ eine Familie von paarweise disjunkten topologischen Räumen. Dann heißt der im Lemma 2.1.1 konstruierte topologische Raum die Summe der Familie $((X_s, \mathcal{T}_s))_{s\in S}$ und man verwendet die Schreibweise $(\bigoplus_{s\in S} X_s, \bigoplus_{s\in S} \mathcal{T}_s)$ für den topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$. In diesem Zusammenhang wird $(\bigoplus_{s\in S} X_s, \bigoplus_{s\in S} \mathcal{T}_s)$ auch als der Summenraum der Familie $((X_s, \mathcal{T}_s))_{s\in S}$ bezeichnet.*

Lemma 2.1.3. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(X_s)_{s\in S}$ eine Familie von paarweise disjunkten offenen Teilmengen von X mit $\bigcup_{s\in S} X_s = X$. Dann gilt $(\bigoplus_{s\in S} X_s, \bigoplus_{s\in S}(\mathcal{T}|_{X_s})) = (X, \mathcal{T})$.*

Beweis: Wir betrachten zunächst eine Menge $O \in \mathcal{T}$. Es gilt $O \cap X_s \in \mathcal{T}|_{X_s}$, für alle $s \in S$, damit gilt $O \in \bigoplus_{s\in S}(\mathcal{T}|_{X_s})$. Sei nun umgekehrt $O \in \bigoplus_{s\in S}(\mathcal{T}|_{X_s})$, damit gilt $O \cap X_s \in \mathcal{T}|_{X_s}$, für alle $s \in S$. Daher existiert für jedes $s \in S$ eine Menge $U_s \in \mathcal{T}$ mit $O \cap X_s = U_s \cap X_s$. Da die Menge X_s in der Topologie $\mathcal{T}$ liegt folgt damit $O \cap X_s \in \mathcal{T}$, für alle $s \in S$, und daher $O = \bigcup_{s\in S}(O \cap X_s) \in \mathcal{T}$.

■

Wir wollen nun einen Satz beweisen, der eine Aussage über den Zusammenhang zwischen der Metrisierbarkeit der Summe und der Metrisierbarkeit der einzelnen Räume macht, die in diseser Summe auftreten. Bevor wir diese Aussage beweisen brauchen wir zwei Lemma, die wir dann auch später bei der Untersuchung der Metrisierbarkeit des Produktraums verwenden werden.

Lemma 2.1.4. *Es sei X eine Menge und $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ seien zwei Topologien auf X. Dann gilt $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ genau dann, falls jeder Punkt $x \in X$ folgende Eigenschaft besitzt: Zu jeder Umgebung U_1 von x im Raum $(X, \mathcal{T}_1)$ existiert eine Umgebung U_2 von x im Raum $(X, \mathcal{T}_2)$ mit der Eigenschaft $U_2 \subseteq U_1$. Dieselbe Aussage gilt auch, falls man die Rollen der beiden Räume $(X, \mathcal{T}_1)$ und $(X, \mathcal{T}_2)$ vertauscht.*

Beweis: Wir setzen voraus, dass jeder Punkt $x \in X$ die im Lemma beschriebene Eigenschaft hat und wollen die Gleichheit der Topologien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ nachweisen. Es sei $O_1 \in \mathcal{T}_1$ und $x \in O_1$. Dann existiert eine Umgebung U_2 von x im Raum $(X, \mathcal{T}_2)$ mit der Eigenschaft $U_2 \subseteq O_1$. Damit existiert eine offene Menge $O_2 \in \mathcal{T}_2$ mit $x \in O_2 \subseteq O_1$. Damit ist O_1 eine Umgebung von x in $(X, \mathcal{T}_2)$, also gilt $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Die umgekehrte Mengeninklusion zeigt man analog. Dass aus der Gleichheit der beiden Topologien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ die im Lemma erwähnte Bedingung folgt, ist offensichtlich.

■

Lemma 2.1.5. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein metrisierbarer topologischer Raum und d eine Metrik auf X, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert. Dann gelten folgende zwei Aussagen:*

(i) Die Abbildung $d' : X \times X \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \min(d(x, y), 1)$ ist eine Metrik auf X und es gilt $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}(d')$.

(ii) Es sei $Y \subseteq X$, dann gilt $\mathcal{T}(d)|_Y = \mathcal{T}(d|_{Y\times Y})$.

Beweis: ad(i): Es gilt $d'(x, y) = 0$ genau dann, falls $d(x, y) = 0$ und dies gilt genau dann, falls $x = y$, da d eine Metrik ist. Offensichtlich gilt $d'(x, y) = d'(y, x)$, für alle $x, y \in X$, da d diese Eigenschaft hat. Aus der Transitivität $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, für alle $x, y, z \in X$, von d folgt unmittelbar, dass

$$\min(d(x, z), 1) \leq \min(d(x, y) + d(y, z), 1) \leq \min(d(x, y), 1) + \min(d(y, z), 1), \text{ für alle } x, y, z \in X.$$

Damit ist d' eine Metrik auf X. Es sei nun $x \in X$. Eine Umgebungsbasis von x im Raum $(X, \mathcal{T}(d))$ ist gegeben durch das Mengensystem $\mathfrak{B}(x) := \{U_\epsilon(x) : \epsilon \in (0, 1)\}$ und analog im Raum $(X, \mathcal{T}(d'))$. Da für jedes $\epsilon \in (0,1)$ die Beziehung $U_\epsilon(x) = U'_\epsilon(x)$ gilt, wobei $U'_\epsilon(x)$ die ϵ-Kugel von x im Raum $(X, \mathcal{T}(d'))$ ist, folgt mit Lemma 2.1.4 die Gleichheit der Topologien $\mathcal{T}(d)$ und $\mathcal{T}(d')$.

ad(ii): Die Tatsache, dass $d|_{Y\times Y}$ eine Metrik auf $Y \times Y$ ist, ist offensichtlich. Eine Umgebungsbasis von einem Punkt $y \in Y$ im Raum $(Y, \mathcal{T}(d)|_Y)$ ist gegeben durch das Mengensystem $\mathfrak{B}(y) := \{U_\epsilon(y) \cap Y : \epsilon > 0\}$. Wegen

$$U_\epsilon(y) \cap Y = \{z \in Y : d(z,y) < \epsilon\} = \{z \in Y : d|_{Y\times Y}(z,y) < \epsilon\}$$

ist das genau die von $d|_{Y\times Y}$ induzierte Umgebungsbasis des Punktes $y \in Y$ im Raum $(Y, \mathcal{T}(d|_{Y\times Y}))$. Mit Lemma 2.1.4 folgt damit die Gleichheit der Topologien $\mathcal{T}(d)|_Y$ und $\mathcal{T}(d|_{Y\times Y})$.

■

Satz 2.1.6. *Es sei $((X_s, \mathcal{T}_s))_{s\in S}$ eine Familie von paarweise disjunkten topologischen Räumen. Dann ist der Summenraum $(\bigoplus_{s\in S} X_s, \bigoplus_{s\in S} \mathcal{T}_s)$ metrisierbar genau dann, falls für jedes $s \in S$ der Raum $(X_s, \mathcal{T}_s)$ metrisierbar ist.*

Beweis: Wir gehen zunächst davon aus, dass der Raum $(\bigoplus_{s\in S} X_s, \bigoplus_{s\in S} \mathcal{T}_s)$ metrisierbar ist. Es sei d eine Metrik auf $\bigoplus_{s\in S} X_s$, die die Summentopologie $\bigoplus_{s\in S} \mathcal{T}_s$ induziert. Es gilt $(\bigoplus_{s\in S} \mathcal{T}_s)|_{X_{s'}} = \mathcal{T}_{s'}$, für alle $s' \in S$. Damit erhält man mit dem zweiten Punkt von Lemma 2.1.5 die Aussage $\mathcal{T}_{s'} = \mathcal{T}(d|_{X_{s'}\times X_{s'}})$, für alle $s' \in S$. Also sind alle Räume $(X_s, \mathcal{T}_s)$, $s \in S$, metrisierbar.

Nun gehen wir davon aus, dass alle Räume $(X_s, \mathcal{T}_s)$, $s \in S$, metrisierbar sind. Aufgrund des ersten Punktes von Lemma 2.1.5 können die Metriken auf den einzelnen Räumen so gewählt werden, dass sie durch 1 beschränkt sind. Wir wählen also für jedes $s \in S$ eine Metrik d_s auf X_s mit $\mathcal{T}(d_s) = \mathcal{T}_s$ und $d_s(x,y) \leq 1$, für alle $x, y \in X_s$. Wir definieren nun eine Metrik auf der Menge $\bigoplus_{s\in S} X_s$ durch

$$d : \bigoplus_{s\in S} X_s \times \bigoplus_{s\in S} X_s \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \begin{cases} d_s(x,y), \text{ falls ein } s \in S \text{ existiert mit } x, y \in X_s \\ 1, \text{ falls ein solches } s \in S \text{ nicht existiert} \end{cases}$$

Durch den obigen Ausdruck wird tatsächlich eine Abbildung definiert, da die Menge $\bigoplus_{s\in S} X_s$ die disjunkte Vereinigung der Mengen X_s ist. Wir wollen nun nachweisen, dass d auch eine Metrik ist. Es seien $x, y \in \bigoplus_{s\in S} X_s$ mit $d(x,y) = 0$, dann muss ein $s \in S$ existieren mit $d_s(x,y) = 0$, also folgt daher $x = y$. Umgekehrt folgt aus $x = y$, dass ein $s \in S$ existiert mit $d(x,y) = d_s(x,y)$ und daher gilt $d(x,y) = 0$. Die Symmetrie ist offensichtlich. Wir wollen nun die Transitivität

$$\forall\, x, y, z \in \bigoplus_{s\in S} X_s : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \tag{1}$$

nachweisen und betrachten $x, y, z \in \bigoplus_{s\in S} X_s$. Dazu unterscheiden wir 2 Fälle. Beim ersten Fall gehen wir davon aus, dass ein $s \in S$ existiert mit $x, z \in X_s$. Ist nun $y \in X_s$, dann ist die Ungleichung (1) erfüllt, falls $y \notin X_s$ ist, dann hat die rechte Seite der Ungleichung (1) den Wert 2, womit die Ungleichung wieder erfüllt ist. Beim zweiten Fall gehen wir davon aus, dass ein $s \in S$ mit $x, z \in X_s$ nicht existiert. Dann hat die rechte Seite von (1) mindestens den Wert 1, womit die Ungleichung wieder erfüllt ist. Damit ist d eine Metrik auf $\bigoplus_{s\in S} X_s$. Es gilt nun $X_s \in \mathcal{T}(d)$, für alle $s \in S$, da aufgrund der Struktur der Metrik d die offene ϵ-Kugel bezüglich der Metrik d von jedem Punkt $x \in X_s$ mit Radius $\epsilon \in (0,1)$ eine Teilmenge von X_s ist. Da für alle $s \in S$ gilt $d|_{X_s\times X_s} = d_s$, folgt daher insgesamt mit dem zweiten Punkt von Lemma 2.1.5 und mit Lemma 2.1.3, dass

$$\bigoplus_{s\in S} \mathcal{T}_s = \bigoplus_{s\in S} \mathcal{T}(d_s) = \bigoplus_{s\in S} \mathcal{T}(d|_{X_s\times X_s}) = \bigoplus_{s\in S} (\mathcal{T}(d)|_{X_s}) = \mathcal{T}(d).$$

Damit induziert die Metrik d die Topologie $\bigoplus_{s\in S} \mathcal{T}_s$.

■

Als nächstes wollen wir Produkte von topologischen Räumen auf Metrisierbarkeit untersuchen. Unser Ziel ist es eine zu Satz 2.1.6 analoge Aussage zu beweisen, die eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Metrisierbarkeit des Produktes einer Familie von topologischen Räumen liefert.

Satz 2.1.7. *Es sei* $((X_s, \mathcal{T}_s))_{s\in S}$ *eine Familie von topologischen Räumen. Dann gelten folgende zwei Aussagen:*

(i) Es sei $S = S_0 \cup S_1$*, wobei die Menge* S_0 *abzählbar sei und für jedes* $s \in S_0$ *sei der Raum* $(X_s, \mathcal{T}_s)$ *metrisierbar. Weiters enthalte für jedes* $s \in S_1$ *die Menge* X_s *genau ein Element. Dann ist der Produktraum* $(\prod_{s\in S} X_s, \prod_{s\in S} \mathcal{T}_s)$ *metrisierbar.*

(ii) Der Produktraum $(\prod_{s\in S} X_s, \prod_{s\in S} \mathcal{T}_s)$ *sei metrisierbar. Dann ist für jedes* $s \in S$ *der Raum* $(X_s, \mathcal{T}_s)$ *metrisierbar.*

Beweis: ad(i): Für jedes $s \in S$ ist der Raum $(X_s, \mathcal{T}_s)$ metrisierbar ist. Es sei $S_0 = \{s_i : i \in \mathbb{N}\}$. Wegen dem ersten Punkt von Lemma 2.1.5 können wir voraussetzen, dass eine Folge von Metriken $(d_{s_i})_{i\in\mathbb{N}}$ existiert mit $\mathcal{T}(d_{s_i}) = \mathcal{T}_{s_i}$ und $d_{s_i}(X_{s_i} \times X_{s_i}) \subseteq [0,1]$, für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir definieren nun auf der Menge $\prod_{s\in S} X_s$ eine Metrik durch

$$d : \prod_{s\in S} X_s \times \prod_{s\in S} X_s \to \mathbb{R} : ((x_s)_{s\in S}, (y_s)_{s\in S}) \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i} d_{s_i}(x_{s_i}, y_{s_i}).$$

Es ist offensichtlich, dass d wohldefiniert und eine Metrik ist. Es sei $(x_s)_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s$ gegeben. Eine Umgebungsbasis von $(x_s)_{s\in S}$ im Produktraum ist gegeben durch das Mengensystem $\mathfrak{B}((x_s)_{s\in S}) := \{U_{\epsilon,n}((x_s)_{s\in S}) : \epsilon > 0, n \in \mathbb{N}\}$. Die Mengen in diesem Mengensystem sind definiert als

$$U_{\epsilon,n}((x_s)_{s\in S}) := \prod_{i=1}^{n} U_\epsilon^{s_i}(x_{s_i}) \times \prod_{s\in S\setminus\{s_1,\ldots,s_n\}} X_s$$

wobei $U_\epsilon^{s_i}(x_{s_i})$ die ϵ-Kugel bezüglich der Metrik d_{s_i} ist. Ist $U'_\epsilon((x_s)_{s\in S})$ die ϵ-Kugel bezüglich der Metrik d, dann gilt

$$U'_{\epsilon 2^{-n}}((x_s)_{s\in S}) \subseteq U_{\epsilon,n}((x_s)_{s\in S}), \text{ für alle } \epsilon > 0 \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Dies sieht man folgendermaßen ein. Es sei $(y_s)_{s\in S} \in U'_{\epsilon 2^{-n}}((x_s)_{s\in S})$, dann gilt $d((x_s)_{s\in S}, (y_s)_{s\in S}) < \epsilon 2^{-n}$ und daher ist $\frac{1}{2^i} d(x_{s_i}, y_{s_i}) < \epsilon 2^{-n}$, für alle $i \in \mathbb{N}$. Für $i \le n$ folgt damit $d(x_{s_i}, y_{s_i}) < \epsilon$, damit gilt $(y_s)_{s\in S} \in U_{\epsilon,n}((x_s)_{s\in S})$. Umgekehrt betrachten wir ein $\epsilon > 0$ und wählen ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $2^{-n} < \frac{\epsilon}{2}$, dann gilt

$$U_{\frac{\epsilon}{2},n}((x_s)_{s\in S}) \subseteq U'_\epsilon((x_s)_{s\in S}).$$

Dies sieht man folgendermaßen ein. Es sei $(y_s)_{s\in S} \in U_{\frac{\epsilon}{2},n}((x_s)_{s\in S})$, dann gilt $d(x_{s_i}, y_{s_i}) < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$. Damit erhalten wir

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i} d_{s_i}(x_{s_i}, y_{s_i}) < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}\frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

Also gilt $(y_s)_{s\in S} \in U'_\epsilon((x_s)_{s\in S})$. Mit Hilfe von Lemma 2.1.4 schließen wir damit, dass die Metrik d die Produkttopologie induziert.

ad(ii): Es sei d eine Metrik auf $\prod_{s\in S} X_s$, die die Produkttopologie $\prod_{s\in S} \mathcal{T}_s$ induziert. Wir wählen ein Element $(a_s)_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s$. Nun definieren wir für jedes $s_0 \in S$ die Abbildung $\phi_{s_0} : X_{s_0} \to \prod_{s\in S} X_s$ durch

$$[\phi_{s_0}(x_{s_0})]_s := \begin{cases} x_{s_0}, & s = s_0 \\ a_s, & s \neq s_0 \end{cases}$$

und die Abbildung

$$d_{s_0} : X_{s_0} \times X_{s_0} \to \mathbb{R} : (x_{s_0}, y_{s_0}) \mapsto d(\phi_{s_0}(x_{s_0}), \phi_{s_0}(y_{s_0})).$$

Offensichtlich ist d_{s_0} eine Metrik auf X_{s_0}. Wir werden nun zeigen, dass die Metrik d_{s_0} die Topologie $\mathcal{T}_{s_0}$ induziert. Es sei daher $(x_{s_0}^r)_{r \in I}$ ein Netz in X_{s_0} und $x_{s_0} \in X_{s_0}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_{r \in I} x_{s_0}^r = x_{s_0} \text{ bezüglich } \mathcal{T}_{s_0} &\Leftrightarrow \lim_{r \in I} \phi_{s_0}(x_{s_0}^r) = \phi_{s_0}(x_{s_0}) \text{ bezüglich } \prod_{s \in S} \mathcal{T}_s \\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists r_0 \in I \; \forall r \geq r_0 : \underbrace{d(\phi_{s_0}(x_{s_0}^r), \phi_{s_0}(x_{s_0}))}_{d_{s_0}(x_{s_0}^r, x_{s_0})} < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \lim_{r \in I} x_{s_0}^r = x_{s_0} \text{ bezüglich } d_{s_0}.\end{aligned}$$

■

Ist im Satz 2.1.7 die Menge S_1 leer, dann erhält man die Aussage, dass für eine Folge von topologischen Räumen $((X_i, \mathcal{T}_i))_{i \in \mathbb{N}}$ der Produktraum $(\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i, \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_i)$ metrisierbar ist genau dann, falls für jedes $i \in \mathbb{N}$ der Raum $(X_i, \mathcal{T}_i)$ metrisierbar ist.

Wir wollen nun das Produkt von überabzählbar vielen topologischen Räumen untersuchen. Hier zeigt sich, dass das Produkt stets nicht metrisierbar ist, falls alle Räume die in diesem Produkt auftreten mindestens zwei Elemente besitzen.

Satz 2.1.8. *Es sei $((X_s, \mathcal{T}_s))_{s \in S}$ eine Familie von topologischen Räumen mit $S = S_1 \cup S_2$. Die Menge S_1 sei überabzählbar und für jedes $s \in S_1$ enthalte die Menge X_s mindestens zwei Elemente. Weiters enthalte die Menge X_s für jedes $s \in S_2$ genau ein Element. Dann ist der Produktraum $(\prod_{s \in S} X_s, \prod_{s \in S} \mathcal{T}_s)$ nicht metrisierbar.*

Beweis: Wir wollen zwei Fälle unterscheiden. Im ersten Fall gehen wir davon aus für jedes $s \in S_1$ gilt $\mathcal{T}_s \neq \{\emptyset, X_s\}$, dass also keine einzige Topologie $\mathcal{T}_s$, $s \in S_1$, mit der Klumpentopologie übereinstimmt. Damit enthält für jedes $s \in S_1$ die Topologie $\mathcal{T}_s$ eine Menge O_s mit $O_s \neq X_s$ und $O_s \neq \emptyset$. Wir betrachten jetzt einen Punkt $x := (x_s)_{s \in S} \in \prod_{s \in S} X_s$ mit $x_s \in O_s$, für alle $s \in S_1$. Wir werden nun zeigen, dass x keine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Dazu gehen wir davon aus, dass x eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathfrak{B}(x)$ besitzt und werden diese Annahme auf einen Widerspruch führen. Es existiert zu jeder Menge $B \in \mathfrak{B}(x)$ eine Menge $U = \prod_{s \in S} W_s$ mit $U \subseteq B$, die die Eigenschaft besitzt, dass W_s eine Umgebung von x_s in $(X_s, \mathcal{T}_s)$ ist und $W_s = X_s$, für fast alle $s \in S$ erfüllt. Für jedes $B \in \mathfrak{B}(x)$ betrachten wir eine solche Menge und fassen dann alle diese Mengen zu dem Mengensystem $\mathfrak{B}'(x)$ zusammen. Es ist offensichtlich, dass das Mengensystem $\mathfrak{B}'(x)$ eine Umgebungsbasis von x ist. Da wir vorausgesetzt haben, dass $\mathfrak{B}(x)$ abzählbar ist, ist damit auch $\mathfrak{B}'(x)$ abzählbar. Für jedes $U \in \mathfrak{B}'(x)$ definieren wir nun die Menge $S(U) := \{s \in S : W_s \neq X_s\}$, die offensichtlich eine Teilmenge von S_1 ist. Weiters definieren wir die Menge $S_0 := \bigcup_{U \in \mathfrak{B}'(x)} S(U)$. Da $\mathfrak{B}'(x)$ abzählbar ist, ist S_0 auch abzählbar, damit existiert ein $s_0 \in S_1 \backslash S_0$. Damit ist $U := \prod_{s \in S} W_s$ mit $W_s = X_s$, für alle $s \in S \backslash \{s_0\}$, und $W_{s_0} = O_{s_0}$ eine Umgebung von x, die aber keine Menge aus $\mathfrak{B}'(x)$ als Teilmenge besitzt. Wegen diesem Widerspruch besitzt x keine abzählbare Umgebungsbasis. Da jeder metrisierbare Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist der Raum $(\prod_{s \in S} X_s, \prod_{s \in S} \mathcal{T}_s)$ damit nicht metrisierbar.

Wir wollen nun den Fall betrachten, dass für mindestens ein $s \in S_1$ die Topologie $\mathcal{T}_s$ mit der Klumpentopologie übereinstimmt. Wir betrachten nun zwei Punkte $x := (x_s)_{s \in S} \in \prod_{s \in S} X_s$ und $y := (y_s)_{s \in S} \in \prod_{s \in S} X_s$ mit $x \neq y$ und $x_s = y_s$, für alle $s \in S \backslash \{s_0\}$, wobei für s_0 die Bedingung $\mathcal{T}_{s_0} = \{\emptyset, X_{s_0}\}$ gelten soll. Nun existieren keine Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$, also erfüllt der Produktraum das Trennungsaxiom T_2 nicht, womit der Raum $(\prod_{s \in S} X_s, \prod_{s \in S} \mathcal{T}_s)$ auch in diesem Fall nicht metrisierbar ist.

■

Ist im Satz 2.1.8 die Menge S_2 leer, erhält man die Aussage, dass das überabzählbare Produkt von mindestens zweielementigen topologischen Räumen nicht metrisierbar ist.

Aus den letzten beiden Aussagen schließen wir nun auf den allgemeinen Fall.

Korollar 2.1.9. *Es sei $((X_s, \mathcal{T}_s))_{s \in S}$ eine Familie von topologischen Räumen. Dann ist der Produktraum $(\prod_{s \in S} X_s, \prod_{s \in S} \mathcal{T}_s)$ metrisierbar genau dann, falls für jedes $s \in S$ der Raum $(X_s, \mathcal{T}_s)$ metrisierbar ist und falls eine abzählbare Teilmenge $S_0 \subseteq S$ existiert mit der Eigenschaft, dass für jedes $s \in S \backslash S_0$ die Menge X_s genau ein Element besitzt.*

Beweis: Wir gehen zunächst davon aus, dass für jedes $s \in S$ der Raum $(X_s, \mathcal{T}_s)$ metrisierbar ist und dass eine abzählbare Teilmenge $S_0 \subseteq S$ existiert mit der Eigenschaft, dass für jedes $s \in S \backslash S_0$ die Menge X_s genau ein Element besitzt. Dann ist der Produktraum $(\prod_{s \in S} X_s, \prod_{s \in S} \mathcal{T}_s)$ wegen dem ersten Punkt von Satz 2.1.7 metrisierbar. Ist umgekehrt der Produktraum $(\prod_{s \in S} X_s, \prod_{s \in S} \mathcal{T}_s)$ metrisierbar, dann ist wegen dem zweiten Punkt von Satz 2.1.7 jeder Raum $(X_s, \mathcal{T}_s)$ metrisierbar. Wegen Satz 2.1.8 existieren höchstens abzählbar viele $s \in S$, für die die Menge X_s mindestens zwei Elemente besitzt.

■

2.2 Das Bild metrisierbarer Räume

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, unter welchen Bedingungen das Bild eines metrisierbaren topologischen Raums metrisierbar ist. Es zeigt sich, das bei den "meisten" Abbildungen, die Eigenschaft der Metrisierbarkeit eines topologischen Raums nicht auf das Bild der Abbildung vererbt wird.

Wir werden zunächst einen wichtigen Begriff in der Metrisierbarkeitstheorie einführen, der uns bereits in der Seminararbeit [1] begegnet ist.

Definition 2.2.1. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt parakompakt, falls jede offene Überdeckung von X eine lokal endliche offene Verfeinerung besitzt.*

Eine wichtige Aussage im Zusammenhang mit Parakompaktheit ist Satz 3.12 aus [1], der besagt, dass jeder metrisierbare Raum parakompakt ist. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht, da zum Beispiel für eine Menge X mit mindestens zwei Elementen der Raum $(X, \{\emptyset, X\})$ parakompakt aber nicht metrisierbar ist. Im Folgenden wollen wir einige Eigenschaften parakompakter Räume herleiten.

Lemma 2.2.2. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein parakompakter T_2-Raum. Weiters seien A und B zwei abgeschlossene Teilmengen von X. Falls für jedes $x \in B$ zwei offene Mengen U_x und V_x existieren mit den Eigenschaften $A \subseteq U_x, x \in V_x$ und $U_x \cap V_x = \emptyset$, dann existieren zwei offene Mengen U und V mit $A \subseteq U, B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.*

Beweis: Es seien A und B zwei abgeschlossene Teilmengen von X. Das Mengensystem $\{V_x : x \in X\} \cup \{X \backslash B\}$ ist eine offene Überdeckung der Menge X. Da der Raum parakompakt ist existiert eine lokal endliche offene Verfeinerung $\{W_s : s \in S\}$ dieser offenen Überdeckung. Wir definieren die Menge $S_0 := \{s \in S : W_s \cap B \neq \emptyset\}$. Damit erhalten wir

$$A \cap \overline{W_s} = \emptyset \ \text{ für alle } s \in S_0 \text{ und } \ B \subseteq \bigcup_{s \in S_0} W_s.$$

Wegen Lemma 3.2 aus [1] ist die Menge $U := X \backslash \bigcup_{s \in S_0} \overline{W_s}$ offen. Es ist nun offensichtlich, dass die Mengen U und $V := \bigcup_{s \in S_0} W_s$ disjunkt sind und A bzw. B enthalten.

■

Korollar 2.2.3. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein parakompakter T_2-Raum. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ normal.*

Beweis: Es seien A und B zwei disjunkte Teilmengen von X, wobei A einpunktig sei und B abgeschlossen. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ das Trennungsaxiom T_2 erfüllt, ist die Voraussetzung des Lemmas 2.2.2 erfüllt, weshalb der Raum $(X, \mathcal{T})$ regulär ist. Wir wollen nun die Normalität nachweisen. Dazu betrachten wir zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X. Aufgrund der Regularität des Raums $(X, \mathcal{T})$ ist wieder die Voraussetzung von Lemma 2.2.2 erfüllt, womit der Raum normal ist.

■

Proposition 2.2.4. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein normaler topologischer Raum. Dann existiert zu jeder lokal endlichen offenen Überdeckung $\mathcal{U} := \{U_s : s \in S\}$ eine offene Überdeckung $\mathcal{V} := \{V_s : s \in S\}$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $s \in S$ gilt $\overline{V_s} \subseteq U_s$.*

Beweis: Wir wählen eine Wohlordnung $\leq$ auf der Indexmenge S und bezeichnen mit s_0 das kleinste Element der Wohlordnung $(S, \leq)$. Wir werden nun induktiv offene Mengen V_s konstruieren durch

$$X \backslash (\bigcup_{r<s} V_r \cup \bigcup_{t>s} U_t) \subseteq V_s \subseteq \overline{V_s} \subseteq U_s. \tag{2}$$

Da $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung ist, ist $X \backslash \bigcup_{t>s_0} U_t$ eine abgeschlossene Menge die in U_{s_0} enthalten ist. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ normal ist, existiert eine offene Menge V_{s_0} mit

$$X \backslash \bigcup_{t>s_0} U_t \subseteq V_{s_0} \subseteq \overline{V_{s_0}} \subseteq U_{s_0}.$$

Es sei nun $s \in S$ und für alle $r < s$ sei V_r bereits konstruiert. Wir werden nun zeigen, dass

$$\mathcal{W}_s := \{V_r : r < s\} \cup \{U_t : t > s\} \cup \{U_s\}$$

eine Überdeckung von X ist. Es sei $x \in X$. Falls ein $t \geq s$ existiert mit $x \in U_t$, dann sind wir fertig. Wir gehen nun davon aus, dass ein solches t nicht existiert. Da das Mengensystem $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X ist, muss x in einer Menge aus $\mathcal{U}$ enthalten sein. Da das Mengensystem $\mathcal{U}$ lokal endlich ist, ist x insbesondere nur in endlich vielen Mengen aus $\mathcal{U}$ enthalten. Definiert man $r_0 :=\max\{r : x \in U_r\}$, dann ist $r_0 < s$. Ist $x \in V_r$, für ein $r < r_0$, dann sind wir fertig. Anderenfalls gilt

$$x \in X \backslash (\bigcup_{r<r_0} V_r \cup \bigcup_{t>r_0} U_t).$$

und nach Induktionsvoraussetzung $x \in V_{r_0}$. Damit ist $\mathcal{W}_s$ eine Überdeckung von X. Es ist $X \backslash (\bigcup_{r<s} V_r \cup \bigcup_{t>s} U_t)$ eine abgeschlossene Menge und da $\mathcal{W}_s$ eine Überdeckung ist, ist diese Menge in U_s enthalten. Also existiert eine offene Menge V_s die (2) erfüllt. Wir zeigen nun, dass $\mathcal{V} := \{V_s : s \in S\}$ eine Überdeckung von X ist. Es sei $x \in X$. Es gilt $x \notin \bigcup_{t>r_0} U_t$. Ist $x \in V_r$, für ein $r < r_0$, dann sind wir fertig. Anderenfalls gilt wegen (2) $x \in V_{r_0}$.

■

Proposition 2.2.5. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann gelten folgende zwei Aussagen:*

(i) Falls jede offene Überdeckung von X eine lokal endliche abgeschlossene Verfeinerung besitzt, dann ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ parakompakt.

(ii) Ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ parakompakt und T_2, dann besitzt jede offene Überdeckung von X eine lokal endliche abgeschlossene Verfeinerung.

Beweis: ad(i): Es sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung des Raums $(X, \mathcal{T})$ und $\mathcal{V} = \{V_s : s \in S\}$ eine lokal endliche Verfeinerung von $\mathcal{U}$. Da das Mengensystem $\mathcal{V}$ lokal endlich ist, existiert ein Mengensystem von offenen Mengen $\{O_x : x \in X\}$, mit $x \in O_x$, für alle $x \in X$, und $O_x \cap V_s = \emptyset$, für fast $s \in S$. Es sei nun $\mathcal{F}$ eine lokal endliche abgeschlossene Verfeinerung von $\{O_x : x \in X\}$. Wir definieren nun für jedes $s \in S$ die Menge

$$W_s := X \backslash \bigcup_{F \in \mathcal{F},\ F \cap V_s = \emptyset} F.$$

Wegen Lemma 3.2 aus [1] ist W_s offen. Weiters enthält die Menge W_s die Menge V_s und es gilt für jedes $s \in S$ und für jedes $F \in \mathcal{F}$ die Beziehung

$$W_s \cap F \neq \emptyset \text{ genau dann, falls } V_s \cap F \neq \emptyset. \tag{3}$$

Für jedes $s \in S$ betrachten wir nun ein $U_s \in \mathcal{U}$ mit $V_s \subseteq U_s$ und definieren die Mengen $O_s := W_s \cap U_s$. Da das Mengensystem $\{O_s : s \in S\}$ eine Überdeckung von X ist, folgt damit, dass $\{O_s : s \in S\}$ eine offene Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist. Da das Mengensystem $\mathcal{F}$ lokal endlich ist, existiert zu jedem $x \in X$ eine Umgebung P_x die mit fast allen Mengen aus $\mathcal{F}$ leeren Durchschnitt besitzt. Es sei nun $x \in X$, dann existieren damit endlich viele Mengen $F_1, ..., F_n \in \mathcal{F}$ mit $P_x \subseteq \bigcup_{i=1}^n F_i$. Da jedes $F \in \mathcal{F}$ mit fast allen

Mengen aus $\mathcal{V}$ leeren Durchschnitt besitzt, gilt wegen (3), dass $F \cap W_s = \emptyset$, für fast alle $s \in S$. Für ein $x \in X$ gilt damit insgesamt

$$P_x \cap O_s = P_x \cap W_s \cap U_s \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} F_i) \cap W_s \cap U_s = \emptyset, \quad \text{für fast alle } s \in S.$$

Damit ist also $(O_s)_{s\in S}$ eine lokal endliche offene Verfeinerung von $\mathcal{U}$.

ad(ii): Wegen Korollar 2.2.3 ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ normal und wegen Proposition 2.2.4 folgt schlussendlich, dass jede offene Überdeckung von X eine lokal endliche abgeschlossene Verfeinerung besitzt.

■

Wir wollen nun den Begriff der abgeschlossen bzw. offenen Abbildung definieren, die bei der Untersuchung der Metrisierbarkeit des Bildes eine wichtige Rolle spielen.

Definition 2.2.6. *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{R})$ zwei topologische Räume.*

1. *Eine Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{R})$ heißt offen, falls das Bild jeder offenen Menge offen ist.*

2. *Eine Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{R})$ heißt abgeschlossen, falls das Bild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist.*

Das folgende Lemma zeigt, dass unter stetigen abgeschlossen Abbildungen die Eigenschaft der Normalität eines Raums auf das Bild übertragen wird.

Lemma 2.2.7. *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{R})$ zwei topologische Räume, wobei der Raum $(X, \mathcal{T})$ normal sei. Weiters sei $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{R})$ eine surjektive, stetige und abgeschlossene Abbildung. Dann ist der Raum $(Y, \mathcal{R})$ normal.*

Beweis: Die Eigenschaft eines topologischen Raums das Trennungsaxiom T_1 zu erfüllen kann damit charakterisiert werden, dass alle einpunktigen Teilmengen dieses Raums abgeschlossen sind. Damit folgt, dass das Bild eines T_1-Raums unter einer abgeschlossenen Abbildung wieder ein T_1-Raum ist. Wir wollen nun zeigen, dass der Raum $(Y, \mathcal{R})$ auch das Trennungsaxiom T_4 erfüllt. Es seien U, V zwei offene Teilmengen von Y mit $U \cup V = Y$. Die Mengen $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ sind offen in X und erfüllen $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = X$. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ das Trennungsaxiom T_4 erfüllt, existieren abgeschlossene Teilmengen A_0 und B_0 von X mit $A_0 \subseteq f^{-1}(U), B_0 \subseteq f^{-1}(V)$ und $A_0 \cup B_0 = X$. Die Mengen $A := f(A_0)$ und $B := f(B_0)$ sind abgeschlossen und erfüllen $A \subseteq f(f^{-1}(U)) = U$ und $B \subseteq f(f^{-1}(V)) = V$. Weiters gilt $A \cup B = f(X) = Y$ und damit ist der Raum $(Y, \mathcal{R})$ normal.

■

Lemma 2.2.8. *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{R})$ zwei topologische Räume und $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{R})$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Die Abbildung f ist abgeschlossen.

(ii) Für jede Menge $B \subseteq Y$ und für jede Menge $A \in \mathcal{T}$ mit $f^{-1}(B) \subseteq A$ existiert eine Menge $C \in \mathcal{R}$ die B enthält und $f^{-1}(C) \subseteq A$ erfüllt.

(iii) Für jedes $y \in Y$ und für jede Menge $U \in \mathcal{T}$ mit $f^{-1}(y) \subseteq U$ existiert eine Umgebung V von y mit $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Beweis: Wir zeigen zunächst die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$. Die Abbildung f sei also abgeschlossen. Es sei $B \subseteq Y$ und $A \in \mathcal{T}$ mit $f^{-1}(B) \subseteq A$. Wir definieren nun die Menge $C := Y \backslash f(X \backslash A)$, die offen in Y ist und die Menge B enthält. Weiters gilt

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \backslash f(X \backslash A)) = X \backslash f^{-1}(f(X \backslash A)) \subseteq X \backslash (X \backslash A) = A.$$

Nun wollen wir die Implikation $(ii) \Rightarrow (i)$ zeigen. Es sei F eine abgeschlossene Teilmenge von X. Wir setzen $A := X \backslash F$ und $B := Y \backslash f(F)$. Es gilt

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \backslash f(F)) = X \backslash f^{-1}(f(F)) \subseteq X \backslash F = A.$$

Damit existiert eine Menge $C \in \mathcal{R}$ mit $Y \backslash f(F) \subseteq C$ und $f^{-1}(C) \subseteq X \backslash F$. Aus der ersten Inklusion erhält man $C \cup f(F) = Y$ und aus der zweiten Inklusion folgt $f^{-1}(C) \cap F = \emptyset$, woraus man unmittelbar $C \cap f(F) = \emptyset$ erhält. Insgesamt folgt damit $f(F) = Y \backslash C$, womit die Abbildung f abgeschlossen ist.

Es ist klar, dass aus *(ii)* die Aussage *(iii)* folgt. Wir zeigen nun die Implikation *(iii)* $\Rightarrow$ *(ii)*. Es sei $B \subseteq Y$ und $A \in \mathcal{T}$ mit $f^{-1}(B) \subseteq A$. Wir betrachten nun ein $y \in B$ und setzen $U := A$, dann existiert laut Voraussetzung eine Umgebung V_y von y mit $f^{-1}(V_y) \subseteq A$. Die offene Menge $C := \bigcup_{y \in B} V_y$ erfüllt nun $B \subseteq C$ und $f^{-1}(C) \subseteq A$.

■

Ein zentraler Begriff bei unseren Untersuchungen zur Metrisierbarkeit des Bildes ist die folgende Definition.

Definition 2.2.9. *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{R})$ zwei topologische Räume. Eine stetige Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{R})$ heißt perfekt, falls sie abgeschlossen ist und das Urbild jeder einpunktigen Menge kompakt ist.*

Wir wollen nun zwei wichtige Eigenschaften beweisen, die surjektive perfekte Abbildungen besitzen.

Korollar 2.2.10. *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{R})$ zwei topologische Räume und $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{R})$ eine abgeschlossene Abbildung mit der Eigenschaft, dass für jedes $y \in Y$ die Menge $f^{-1}(y)$ kompakt ist. Weiters sei $\{A_s : s \in S\}$ ein lokal endliches Mengensystem in X. Dann ist $\{f(A_s) : s \in S\}$ ein lokal endliches Mengensystem in Y.*

Beweis: Es sei $y \in Y$. Zu jedem Element aus $f^{-1}(y)$ betrachten wir eine offene Umgebung, die mit fast allen Mengen aus $\{A_s : s \in S\}$ leeren Durchschnitt besitzt. Da die Menge $f^{-1}(y)$ kompakt ist, existieren endlich viele offene Umgebungen, deren Vereinigung eine Obermenge von $f^{-1}(y)$ ist. Diese Vereinigung bezeichnen wir mit U_y und sie besitzt mit fast allen Mengen aus $\{A_s : s \in S\}$ leeren Durchschnitt. Wegen dem dritten Punkt von Lemma 2.2.8 existiert nun eine Umgebung V_y von y mit $f^{-1}(V_y) \subseteq U_y$. Damit erhält man, dass die Menge V_y mit fast allen Mengen aus $\{f(A_s) : s \in S\}$ leeren Durchschnitt besitzt.

■

Korollar 2.2.11. *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{R})$ zwei topologische Räume, wobei $(X, \mathcal{T})$ parakompakt und T_2 sei. Weiters sei $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{R})$ eine surjektive und perfekte Abbildung. Dann ist der Raum $(Y, \mathcal{R})$ parakompakt.*

Beweis: Es sei $\mathcal{V} := \{V_s : s \in S\}$ eine offene Überdeckung von Y. Damit ist $\{f^{-1}(V_s) : s \in S\}$ eine offene Überdeckung von X. Aufgrund des zweiten Punktes von Proposition 2.2.5 existiert eine lokal endliche abgeschlossene Verfeinerung $\{F_s : s \in S\}$ von $\{f^{-1}(V_s) : s \in S\}$. Wegen Korollar 2.2.10 ist $\{f(F_s) : s \in S\}$ eine lokal endliche abgeschlossene Verfeinerung von $\mathcal{V}$. Wegen dem ersten Punkt von Proposition 2.2.5 ist der Raum $(Y, \mathcal{R})$ damit parakompakt.

■

Lemma 2.2.12. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gelten folgende zwei Aussagen:*

(i) Es sei A eine nichtleere Teilmenge von X. Dann ist die Funktion $f : (X, d) \to (\mathbb{R}, |.|) : x \mapsto d(x, A)$ stetig.

(ii) Es sei sei K eine kompakte Teilmenge von X und O eine offene Teilmenge von X die K enthält. Dann existiert ein $r > 0$ mit der Eigenschaft $\bigcup_{x \in K} U_r(x) \subseteq O$.

Beweis: ad(i): Es seien $x, y \in X$. Dann gilt $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$, für alle $a \in A$. Damit erhält man $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ bzw. $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Da d symmetrisch ist erhält ma auch die Aussage $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$ und damit $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$, woraus die Stetigkeit von f folgt.

ad(ii): Es sei K kompakt und O offen mit $O \neq X$ und $K \subseteq O$. Die Abbildung $f : (X, d) \to (\mathbb{R}, |.|) : x \mapsto d(x, X \backslash O)$ ist auf der Menge K positiv und wegen (i) stetig. Weiters ist wegen der Stetigkeit der Abbildung f die Menge $f(K)$ kompakt. Daher existiert ein $r > 0$ mit $d(x, X \backslash O) \geq r$, für alle $x \in K$. Daher gilt $\bigcup_{x \in K} U_r(x) \subseteq O$.

■

Wir kommen nun zu einem der wichtigsten Resultate dieses Abschnitts. Es besagt, dass das Bild eines metrisierbaren Raums unter einer perfekten Abbildung metrisierbar ist.

Satz 2.2.13. *Es seien $(X,\mathcal{T})$ und $(Y,\mathcal{R})$ zwei topologische Räume, wobei $(X,\mathcal{T})$ metrisierbar sei. Weiters sei $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{R})$ eine surjektive und perfekte Abbildung. Dann ist der Raum $(Y,\mathcal{R})$ metrisierbar.*

Beweis: Es sei d eine Metrik auf X, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert. Für jedes $i\in\mathbb{N}$ und für jedes $y\in Y$ definieren wir die Mengen

$$U_{iy}:=\bigcup_{x\in f^{-1}(y)}U_{\frac{1}{i}}(x),\quad W_{iy}:=Y\backslash f(X\backslash U_{iy}),\quad V_{iy}:=f^{-1}(W_{iy})\subseteq U_{iy}.$$

Aufgrund der Definition der Mengen U_{iy} erhält man die Aussage

$$U_{jy}\subseteq U_{iy}\text{ für alle }y\in Y\text{ und }i,j\in\mathbb{N}\text{ mit }j\geq i. \tag{4}$$

Wir betrachten nun für jedes $y\in Y$ das Mengensystem $\mathcal{W}_y:=\{W_{iy}:i\in\mathbb{N}\}$. Jede Menge W_{iy} aus diesem Mengensystem ist eine offene Menge die y enthält. Wir betrachten nun eine Umgebung V von y. Es gilt offensichtlich $f^{-1}(y)\subseteq f^{-1}(V)$. Da die Menge $f^{-1}(y)$ kompakt ist, gilt wegen dem zweiten Punkt von Lemma 2.2.12, dass ein $i\in\mathbb{N}$ existiert mit $U_{iy}\subseteq f^{-1}(V)$. Damit erhalten wir $W_{iy}\subseteq V$. Das Mengensystem $\mathcal{W}_y$ ist also für jedes $y\in Y$ eine Umgebungsbasis des Punktes y. Wir werden nun folgende Aussage nachweisen:

$$\text{Für alle }i\in\mathbb{N}\text{ und für alle }y\in Y\text{ existiert ein }j\in\mathbb{N}\text{ mit der Eigenschaft }\bigcup_{z\in Y,\ y\in W_{jz}}W_{jz}\subseteq W_{iy}. \tag{5}$$

Gegeben sei daher ein $i\in\mathbb{N}$ und ein $y\in Y$. Wegen dem zweiten Punkt von Lemma 2.2.12 und der Aussage (4) existiert ein $j\geq 2i$ mit $U_{jy}\subseteq V_{(2i)y}$, da $f^{-1}(y)$ eine kompakte Teilmenge von $V_{(2i)y}$ ist. Wir betrachten nun einen Punkt $z\in Y$ mit $y\in W_{jz}$. Dann gilt

$$f^{-1}(y)\subseteq V_{jz}\subseteq U_{jz}.$$

Daher existiert zu jedem $x\in f^{-1}(y)$ ein $x'\in f^{-1}(z)$ mit $d(x,x')<\frac{1}{j}$. Damit gilt $U_{jy}\cap f^{-1}(z)\neq\emptyset$. Weiters erhalten wir damit

$$U_{jy}\cap f^{-1}(z)\subseteq V_{(2i)y}\cap f^{-1}(z)\neq\emptyset.$$

Da f surjektiv ist erhalten wir damit

$$f^{-1}(z)\subseteq V_{(2i)y}=f^{-1}(W_{(2i)y}),$$

da mit jedem x, dass in der Menge $V_{(2i)y}$ enthalten ist, die Menge $V_{(2i)y}$ auch die Menge $f^{-1}(f(x))$ enthält.

Wir betrachten nun ein $t\in W_{jz}$. Es gilt $f^{-1}(t)\subseteq U_{jz}$. Daher existiert für jedes $x\in f^{-1}(t)$ ein $x'\in f^{-1}(z)$ mit $d(x,x')<\frac{1}{j}\leq\frac{1}{2i}$. Da $f^{-1}(z)\subseteq V_{(2i)y}\subseteq U_{(2i)y}$ gilt, existiert ein $x''\in f^{-1}(y)$ mit $d(x',x'')<\frac{1}{2i}$. Damit gilt insgesamt $d(x,x'')<\frac{1}{i}$. Damit erhalten wir $f^{-1}(t)\subseteq U_{iy}$. Aus dieser Aussage folgt $t\in W_{iy}$, womit die Aussage (5) bewiesen ist.

Für jedes $i\in\mathbb{N}$ ist das Mengensystem $\mathcal{W}_i:=\{W_{iy}:y\in Y\}$ eine offene Überdeckung von Y. Da der Raum $(X,\mathcal{T})$ metrisierbar ist, ist er wegen Satz 3.12 aus [1] auch parakompakt. Wegen Korollar 2.2.11 existiert damit für jedes $i\in\mathbb{N}$ eine lokal endliche offene Verfeinerung $\mathcal{B}_i$ von $\mathcal{W}_i$. Es sei nun $y\in Y$ und $\mathcal{B}:=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_i$. Wir betrachten das Mengensystem $\mathfrak{B}(y):=\{O\in\mathcal{B}:y\in O\}$. Es sei V eine Umgebung von y. Wir haben bereits nachgewiesen, dass für jedes $y\in Y$ das Mengensystem $\mathcal{W}_y$ eine Umgebungsbasis von y ist. Also existiert ein $i\in\mathbb{N}$ mit $W_{iy}\subseteq V$. Weiters haben wir bereits gezeigt, dass zu diesem $y\in Y$ und $i\in\mathbb{N}$ ein $j\in\mathbb{N}$ existiert, die die Aussage (5) erfüllt. Wir betrachten nun zu diesem $j\in\mathbb{N}$ die Überdeckung $\mathcal{B}_j$. Es existiert ein $B\in\mathcal{B}_j$ mit $y\in B$. Da $\mathcal{B}_j$ eine Verfeinerung von $\mathcal{W}_j$ ist, existiert ein $a\in Y$ mit $y\in B\subseteq W_{ja}$. Mit der Aussage (5) erhalten wir damit

$$y\in B\subseteq W_{ja}\subseteq\bigcup_{z\in Y,y\in W_{jz}}W_{jz}\subseteq W_{iy}\subseteq V$$

womit $\mathfrak{B}(y)$ eine Umgebungsbasis von y ist. Mit Lemma 3.14 aus [1] folgt damit, dass $\mathcal{B}$ eine σ-lokal endliche Basis des Raums $(Y, \mathcal{R})$ ist. Wegen Lemma 2.2.7 ist der Raum $(Y, \mathcal{R})$ normal und daher auch regulär. Wegen dem Metrisierbarkeitssatz von Nagata-Smirnov ist der Raum $(Y, \mathcal{R})$ damit metrisierbar.

■

Die folgende Proposition, die wir im Lemma von Veinstein verwenden werden, werden wir hier nicht beweisen. Diese Aussage wird in der Analysis Vorlesung bewiesen. Man findet einen Beweis zum Beispiel auch in [3].

Proposition 2.2.14. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $K \subseteq X$. Dann ist K kompakt genau dann, falls jede Folge in K einen Häufungspunkt in K besitzt.*

■

Satz 2.2.15 (Lemma von Veinstein). *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{R})$ zwei topologische Räume, wobei $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar sei. Weiters sei $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{R})$ eine surjektive, stetige und abgeschlossene Abbildung. Dann ist für jeden Punkt $y \in Y$, der eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, die Menge $\partial(f^{-1}(y))$ kompakt.*

Beweis: Da in jedem topologischen Raum jede endliche Teilmenge kompakt ist, können wir uns auf Punkte $y \in Y$ beschränken, die eine abzählbare Umgebungsbasis besitzen und für die die Menge $\partial(f^{-1}(y))$ unendlich ist. Es sei nun $y \in Y$ ein solcher Punkt und $A := \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbar unendliche Teilmenge von $\partial(f^{-1}(y))$. Weiters sei d eine Metrik auf X, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert und $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von y. Da die Abbildung f surjektiv, abgeschlossen und stetig ist, sind die Mengen $\{y\}$ und $f^{-1}(y)$ abgeschlossen, deshalb gilt für alle $i \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$x_i \in \partial(f^{-1}(y)) \subseteq f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(V_i).$$

Damit erhalten wir, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Menge $W_i := U_{1/i}(x_i) \cap f^{-1}(V_i)$ eine Umgebung von x_i ist. Wir betrachten nun für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $x'_i \in W_i \backslash f^{-1}(y)$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ existiert ein solches x'_i, da x_i in der Menge $\partial(f^{-1}(y))$ liegt und daher jede Umgebung von x_i mit der Menge $(f^{-1}(y))^c$ nichtleeren Durchschnitt besitzt. Wir fassen nun alle diese Punkte zur Menge $B := \{x'_i : i \in \mathbb{N}\}$ zusammen. Es gilt nun $y \in \overline{f(B)} \backslash f(B)$. Um dies einzusehen gehen wir davon aus, dass y in $f(B)$ liegt. Damit existiert ein $x'_i \in B$ mit $f(x'_i) = y$. Damit gilt dann $f(x'_i) \in f(W_i \backslash f^{-1}(y))$, was offensichtlich falsch ist. Damit kann also y nicht in $f(B)$ liegen. Es sei nun $i \in \mathbb{N}$, dann gilt $f(x'_i) \in V_i \cap f(B)$. Damit schneidet also jede Umgebung von y die Menge $f(B)$. Also liegt y in der Menge $\overline{f(B)}$. Damit erhält man auch die Aussage $B \subsetneq \overline{B}$, denn aus $B = \overline{B}$ würde wegen der Abgeschlossenheit der Abbildung f die Aussage $f(B) = \overline{f(B)}$ folgen. Damit folgt $\mathcal{H}(B) \neq \emptyset$, wobei $\mathcal{H}(B)$ die Menge aller Häufungspunkte von B ist. Da für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Aussage $d(x_i, x'_i) < \frac{1}{i}$ gilt, erhält man damit $\mathcal{H}(A) = \mathcal{H}(B)$. Damit haben wir nachgewiesen, dass jede abzählbar unendliche Teilmenge A von $\partial(f^{-1}(y))$ einen Häufungspunkt besitzt. Da die Menge $\partial(f^{-1}(y))$ abgeschlossen ist, folgt mit Proposition 2.2.14, dass $\partial(f^{-1}(y))$ kompakt ist.

■

Der folgende Satz, der in der Literatur als der Satz von Hanai-Morita-Stone bekannt ist, beantwortet die Frage, welche Bedingungen zur Metrisierbarkeit des Bildes von stetigen abgeschlossen Abbildungen äquivalent sind.

Satz 2.2.16 (Satz von Hanai-Morita-Stone). *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{R})$ zwei topologische Räume, wobei $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar sei. Weiters sei $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{R})$ eine surjektive, stetige und abgeschlossene Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Der Raum $(Y, \mathcal{R})$ ist metrisierbar.

(ii) Der Raum $(Y, \mathcal{R})$ erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom.

(iii) Für jedes $y \in Y$ ist die Menge $\partial(f^{-1}(y))$ kompakt.

Beweis: Die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ ist offensichtlich und die Implikation $(ii) \Rightarrow (iii)$ folgt aus dem Lemma von Veinstein. Wir zeigen daher die Implikation $(iii) \Rightarrow (i)$. Für jedes $y \in Y$ definieren wir eine Menge A_y durch

$$A_y := \begin{cases} \partial(f^{-1}(y)), & \text{falls die Menge } \partial(f^{-1}(y)) \text{ nichtleer ist.} \\ \{x\}, & \text{falls die Menge } \partial(f^{-1}(y)) \text{ leer ist, wobei } x \text{ ein beliebiges Element aus } f^{-1}(y) \text{ ist.} \end{cases}$$

Wir definieren nun die Menge $A := \bigcup_{y \in Y} A_y$. Es gilt

$$X \setminus \bigcup_{y \in Y} A_y = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y) \setminus \bigcup_{y \in Y} A_y = \bigcup_{y \in Y} (f^{-1}(y) \setminus A_y).$$

Da für jedes $y \in Y$ die Menge $f^{-1}(y) \setminus A_y$ offen ist, ist die Menge A abgeschlossen. Wir betrachten nun die Einschränkung der Abbildung f auf die Menge A. Diese Einschränkung $f|_A : (A, \mathcal{T}|_A) \to (Y, \mathcal{R})$ ist abgeschlossen, da jede abgeschlossene Menge B aus $(A, \mathcal{T}|_A)$ dargestellt werden kann als $B = A \cap A'$ mit einer Menge A' die abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$ ist. Damit ist $f(B)$ abgeschlossen, da B abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$ ist. Weiters ist die Abbildung $f|_A$ surjektiv. Sei $y \in Y$ mit $\partial(f^{-1}(y)) \neq \emptyset$. Da $f^{-1}(y)$ abgeschlossen ist, besitzt y ein Urbild. Nun sei $y \in Y$ mit $\partial(f^{-1}(y)) = \emptyset$, dann enthält die Menge A wieder ein Urbild von y. Weiters ist für jedes $y \in Y$ die Menge $(f|_A)^{-1}(y)$ kompakt, da sie einpunktig ist oder mit der Menge $\partial(f^{-1}(y))$ übereinstimmt, die laut Voraussetzung kompakt ist. Damit ist $f|_A$ eine surjektive und perfekte Abbildung auf einem metrisierbaren Raum, womit auch der Raum $(Y, \mathcal{R})$ wegen Satz 2.2.13 metrisierbar ist.

■

Aus dem Satz von Hanai-Morita-Stone erhält man einen weiteren "Typ" von Funktionen, bei denen die Eigenschaft der Metrisierbarkeit auf das Bild vererbt wird.

Korollar 2.2.17. *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{R})$ zwei topologische Räume, wobei $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar sei. Weiters sei $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{R})$ eine surjektive, stetige, abgeschlossene und offene Abbildung. Dann ist der Raum $(Y, \mathcal{R})$ metrisierbar.*

Beweis: Wegen dem Satz von Hanai-Morita-Stone genügt es zu zeigen, dass der Raum $(Y, \mathcal{R})$ das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Wir bertachten einen Punkt $y \in Y$. Da die Abbildung f surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Weiters sei $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis des Punktes x mit der Eigenschaft, dass alle U_i offene Mengen sind. Da f offen ist, besteht das Mengensystem $\{f(U_i) : i \in \mathbb{N}\}$ aus offenen Mengen, die jeweils den Punkt y enthalten. Es sei nun V eine Umgebung des Punktes y, dann existiert wegen der Stetigkeit von f eine Umgebung U von x mit $f(U) \subseteq V$. Damit existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $f(U_i) \subseteq V$, womit das Mengensystem $\{f(U_i) : i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von y ist.

■

Als nächstes werden wir eine weitere Aussage formulieren, die sich aus dem Satz von Hanai-Morita-Stone ergibt. Dafür werden wir den Begriff der Quotiententopologie und der kanonischen Projektion wiederholen.

Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Es bezeichne $X/\sim := \{[x]_\sim : x \in X\}$ die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$. Weiters definieren wir eine Abbildung $\pi : X \to X/\sim : x \mapsto [x]_\sim$ und ein Mengensystem $\mathcal{T}/\sim := \{O \subseteq X/\sim : \pi^{-1}(O) \in \mathcal{T}\}$. Dann ist das Mengensystem $\mathcal{T}/\sim$ eine Topologie auf $X/\sim$ und die Abbildung π ist surjektiv und stetig. Man nennt die Abbildung π die kanonische Projektion auf $(X, \mathcal{T})$ bezüglich der Äquivalenrelation $\sim$ und das Mengensystem $\mathcal{T}/\sim$ die Quotiententopologie auf $X/\sim$. Den topologischen Raum $(X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$ bezeichnet man als Quotientenraum.

Aus dem Satz von Hanai-Morita-Stone folgt nun unmittelbar folgendes Korollar.

Korollar 2.2.18. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein metrisierbarer topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, sodass die kanonische Projektion bezüglich dieser Äquivalenzrelation eine abgeschlossene Abbildung ist. Weiters sei für jedes $x \in X$ die Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ eine kompakte Teilmenge des Raums $(X, \mathcal{T})$. Dann ist der Quotientenraum $(X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$ metrisierbar.*

Beweis: Da für jedes $x \in X$ die Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ eine kompakte Teilmenge des metrisierbaren Raums $(X, \mathcal{T})$ ist, folgt damit, dass alle Äquivalenzklassen auch abgeschlossen sind. Da jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge kompakt ist, folgt damit, dass für jedes $x \in X$ die Menge $\partial([x]_\sim)$ kompakt ist. Aufgrund des Satzes von Hanai-Marita-Stone ist nun der Raum $(X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$ metrisierbar.

■

Unser nächstes Ziel ist es einen Satz zu beweisen, der eine Aussage darüber macht, unter welchen Bedingungen Räume, die eine Überdeckung aus metrisierbaren Teilräumen besitzen, metrisierbar sind. Dabei bezeichnen wir eine Teilmenge eines topologische Raums als metrisierbaren Teilraum, falls diese Menge mit der Spurtopologie metrisierbar ist. Für diese Aussage brauchen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.2.19. *Es sei $((X_s, \mathcal{T}_s))_{s\in S}$ eine Familie von disjunkten topologischen Räumen. Dann ist eine Menge $A \subseteq \bigoplus_{s\in S} X_s$ abgeschlossen in $(\bigoplus_{s\in S} X_s, \bigoplus_{s\in S} \mathcal{T}_s)$ genau dann, falls die Menge $A \cap X_s$ für jedes $s \in S$ abgeschlossen in $(X_s, \mathcal{T}_s)$ ist.*

Beweis: Eine Menge $A \subseteq \bigoplus_{s\in S} X_s$ ist abgeschlossen in $(\bigoplus_{s\in S} X_s, \bigoplus_{s\in S} \mathcal{T}_s)$ genau dann, falls die Menge $(\bigoplus_{s\in S} X_s)\backslash A$ offen ist. Dies ist wegen der Definition der Summentopologie genau dann der Fall, falls für jedes $s_0 \in S$ die Menge $((\bigoplus_{s\in S} X_s)\backslash A) \cap X_{s_0}$ offen in $(X_{s_0}, \mathcal{T}_{s_0})$ ist. Aufgrund der Gleichheit

$$((\bigoplus_{s\in S} X_s)\backslash A) \cap X_{s_0} = X_{s_0}\backslash(A \cap X_{s_0})$$

ist dies genau dann der Fall, falls für jedes $s_0 \in S$ die Menge $A \cap X_{s_0}$ abgeschlossen in $(X_{s_0}, \mathcal{T}_{s_0})$ ist.

■

Proposition 2.2.20. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\{X_s : s \in S\}$ eine lokal endliche abgeschlossene Überdeckung von X mit der Eigenschaft, dass für jedes $s \in S$ der Raum $(X_s, \mathcal{T}|_{X_s})$ metrisierbar ist. Dann ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar.*

Beweis: Es sei $\{X_s : s \in S\}$ eine lokal endliche abgeschlossene Überdeckung von X. Weiters sei $\mathcal{T}_s := \mathcal{T}|_{X_s}$, für jedes $s \in S$. Wir definieren nun für jedes $s \in S$ den topologischen Raum $(X'_s, \mathcal{T}'_s)$ durch

$$X'_s := X_s \times \{s\} \text{ und } \mathcal{T}'_s := \mathcal{T}_s \times \{\emptyset, \{s\}\}.$$

Wir betrachten nun die Abbildung

$$p : (\bigoplus_{s\in S} X'_s, \bigoplus_{s\in S} \mathcal{T}'_s) \to (X, \mathcal{T}) : (x, s) \mapsto x.$$

Wir werden nun zeigen, dass p surjektiv und perfekt ist. Da $\{X_s : s \in S\}$ eine Überdeckung von X ist, ist p surjektiv. Für jedes $x \in X$ definieren wir nun die Menge $S_x := \{s \in S : x \in X_s\}$. Da das Mengensystem $\{X_s : s \in S\}$ lokal endlich ist, ist die Menge S_x endlich. Damit ist die Menge

$$p^{-1}(x) = \bigcup_{s\in S_x} (\{x\} \times \{s\})$$

auch endlich und damit kompakt. Also ist das Urbild jeder einpunktigen Menge kompakt. Wir zeigen nun, dass p stetig ist. Es sei $O \in \mathcal{T}$. Dann gilt

$$p^{-1}(O) = \bigcup_{s\in S} ((O \cap X_s) \times \{s\}).$$

Für jedes $s_0 \in S$ gilt damit $p^{-1}(O) \cap X'_{s_0} = (O \cap X_{s_0}) \times \{s_0\}$. Damit liegt $p^{-1}(O) \cap X'_{s_0}$ in $\mathcal{T}'_{s_0}$. Aufgrund der Definition der Summentopologie gilt $p^{-1}(O) \in \bigoplus_{s\in S} \mathcal{T}'_s$. Damit ist p stetig. Wir werden nun zeigen, dass p abgeschlossen ist. Es sei daher A eine abgeschlossene Teilmenge des Raums $(\bigoplus_{s\in S} X'_s, \bigoplus_{s\in S} \mathcal{T}'_s)$. Wegen Lemma 2.2.19 ist für jedes $s_0 \in S$ die Menge $A \cap X'_{s_0}$ abgeschlossen im Raum $(X'_{s_0}, \mathcal{T}'_{s_0})$. Da X_{s_0} abgeschlossen im Raum $(X, \mathcal{T})$ ist, folgt damit, dass $X_{s_0} \times \{s_0\} = X'_{s_0}$ abgeschlossen im Raum $(X \times \{s_0\}, \mathcal{T} \times \{\emptyset, \{s_0\}\})$ ist. Es gilt

$$\mathcal{T} \times \{\emptyset, \{s_0\}\}|_{X_{s_0}\times\{s_0\}} = \mathcal{T}|_{X_{s_0}} \times \{\emptyset, \{s_0\}\} = \mathcal{T}'_{s_0}.$$

Schränkt man also die Menge $X\times\{s_0\}$ auf die Menge $X_{s_0}\times\{s_0\}$ ein, erhält man den Teilraum $(X'_{s_0},\mathcal{T}'_{s_0})$. Da $A\cap X'_{s_0}$ abgeschlossen im Raum $(X'_{s_0},\mathcal{T}'_{s_0})$ ist, existiert damit eine Menge B, die abgeschlossen im Raum $(X\times\{s_0\},\mathcal{T}\times\{\emptyset,\{s_0\}\})$ ist und $A\cap X'_{s_0}=B\cap X'_{s_0}$ erfüllt. Damit ist die Menge $A\cap X'_{s_0}$ auch abgeschlossen im Raum $(X\times\{s_0\},\mathcal{T}\times\{\emptyset,\{s_0\}\})$. Für jedes $s_0\in S$ definieren wir die Projektion auf die erste Komponente

$$\pi_{1,s_0}:(X\times\{s_0\},\mathcal{T}\times\{\emptyset,\{s_0\}\})\to(X,\mathcal{T}):(x,s_0)\mapsto x.$$

Die Abbildung π_{1,s_0} ist stetig und bijektiv. Da Projektionen offene Abbildungen sind, ist auch die Inverse π_{1,s_0}^{-1} stetig. Da das Mengensystem $\{X_s:s\in S\}$ lokal endlich ist, ist auch das Mengensystem $\{p(A)\cap X_s:s\in S\}$ lokal endlich. Mit Lemma 3.2 aus [1] erhalten wir damit

$$\overline{p(A)}^{\mathcal{T}}=\overline{\bigcup_{s\in S}(p(A)\cap X_s)}^{\mathcal{T}}=\bigcup_{s\in S}\overline{(p(A)\cap X_s)}^{\mathcal{T}}=\bigcup_{s\in S}\overline{\pi_{1,s}(A\cap X'_s)}^{\mathcal{T}}=$$
$$\bigcup_{s\in S}\pi_{1,s}(\overline{A\cap X'_s}^{\mathcal{T}\times\{\emptyset,\{s\}\}})=\bigcup_{s\in S}\pi_{1,s}(A\cap X'_s)=\bigcup_{s\in S}(p(A)\cap X_s)=p(A).$$

Da für jedes $s\in S$ der Raum $(X'_s,\mathcal{T}'_s)$ wegen Satz 2.1.7 metrisierbar ist, ist $(\bigoplus_{s\in S}X'_s,\bigoplus_{s\in S}\mathcal{T}'_s)$ wegen Satz 2.1.6 metrisierbar. Damit ist der Raum $(X,\mathcal{T})$ wegen Satz 2.2.13 metrisierbar.

■

Definition 2.2.21. *Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt lokal metrisierbar, falls für jedes $x\in X$ eine Umgebung U von x existiert mit der Eigenschaft, dass der Teilraum $(U,\mathcal{T}|_U)$ metrisierbar ist.*

Wegen dem zweiten Punkt von Lemma 2.1.5 ist es klar, dass aus der Metrisierbarkeit eines Raums die lokale Metrisierbarkeit folgt. Interessant ist natürlich die Frage ob es Räume gibt, für die diese beiden Begriffe äquivalent sind. Das Folgende Korollar zeigt, dass parakompakte T_2-Räume diese Eigenschaft besitzen.

Korollar 2.2.22. *Es sei $(X,\mathcal{T})$ ein parakompakter T_2-Raum. Dann ist $(X,\mathcal{T})$ metrisierbar genau dann, falls $(X,\mathcal{T})$ lokal metrisierbar ist.*

Beweis: Es sei $(X,\mathcal{T})$ ein parakompakter T_2-Raum der lokal metrisierbar ist. Damit existiert für jeden Punkt $x\in X$ eine offene Menge O_x, die x enthält und metrisierbar ist. Wir fassen alle diese offenen Mengen zu dem Mengensystem $\{O_x:x\in X\}$ zusammen. Da der Raum parakompakt und T_2 ist, folgt aus dem zweiten Punkt von Proposition 2.2.5, dass das Mengensystem $\{O_x:x\in X\}$ eine lokal endliche abgeschlossene Verfeinerung $\mathcal{F}$ besitzt. Da jede Menge aus $\mathcal{F}$ metrisierbar ist, folgt mit Proposition 2.2.20 die Metrisierbarkeit des Raums $(X,\mathcal{T})$.

■

Zum Schluss dieses Abschnitts wollen wir noch kurz auf das Problem eingehen, unter welchen Bedingungen das Urbild einer Abbildung metrisierbar ist, falls das Bild der Abbildung metrisierbar ist. Die im letzten Abschnitt betrachteten perfekten Abbildungen besitzen diese Eigenschaft nicht. Sogar das Urbild einer perfekten und offenen Abbildung deren Bild metrisierbar ist, muss nicht metrisierbar sein. Eine Abbildung die auf einem nichtmetrisierbaren kompakten topologischen Raum definiert ist (zum Beispiel eine mindestens zweielementige Menge mit der Klumpentopologie) und als Zielmenge einen einpunktigen topologischen Raum besitzt ist perfekt und offen, hat aber kein metrisierbares Urbild. Wir wollen hier ohne Beweis erwähnen, dass Abbildungen die perfekt und offen sind, deren Bild metrisierbar ist und zusätzlich die Eigenschaft besitzen, dass das Urbild jeder einpunktigen Menge nicht nur kompakt, sondern sogar endlich ist, die Eigenschaft haben, das ihr Urbild metrisierbar ist.

3 Metrisierbarkeit von Kompaktifizierungen

Das Ziel in diesem Kapitel ist es zunächst eine Aussage zu gewinnen, die eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von metrisierbaren Kompaktifizierungen angibt. Aufbauend auf dieser Aussage werden wir dann die Frage der Metrisierbarkeit für unterschiedliche Raumklassen beantworten. Zwei Kompaktifizierungen, nämlich die Alexandroff-Kompaktifizierung und die Stone-Cech-Kompaktifizierung, werden wir dann genauer untersuchen.

Zunächst wollen wir den Begriff der Kompaktifizierung definieren und einen Existenzsatz für Kompaktifizierungen herleiten. Dafür müssen wir einiges an Vorarbeit leisten. Ein Begriff der eng mit dem Begriff der Kompaktifizierung zusammenhängt ist der Folgende.

Definition 3.1. *Ein topologischer T_1-Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt vollständig regulär, falls für jedes $x \in X$ und jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ die x nicht enthält eine stetige Funktion $f : (X, \mathcal{T}) \to ([0, 1], \mathcal{E}|_{[0,1]})$ existiert mit $f(A) = \{1\}$ und $f(x) = 0$. Diese Eigenschaft eines topologischen Raums wird auch als Trennungsaxiom $T_{3.5}$ bezeichnet.*

Lemma 3.2. *Es gelten folgende zwei Aussagen:*

(i) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein normaler topologischer Raum. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär.

(ii) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer topologischer Raum. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ regulär.

Beweis: ad(i): Diese Aussage ergibt sich sofort aus der Tatsache, dass ein Raum das Trennungsaxiom T_1 erfüllt genau dann, falls alle einpunktigen Teilmengen abgeschlossen sind und aus dem Lemma von Urysohn(Satz 3.6 aus [1]), das eine Charakterisierung der T_4-Räume angibt.

ad(ii): Es sei A eine abgeschlossene Teilmenge von X und $x \in X$ mit $x \notin A$. Dann existiert eine stetige Funktion $f : (X, \mathcal{T}) \to ([0, 1], \mathcal{E}|_{[0,1]})$ mit $f(A) = \{1\}$ und $f(x) = 0$. Damit ist $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ eine offene Menge die x enthält und $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ eine offene Menge die A enthält. Weiters sind diese beiden Mengen disjunkt.

■

Proposition 3.3. *Es gelten folgende zwei Aussagen:*

(i) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Dann ist der Raum $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ vollständig regulär.

(ii) Es sei $((X_s, \mathcal{T}_s))_{s\in S}$ eine Familie von topologischen Räumen. Dann ist der Produktraum $(\prod_{s\in S} X_s, \prod_{s\in S} \mathcal{T}_s)$ vollständig regulär genau dann, falls für jedes $s \in S$ der Raum $(X_s, \mathcal{T}_s)$ vollständig regulär ist.

Beweis: ad(i): Da das Trennungsaxiom T_1 äquivalent ist der zur Aussage ist, dass alle einpunktigen Mengen abgeschlossen sind, ist es offensichtlich, dass diese Eigenschaft eines topologischen Raums auf jeden Teilraum vererbt wird. Wir zeigen nun, dass das Trennungsaxiom $T_{3.5}$ ebenfalls diese Eigenschaft besitzt. Es sei $x \in Y$ und A eine abgeschlossene Teilmenge des Raums $(Y, \mathcal{T}|_Y)$, die x nicht enthält. Dann existiert eine abgeschlossene Teilmenge A' des Raums $(X, \mathcal{T})$ mit $A = A' \cap Y$. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär ist, existiert per Definition eine stetige Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to ([0, 1], \mathcal{E}|_{[0,1]})$ mit $f(A') = \{1\}$ und $f(x) = 0$. Ist nun $l : (Y, \mathcal{T}|_Y) \to (X, \mathcal{T})$ die kanonische Einbettung, dann ist $f \circ l : (Y, \mathcal{T}|_Y) \to ([0, 1], \mathcal{E}|_{[0,1]})$ eine stetige Abbildung mit $(f \circ l)(A) = \{1\}$ und $(f \circ l)(x) = 0$. Damit ist der Raum $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ vollständig regulär.

ad(ii): Wir gehen zunächst davon aus, dass alle Räume $(X_s, \mathcal{T}_s)$ vollständig regulär sind. Wir wollen zunächst die Eigenschaft T_1 für den Produktraum nachweisen. Es seien $(x_s)_{s\in S}, (y_s)_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s$ mit $x_{s_0} \neq y_{s_0}$. Wir definieren nun die Mengen $U := \prod_{s\in S} U_s$ und $V := \prod_{s\in S} V_s$. Für diese beiden Mengen gelte $U_s = V_s = X_s$, für alle $s \in S\backslash\{s_0\}$. Weiters sei U_{s_0} eine Umgebung von x_{s_0} und V_{s_0} eine Umgebung von y_{s_0} mit $x \notin V_{s_0}$ und $y \notin U_{s_0}$. Solche Umgebungen existieren, da der Raum $(X_{s_0}, \mathcal{T}_{s_0})$ das Trennungsaxiom T_1 erfüllt. Damit ist U eine Umgebung von $(x_s)_{s\in S}$ und V eine Umgebung von $(y_s)_{s\in S}$ mit $(x_s)_{s\in S} \notin V$ und $(y_s)_{s\in S} \notin U$, womit der Produktraum das Trennungsaxiom T_1 erfüllt. Wir zeigen nun, dass der Produktraum das Trennungsaxiom $T_{3.5}$ erfüllt. Es sei $x := (x_s)_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s$ und $A \subseteq \prod_{s\in S} X_s$ eine abgeschlossene Teilmenge des Produktraums, die x nicht enthält. Damit ist $U := A^c$ eine offene Menge die x enthält, also existiert eine offene Menge $O := \prod_{s\in S} O_s$ mit $O \subseteq U$ und mit der Eigenschaft, dass für jedes $s \in S$ die Menge O_s offen ist und x_s enthält. Für fast alle $s \in S$ gilt $O_s = X_s$. Wir betrachten nun die Menge $S_0 := \{s \in S : O_s \neq X_s\} = \{s_1, ..., s_n\}$. Da der Raum $(X_{s_i}, \mathcal{T}_{s_i})$ für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ das Trennungsaxiom $T_{3.5}$ erfüllt, existiert für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ eine stetige Funktion

$f_{s_i} : (X_{s_i}, \mathcal{T}_{s_i}) \to ([0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]})$ mit der Eigenschaft $f_{s_i}(x_{s_i}) = 0$ und $f_{s_i}(O^c_{s_i}) = \{1\}$. Damit ist für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ die Funktionen

$$f_{s_i} \circ \pi_{s_i} : (\prod_{s\in S} X_s, \prod_{s\in S} \mathcal{T}_s) \to ([0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]})$$

stetig, wobei π_{s_i} die kanonische Projektion auf die s_i-te Komponente bezeichnet. Damit ist auch die Funktion

$$f : (\prod_{s\in S} X_s, \prod_{s\in S} \mathcal{T}_s) \to ([0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]}) : y \mapsto \max_{i\in\{1,\dots,n\}} (f_{s_i} \circ \pi_{s_i})(y)$$

stetig. Nun gilt $f(x) = 0$ und $f(A) = \{1\}$. Damit ist der Produktraum vollständig regulär.

Nun setzen wir voraus, dass der Produktraum vollständig regulär ist. Wir zeigen zunächst, dass für jedes $s \in S$ der Raum $(X_s, \mathcal{T}_s)$ das Trennungsaxiom T_1 erfüllt. Es sei $s_0 \in S$ und $x_{s_0}, y_{s_0} \in X_{s_0}$ mit $x_{s_0} \neq y_{s_0}$. Ausgehend von diesen beiden Punkten betrachten wir nun zwei Elemente des Produktraums $x := (x_s)_{s\in S}, y := (y_s)_{s\in S}$ mit $x_s = y_s$, für alle $s \in S\backslash\{s_0\}$. Da der Produktraum das Trennungsaxiom T_1 erfüllt existieren nun Umgebungen U von x und V von y mit $x \notin V$ und $y \notin U$. Damit existieren Umgebungen U_{s_0} von x_{s_0} und V_{s_0} von y_{s_0} mit $x_{s_0} \notin V_{s_0}$ und $y_{s_0} \notin U_{s_0}$, womit der Raum $(X_{s_0}, \mathcal{T}_{s_0})$ das Trennungsaxiom T_1 erfüllt. Zum Schluss zeigen wir noch, dass der Raum $(X_{s_0}, \mathcal{T}_{s_0})$ das Trennungsaxiom $T_{3.5}$ erfüllt. Es sei $x_{s_0} \in X_{s_0}$ und $A \subseteq X_{s_0}$ eine abgeschlossene Teilmenge von X_{s_0}, die x_{s_0} nicht enthält. Nun betrachten wir den Punkt $x := (x_s)_{s\in S}$, wobei x_s für jedes $s \in S\backslash\{s_0\}$ ein beliebiges Element aus X_s sei. Weiters betrachten wir die Menge $A' := \prod_{s\in S} A_s$ mit $A_s = X_s$ für alle $s \in S\backslash\{s_0\}$ und $A_{s_0} = A$. Die Menge A' ist abgeschlossen und enthält nicht den Punkt x. Damit existiert eine stetige Funktion $f : (\prod_{s\in S} X_s, \prod_{s\in S} \mathcal{T}_s) \to ([0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]})$ mit $f(x) = 0$ und $f(A') = \{1\}$. Wir definieren jetzt die stetige Abbildung

$$g_{s_0} : (X_{s_0}, \mathcal{T}_{s_0}) \to (\prod_{s\in S} X_s, \prod_{s\in S} \mathcal{T}_s) : y_{s_0} \mapsto (y_s)_{s\in S}$$

wobei y_s für jedes $s \in S\backslash\{s_0\}$ fest ist und $y_s = x_s$ erfüllt. Weiters definieren wir die Abbildung

$$f \circ g_{s_0} : (X_{s_0}, \mathcal{T}_{s_0}) \to ([0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]}).$$

Diese Abbildung ist als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig und erfüllt $(f \circ g_{s_0})(x_{s_0}) = 0$ und $(f \circ g_{s_0})(A) = \{1\}$, womit der Raum $(X_{s_0}, \mathcal{T}_{s_0})$ das Trennungsaxiom $T_{3.5}$ erfüllt. Damit ist der Raum $(X_{s_0}, \mathcal{T}_{s_0})$ vollständig regulär.

■

Definition 3.4. *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{R})$ zwei topologische Räume.*

1. *Eine bijektive Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{R})$ heißt ein Homöomorphismus, falls f und f^{-1} stetig sind.*
2. *Die Räume $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{R})$ heißen homöomorph, falls mindestens ein Homöomorphismus zwischen ihnen existiert.*

Satz 3.5 (Einbettungssatz von Tychonoff). *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär genau dann, falls eine Menge S existiert, sodass der Raum $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einem Teilraum des Produkteraums $(\prod_{s\in S}[0,1], \prod_{s\in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))$ ist.*

Beweis: Wir gehen zunächst davon aus, dass eine Menge S existiert, sodass der Raum homöomorph zu einem Teilraum des Produktraums $(\prod_{s\in S}[0,1], \prod_{s\in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))$ ist. Aufgrund von Korollar 3.2 ist jeder metrisierbare topologische Raum vollständig regulär. Damit ist auch der Raum $([0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]})$ vollständig regulär. Wegen Proposition 3.3 ist damit auch der Raum $(\prod_{s\in S}[0,1], \prod_{s\in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))$ vollständig regulär. Damit ergibt sich, dass der Raum $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär ist.

Wir wollen nun voraussetzen, dass der Raum $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär ist. Es sei S die Menge aller stetigen Abbildungen $f : (X, \mathcal{T}) \to ([0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]})$, dann ist die Menge S punktrennend, das heißt, zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ existiert eine Funktion $f \in S$ mit der Eigenschaft $f(x) \neq f(y)$. Dies folgt sofort aus der Eigenschaft, dass der Raum $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär ist. Damit ist die Abbildung

$$\Phi : (X, \mathcal{T}) \to (\prod_{f \in S} [0,1], \prod_{f \in S} (\mathcal{E}|_{[0,1]})) : x \mapsto (f(x))_{f \in S}$$

injektiv. Da für jedes $f \in S$ die Abbildung

$$\pi_f \circ \Phi : (X, \mathcal{T}) \to ([0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]}) : x \mapsto f(x)$$

stetig ist, folgt aufgrund der Konstruktion der Produkttopologie, dass die Abbildung Φ stetig ist. Damit folgt insgesamt also, dass die Abbildung

$$\Phi' : (X, \mathcal{T}) \to (\Phi(X), (\prod_{f \in S} (\mathcal{E}|_{[0,1]}))|_{\Phi(X)}) : x \mapsto (f(x))_{f \in S}$$

bijektiv und stetig ist. Wir werden nun zeigen, dass Φ' sogar ein Homöomorphismus ist. Dazu müssen wir noch zeigen, dass $(\Phi')^{-1}$ ebenfalls stetig ist. Es sei $x' \in \Phi(X)$ und $x \in X$ mit $x = (\Phi')^{-1}(x')$. Weiters sei O eine offene Teilmenge von X die x enthält. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ das Trennungaxiom $T_{3.5}$ erfüllt, existiert eine stetige Funktion $f : (X, \mathcal{T}) \to ([0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]})$ mit $f(x) = 0$ und $f(O^c) = \{1\}$. Wir definieren nun die Menge $V := \pi_f^{-1}([0,1))$, die in der Produkttopologie $\prod_{f \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]})$ liegt. Aufgrund der Tatsache $f(x) = 0 \in [0,1)$ liegt der Punkt x' in V. Damit ist die Menge $V \cap \Phi(X)$ eine offene Umgebung des Punktes x' im Raum $(\Phi(X), (\prod_{f \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))|_{\Phi(X)})$. Nun betrachten wir einen Punkt $x'' \in (\Phi')^{-1}(V \cap \Phi(X))$. Für diesen Punkt x'' gilt $f(x'') \in [0,1)$. Damit gilt $x'' \in O$. Wir haben also die Mengeninklusion $(\Phi')^{-1}(V \cap \Phi(X)) \subseteq O$ nachgewiesen, womit auch die Abbildung $(\Phi')^{-1}$ stetig ist. Damit existiert eine Menge S, sodass der Raum $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einem Teilraum des Raums $(\prod_{f \in S}[0,1], \prod_{f \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))$ ist.

■

Definition 3.6. *Es sei X eine Menge und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, wobei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X bezeichnet. Dann heißt $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(F1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(F2) $\forall A, B \in \mathcal{P}(X) : (A \in \mathcal{F} \land A \subseteq B) \Rightarrow B \in \mathcal{F}$

(F3) $\forall A, B \in \mathcal{P}(X) : A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X, der ein maximales Element der Menge aller Filter auf X bezüglich der Mengeninklusion $\subseteq$ ist, heißt ein Ultrafilter auf X.

Lemma 3.7. *Es sei X eine Menge. Dann gelten folgende zwei Aussagen:*

(i) Es sei $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem, das die endliche Durschnittseigenschaft besitzt, das heißt, der Durchschnitt von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{F}'$ ist stets nichtleer. Dann existiert ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf X mit $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$.

(ii) Es sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Filter auf X. Dann ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X genau dann, falls folgende Bedingung erfüllt ist: Eine Teilmenge A von X, die mit jeder Menge aus $\mathcal{F}$ nichtleeren Durchschnitt besitzt, liegt in $\mathcal{F}$.

Beweis: ad(i): Wir wollen zunächst festhalten, dass das Mengensystem

$$\mathcal{M} := \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F},\ \mathcal{F} \text{ besitzt die endliche Durchschnittseigenschaft}\}$$

mit der Mengeninklusion $\subseteq$ eine halbgeordnete Menge ist. Wir betrachten nun eine totalgeornete Teilmenge $\{\mathcal{F}_s : s \in S\}$ dieser Halbordnung und definieren das Mengensystem $\mathcal{F} := \bigcup_{s \in S} \mathcal{F}_s$. Es gilt offensichtlich $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$. Es seien nun $F_1, ..., F_n$ endlich viele Mengen aus $\mathcal{F}$. Dann existiert für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ ein Mengensystem $\mathcal{F}_{s_i}$ mit $s_i \in S$ und mit der Eigenschaft $F_i \in \mathcal{F}_{s_i}$. Da die Menge $\{\mathcal{F}_s : s \in S\}$ totalgeordnet ist, besitzt die Menge $\{\mathcal{F}_{s_i} : i \in \{1, ..., n\}\}$ ein größtes Element. Dieses sei

$\mathcal{F}_{s_k}$ mit $k \in \{1, ..., n\}$. Damit gilt also $F_i \in \mathcal{F}_{s_k}$, für alle $i \in \{1, ..., n\}$. Da das Mengensystem $\mathcal{F}_{s_k}$ die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, besitzt $\mathcal{F}$ damit auch die endliche Durchschnittseigenschaft. Wir haben damit nachgewiesen, dass das Mengensystem $\mathcal{F}$ eine obere Schranke der Menge $\{\mathcal{F}_s : s \in S\}$ ist, die in der Menge $\mathcal{M}$ liegt. Wegen dem Lemma von Zorn gibt es daher mindestens ein maximales Element in $\mathcal{M}$.

Es sei nun $\mathcal{F}$ ein maximales Element der Halbordnung $(\mathcal{M}, \subseteq)$. Wir werden nun zeigen, dass $\mathcal{F}$ ein Filter auf X ist. Es ist offensichtlich, dass (F1) erfüllt ist. Es seien nun A und B Teilmengen von X, mit $A \in \mathcal{F}$ und $A \subseteq B$. Dann gilt $\{B\} \cup \mathcal{F} \in \mathcal{M}$ und $\mathcal{F} \subseteq \{B\} \cup \mathcal{F}$. Aufgrund der Maximalität von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{M}$ folgt damit $\mathcal{F} \cup \{B\} = \mathcal{F}$. Damit liegt die Menge B in $\mathcal{F}$. Es seien nun $A, B \in \mathcal{F}$. Dann gilt wieder $\mathcal{F} \cup \{A \cap B\} \in \mathcal{M}$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F} \cup \{A \cap B\}$. Aufgrund der Maximalität von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{M}$ folgt damit $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \{A \cap B\}$. Damit liegt $A \cap B$ in $\mathcal{F}$, womit $\mathcal{F}$ ein Filter auf X ist mit $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$. Es sei $\mathcal{F}''$ ein weiterer Filter auf X mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}''$. Dann gilt $\mathcal{F}'' \in \mathcal{M}$. Aufgrund der Maximalität von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{M}$ folgt damit $\mathcal{F} = \mathcal{F}''$. Damit folgt, dass $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X ist mit $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$.

ad(ii): Wir gehen zunächst davon aus, dass $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X ist. Es sei A eine Teilmenge von X mit $A \cap F \neq \emptyset$, für alle $F \in \mathcal{F}$. Das Mengensystem $\mathcal{F}' := \mathcal{F} \cup \{A\}$ besitzt die endliche Durchschnittseigenschaft. Wegen (i) existiert damit ein Ultrafilter $\mathcal{F}''$ auf X mit der Eigenschaft $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}''$. Da $\mathcal{F}$ selbst ein Ultrafilter auf X ist, gilt damit $\mathcal{F} = \mathcal{F}''$. Damit liegt die Menge A in $\mathcal{F}$. Wir wollen nun die Umkehrung dieser Aussage zeigen. Wir gehen davon aus, dass $\mathcal{F}$ ein Filter auf X ist, der aber kein Ultrafilter ist. Wegen (i) existiert ein Ultrafilter $\mathcal{F}''$ auf X mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}''$ und $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}''$. Dann hat jedes $A \in \mathcal{F}'' \backslash \mathcal{F}$ die Eigenschaft $A \cap F \neq \emptyset$, für alle $F \in \mathcal{F}$.

■

Definition 3.8. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $x \in X$, das Mengensystem $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Filter auf X und $\mathfrak{U}(x)$ der Umgebungsfilter von x.*

1. *Der Punkt $x \in X$ heißt ein Grenzwert des Filters $\mathcal{F}$, falls gilt $\mathfrak{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$.*
2. *Der Filter $\mathcal{F}$ heißt konvergent, falls er mindestens einen Grenzwert in X besitzt.*
3. *Der Punkt $x \in X$ heißt ein Häufungspunkt des Filters $\mathcal{F}$, falls für jede Menge $A \in \mathcal{F}$ gilt $x \in \overline{A}$.*

Korollar 3.9. *Es sei X eine Menge und $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Dann ist jeder Häufungspunkt von $\mathcal{F}$ auch ein Grenzwert von $\mathcal{F}$.*

Beweis: Es sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Weiters sei $x \in X$ ein Häufungspunkt von $\mathcal{F}$. Es sei $U \in \mathfrak{U}(x)$ und $F \in \mathcal{F}$, dann gilt $U \cap F \neq \emptyset$. Wegen dem zweiten Punkt von Lemma 3.7 folgt damit, dass U in $\mathcal{F}$ liegt.

■

Proposition 3.10. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ kompakt genau dann, falls jeder Ultrafilter auf X konvergiert.*

Beweis: Wir gehen davon aus, dass der Raum $(X, \mathcal{T})$ nicht kompakt ist und werden zeigen, dass es dann einen Ultrafilter auf X gibt, der nicht konvergiert. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ nicht kompakt ist, existiert eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Deshalb besitzt das Mengensystem $\mathcal{F}' := \{O^c : O \in \mathcal{U}\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Wegen dem ersten Punkt von Lemma 3.7 existiert ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf X mit $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$. Wir wollen nun annehmen, dass der Ultrafilter $\mathcal{F}$ konvergiert. Es existiere also ein Grenzwert x des Filters $\mathcal{F}$. Damit ist x offensichtlich auch ein Häufungspunkt von $\mathcal{F}$. Deswegen erhalten wir

$$x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \subseteq \bigcap_{O \in \mathcal{U}} \overline{O^c} = \bigcap_{O \in \mathcal{U}} O^c.$$

Dies ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X ist. Wir haben also damit nachgewiesen, dass ein topologische Raum in dem jeder Ultrafilter konvergiert auch kompakt ist.

Wir wollen nun die Umkehrung dieser Aussage nachweisen. Der Raum $(X, \mathcal{T})$ sei kompakt und $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Daher besitzt $\mathcal{F}$ insbesondere die endliche Durschnittseigenschaft. Damit hat auch das Mengensystem $\overline{\mathcal{F}} := \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$ die endliche Durchscnittseigenschaft. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ kompakt ist, folgt damit $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \neq \emptyset$. Da dies genau die Menge aller Häufungspunkte von $\mathcal{F}$ ist, folgt damit, dass $\mathcal{F}$ einen Häufungspunkt besitzt. Wegen Korollar 3.9 ist der Ultrafilter $\mathcal{F}$ damit konvergent.

■

Satz 3.11 (Produktsatz von Tychonoff). *Es sei* $((X_s, \mathcal{T}_s))_{s\in S}$ *eine Familie von topologischen Räumen. Dann ist der Produktraum* $(\prod_{s\in S} X_s, \prod_{s\in S} \mathcal{T}_s)$ *kompakt genau dann, falls für jedes* $s \in S$ *der Raum* $(X_s, \mathcal{T}_s)$ *kompakt ist.*

Beweis: Der Produktraum $(\prod_{s\in S} X_s, \prod_{s\in S} \mathcal{T}_s)$ sei kompakt. Da für jedes $s \in S$ die Projektion π_s auf die s-te Komponente eine stetige Abbildung ist und unter einer stetigen Abbildung das Bild jeder kompakten Menge kompakt ist, folgt damit, dass für jedes $s \in S$ der Raum $(X_s, \mathcal{T}_s)$ kompakt ist.

Wir wollen nun die Umkehrung dieser Aussage beweisen. Es sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $\prod_{s\in S} X_s$, dann gilt, dass für jedes $s \in S$ das Mengensystem $\pi_s(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter auf X_s ist. Es gilt offensichtlich, dass $\emptyset \notin \pi_s(\mathcal{F})$, also ist (F1) erfüllt. Es sei nun $F \in \mathcal{F}$ und $\pi_s(F) \subseteq B$. Damit gilt $F \subseteq \pi_s^{-1}(B)$ und daher gilt $\pi_s^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Daraus folgt $B = \pi_s(\pi_s^{-1}(B)) \in \pi_s(\mathcal{F})$. Damit ist (F2) erfüllt. Es seien nun F_1 und F_2 aus $\mathcal{F}$. Dann gilt $\pi_s(F_1 \cap F_2) \subseteq \pi_s(F_1) \cap \pi_s(F_2)$ und damit liegt die Menge $\pi_s(F_1) \cap \pi_s(F_2)$ in $\pi_s(\mathcal{F})$. Damit ist (F3) erfüllt. Also ist für jedes $s \in S$ das Mengensystem $\pi_s(\mathcal{F})$ ein Filter auf X_s. Es sei $A \subseteq X_s$ mit $A \cap \pi_s(F) \neq \emptyset$, für alle $F \in \mathcal{F}$. Damit gilt $\pi_s^{-1}(A) \cap F \neq \emptyset$, für alle $F \in \mathcal{F}$. Wegen dem zweiten Punkt von Lemma 3.7 folgt damit $\pi_s^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. Daraus folgt $A \in \pi_s(\mathcal{F})$. Wegen dem zweiten Punkt von Lemma 3.7 ist damit $\pi_s(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter auf X_s.

Da jeder Raum $(X_s, \mathcal{T}_s)$ kompakt ist gilt wegen Proposition 3.10, dass jeder Ultrafilter $\pi_s(\mathcal{F})$ konvergiert. Für jedes $s \in S$ sei x_s ein Grenzwert des Filters $\pi_s(\mathcal{F})$. Wir werden nun zeigen, dass $(x_s)_{s\in S}$ ein Grenzwert des Filters $\mathcal{F}$ ist. Es sei U eine Menge der Gestalt

$$U := \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{s_i}^{-1}(U_{s_i}) \tag{6}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $s_1, ..., s_n \in S$. Weiters sei für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ die Menge U_{s_i} eine Umgebung von x_{s_i} im Raum $(X_{s_i}, \mathcal{T}_{s_i})$. Da für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ der Filter $\pi_{s_i}(\mathcal{F})$ gegen x_{s_i} konvergiert, folgt damit $U_{s_i} \in \pi_{s_i}(\mathcal{F})$. Damit existiert für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ eine Menge $F_i \in \mathcal{F}$ mit $\pi_{s_i}(F_i) = U_{s_i}$. Für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ gilt $F_i \subseteq \pi_{s_i}^{-1}(U_{s_i})$ und daraus erhalten wir

$$U \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{F}.$$

Damit gilt $U \in \mathcal{F}$. Da die Mengen der Gestalt (6) eine Umgebungsbasis des Punktes $x := (x_s)_{s\in S}$ im Produktraum bilden, konvergiert der Filter $\mathcal{F}$ gegen den Punkt x. Wegen Proposition 3.10 ist damit der Produktraum kompakt.

■

Definition 3.12. *Es seien* $(X, \mathcal{T})$ *und* $(Y, \mathcal{R})$ *zwei topologische Räume. Weiters sei* $l : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{R})$ *eine Abbildung. Das Paar* $(l, (Y, \mathcal{R}))$ *heißt eine Kompaktifizierung von* $(X, \mathcal{T})$*, falls der Raum* $(Y, \mathcal{R})$ *ein kompakter* T_2*-Raum ist und die Abbildung* l *ein Homöomorphismus von* $(X, \mathcal{T})$ *auf* $(l(X), \mathcal{R}|_{l(X)})$ *mit der Eigenschaft* $\overline{l(X)}^{\mathcal{R}} = Y$.

Wir werden in dieser Arbeit sowohl das Paar $(l, (Y, \mathcal{R}))$ als auch den Raum $(Y, \mathcal{R})$ selbst als Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$ bezeichnen.

Mit den bisher hergeleiteten Sätzen können wir nun eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz von Kompaktifizierungen angeben.

Korollar 3.13. *Es sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein topologischer Raum. Dann besitzt* $(X, \mathcal{T})$ *eine Kompaktifizierung genau dann, falls der Raum* $(X, \mathcal{T})$ *vollständig regulär ist.*

Beweis: Wir gehen zunächst davon aus, dass der Raum $(X, \mathcal{T})$ eine Kompaktifizierung $(l, (Y, \mathcal{R}))$ besitzt. Da der Raum $(Y, \mathcal{R})$ ein kompakter T_2-Raum ist, ist es offensichtlich, dass er auch ein parakompakter T_2-Raum ist. Damit ist $(X, \mathcal{T})$ wegen Korollar 2.2.3 normal. Nun folgt wegen Korollar 3.2, dass $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär ist.

Ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ umgekehrt vollständig regulär, dann existiert wegen dem Einbettungssatz von Tychonoff eine Menge S, sodass der Raum $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einem Teilraum des Produktraums

$(\prod_{s\in S}[0,1], \prod_{s\in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))$ ist. Dieser Homöomorphismus sei $l : (X, \mathcal{T}) \to (l(X), (\prod_{s\in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))|_{l(X)})$. Wegen dem Produktsatz von Tychonoff ist der Raum $(\prod_{s\in S}[0,1], \prod_{s\in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))$ kompakt. Da $\overline{l(X)}$ eine abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raums $(\prod_{s\in S}[0,1], \prod_{s\in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))$ ist, ist der Raum $(\overline{l(X)}, (\prod_{s\in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))|_{\overline{l(X)}})$ kompakt. Damit ist das Paar $(l, (\overline{l(X)}, (\prod_{s\in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))|_{\overline{l(X)}}))$ eine Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$.

■

Satz 3.14 (Einbettungssatz von Urysohn). *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein regulärer topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einem Teilraum des Produktraums $(\prod_{n\in\mathbb{N}}[0,1], \prod_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))$.*

Beweis: Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ regulär ist und eine abzählbare Basis besitzt, folgt aus dem Metrisierbarkeitssatz von Nagata-Smirnov, dass er metrisierbar ist. Damit ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ auch normal. Es sei nun $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis des Raums $(X, \mathcal{T})$. Wir definieren nun ein Mengensystem $\mathcal{M} := \{(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : \overline{U} \subseteq V\}$. Da $\mathcal{B}$ abzählbar ist, ist auch $\mathcal{M}$ abzählbar und wir können $\mathcal{M}$ schreiben als $\mathcal{M} := \{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $M_n := (U_n, V_n)$. Damit existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ wegen dem Lemma von Urysohn eine stetige Funktion $f_n : (X, \mathcal{T}) \to ([0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]})$ mit $f_n(U_n) = \{0\}$ und $f_n(V_n^c) = \{1\}$. Wir betrachten nun die Abbildung

$$f : (X, \mathcal{T}) \to (\prod_{n\in\mathbb{N}}[0,1], \prod_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{E}|_{[0,1]})) : x \mapsto (\frac{1}{n}f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Da wir auf dem Raum $\prod_{n\in\mathbb{N}}[0,1]$ die Produkttopologie definiert haben, ist die Abbildung f stetig, da sie komponentenweise stetig ist. Es seien nun $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ das Trennungsaxiom T_1 erfüllt, existiert eine offene Umgebung $V \in \mathcal{B}$ von x, die y nicht enthält. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ regulär ist, gibt es eine offene Umgebung $U \in \mathcal{B}$ von x mit $\overline{U} \subseteq V$. Damit existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x) \in f_n(U) = \{0\}$ und $f_n(y) \in f_n(V^c) = \{1\}$. Damit ist die Abbildung f injektiv. Wir wollen nun zeigen, dass die Abbildung

$$f^{-1} : (f(X), (\prod_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))|_{f(X)}) \to (X, \mathcal{T})$$

stetig ist. Es sei $x \in X$ eine W eine offene Umgebung von x. Wir wählen nun $U, V \in \mathcal{B}$ mit

$$x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V \subseteq W.$$

Damit existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x) = 0$ und $f_n(y) = 1$, für alle $y \in W^c$. Damit erhalten wir

$$f^{-1}\Big(\pi_n^{-1}\big(U_{\frac{1}{n}}(\pi_n(f(x)))\big) \cap f(X)\Big) \subseteq W.$$

Damit ist die Abbildung f^{-1} ebenfalls stetig, womit f ein Homöomorphismus auf sein Bild ist.

■

Definition 3.15. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$. Dann heißt M total beschränkt, falls für jedes $\epsilon > 0$ eine endliche Anzahl von Punkten $x_1, ..., x_n \in M$ existiert mit der Eigenschaft $M \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_\epsilon(x_i)$.*

Wir können nun eine Aussage formulieren, die eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz von metrisierbaren Kompaktifizierungen angibt.

Satz 3.16. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer topologischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ besitzt eine metrisierbare Kompaktifizierung.

(ii) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ ist metrisierbar und es existiert eine Metrik d auf X, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert, sodass der metrische Raum (X, d) total beschränkt ist.

(iii) *Der Raum $(X, \mathcal{T})$ besitzt eine abzählbare Basis.*

Beweis: Wir werden zunächst die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ zeigen. Es sei $(l, (Y, \mathcal{R}))$ eine metrisierbare Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$. Es sei d' eine Metrik auf Y, die die Topologie $\mathcal{R}$ induziert. Da der metrische Raum (Y, d') kompakt ist, ist er auch total beschränkt. Da jede Teilmenge einer total beschränkten Menge wieder total beschränkt ist, ist auch der metrische Raum $(l(X), d'|_{l(X)\times l(X)})$ total beschränkt. Da die Räume $(X, \mathcal{T})$ und $(l(X), \mathcal{R}|_{l(X)})$ homöomorph sind, ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar, da der Raum $(l(X), \mathcal{R}|_{l(X)})$ metrisierbar ist. Es sei d eine Metrik auf X, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert. Weil die topologischen Räume $(X, \mathcal{T})$ und $(l(X), \mathcal{R}|_{l(X)})$ homöomorph sind, sind auch die metrischen Räume (X, d) und $(l(X), d'|_{l(X)\times l(X)})$ homöomorph, wobei wir den Begriff der Homöomorphie zwischen zwei metrischen Räumen analog zu dem Begriff der Homöomorphie zwischen zwei topologischen Räumen definieren. Damit ist auch der Raum (X, d) total beschränkt, womit wir den Punkt (ii) nachgewiesen haben.

Wir werden nun die Implikation $(ii) \Rightarrow (iii)$ zeigen. Wir betrachten eine Metrik d auf X, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert und die die Eigenschaft besitzt, dass der metrische Raum (X, d) total beschränkt ist. Damit existieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich viele Punkte $x_1^n, ..., x_{m(n)}^n \in X$ mit der Eigenschaft $X = \bigcup_{i=1}^{m(n)} U^d_{\frac{1}{n}}(x_i^n)$. Damit ist das Mengensystem $\mathcal{B} := \{U^d_{\frac{1}{n}}(x_i^n) : n \in \mathbb{N} \text{ und } i \in \{1, ..., m(n)\}\}$ eine abzählbare Basis des Raums $(X, \mathcal{T})$. Um dies nachzuweisen betrachten wir einen Punkt $x \in X$ und eine offene Umgebung O des Punktes x. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $U_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq O$. Damit existiert ein $y \in \{x_1^{2n}, ..., x_{m(2n)}^{2n}\}$ mit

$$x \in U_{\frac{1}{2n}}(y) \subseteq U_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq O.$$

Wegen dem Lemma 3.14 aus [1] ist damit $\mathcal{B}$ eine Basis des Raums $(X, \mathcal{T})$.

Zum Schluss zeigen wir die Implikation $(iii) \Rightarrow (i)$. Der Raum $(X, \mathcal{T})$ ist vollständig regulär und wegen dem zweiten Punkt von Lemma 3.2 auch regulär. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ auch eine abzählbare Basis besitzt, folgt mit dem Einbettungssatz von Urysohn, dass er homöomorph zu einem Teilraum des Produktraums $(\prod_{n\in\mathbb{N}}[0, 1], \prod_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))$ ist. Es sei f ein Homöomorphismus der dies erfüllt. Damit ist das Paar $(f, (\overline{f(X)}, (\prod_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))|_{\overline{f(X)}}))$ eine Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$. Wegen Satz 2.1.7 ist der Raum $(\prod_{n\in\mathbb{N}}[0, 1], \prod_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))$ metrisierbar, womit $(\overline{f(X)}, (\prod_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))|_{\overline{f(X)}})$ eine metrisierbare Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$ ist.

■

Korollar 3.17. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden zwei Aussagen äquivalent:*

(i) *Der Raum $(X, \mathcal{T})$ ist metrisierbar und es existiert eine Metrik d auf X, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert, sodass der metrische Raum (X, d) total beschränkt ist.*

(ii) *Der Raum $(X, \mathcal{T})$ ist regulär und besitzt eine abzählbare Basis.*

Beweis: Wir gehen zunächst davon aus, dass der Raum $(X, \mathcal{T})$ regulär ist und eine abzählbare Basis besitzt. Damit ist er wegen dem Metrisierbarkeitssatz von Nagata-Smirnov metrisierbar und damit auch insbesondere vollständig regulär. Damit ist also $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer Raum mit einer abzählbaren Basis. Wegen Satz 3.16 existiert damit eine Metrik d auf X, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert und für die der metrische Raum (X, d) total beschränkt ist. Wenn umgekehrt eine Metrik d auf X existiert, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert und für die der metrische Raum (X, d) total beschränkt ist, dann ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ regulär und besitzt wegen Satz 3.16 eine abzählbare Basis.

■

Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und d_1, d_2 zwei Metriken auf X, die die Topologie $\mathcal{T}$ induzieren. Ist der metrische Raum (X, d_1) total beschränkt, dann kann daraus nicht geschlossen werden, dass der metrische Raum (X, d_2) auch total beschränkt ist. Wir wollen hier hevorheben, dass Korollar 3.17 besagt, dass im Falle eines regulären Raums mit einer abzählbaren Basis, der Raum metrisierbar ist und unter allen Metriken, die die Topologie $\mathcal{T}$ induzieren, mindestens eine existiert für die der metrische Raum (X, d) total beschränkt ist. Diese Eigenschaft müssen aber nicht alle Metriken haben, die die Topologie $\mathcal{T}$ induzieren.

Das nächste Korollar des Satzes 3.16 beantwortet die Frage der Metrisierbarkeit kompakter T_2-Räume.

Korollar 3.18. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter T_2-Raum. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar genau dann, falls der Raum eine abzählbare Basis besitzt.*

Beweis: Für jeden kompakten T_2-Raum $(X, \mathcal{T})$ ist das Paar $(id_X, (X, \mathcal{T}))$ eine Kompaktifierung von $(X, \mathcal{T})$. Setzt man voraus, dass $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar ist, dann besitzt dieser Raum damit eine metrisierbare Kompaktifizierung. Wegen Satz 3.16 besitzt $(X, \mathcal{T})$ damit eine abzählbare Basis. Hat der Raum $(X, \mathcal{T})$ umgekehrt eine abzählbare Basis, dann existiert wegen Satz 3.16 eine metrisierbare Kompaktifizierung. Da ein kompakter T_2-Raum zu jeder seiner Kompaktifizierungen homöomorph ist, ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar.

■

Korollar 3.19. *Es sei X eine überabzählbare Menge und $\mathcal{T}$ die diskrete Topologie auf X. Dann besitzt der Raum $(X, \mathcal{T})$ keine metrisierbare Kompaktifizierung.*

Beweis: Der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ ist, wie in Beispiel 1.1 gezeigt wurde, metrisierbar und damit auch vollständig regulär. Daher existiert mindestens eine Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$. Da jede Basis des Raums $(X, \mathcal{T})$ jede einpunktige Teilmenge von X enthält, existiert keine abzählbare Basis. Wegen Satz 3.16 folgt nun, dass $(X, \mathcal{T})$ keine metrisierbare Kompaktifizierung besitzt.

■

Definition 3.20. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt lokal kompakt, falls jeder Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.*

Satz 3.21. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokal kompakter T_2-Raum der nicht kompakt ist. Wir betrachten ein $\alpha \notin X$ und definieren die Menge $\alpha X := X \cup \{\alpha\}$ und das Mengensystem $\mathcal{T}_\alpha := \mathcal{T} \cup \{\{\alpha\} \cup X \backslash K \colon K$ ist eine kompakte Teilmenge des Raums $(X, \mathcal{T})\}$. Dann ist das Paar $(id, (\alpha X, \mathcal{T}_\alpha))$ eine Kompaktifierung von $(X, \mathcal{T})$, wobei id die Einbettung von $(X, \mathcal{T})$ in $(\alpha X, \mathcal{T}_\alpha)$ bezeichnet. Es seien $\alpha_1, \alpha_2 \notin X$ mit $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Weiters seien $(id, (\alpha_1 X, \mathcal{T}_{\alpha_1}))$ und $(id, (\alpha_2 X, \mathcal{T}_{\alpha_2}))$ zwei derartige Kompaktifizierungen, dann sind die Räume $(\alpha_1 X, \mathcal{T}_{\alpha_1})$ und $(\alpha_2 X, \mathcal{T}_{\alpha_2})$ homöomorph.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $(\alpha X, \mathcal{T}_\alpha)$ ein topologischer Raum ist. Offensichtlich gilt $\emptyset \in \mathcal{T}_\alpha$ und $X \in \mathcal{T}_\alpha$. Es seien nun $O_1, O_2 \in \mathcal{T}_\alpha$. Wenn beide Mengen in $\mathcal{T}$ liegen, liegt ihr Durchschnitt auch in $\mathcal{T}$ und damit in $\mathcal{T}_\alpha$. Falls die Menge O_1 in $\mathcal{T}$ liegt, nicht aber die Menge O_2, dann gibt es eine kompakte Menge K des Raums $(X, \mathcal{T})$ mit $O_2 = \{\alpha\} \cup X \backslash K$. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ das Trennungsaxiom T_2 erfüllt, liegt die Menge $X \backslash K$ in $\mathcal{T}$. Damit gilt $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\alpha$. Falls beide Mengen O_1 und O_2 nicht in $\mathcal{T}$ liegen, dann existieren kompakte Teilmengen K_1 und K_2 von X mit $O_1 = \{\alpha\} \cup X \backslash K_1$ und $O_2 = \{\alpha\} \cup X \backslash K_2$. Damit gilt $O_1 \cap O_2 = \{\alpha\} \cup (X \backslash (K_1 \cup K_2))$, womit $O_1 \cap O_2$ in $\mathcal{T}_\alpha$ liegt. Es sei nun $(O_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen, die in $\mathcal{T}_\alpha$ liegen. Wir stellen nun die Menge I als disjunkte Vereinigung der Mengen I_1 und I_2 dar, wobei für jedes $i \in I_1$ die Menge O_i in $\mathcal{T}$ liegen soll und für jedes $i \in I_2$ die Menge O_i nicht in $\mathcal{T}$ liegen soll. Es existiert für jedes $i \in I_2$ eine kompakte Menge K_i mit $O_i = \{\alpha\} \cup X \backslash K_i$. Damit gilt

$$\bigcup_{i \in I} O_i = (\bigcup_{i \in I_1} O_i) \cup (\bigcup_{i \in I_2} O_i) = \{\alpha\} \cup X \backslash \big((\bigcup_{i \in I_1} O_i) \cup (\bigcup_{i \in I_2} K_i^c) \big)^c = \{\alpha\} \cup X \backslash \big((\bigcap_{i \in I_1} O_i^c) \cap (\bigcap_{i \in I_2} K_i) \big).$$

Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ das Trennungsaxiom T_2 erfüllt ist die Menge $K := (\bigcap_{i \in I_1} O_i^c) \cap (\bigcap_{i \in I_2} K_i)$ abgeschlossen. Weiters gilt für jedes $j \in I_2$, dass $K \subseteq K_j$. Da jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge kompakt ist, ist die Menge K kompakt. Damit liegt die Menge $\bigcup_{i \in I} O_i$ in $\mathcal{T}_\alpha$, womit $(\alpha X, \mathcal{T}_\alpha)$ ein topologischer Raum ist.

Als nächstes zeigen wir, dass der Raum $(\alpha X, \mathcal{T}_\alpha)$ das Trennungsaxiom T_2 erfüllt. Es seien $x, y \in \alpha X$. Liegen beide Punkte in X, dann sind wir fertig. Es sei daher $x \in X$ und $y = \alpha$. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ lokal kompakt ist, besitzt x eine kompakte Umgebung V. Es sei nun O_x eine Teilmenge von V, die offen ist und x enthält. Wir definieren nun die Menge $O_y := \{\alpha\} \cup X \backslash V$, die eine offene Umgebung von y in $(\alpha X, \mathcal{T}_\alpha)$ ist. Es gilt, dass die Mengen O_x und O_y disjunkt sind. Damit erfüllt der Raum $(\alpha X, \mathcal{T}_\alpha)$ das Trennungsaxiom T_2.

Wir werden nun nachweisen, dass der Raum $(\alpha X, \mathcal{T}_\alpha)$ kompakt ist. Es sei $\{O_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von αX. Dann existiert ein $j \in I$ und eine kompakte Teilmenge K_j von X, sodass $O_j = \{\alpha\} \cup X \backslash K_j$. Nun ist sicherlich das Mengensystem $\{O_i \backslash \{\alpha\} : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von K_j.

Damit existieren $i_1, ..., i_n \in I$ mit $K_j \subseteq O_{i_1} \cup ... \cup O_{i_n}$. Damit gilt $\alpha X = O_{i_1} \cup ... \cup O_{i_n} \cup O_j$, womit der Raum $(\alpha X, \mathcal{T}_\alpha)$ kompakt ist.

Offensichtlich gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\alpha|_X$, damit ist die Abbildung $id : (X, \mathcal{T}) \to (id(X), \mathcal{T}_\alpha|_X)$ ein Homöomorphismus. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ nicht kompakt ist, folgt $\overline{X}^{\mathcal{T}_\alpha} = \alpha X$. Damit haben wir nachgewiesen, dass $(id, (\alpha X, \mathcal{T}_\alpha))$ eine Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$ ist.

Es seien $(id, (\alpha_1 X, \mathcal{T}_{\alpha_1}))$ und $(id, (\alpha_2 X, \mathcal{T}_{\alpha_2}))$ zwei Kompaktifizierungen von $(X, \mathcal{T})$, die wie oben konstruiert werden, mit $\alpha_1 \neq \alpha_2$, dann ist die Abbildung

$$f : (\alpha_1 X, \mathcal{T}_{\alpha_1}) \to (\alpha_2 X, \mathcal{T}_{\alpha_2}) : x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \in X \\ \alpha_2, & \text{falls } x = \alpha_1 \end{cases}$$

ein Homöomorphismus.

■

Definition 3.22 (Alexandroff-Kompaktifizierung). *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokal kompakter T_2-Raum der nicht kompakt ist. Dann heißt die in Satz 3.21 konstruierte Kompakaktifizierung $(\alpha X, \mathcal{T}_\alpha)$ die Alexandroff-Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$.*

Die Alexandroff-Kompaktifizierung wird auch als Einpunktkompaktifizierung bezeichnet, da sie aus einer Menge X durch die Hinzunahme eines Punktes der nicht in X liegt konstruiert wird.

Aus den bisherigen Erkentnissen erhalten wir folgendes Korollar.

Korollar 3.23. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokal kompakter T_2-Raum. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär.*

Beweis: Wir gehen zunächst davon aus, dass der Raum $(X, \mathcal{T})$ sogar kompakt ist. Dann ist er wegen Korollar 2.2.3 normal und damit wegen dem ersten Punkt von Lemma 3.2 auch vollständig regulär. Ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ ein lokal kompakter T_2-Raum der nicht kompakt ist, dann besitzt er eine Kompaktifizierung, nämlich die Alexandroff-Kompaktifizierung, damit ist $(X, \mathcal{T})$ wegen Korollar 3.13 vollständig regulär.

■

Im folgenden Lemma werden wir zwei wichtige Eigenschaften lokal kompakter T_2-Räume beweisen.

Lemma 3.24. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokal kompakter T_2-Raum. Dann gelten folgende zwei Aussagen:*

(i) Für jedes $x \in X$ existiert eine Umgebungsbasis von x, die aus kompakten Teilmengen von X besteht.

(ii) Es sei Y eine offene oder abgeschlossene Teilmenge von X. Dann ist $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ ein lokal kompakter T_2-Raum.

Beweis: ad(i): Es sei U eine Umgebung von x im Raum $(X, \mathcal{T})$ und V eine kompakte Umgebung von x im Raum $(X, \mathcal{T})$. Damit ist $U \cap V$ eine Umgebung von x im Raum $(V, \mathcal{T}|_V)$. Da der Raum $(V, \mathcal{T}|_V)$ ein kompakter T_2-Raum ist, ist er wegen Korollar 2.2.3 normal und daher auch regulär. Damit existiert eine offene Menge W des Raums $(X, \mathcal{T})$ mit

$$x \in W \cap \overset{\circ}{V} \subseteq W \cap V \subseteq \overline{W \cap V} \subseteq U \cap V.$$

Die Menge $\overline{W \cap V}$ ist kompakt im Raum $(X, \mathcal{T})$, da sie eine abgeschlossene Teilmenge der Menge V ist. Damit ist $\overline{W \cap V}$ eine kompakte Umgebung von x im Raum $(X, \mathcal{T})$, die in der Umgebung U enthalten ist. Daher existiert für den Punkt x eine Umgebungsbasis, die aus kompakten Teilmengen von X besteht.

ad(ii): Es sei zunächst Y eine offene Teilmenge von X und $x \in Y$. Dann existiert wegen (i) eine kompakte Teilmenge K des Raums $(X, \mathcal{T})$ die x enthält und eine Teilmenge von Y ist. Diese Menge ist auch eine kompakte Teilmenge des Raums $(Y, \mathcal{T}|_Y)$. Es sei nun Y eine abgeschlossene Teilmenge des Raums $(X, \mathcal{T})$ und $x \in Y$. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ lokal kompakt ist, existiert eine kompakte Umgebung V von x. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ das Trennungsaxiom T_2 erfüllt ist V auch abgeschlossen. Damit ist die Menge $V \cap Y$ eine abgeschlossene Teilmenge des Raums $(X, \mathcal{T})$. Da diese Menge Teilmenge von V ist, ist sie auch kompakt in $(X, \mathcal{T})$ und damit auch kompakt im Raum $(Y, \mathcal{T}|_Y)$.

■

Wir wollen hier ohne Beweis erwähnen, dass ein beliebiger Teilraum eines lokal kompakten T_2-Raums nicht unbedingt lokal kompakt sein muss. Zum Beispiel ist der topologische Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ lokal kompakt, nicht aber der Teilraum $(\mathbb{Q}, \mathcal{E}|_{\mathbb{Q}})$.

Definition 3.25. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum.*

1. *Der Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt σ-kompakt, falls die Menge X dargestellt werden kann als Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Teilmengen von X.*
2. *Eine Teilmenge A von X heißt relativ kompakt, falls $\overline{A}$ kompakt ist.*

Analog zu den Begriffen Umgebung, Umgebungsfilter und Umgebungsbasis für Punkte eines topologischen Raums werden folgende Begriffe definiert.

Definition 3.26. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$.*

1. *Die Menge $U \subseteq X$ heißt eine Umgebung von A, falls eine Menge $O \in \mathcal{T}$ existiert mit der Eigenschaft $A \subseteq O \subseteq U$.*
2. *Es bezeichne $\mathfrak{U}(A)$ die Menge aller Umgebungen von A, dann heißt das Mengensystem $\mathfrak{B}(A)$ eine Umgebungsbasis von A, falls $\mathfrak{B}(A) \subseteq \mathfrak{U}(A)$ und falls für jede Umgebung U von A eine Menge B aus $\mathfrak{B}(A)$ existieret mit der Eigenschaft $A \subseteq B \subseteq U$. Das Mengensystem $\mathfrak{U}(A)$ heißt der Umgebungsfilter von A.*

Lemma 3.27. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokal kompakter T_2-Raum. Dann gelten folgende zwei Aussagen:*

(i) Es sei K eine kompakte Teilmenge von X. Dann besitzt K eine Umgebungsbasis die nur aus kompakten Teilmengen von X besteht.

(ii) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ sei zusätzlich σ-kompakt. Dann existiert eine Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von relativ kompakten und offenen Teilmengen von X, die X überdecken und die die Eigenschaft haben, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\overline{O_n} \subseteq O_{n+1}$.

Beweis: ad(i): Es sei K eine kompakte Teilmenge des Raums $(X, \mathcal{T})$ und U eine Umgebung von K. Da der Raum lokal kompakt und T_2 ist, existiert wegen dem ersten Punkt von Lemma 3.24 für jedes $x \in K$ eine kompakte Umgebung U_x die in U enthalten ist. Das Mengensystem $\{\overset{\circ}{U}_x \colon x \in K\}$ ist daher eine offene Überdeckung von K. Nun existieren endlich viele Punkte $x_1, ..., x_n \in K$ mit der Eigenschaft $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overset{\circ}{U}_{x_i}$. Damit ist die Menge $V := \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ eine kompakte Umgebung von K die in U enthalten ist.

ad(ii): Es sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von kompakten Teilmengen von X, sodass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = X$. Wegen (i) existiert eine Umgebung O_1 von K_1 die relativ kompakt und offen ist. Für $n > 1$ wird nun induktiv die Menge O_n als relativ kompakte und offene Umgebung von $\overline{O_{n-1}} \cup K_n$ definiert. Damit hat die Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die im Punkt (ii) geforderten Eigenschaften.

■

Der folgende Satz gibt nun hinreichende und notwendige Bedingungen für die Metrisierbarkeit der Alexandroff-Kompaktifizierung an.

Satz 3.28. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokal kompakter T_2-Raum der nicht kompakt ist und $(\alpha X, \mathcal{T}_\alpha)$ die Alexandroff-Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Die Alexandroff-Kompaktifizierung $(\alpha X, \mathcal{T}_\alpha)$ ist metrisierbar.

(ii) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ ist metrisierbar und σ-kompakt.

(iii) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ besitzt eine abzählbare Basis.

Beweis: Wir zeigen zunächst die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$. Wegen Satz 3.16 ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar durch eine Metrik d, für die der metrische Raum (X, d) total beschränkt ist. Damit kann X dargestellt werden als Vereinigung von abgeschlossenen Kugeln. Da jede abgeschlossene Kugel eines metrischen Raums kompakt ist, ist der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ σ-kompakt.

Wir zeigen nun die Implikation $(ii) \Rightarrow (iii)$. Wegen dem zweiten Punkt von Lemma 3.27 existiert eine Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von relativ kompakten und offenen Teilmenge von X mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n = X$ und $\overline{O_n} \subseteq O_{n+1}$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Raum $(\overline{O_n}, \mathcal{T}|_{\overline{O_n}})$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein metrisierbarer und kompakter T_2-Raum. Wegen Korollar 3.18 besitzt der Raum $(\overline{O_n}, \mathcal{T}|_{\overline{O_n}})$ damit eine abzählbare Basis. Damit hat auch der Raum $(O_n, \mathcal{T}|_{O_n})$ eine abzählbare Basis $\mathcal{B}_n$, womit das Mengensystem $\mathcal{B} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ eine abzählbare Basis von $(X, \mathcal{T})$ ist.

Zum Schluss zeigen wir die Implikation $(iii) \Rightarrow (i)$. Es sei $\mathcal{B}'_X$ eine abzählbare Basis des Raums $(X, \mathcal{T})$. Wir betrachten einen Punkt $x \in X$ und eine Umgebung U von x. Dann existiert wegen dem ersten Punkt von Lemma 3.24 eine kompakte Umgebung K_x von x, die in U enthalten ist. Nun existiert wegen dem Lemma 3.14 aus [1] eine Menge aus $\mathcal{B}'_X$, die x enthält und eine Teilmenge von K_x ist. Für jedes $x \in X$ und für jede Umgebung U von x bestimmen wir eine solche Menge aus $\mathcal{B}'_X$ und fassen alle diese Mengen zu dem Mengensystem $\mathcal{B}_X$ zusammen. Da $\mathcal{B}_X$ natürlich abzählbar ist, schreiben wir dieses Mengensystem als $\mathcal{B}_X := \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wegen dem Lemma 3.14 aus [1] ist $\mathcal{B}_X$ eine Basis des Raums $(X, \mathcal{T})$. Da jede Menge aus $\mathcal{B}_X$ Teilmenge einer kompakten Menge ist und da der Raum $(X, \mathcal{T})$ das Trennungsaxiom T_2 erfüllt, sind alle Mengen aus $\mathcal{B}_X$ relativ kompakt. Nun gilt $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$, womit der Raum $(X, \mathcal{T})$ σ-kompakt ist. Wegen dem zweiten Punkt von Lemma 3.27 existiert damit eine Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von relativ kompakten und offenen Teilmengen von X mit $\overline{O_n} \subseteq O_{n+1}$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten nun das Mengensystem $\mathcal{B}_\alpha := \{\{\alpha\} \cup X \backslash \overline{O_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Es ist klar, dass alle Mengen aus $\mathcal{B}_\alpha$ offene Umgebungen von α im Raum $(\alpha X, \mathcal{T}_\alpha)$ sind. Es sei nun U eine Umgebung von α. Damit existiert eine kompakte Teilmenge K von X mit der Eigenschaft $\{\alpha\} \cup X \backslash K \subseteq U$. Da $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Überdeckung von X ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $K \subseteq O_m$, damit gilt $\{\alpha\} \cup X \backslash \overline{O_m} \subseteq U$, womit das Mengensystem $\mathcal{B}_\alpha$ eine abzählbare Umgebungsbasis von α ist. Damit ist das Mengensystem $\mathcal{B} := \mathcal{B}_X \cup \mathcal{B}_\alpha$ wegen Lemma 3.14 aus [1] eine abzählbare Basis der Alexandroff-Kompaktifizierung $(\alpha X, \mathcal{T}_\alpha)$. Wegen Korollar 3.18 ist die Alexandroff-Kompaktifizierung damit metrisierbar.

■

Proposition 3.29. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokal kompakter T_2-Raum der parakompakt ist. Dann existiert eine Familie $((X_s, \mathcal{T}|_{X_s}))_{s\in S}$ von offenen, paarweise disjunkten und σ-kompakten Teilräumen von $(X, \mathcal{T})$ mit $X = \bigcup_{s\in S} X_s$.*

Beweis: Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ lokal kompakt ist, existiert zu jedem Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung K_x von x. Damit ist das Mengensystem $\mathcal{U} := \{\overset{\circ}{K_x} : x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X, die aus relativ kompakten Mengen besteht. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ zusätzlich parakompakt ist, existiert zu dem Mengensystem $\mathcal{U}$ eine lokal endliche offene Verfeinerung $\mathcal{V}$.

Es sei nun K eine kompakte Teilmenge von X. Zu jedem $x \in K$ existiert eine offene Menge O_x, die x enthält und höchstens mit endlich vielen Mengen aus $\mathcal{V}$ nichtleeren Durchschnitt besitzt. Da die Menge K kompakt ist existieren endlich viele Punkte $x_1, ..., x_n$ aus K mit $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i} =: O$. Die offene Menge O besitzt nun auch mit höchstens endlich vielen Mengen aus $\mathcal{V}$ nichtleeren Durchschnitt. Damit haben wir gezeigt, dass jede kompakte Teilmenge K von X mit fast allen Mengen aus $\mathcal{V}$ leeren Durchschnitt besitzt.

Wir werden nun auf der Menge X eine Äquivalenzrelation $\sim$ definieren durch die Festlegung $x \sim y$ genau dann, falls eine endliche Anzahl von Mengen $V_1, ..., V_n$ aus $\mathcal{V}$ existiert mit $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$, für alle $i \in \{1, ..., n-1\}$. Weiters soll gelten $x \in V_1$ und $y \in V_n$. Es ist einfach nachzuweisen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X ist. Die Äquivalenzklassen sind offene Teilmengen von X, da $\mathcal{V}$ aus offenen Mengen besteht. Es sei $X = \bigcup_{s\in S} X_s$ die Zerlegung von X in diese Aquivalenzklassen X_s.

Es bleibt zu zeigen, dass die Räume $(X_s, \mathcal{T}|_{X_s})$ σ-kompakt sind. Zunächst sei darauf hingewiesen, dass die Menge $\overline{V}$ für jedes $V \in \mathcal{V}$ eine kompakte Teilmenge des Raums $(X, \mathcal{T})$ ist. Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass $\mathcal{V}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist. Es sei nun $a \in X_s$. Da das Mengensystem $\mathcal{V}$ lokal endlich ist, liegt der Punkt a in höchstens endlich vielen Mengen aus $\mathcal{V}$ und diese sind nach Definition der Äquivalenzrelation $\sim$ Teilmengen von X_s. Wir definieren nun die Menge A_1 als die Vereinigung über diese endlich vielen Mengen aus $\mathcal{V}$ die a enthalten. Da für jedes $V \in \mathcal{V}$ die Menge $\overline{V}$ kompakt ist, ist auch die Menge $\overline{A_1}$ kompakt. Wir betrachten nun ein $x \in \overline{A_1}$. Damit existiert ein $V_x \in \mathcal{V}$ mit $x \in \overline{V_x} \subseteq \overline{A_1}$ und $a \in V_x$. Da $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von X ist, existiert eine offene Menge $V \in \mathcal{V}$ die x enthält. Für diese Menge gilt $V \cap V_x \neq \emptyset$. Damit gilt $x \sim a$. Damit erhalten wir $\overline{A_1} \subseteq X_s$. Da die Menge $\overline{A_1}$ kompakt ist, kann sie wegen dem ersten Absatz dieses Beweises höchstens mit endlich vielen Mengen aus $\mathcal{V}$ nichtleeren Durchschnitt besitzen. Die Vereinigung über alle diese Mengen bezeichnen wir mit A_2. Nun zeigt man analog zu vorhin die Mengeninklusion $\overline{A_2} \subseteq X_s$. Man kann dadurch induktiv eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von relativ kompakten Mengen definieren mit $\overline{A_n} \subseteq X_s$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen nun die Gleichung $X_s = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{A_i}$. Dazu betrachten wir ein $x \in X_s$. Damit existieren endlich viele Mengen $V_1, ..., V_n$ aus $\mathcal{V}$ mit $a \in V_1$ und $x \in V_n$ und $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$, für alle $i \in \{1, ..., n-1\}$. Es gilt daher $a \in V_1 \subseteq A_1 \subseteq \overline{A_1}$. Weiters gilt $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Damit existiert ein $y_1 \in V_1 \cap V_2$. Daraus folgt $V_2 \cap \overline{A_1} \neq \emptyset$ und daher $V_2 \subseteq A_2$. Setzt man dieses Verfahren fort erhält man, dass für alle $i \in \{1, ..., n\}$ gilt $V_i \subseteq A_i$. Damit gilt $x \in A_n \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{A_i}$.

■

Wir wollen hier ohne Beweis erwähnen, dass auch die Umkehrung von Proposition 3.29 gilt. Falls für einen lokal kompakten T_2-Raum $(X, \mathcal{T})$ eine Zerlegung wie in Proposition 3.29 existieren sollte, dann ist $(X, \mathcal{T})$ parakompakt.

Mit Hilfe von Proposition 3.29 können wir nun die Frage der Metrisierbarkeit für lokal kompakte T_2-Räume beantworten.

Korollar 3.30. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokal kompakter T_2-Raum. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar genau dann, falls eine Familie $((X_s, \mathcal{T}|_{X_s}))_{s\in S}$ von offenen, paarweise disjunkten und σ-kompakten Teilräumen von $(X, \mathcal{T})$ existiert, die alle eine abzählbare Basis besitzen und $X = \bigcup_{s\in S} X_s$ erfüllen.*

Beweis: Wir gehen zunächst davon aus, dass eine Familie $((X_s, \mathcal{T}|_{X_s}))_{s\in S}$ von Teilräumen von $(X, \mathcal{T})$ existiert, die die im Korollar angeführten Eigenschaften besitzt. Wegen Korollar 3.23 ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär. Damit sind die Teilräume $(X_s, \mathcal{T}|_{X_s})$ wegen dem ersten Punkt von Proposition 3.3 auch vollständig regulär. Damit sind die Räume $(X_s, \mathcal{T}|_{X_s})$ wegen dem zweiten Punkt von Lemma 3.2 auch regulär. Aufgrund des Metrisierbarkeitssatzes von Nagata-Smirnov sind damit alle Räume $(X_s, \mathcal{T}|_{X_s})$ metrisierbar. Wegen Lemma 2.1.3 gilt nun $(\bigoplus_{s\in S} X_s, \bigoplus_{s\in S}(\mathcal{T}|_{X_s})) = (X, \mathcal{T})$. Mit Satz 2.1.6 folgt damit die Metrisierbarkeit von $(X, \mathcal{T})$.

Wir gehen nun davon aus, dass $(X, \mathcal{T})$ lokal kompakt und metrisierbar ist. Dann ist er wegen dem Satz 3.12 aus [1] auch parakompakt. Wegen Proposition 3.29 existiert damit eine Familie $((X_s, \mathcal{T}|_{X_s}))_{s\in S}$ von offenen, paarweise disjunkten und σ-kompakten Teilräumen von $(X, \mathcal{T})$ mit $X = \bigcup_{s\in S} X_s$. Wegen dem zweiten Punkt von Lemma 2.1.5 und dem zweiten Punkt von Lemma 3.24 sind alle Räume $(X_s, \mathcal{T}|_{X_s})$ lokal kompakt und metrisierbar. Ist für ein $s \in S$ der Raum $(X_s, \mathcal{T}|_{X_s})$ nicht kompakt, dann besitzt dieser Raum wegen Satz 3.28 auch eine abzählbare Basis. Sollte für ein $s \in S$ der Raum $(X_s, \mathcal{T}|_{X_s})$ kompakt sein, dann folgt die Existenz einer abzählbaren Basis aus Korollar 3.18. Damit besitzen also insgesamt alle Räume $(X_s, \mathcal{T}|_{X_s})$ eine abzählbare Basis.

■

Wir wollen nun wieder auf den Einbettungssatz von Tychonoff eingehen(Satz 3.5). Wir haben in diesem Satz nachgewiesen, dass zu einem vollständig regulären topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ eine Menge S existiert, sodass er homöomorph zu einem Teilraum des Produktraums $(\prod_{s\in S}[0,1], \prod_{s\in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))$ ist. Im Beweis des Satzes haben wir einen Homöomorphismus konstruiert der dies leistet. Diesen Homöomorphismus wollen wir ab jetzt mit β bezeichnen. Damit erhalten wir also, dass $(\beta, (\overline{\beta(X)}, (\prod_{s\in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))|_{\overline{\beta(X)}}))$ eine Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$ ist.

Definition 3.31 (Stone-Cech-Kompaktifizierung). *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer topologischer Raum. Dann heißt die im Einbettungssatz von Tychonoff konstruierte Kompaktifizierung $(\beta X, \mathcal{T}_\beta) := (\overline{\beta(X)}, (\prod_{s\in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))|_{\overline{\beta(X)}})$ die Stone-Cech-Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$.*

Lemma 3.32. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer topologischer Raum. Dann kann jede Funktion $f : (\beta(X), \mathcal{T}_\beta|_{\beta(X)}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{E})$ die beschränkt und stetig ist zu einer stetigen Funktion auf dem Raum $(\beta X, \mathcal{T}_\beta)$ fortgesetzt werden.*

Beweis: Es sei $f : (\beta(X), \mathcal{T}_\beta|_{\beta(X)}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{E})$ beschränkt und stetig. Wir verwenden nun dieselbe Notation wie im Beweis des Einbettungssatzes von Tychonoff. Wir definieren die Menge $S := \{g : (X, \mathcal{T}) \to ([0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]})$: g ist stetig$\}$. Wir betrachten nun die Funktion $f \circ \beta : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{E})$, die stetig und beschränkt ist. Nun existieren zwei positive Zahlen ϵ und k mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in X$ gilt $0 \leq \epsilon((f \circ \beta)(x) + k) \leq 1$. Damit gilt $g_0 := \epsilon((f \circ \beta) + k) \in S$. Die Projektion $\pi_{g_0} : (\prod_{s \in S}[0,1], \prod_{s \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]})) \to ([0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]})$ auf die g_0-te Komponente ist stetig. Weiters gilt für alle $x \in X$

$$(\pi_{g_0} \circ \beta)(x) = \pi_{g_0}((g(x))_{g \in S}) = g_0(x).$$

Damit gilt $\pi_{g_0}|_{\beta(X)} = \epsilon(f + k)$. Damit ist $\pi_{g_0}|_{\beta X}$ eine stetige Fortsetzung von $\epsilon(f + k)$ auf βX. Daher ist $f' := \frac{1}{\epsilon}(\pi_{g_0}|_{\beta X}) - k$ eine stetige Fortsetzung von f auf βX.

■

Satz 3.33. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer topologischer Raum. Dann besitzt kein Element der Menge $\beta X \backslash \beta(X)$ eine abzählbare Umgebungsbasis.*

Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Wir gehen also davon aus, dass ein $x \in \beta X \backslash \beta(X)$ existiert, dass eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Wir können o.B.d.A davon ausgehen, dass diese Umgebungsbasis offen ist. Dies sei das Mengensystem $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$. Da $(\beta X, \mathcal{T}_\beta)$ ein kompakter T_2-Raum ist, ist er wegen Korollar 2.2.3 normal und damit auch regulär. Wir werden nun induktiv eine offene Umgebungsbasis $\{O_i : i \in \mathbb{N}\}$ von x definieren. Die Mengen dieser Umgebungsbasis erhalten wir folgendermaßen:

$$O_1 := U_1, \ x \in O_i \subseteq \overline{O_i} \subseteq O_{i-1} \cap U_i, \ \text{für alle } i > 1.$$

Damit gilt also

$$O_i \supseteq \overline{O_{i+1}}, \ \text{für alle } i \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Es sei nun U eine Umgebung von x. Wir gehen davon aus, dass $U \cap \beta(X)$ nur endlich viele Elemente $x_1, ..., x_n$ enthält. Da $(\beta X, \mathcal{T}_\beta)$ das Trennungsaxiom T_2 erfüllt, ist jede kompakte Teilmenge von βX auch abgeschlossen. Damit ist die Menge $\{x_1, ..., x_n\}$ abgeschlossen. Damit ist auch $U' := U \backslash \{x_1, ..., x_n\}$ eine Umgebung von x. Nun gilt $U' \cap \beta(X) = \emptyset$ und daher $x \notin \overline{\beta(X)} = \beta X$. Wegen diesem Widerspruch enthält also jede Umgebung U von x unendlich viele Elemente aus der Menge $\beta(X)$. Wir können daher eine Folge $a_1, b_1, a_2, b_2, ...$ aus $\beta(X)$ definieren, mit paarweise verschiedenen Folgengliedern und mit der Eigenschaft, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt $a_i, b_i \in O_i \cap \beta(X)$. Aufgrund der Konstruktion dieser Folge ist es offensichtlich, dass die beiden Folgen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $(\beta X, \mathcal{T}_\beta)$ gegen x konvergieren.

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ werden wir nun für das Element b_i eine offene Umgebung V_i in $(\beta(X), \mathcal{T}_\beta|_{\beta(X)})$ definieren, die folgende drei Bedingungen erfüllt:

(a) $V_i \subseteq O_i \cap \beta(X)$

(b) Es existiert ein $j \in \mathbb{N}$ mit $V_i \cap O_j = \emptyset$

(c) $V_i \cap \{a_m, b_n : m, n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$

Es sei $i \in \mathbb{N}$ fest. Es ist O_i eine offene Umgebung von x und damit ist auch $O_i \backslash \{b_i\}$ eine offene Umgebung von x. Damit existiert wegen (7) ein $j \in \mathbb{N}$ mit $j > i$ und $x \in \overline{O_j} \subseteq O_i \backslash \{b_i\}$. Es existiert also ein $j \in \mathbb{N}$ mit $b_i \notin \overline{O_j}$. Damit ist die Menge $W := \overline{O_j}^c \cap \beta(X)$ eine offene Umgebung von b_i in $(\beta(X), \mathcal{T}_\beta|_{\beta(X)})$. Weiters ist auch $W' := O_i \cap \beta(X)$ eine offene Umgebung von b_i in $(\beta(X), \mathcal{T}_\beta|_{\beta(X)})$. Wir betrachten nun eine dritte Menge W'', die eine offene Umgebung von b_i in $(\beta(X), \mathcal{T}_\beta|_{\beta(X)})$ ist mit $a_1, ..., a_{j-1} \notin W''$ und $b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_{j-1} \notin W''$. Dann erfüllt die Menge $V_i := W \cap W' \cap W''$ die drei oben angeführten Bedingungen.

Wir betrachten nun einen Punkt $y \in \beta(X)$. Da der Raum $(\beta X, \mathcal{T}_\beta)$ das Trennungsaxiom T_2 erfüllt, existiert offene Umgebung O von y in $(\beta X, \mathcal{T}_\beta)$ und ein $j \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $O \cap O_j = \emptyset$. Für ein $i \geq j$ gilt nun $V_i \subseteq O_i \subseteq O_j$ und daher $(O \cap \beta(X)) \cap V_i = \emptyset$. Damit ist das Mengensystem $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ lokal endlich in $(\beta(X), \mathcal{T}_\beta|_{\beta(X)})$.

Da der Raum $(\beta(X), \mathcal{T}_\beta|_{\beta(X)})$ vollständig regulär ist, existiert für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine stetige Funktion $f_i : (\beta(X), \mathcal{T}_\beta|_{\beta(X)}) \to ([0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]})$ mit $f(b_i) = \{1\}$ und $f(\beta(X) \backslash V_i) = \{0\}$. Wir definieren nun die Funktion

$$f := \sup_{i \in \mathbb{N}} f_i : (\beta(X), \mathcal{T}_\beta|_{\beta(X)}) \to ([0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]}).$$

Es sei nun $y_0 \in \beta(X)$. Dann existiert eine Umgebung U von y_0 in $(\beta(X), \mathcal{T}_\beta|_{\beta(X)})$ mit $U \cap V_i = \emptyset$, für fast alle $i \in \mathbb{N}$. Für $i_1, ..., i_n \in \mathbb{N}$ gelte $U \cap V_i \neq \emptyset$. Damit erhält man $f_i(U) = \{0\}$, für alle $i \notin \{i_1, ..., i_n\}$. Weiters gilt daher

$$f(y) = \max\{f_{i_1}(y), ..., f_{i_n}(y)\}, \text{ für alle } y \in U.$$

Damit existiert für jeden Punkt $y_0 \in \beta(X)$ eine Umgebung U in $(\beta(X), \mathcal{T}_\beta|_{\beta(X)})$ mit der Eigenschaft, dass $f|_U$ stetig ist. Damit ist die Funktion f wegen Korollar 3.11 aus [1] stetig.

Wegen Lemma 3.32 existiert eine stetige Fortsetzung f' von f auf $(\beta X, \mathcal{T}_\beta)$. Da die beiden Folgen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $(\beta X, \mathcal{T}_\beta)$ gegen x konvergieren, folgt damit, dass die Folgen $(f'(a_i))_{i \in \mathbb{N}}$ und $(f'(b_i))_{i \in \mathbb{N}}$ gegen $f'(x)$ konvergieren. Nun gilt aber, dass die Folge $(f'(b_i))_{i \in \mathbb{N}}$ konstant 1 ist und dass die Folge $(f'(a_i))_{i \in \mathbb{N}}$ konstant 0 ist. Wegen diesem Widerspruch hat damit der Punkt $x \in \beta X \backslash \beta(X)$ keine abzählbare Umgebungsbasis.

■

Mit Satz 3.33 lassen sich nun alle vollständig regulären Räume bestimmen, deren Stone-Cech-Kompaktifizierung metrisierbar ist.

Korollar 3.34. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer topologischer Raum. Dann ist die Stone-Cech-Kompaktifizierung $(\beta X, \mathcal{T}_\beta)$ von $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar genau dann, falls der Raum $(X, \mathcal{T})$ ein metrisierbarer kompakter T_2-Raum ist.*

Beweis: Falls $(X, \mathcal{T})$ ein metrisierbarer kompakter T_2-Raum ist, dann ist er homöomorph zu seiner Stone-Cech-Kompaktifizierung, die damit auch metrisierbar ist. Ist umgekehrt die Stone-Cech-Kompaktifizierung metrisierbar, dann gilt wegen Satz 3.33, dass die Menge $\beta X \backslash \beta(X)$ leer ist. Damit ist $(X, \mathcal{T})$ ein metrisierbarer kompakter T_2-Raum.

■

Daraus erhalten wir unmittelbar folgendes Korollar.

Korollar 3.35. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer topologischer Raum. Dann ist jede Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar genau dann, falls $(X, \mathcal{T})$ ein metrisierbarer kompakter T_2-Raum ist.*

■

4 Metrisierbarkeitssätze

Im letzten Kapitel dieser Arbeit wollen wir weitere Metrisierbarkeitssätze herleiten.

Definition 4.1. *Ein topologischer T_1-Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt collectionwise normal, falls für jedes diskrete Mengensystem $\{F_s : s \in S\}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X ein Mengensystem $\{U_s : s \in S\}$ von offenen, paarweise disjunkten Teilmengen von X existiert mit der Eigenschaft, dass für jedes $s \in S$ gilt $F_s \subseteq U_s$.*

Korollar 4.2. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum der collectionwise normal ist. Dann ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ normal.*

Beweis: Es seien A und B zwei disjunkte nichtleere abgeschlossene Teilmengen von X. Wir gehen davon aus, dass ein $x \in X$ existiert mit der Eigenschaft, dass jede Umgebung U von x die Menge A und die Menge B schneidet. Dann gilt $x \in \overline{A} \cap \overline{B} = A \cap B$. Wegen diesem Widerspruch ist das Mengensystem $\{A, B\}$ diskret. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ collectionwise normal ist, existieren nun zwei offene disjunkte Mengen O_A und O_B mit $A \subseteq O_A$ und $B \subseteq O_B$. Damit ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ normal.

■

Proposition 4.3. *Es sei $(X,\mathcal{T})$ ein metrisierbarer topologischer Raum. Dann ist $(X,\mathcal{T})$ collectionwise normal.*

Beweis: Es sei d eine Metrik auf X, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert. Es sei $\{F_s : s \in S\}$ ein diskretes Mengensystem von abgeschlossenen Teilmengen von X. Für jedes $s_0 \in S$ definieren wir die Menge

$$U_{s_0} := \{x \in X : d(x, F_{s_0}) < d(x, \bigcup_{s\in S\setminus\{s_0\}} F_s)\}.$$

Ist für ein $s_0 \in S$ die Menge F_{s_0} leer, dann setzen wir $d(x, F_{s_0}) := \infty$, für alle $x \in X$. Es seien nun s_0 und s_1 aus S mit $s_0 \neq s_1$. Wir wollen davon ausgehen, dass $U_{s_0} \cap U_{s_1}$ nichtleer ist. Es sei $x \in U_{s_0} \cap U_{s_1}$. Dann gilt

$$d(x, F_{s_0}) < d(x, \bigcup_{s\in S\setminus\{s_0\}} F_s) \leq d(x, F_{s_1}) \quad \text{und}$$
$$d(x, F_{s_1}) < d(x, \bigcup_{s\in S\setminus\{s_1\}} F_s) \leq d(x, F_{s_0}).$$

Aufgrund dieses Widerspruchs gilt also $U_{s_0} \cap U_{s_1} = \emptyset$. Wir betrachten nun ein $s_0 \in S$. Es sei $x \in F_{s_0}$. Dann gilt $d(x, F_{s_0}) = 0$. Weiters gilt $d(x, \bigcup_{s\in S\setminus\{s_0\}} F_s) > 0$. Damit gilt $F_{s_0} \subseteq U_{s_0}$. Da die Metrik d stetig ist (erster Punkt von Lemma 2.2.12), ist für jedes $s_0 \in S$ die Menge U_{s_0} offen. Damit ist der Raum $(X,\mathcal{T})$ collectionwise normal.

■

Satz 4.4 (Zweiter Metrisierbarkeitssatz von Bing). *Es sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum der collectionwise normal ist. Dann ist $(X,\mathcal{T})$ metrisierbar genau dann, falls eine Folge von offenen Überdeckungen $(\mathcal{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X existiert mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in X$ das Mengensystem $\mathfrak{B}(x) := \{S(x, \mathcal{W}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von x ist.*

Beweis: Wir gehen zunächst davon aus, dass der Raum $(X,\mathcal{T})$ metrisierbar ist. Die Existenz einer Folge von offenen Überdeckungen $(\mathcal{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass für jedes $x \in X$ das Mengensystem $\mathfrak{B}(x) := \{S(x, \mathcal{W}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von x ist, folgt aus dem Metrisierbarkeitssatz von Alexandroff-Urysohn.

Wir gehen nun davon aus, dass eine Folge von offenen Überdeckungen $(\mathcal{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, sodass für jedes $x \in X$ das Mengensystem $\mathfrak{B}(x) := \{S(x, \mathcal{W}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von x ist. Wir werden nun zeigen, dass jede offene Überdeckung von $(X,\mathcal{T})$ eine σ-lokal endliche offene Verfeinerung besitzt. Es sei $\mathcal{U} := \{U_s : s \in S\}$ eine offene Überdeckung von X. Wir wählen nun eine Wohlordnung $\leq$ auf der Menge S und definieren für jedes $s_0 \in S$ und jedes $i \in \mathbb{N}$ die Menge

$$F_{s_0,i} := X\setminus\big(S(X\setminus U_{s_0}, \mathcal{W}_i) \cup \bigcup_{s<s_0} U_s\big).$$

Es ist offensichtlich, dass für jedes $s_0 \in S$ und für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Menge $F_{s_0,i}$ abgeschlossen ist. Wir betrachten nun ein $s_0 \in S$ und ein $i \in \mathbb{N}$. Es sei $x \in F_{s_0,i}$. Dann gilt $x \notin S(X\setminus U_{s_0}, \mathcal{W}_i)$ und $x \notin U_s$, für alle $s < s_0$. Damit gilt

$$F_{s_0,i} \subseteq U_{s_0}. \tag{8}$$

Nun betrachten wir ein $x \in X$. Für dieses $x \in X$ definieren wir die Menge $S_x := \{s \in S : x \in U_s\}$. Da $(S, \leq)$ eine wohlgeordnete Menge ist, besitzt die nichtleere Menge S_x ein kleinstes Element. Dieses bezeichnen wir mit $s(x)$. Da für jedes $x \in X$ das Mengensystem $\mathfrak{B}(x) := \{S(x, \mathcal{W}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis des Punktes x ist, existiert ein $i(x) \in \mathbb{N}$ mit

$$S(x, \mathcal{W}_{i(x)}) \subseteq U_{s(x)}. \tag{9}$$

Damit gilt $x \in F_{s(x),i(x)}$. Wir wollen diese letzte Behauptung mit einem Widerspruchsbeweis nachweisen. Wir gehen also davon aus, dass $x \notin F_{s(x),i(x)}$ gilt. Nun können zwei Fälle eintreten. Zunächst gehen wir davon aus, dass x in $S(X\backslash U_{s(x)}, \mathcal{W}_{i(x)})$ liegt. Damit existiert ein $W \in \mathcal{W}_{i(x)}$ mit $x \in W$ und $W \cap (X\backslash U_{s(x)}) \neq \emptyset$. Wegen (16) gilt damit auch $W \subseteq U_{s(x)}$, womit wir offensichtlich einen Widerspruch haben. Weiters kann x offensichtlich nicht in $\bigcup_{s<s(x)} U_s$ liegen, womit wir insgesamt die Behauptung $x \in F_{s(x),i(x)}$ nachgewiesen haben. Damit ist das Mengensystem $\mathcal{F} := \{F_{s,i} : s \in S, i \in \mathbb{N}\}$ eine abgeschlossene Überdeckung von X. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ definieren wir nun das Mengensystem $\mathcal{F}_i := \{F_{s,i} : s \in S\}$. Wir betrachten nun ein $i \in \mathbb{N}$ und ein $x \in X$. Dann ist die Menge $U_{s(x)} \cap S(x, \mathcal{W}_i)$ eine offene Umgebung von x. Wir werden nun zeigen, dass für alle $s_0 \in S\backslash\{s(x)\}$ gilt

$$U_{s(x)} \cap S(x, \mathcal{W}_i) \cap F_{s_0,i} = \emptyset. \tag{10}$$

Um (17) nachzuweisen führen wir eine Fallunterscheidung durch. Wir betrachten zunächst ein $s_0 \in S\backslash\{s(x)\}$ mit $x \in U_{s_0}$. Nun führen wir einen Widerspruchsbeweis. Wir gehen also davon aus, dass für ein solches s_0 die linke Seite in (17) nichtleer ist. Dann existiert ein $y \in U_{s(x)} \cap S(x, \mathcal{W}_i) \cap F_{s_0,i}$. Damit liegt y insbesondere in der Menge $S(X\backslash U_{s_0}, \mathcal{W}_i)^c$. Daher gilt $y \in U_{s_0}$. Weiters gilt auch $y \in U_{s(x)}$ und $y \notin U_s$, für alle $s < s_0$. Damit erhalten wir $s(x) \geq s_0$. Aufgrund unserer Voraussetzung $x \in U_{s_0}$ folgt damit $s(x) = s_0$. Damit haben wir einen Widerspruch. Nun betrachten wir ein $s_0 \in S\backslash\{s(x)\}$ mit $x \notin U_{s_0}$. Damit gilt $S(x, \mathcal{W}_i) \subseteq S(X\backslash U_{s_0}, \mathcal{W}_i)$, womit auch in diesem Fall (17) gilt. Wir haben also insgesamt bewiesen, dass für alle $s_0 \in S\backslash\{s(x)\}$ die offene Umgebung $U_{s(x)} \cap S(x, \mathcal{W}_i)$ von x mit der Menge $F_{s_0,i}$ leeren Schnitt besitzt. Damit ist für jedes $i \in \mathbb{N}$ das Mengensystem $\mathcal{F}_i := \{F_{s,i} : s \in S\}$ diskret. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ collectionwise normal ist, existiert nun wegen (15) für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein diskretes Mengensystem $\mathcal{U}_i := \{U_{s,i} : s \in S\}$ von offenen Teilmengen von X mit

$$F_{s,i} \subseteq U_{s,i} \subseteq U_s, \text{ für alle } s \in S.$$

Damit ist das Mengensystem $\{U_{s,i} : s \in S, i \in \mathbb{N}\}$ eine σ-lokal endliche offene Verfeinerung von $\mathcal{U} := \{U_s : s \in S\}$. Damit haben wir also gezeigt, dass jede offene Überdeckung von X eine σ-lokal endliche offene Verfeinerung besitzt.

Nun sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Mengensystem $\mathcal{B}_n$ eine σ-lokal endliche offene Verfeinerung von $\mathcal{W}_n$. Wir definieren nun das Mengensystem $\mathcal{B} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$. Weiters betrachten wir für ein $x \in X$ das Mengensystem $\mathfrak{B}(x) := \{O \in \mathcal{B} : x \in O\}$. Es sei nun U eine Umgebung von x. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $S(x, \mathcal{W}_n) \subseteq U$. Da $\mathcal{B}_n$ eine offene Verfeinerung von $\mathcal{W}_n$ ist, existiert ein $O \in \mathcal{B}$ mit

$$x \in O \subseteq S(x, \mathcal{B}_n) \subseteq S(x, \mathcal{W}_n) \subseteq U.$$

Damit ist $\mathfrak{B}(x)$ eine Umgebungsbasis von x. Wegen Lemma 3.14 aus [1] ist damit $\mathcal{B}$ eine σ-lokal endliche Basis von $(X, \mathcal{T})$. Der Raum $(X, \mathcal{T})$ ist collectionwise normal, daher wegen Korollar 4.2 normal und damit insbesondere auch regulär. Aus dem Metrisierbarkeitssatz von Nagata-Smirnov folgt damit die Metrisierbarkeit des Raums $(X, \mathcal{T})$.

■

Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Folge von offenen Überdeckungen $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in X$ das Mengensystem $\mathfrak{B}(x) := \{S(x, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von x ist, heißt eine Entwicklung des Raums $(X, \mathcal{T})$. Eine solche Entwicklung ist uns bereits im Metrisierbarkeitssatz von Alexandroff-Urysohn begegnet. Wie wir gesehen haben, kommt dieser Begriff auch im zweiten Metrisierbarkeitssatz von Bing vor(er wurde im Jahr 1951 bewiesen). Topologische Räume, die eine Entwicklung besitzen und regulär sind heißen Moore-Räume. Es existieren Moore-Räume, die nicht metrisierbar sind. Umgekehrt ist aber jeder metrisierbare Raum ein Moore-Raum. Satz 4.4 zeigt, dass jeder Moore-Raum, der collectionwise normal ist, auch metrisierbar ist. Nun ist es natürlich naheliegend zu Fragen, ob normale Moore-Räume metrisierbar sind. Fleissner hat 1982 bewiesen, dass unter der Annahme der Kontinuumshypothese (die Kontinuumshypothese besagt, dass jede überabzählbare Teilmenge der reellen Zahlen bijektiv auf die reellen Zahlen abgebildet werden kann), die unabhängig von ZFC ist, nichtmetrisierbare normale Moore-Räume konstruiert werden können. Dieses Problem führt in den Bereich der mathematischen Logik, weshalb wir hier nicht genauer darauf eingehen wollen.

Wir wollen nun einen weiteren Metrisierbarkeitssatz beweisen, der von Alexandroff aus dem Jahr 1960 stammt. Zuvor wollen den Begriff der uniformen Basis einführen.

Definition 4.5. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ eine Basis des Raums $(X, \mathcal{T})$. Dann heißt $\mathcal{B}$ eine uniforme Basis, falls jedes $x \in X$ folgende Eigenschaft besitzt: Für jede Umgebung U von x existieren höchstens endlich viele Mengen aus $\mathcal{B}$, die x enthalten und keine Teilmenge von U sind.*

Satz 4.6 (Metrisierbarkeitssatz von Alexandroff). *Es sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum der collectionwise normal ist. Dann ist $(X,\mathcal{T})$ metrisierbar genau dann, falls eine uniforme Basis existiert.*

Beweis: Wir gehen zunächst davon aus, dass der Raum $(X,\mathcal{T})$ metrisierbar ist. Es sei d eine Metrik auf X, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir das Mengensystem $\mathcal{U}_n := \{U_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X\}$. Da der Raum $(X,\mathcal{T})$ metrisierbar ist, ist er wegen Satz 3.12 aus [1] auch parakompakt. Damit existiert zu dem Mengensystem $\mathcal{U}_n$ eine lokal endliche offene Verfeinerung $\mathcal{B}_n$. Wir werden nun nachweisen, dass das Mengensystem $\mathcal{B} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ eine uniforme Basis des Raums $(X,\mathcal{T})$ ist. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{B}$ eine Basis ist. Dazu betrachten wir ein $x \in X$ und eine Umgebung V des Punktes x. Damit existiert ein $n(x) \in \mathbb{N}$ mit $U_{\frac{1}{n(x)}}(x) \subseteq V$. Wir betrachten nun ein $B \in \mathcal{B}_{2n(x)}$, dass x enthält. Ein solches B existiert, da $\mathcal{B}_{2n(x)}$ eine Überdeckung von X ist. Da $\mathcal{B}_{2n(x)}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}_{2n(x)}$ ist, existiert ein $y \in X$ mit

$$x \in B \subseteq U_{\frac{1}{2n(x)}}(y) \subseteq U_{\frac{1}{n(x)}}(x) \subseteq V.$$

Damit haben wir nachgewiesen, dass $\mathfrak{B}(x) := \{O \in \mathcal{B} : x \in O\}$ eine Umgebungsbasis des Punktes x ist. Wegen Lemma 3.14 aus [1] ist $\mathcal{B}$ damit eine Basis des Raums $(X,\mathcal{T})$. Wir werden nun zeigen, dass $\mathcal{B}$ sogar eine uniforme Basis ist. Es sei $x \in X$ und V eine Umgebung des Punktes x. Da für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Mengensystem $\mathcal{B}_n$ lokal endlich ist, ist x nur in endlich vielen Mengen aus $\mathcal{B}_n$ enthalten. Es existiert ein $n(x) \in \mathbb{N}$ mit

$$x \in U_{\frac{1}{n(x)}}(x) \subseteq V.$$

Wir betrachten nun ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2n(x)$. Für jedes $B \in \mathcal{B}_m$, das x enthält, existiert ein $y \in X$ mit

$$x \in B \subseteq U_{\frac{1}{m}}(y) \subseteq U_{\frac{1}{n(x)}}(x) \subseteq V$$

da $\mathcal{B}_m$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}_m$ ist. Damit existiert in jedem Mengensystem $\mathcal{B}_m$ mit $m \geq 2n(x)$ keine Menge, die x enthält und gleichzeitig keine Teilmenge von V ist. Damit existieren nur endlich viele Mengen aus $\mathcal{B}$, die $x \in B$ und $B \nsubseteq V$ erfüllen. Damit ist $\mathcal{B}$ eine uniforme Basis des Raums $(X,\mathcal{T})$.

Wir gehen nun davon aus, dass der Raum $(X,\mathcal{T})$ collectionwise normal ist und eine uniforme Basis $\mathcal{B}$ besitzt. Wir zeigen zunächst die Aussage, dass jede Menge aus $\mathcal{B}$ in höchstens endlich vielen Mengen aus $\mathcal{B}$ enthalten ist. Dafür gehen wir vom Gegenteil aus und führen dies auf einen Widerspruch. Wir gehen also davon aus, dass eine Menge $B \in \mathcal{B}$ existiert, die eine echte Teilmenge von abzählbar unendlich vielen Mengen aus $\mathcal{B}$ ist. Diese Mengen fassen wir zusammen zum Mengensystem $\mathcal{B}' := \{B_i : i \in \mathbb{N}\}$. Jedes B_i enthält den Punkt x und hat mit dem Komplement von B nichtleeren Durchschnitt. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $\mathcal{B}$ eine uniforme Basis ist. Also ist jede Menge $B \in \mathcal{B}$ in höchstens endlich vielen Mengen aus $\mathcal{B}$ enthalten. Wir werden ab jetzt für jedes $B \in \mathcal{B}$ mit $r(B)$ die Anzahl aller Mengen aus $\mathcal{B}$ bezeichnen, die die Menge B enthalten. Wir werden nun nachweisen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Mengensystem

$$\mathcal{W}_n := \{B \in \mathcal{B} : r(B) \geq n\} \cup \{\{x\} : \text{ x ist ein isolierter Punkt von X}\}$$

eine offene Überdeckung von X ist. Dazu betrachten wir einen Häufungspunkt x von X. Dann existiert ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ aus $X\backslash\{x\}$, dass gegen x konvergiert. Da $\mathcal{B}$ eine Basis des Raums $(X,\mathcal{T})$ ist, existiert ein $B_1 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_1$. Da B_1 eine Umgebung von x ist, existiert ein $j \in I$ mit $x_j \in B_1$. Da der Raum $(X,\mathcal{T})$ das Trennungsaxiom T_1 erfüllt, existiert wegen Lemma 3.14 aus [1] eine Menge B_2 aus $\mathcal{B}$, die x enthält, x_j nicht enthält und eine echte Teilmenge von B_1 ist. Führt man dieses Verfahren n-mal durch, erhält man, dass x in einer Menge B aus $\mathcal{B}$ liegt mit $r(B) \geq n$. Damit ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Mengensystem $\mathcal{W}_n$ eine offene Überdeckung von X.

Wir werden nun zeigen, dass für jedes $x \in X$ das Mengensystem $\mathfrak{B}(x) := \{S(x,\mathcal{W}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis des Punktes x ist. Es sei daher V eine Umgebung des Punktes x mit der Eigenschaft, dass mindestens eine Menge B aus $\mathcal{B}$ existiert, die $x \in B \nsubseteq V$ erfüllt. Da $\mathcal{B}$ eine uniforme Basis ist, existieren damit höchstens endlich viele Mengen $B_1, ..., B_n$ aus $\mathcal{B}$, die x enthalten und mit der Menge $X\backslash V$ nichtleeren Durchschnitt besitzen. Damit gilt für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ die Beziehung $r(B_i) \leq n$. Damit erhalten wir, dass für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ gilt $B_i \notin \mathcal{W}_{n+1}$. Daher ist jede Menge aus $\mathcal{W}_{n+1}$ die x enthält auch in der Menge V enthalten. Daraus folgt $S(x,\mathcal{W}_{n+1}) \subseteq V$. Betrachtet man den Fall, dass

V eine Umgebung von x ist, die alle Mengen aus $\mathcal{B}$ enthält, die den Punkt x enthalten, dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Mengeninklusion $S(x, \mathcal{W}_n) \subseteq V$. Damit ist also $\mathfrak{B}(x) := \{S(x, \mathcal{W}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis des Punktes x. Wegen Satz 4.4 ist damit der Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar.

■

Zum Schluss dieser Arbeit wollen wir den Metrisierbarkeitssatz von Arhangelski beweisen, der auch aus dem Jahr 1960 stammt. Dazu brauchen wir den Begriff der regulären Basis.

Definition 4.7. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ eine Basis des Raums $(X, \mathcal{T})$. Dann heißt $\mathcal{B}$ eine reguläre Basis, falls jedes $x \in X$ folgende Eigenschaft besitzt: Für jede Umgebung U von x existiert eine Umgebung W von x mit der Eigenschaft, dass höchstens endlich viele $B \in \mathcal{B}$ die beiden Bedingungen $B \cap W \neq \emptyset$ und $B \cap (X \backslash U) \neq \emptyset$ erfüllen.*

Satz 4.8 (Metrisierbarkeitssatz von Arhangelski). *Es sei $(X, \mathcal{T})$ eine topologischer T_1-Raum. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar genau dann, falls eine reguläre Basis existiert.*

Beweis: Wir gehen zunächst davon aus, dass $(X, \mathcal{T})$ ein metrisierbarer topologischer Raum ist und d eine Metrik auf X, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist das Mengensystem $\mathcal{U}_n := \{U_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X\}$ eine offene Überdeckung des Raums $(X, \mathcal{T})$. Wegen Satz 3.12 aus [1] existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine lokal endliche offene Verfeinerung $\mathcal{B}_n$. Wir haben bereits im Beweis des Satzes 4.6 nachgewiesen, dass $\mathcal{B} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ eine Basis des Raums $(X, \mathcal{T})$ ist. Wir zeigen nun, dass diese Basis auch regulär ist. Dazu betrachten wir ein $x \in X$ und eine Umgebung V von x. Damit existiert ein $n(x) \in \mathbb{N}$ mit $U_{\frac{1}{n(x)}}(x) \subseteq V$. Für jedes $m \in \{1, ..., 3n(x)\}$ betrachten wir nun eine Umgebung W_m von x, die mit fast allen Mengen aus $\mathcal{B}_m$ leeren Durchschnitt besitzt. Wir definieren nun die Menge

$$W := \Big(\bigcap_{m \leq 3n(x)} W_m\Big) \cap U_{\frac{1}{3n(x)}}(x)$$

und betrachten ein $k \geq 3n(x)$. Es sei nun $B \in \mathcal{B}_k$ mit $B \cap W \neq \emptyset$. Da $\mathcal{B}_k$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}_k$ ist, existiert ein $y \in X$ mit $B \subseteq U_{\frac{1}{k}}(y)$. Weiters gilt $U_{\frac{1}{k}}(y) \cap U_{\frac{1}{3n(x)}}(x) \neq \emptyset$. Damit erhält man insgesamt

$$B \subseteq U_{\frac{1}{k}}(y) \subseteq U_{\frac{1}{n(x)}}(x) \subseteq V.$$

Damit haben wir nachgewiesen, dass $\mathcal{B}$ eine reguläre Basis des Raums $(X, \mathcal{T})$ ist.

Wir setzen nun voraus, dass der Raum $(X, \mathcal{T})$ das Trennungsaxiom T_1 erfüllt und eine reguläre Basis besitzt. Im ersten Schritt werden wir nun nachweisen, dass der Raum $(X, \mathcal{T})$ regulär ist. Wir betrachten ein $x \in X$ und eine offene Umgebung V von x. Da $\mathcal{B}$ eine reguläre Basis des Raums $(X, \mathcal{T})$ ist, existiert eine offene Umgebung W_1 von x mit der Eigenschaft, dass für höchstens endlich viele Mengen $B \in \mathcal{B}$ gilt $B \cap W \neq \emptyset$ und $B \cap (X \backslash V) \neq \emptyset$. Nun betrachten wir einen Punkt $y \notin V$, der ein Häufungspunkt von X ist. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ das Trennungsaxiom T_1 erfüllt, können wir analog zu der Vorgehensweise im Beweis des Satzes 4.6 zeigen, dass y in unendlich vielen Mengen aus $\mathcal{B}$ enthalten ist. Da $\mathcal{B}$ regulär ist, existiert mindestens ein $B' \in \mathcal{B}$, dass y enthält und $B' \cap W = \emptyset$ erfüllt. Damit gilt also $y \notin \overline{W}$. Es sei nun $y \notin V$ ein isolierter Punkt von X, dann ist $\{y\}$ eine Umgebung von y. Die Menge $W \cap V$ ist eine Umgebung von x, die y nicht enthält. Damit gilt $y \notin \overline{W \cap V}$. Insgesamt erhalten wir damit, dass für jedes $y \notin V$ gilt $y \notin \overline{W \cap V}$. Damit erhalten wir, dass für jedes $x \in X$ und für jede offene Umgebung V von x eine offene Menge W existiert mit

$$x \in W \cap V \subseteq \overline{W \cap V} \subseteq V.$$

Damit ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ regulär.

Im zweiten Schritt werden wir nun zeigen, dass die reguläre Basis $\mathcal{B}$ auch σ-lokal endlich ist. Eine Menge $B \in \mathcal{B}$ nennen wir maximal in $\mathcal{B}$, falls sie in keiner anderen Menge aus $\mathcal{B}$ enthalten ist. Mit $\mathcal{B}_1$ bezeichnen wir die Menge aller maximalen Mengen aus $\mathcal{B}$. Es ist offensichtlich, dass jede reguläre Basis auch eine uniforme Basis ist. Wie im Beweis des Satzes 4.6 gezeigt wurde, ist daher jede Menge aus $\mathcal{B}$ in nur endlich vielen Mengen aus $\mathcal{B}$ enthalten. Damit ist das Mengensystem $\mathcal{B}_1$ eine Überdeckung von X. Wir werden nun zeigen, dass $\mathcal{B}_1$ lokal endlich ist. Es sei $x \in X$. Dann existiert ein $B \in \mathcal{B}_1$ mit $x \in B$. Wir gehen zunächst davon aus, dass B mit fast allen Mengen aus $\mathcal{B}_1$ leeren Durchschnitt besitzt. Dann sind wir fertig. Besitzt B mit unendlich vielen Mengen aus $\mathcal{B}_1$ nichtleeren Durchschnitt, dann können diese Mengen keine Teilmenge von B sein, da sie alle maximal in $\mathcal{B}$ sind. Damit existieren also unendlich viele Mengen aus $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$, die $X \backslash B$ schneiden. Da $\mathcal{B}$ eine reguläre Basis ist, existiert damit eine Umgebung $W \subseteq B$ von x, die mit höchstens endlich vielen dieser Mengen nichtleeren Durchschnitt besitzt. Damit ist $\mathcal{B}_1$ lokal endlich. Wir definieren nun das Mengensystem $\mathcal{B}_2$, als die Menge aller Mengen aus $\mathcal{B} \backslash \mathcal{B}_1$ die maximal in $\mathcal{B} \backslash \mathcal{B}_1$ sind. $\mathcal{B}_2$ sei also das Mengensystem aller Mengen aus $\mathcal{B} \backslash \mathcal{B}_1$, die in keiner anderen Menge aus $\mathcal{B} \backslash \mathcal{B}_1$ enthalten sind. Wir betrachten nun einen Häufungspunkt $x \in X$. Wir wissen bereits aus dem Beweis von Satz 4.6, dass unendlich viele Mengen aus $\mathcal{B}$ existieren, die x enthalten. Damit existiert eine Menge $B \in \mathcal{B}_2$ mit $x \in B$. Nun zeigt man analog zu vorhin, dass eine Umgebung W von x existiert, die mit fast allen Mengen aus $\mathcal{B}_2$ leeren Durchschnitt besitzt. Wir betrachten nun den Fall, dass $x \in X$ ein isolierter Punkt von x ist mit $\{x\} \in \mathcal{B}_2$. Dann kann man analog zu vorhin zeigen, dass $\{x\}$ eine Umgebung von x ist, die mit fast allen Mengen aus $\mathcal{B}_2$ leeren Durchschnitt besitzt. Zum Schluss betrachten wir den Fall, dass x ein isolierter Punkt ist und $\{x\} \notin \mathcal{B}_2$ erfüllt. Damit liegt $\{x\}$ in $\mathcal{B}_1$. Nun kann es keine Menge aus $\mathcal{B}_2$ geben, die x enthält. Damit besitzt die Umgebung $\{x\}$ von x mit allen Mengen aus $\mathcal{B}_2$ leeren Durchschnitt. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass $\mathcal{B}_2$ lokal endlich ist. Wir definieren nun induktiv für jedes $n > 1$ ein lokal endliches Mengensystem $\mathcal{B}_n$, wobei $\mathcal{B}_n$ das Mengensystem aller Mengen aus $\mathcal{B} \backslash (\bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{B}_i)$ ist, die in keiner anderen Menge aus $\mathcal{B} \backslash (\bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{B}_i)$ enthalten sind. Damit erhalten wir, dass $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ eine σ-lokal endliche Basis von $(X, \mathcal{T})$ ist. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ auch regulär ist, folgt aus dem Metrisierbarkeitssatz von Nagata-Smirnov die Metrisierbarkeit des Raums $(X, \mathcal{T})$.

■

Literatur

[1] Özcaliskan, Sinan: *Metrisierbarkeit.* http://www.asc.tuwien.ac.at/~funkana/downloads_general/sem_oezcaliskan-update.pdf, 2014.

[2] Engelking, Ryszard: *General Topology.* Heldermann-Verlag, Berlin, 1989.

[3] Woracek, Harald: *Allgemeine Topologie.* http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/topo.pdf, 2003.

[4] Nagata, Jun-Iti: *Modern General Topology.* North-Holland, Amsterdam, 1968.

[5] Bourbaki, Nicolas: *Elements of Mathematics General Topology. Part 1,2.* Hermann, Paris, 1966.

[6] Rinow, Willi: *Lehrbuch der Topologie.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975.

[7] http://susanjkleinart.com/compactification/Wsr18.pdf.

[8] Kaltenbäck, Michael: *Analysis 3.* http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/ANA_III.pdf, 2015.

[9] Kriegl, Andreas: *Topologie I.* http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Skripten/topologie.pdf, 2002.

[10] Aliprantis, Charalambos D. und Border, Kim C.: *Infinite Dimensional Analysis A Hitchhiker's Guide.* Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[11] Reed, George M.: *Set-Theoretic Topology.* Academic Press, New York, 1977.