Bachelorarbeit aus Analysis

TU Wien - SS 2011

Äquivalente Formulierungen von T3

Raphael Pruckner

27.05.2011

Betreuer: Ao.Univ.Prof.Dipl.-Ing.Dr.techn. Michael Kaltenbäck

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Trennungsaxiom T3 in topologischen Räumen. Das Ziel ist, möglichst viele und interessante Charakterisierungen von T3 anzugeben. Eine reichhaltige Quelle hierfür waren Teile der Diplomarbeit von Karsten Evers, siehe [1], in der auch einige neue Aussagen aus diesem Gebiet zu finden sind.

Im ersten Kapitel zeigen wir einige grundlegende Eigenschaften. Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit *semiuniformen Räumen*. Um nicht gleich alle Leser zu verschrecken, wird zuerst der etwas stärkere Begriff der *uniformen Räume* eingeführt, zu dem es zwei recht unterschiedliche Zugänge gibt. Beide Zugänge werden vorgestellt, und es wird gezeigt, dass sie äquivalent sind. Die Definition der Uniformität, welche eng mit T3$\frac{1}{2}$ verbunden ist, wird anschließend abgeschwächt, wodurch der Begriff der Semiuniformität entsteht, welcher wiederum eng mit T3 zusammenhängt.

Im Kapitel 3, welches stark auf [1] basiert, wird die ursprüngliche Definition von *stetiger Konvergenz*, die auf Hans Hahn zurückgeht, vorgestellt, und auf topologische Räume verallgemeinert. In diesem Zusammenhang ergibt sich eine interessante Eigenschaft von T3-Räumen (Satz 3.2.5), die sich (im Hauptresultat, Satz 3.4.1 (*ii*)) sogar als charakteristisch für T3 erweist. Diese Eigenschaft war zwar schon seit längerem bekannt, jedoch nicht, dass es sich hierbei um eine charakteristische Eigenschaft von T3-Räumen handelt. Es ergibt sich in diesem Zusammenhang außerdem eine natürliche, neue Abschwächung des Begriffs der Stetigkeit, nämlich die *schwache Stetigkeit*, aus der sich ebenfalls eine äquivalente Formulierung von T3 ergibt (Satz 3.4.1 (*iii*)).

Notation

- Der Umgebungsfilter von $x \in X$ in einem Topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ wird mit $\mathfrak{U}_x$ oder auch, um die Topologie zu betonen, mit $\mathfrak{U}_x^{\mathcal{T}}$ bezeichnet.
- Für ein $p \in X$ steht $\uparrow p := \{A \subseteq X \mid p \in A\}$ für den zu p gehörenden Hauptfilter.
- Für eine Filterbasis $\mathfrak{B}$ bezeichnet $\overline{\mathfrak{B}}$ die Menge der Abschlüsse, also $\overline{\mathfrak{B}} := \left\{\overline{B} \mid B \in \mathfrak{B}\right\}$. Man sieht leicht, dass es sich dabei wieder um eine Filterbasis handelt.

Die übrige Notation wird aus [3] übernommen.

1 Grundlegende Eigenschaften

1.1.1 Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *T3-Raum*, wenn

(T3) für alle $x \in X$ und $A \subseteq X$ abgeschlossen mit $x \notin A$ gibt es offene Mengen $O_x, O_A \subseteq X$, $O_x \cap O_A = \emptyset$, mit $x \in O_x$ und $A \subseteq O_A$ gibt.

1.1.2 Lemma. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann ein T3-Raum, wenn es für alle $x \in X$ und $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O$ eine Menge $U \in \mathcal{T}$ gibt, sodass $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq O$.*

Beweis. Sei $x \in O$ für ein offenes O. Wegen T3 kann man x von der abgeschlossenen Menge O^c trennen, da $x \notin O^c$. Damit gibt es offene, disjunkte Mengen U und V mit $x \in U$ und $O^c \subseteq V$. Aus der Disjunktheit folgt $U \subseteq V^c$, und weil V^c abgeschlossen ist, gilt sogar $\overline{U} \subseteq V^c$. Wir erhalten also $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V^c \subseteq O$.

Gelte umgekehrt die im Lemma formulierte Eigenschaft. Zu $x \notin A$ mit A abgeschlossen, wenden wir die Eigenschaft auf $x \in A^c$ an und erhalten ein offenes U mit $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq A^c$. Damit können wir x und A aber durch die offenen, disjunkten Mengen $O_x := U$ und $O_A := \overline{U}^c$ trennen. □

1.1.3 Korollar. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Folgende drei Eigenschaften sind äquivalent:*

(i) $(X, \mathcal{T})$ ist ein T3-Raum.

(ii) $\overline{\mathfrak{U}_x}$ ist eine Filterbasis des Umgebungsfilters $\mathfrak{U}_x$ für alle $x \in X$.

(iii) Für jede Filterbasis $\mathfrak{B}$ folgt aus $\mathfrak{B} \to x$ bereits $\overline{\mathfrak{B}} \to x$.

Beweis. Man sieht leicht, dass die Menge der Abschlüsse von Mengen aus einer Filterbasis wieder eine Filterbasis bildet.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Es liegt mit $\overline{\mathfrak{U}_x}$ eine Filterbasis vor. Es bleibt nur zu zeigen, dass der davon erzeugte Filter schon der Umgebungsfilter von x ist, also $\mathfrak{F}(\overline{\mathfrak{U}_x}) = \mathfrak{U}_x$. Dabei ist die linke Seite klarerweise in der rechten Seite enthalten. Um zu zeigen, dass auch die rechte Seite in der linken enthalten ist, nehmen wir uns eine beliebige Umgebung U von x her. Es gilt also $x \in O \subseteq U$ für ein $O \in \mathcal{T}$. Wegen T3 existiert nach Lemma 1.1.2 ein $P \in \mathcal{T}$ mit $x \in P \subseteq \overline{P} \subseteq O \subseteq U$. Damit ist P eine Umgebung von x, also $\overline{P} \in \overline{\mathfrak{U}_x}$ mit $\overline{P} \subseteq U$, was $U \in \mathfrak{F}(\overline{\mathfrak{U}_x})$ zur Folge hat.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Angenommen $\overline{\mathfrak{U}_x}$ ist eine Filterbasis des Umgebungsfilters von x, für alle $x \in X$. Für ein beliebiges $x \in X$ und eine beliebige Menge $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O$ gilt klarerweise $O \in \mathfrak{U}_x$, und laut Voraussetzung gibt es ein $U \in \mathfrak{U}_x$ mit $\overline{U} \subseteq O$. Zu der Umgebung U gibt es ein $P \in \mathcal{T}$ mit $x \in P \subseteq U$. Es folgt $x \in P \subseteq \overline{P} \subseteq \overline{U} \subseteq O$, womit nach Lemma 1.1.2 das Trennungsaxiom T3 gezeigt wäre.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Angenommen $\mathfrak{B} \to x$, d.h. $\mathfrak{U}_x \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{B})$. Folgende Aussage ist dazu äquivalent, falls $\mathcal{W}$ irgendeine Filterbasis von $\mathfrak{U}_x$ ist:

$$\forall W \in \mathcal{W}\, \exists B \in \mathfrak{B} : B \subseteq W.$$

Auf die Filterbasis $\overline{\mathfrak{U}_x}$ bezogen bedeutet das, dass es zu jedem $U \in \mathfrak{U}_x$ eine Menge $B \in \mathfrak{B}$ gibt mit $B \subseteq \overline{U}$. Klarerweise gilt dann auch $\overline{B} \subseteq \overline{U}$. Unter nochmaliger Anwendung obiger Äquivalenz folgt $\overline{\mathfrak{B}} \to x$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Die Voraussetzung angewandt auf $\mathfrak{U}_x \to x$ liefert $\overline{\mathfrak{U}_x} \to x$, also $\mathfrak{F}(\overline{\mathfrak{U}_x}) \supseteq \mathfrak{U}_x$. Klarerweise gilt auch die andere Inklusion, womit das Gewünschte gezeigt wäre. □

2 Uniforme und semiuniforme Räume

2.1 Zwei Zugänge zu Uniformitäten

2.1.1 Definition (Uniformität mit Nachbarschaften)**.** Sei X eine nichtleere Menge. Ein Filter $\mathcal{U}$ auf $X \times X$ heißt *Uniformität* oder *uniforme Struktur*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(U_N1) $\Delta \subseteq U$ für alle $U \in \mathcal{U}$.

(U_N2) Für alle $U \in \mathcal{U}$ ist auch $U^{-1} \in \mathcal{U}$.

(U_N3) Für alle $U \in \mathcal{U}$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}$ mit $V \circ V \subseteq U$.

Hier bezeichnet Δ die Diagonale $\Delta := \{(x,x) \mid x \in X\}$ und U^{-1} die Menge der vertauschten Paare aus U, $U^{-1} := \{(x,y) \mid (y,x) \in U\}$. Außerdem definieren wir

$$V \circ W := \{(x,z) \mid \exists y \in X : (x,y) \in V \wedge (y,z) \in W\}\,.$$

Das Paar $(X,\mathcal{U})$ heißt *uniformer Raum*. Für die Elemente $U \in \mathcal{U}$, die man auch Nachbarschaften nennt, und für ein beliebiges $x \in X$ definieren wir noch den *x-Schnitt von U* als $U_x := \{y \in X \mid (x,y) \in U\}$.

2.1.2 Definition (Grundlegende Definitionen aus der Theorie der Überdeckungen)**.** Für ein $\gamma \subseteq \mathcal{P}(X)$ und ein $A \subseteq X$ nennen wir $\gamma(A) := \bigcup\{C \in \gamma \mid C \cap A \neq \emptyset\}$ den ($\gamma-$)Stern von A. Aus $A \subseteq B$ ist sofort $\gamma(A) \subseteq \gamma(B)$ ersichtlich. Für $A = \{x\}$ schreiben wir statt $\gamma(\{x\})$ meist $\gamma(x)$. Ein $\gamma \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\bigcup \gamma = X$ nennt man eine *Überdeckung von X*.

Für $\alpha, \beta \subseteq \mathcal{P}(X)$ sagen wir

- α ist eine *Verfeinerung* von β, in Zeichen $\alpha < \beta$, falls für alle $A \in \alpha$ ein $B \in \beta$ existiert mit $A \subseteq B$.
- α ist eine *Sternverfeinerung* von β, in Zeichen $\alpha <^* \beta$, falls für alle $x \in X$ ein $B \in \beta$ existiert mit $\alpha(x) \subseteq B$.
- α ist eine *starke Sternverfeinerung* von β, in Zeichen $\alpha <^{**} \beta$, falls für alle $A \in \alpha$ ein $B \in \beta$ existiert mit $\alpha(A) \subseteq B$.

Es ist ersichtlich, dass eine starke Sternverfeinerung auch eine Sternverfeinerung, bzw. eine Sternverfeinerung auch eine Verfeinerung ist.

2.1.3 Proposition. *Sei $\alpha, \beta, \gamma \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. Falls α eine Sternverfeinerung von β, und β eine Sternverfeinerung von γ ist, so ist α eine starke Sternverfeinerung von γ, d.h.*

$$\alpha <^* \beta \wedge \beta <^* \gamma \;\Rightarrow\; \alpha <^{**} \gamma.$$

Beweis. Sei $A \in \alpha$ beliebig. Wir müssen ein $C \in \gamma$ finden, sodass $\alpha(A) \subseteq C$ gilt. Zunächst gilt

$$\alpha(A) = \bigcup \left\{ \tilde{A} \mid \tilde{A} \in \alpha, \tilde{A} \cap A \neq \emptyset \right\} = \bigcup_{x \in A} \alpha(x),$$

wobei für $x \in A$ per definitionem $A \subseteq \alpha(x)$. Für jedes $x \in A$ kann man wegen $\alpha <^* \beta$ eine Menge $B^x \in \beta$ finden, mit $\alpha(x) \subseteq B^x$. Klarerweise umfasst jede Menge B^x auch ganz A. Damit ergibt sich für ein beliebiges $y \in A$ wegen $y \in B^x$

$$\bigcup_{x \in A} \alpha(x) \subseteq \bigcup_{x \in A} B^x \subseteq \beta(y).$$

Wegen $\beta <^* \gamma$ gibt es zu dem y eine Menge $C \in \gamma$ mit $\beta(y) \subseteq C$. □

2.1.4 Definition (Uniformität mit gleichmäßigen Überdeckungen)**.** Sei $X \neq \emptyset$. Eine nichtleere Menge $\Gamma \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ heißt *Uniformität* oder *uniforme Struktur*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind.

(U_G1) Für alle $\alpha \in \Gamma$ ist $\bigcup \alpha = X$.

(U_G2) Für alle $\alpha \subset \mathcal{P}(X)$ mit $\gamma < \alpha$ für ein $\gamma \in \Gamma$ folgt schon $\alpha \in \Gamma$.

(U_G3) Für je zwei $\alpha, \beta \in \Gamma$ gibt es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma < \alpha, \beta$.

(U_G4) Für alle $\alpha \in \Gamma$ gibt es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma <^* \alpha$.

Das Paar (X, Γ) heißt *uniformer Raum*. Die Elemente von Γ nennt man auch gleichmäßige Überdeckungen.

2.1.5 Bemerkung. Aufgrund von Proposition 2.1.3 könnte man in Definition 2.1.4 bei (U_G4) statt der Sternverfeinerung auch eine starke Sternverfeinerung fordern, ohne den Begriff Uniformität zu ändern. Dies wird erwähnt, weil es in der Literatur oft so gemacht wird. Desweiteren sei darauf hingewiesen, dass das, was wir starke Sternverfeinerung nennen, in der Literatur häufig nur „Sternverfeinerung“ genannt wird.

Folgendes Lemma zeigt, dass die beiden Definitionen von Uniformität äquivalent sind.

2.1.6 Lemma. *Ist uns auf einer Menge X eine Uniformität $\mathcal{U}$ wie in Definition 2.1.1 gegeben, so können wir daraus folgendermaßen eine Uniformität $\Gamma_{\mathcal{U}}$ wie in Definition 2.1.4 konstruieren:*

$$\Gamma_{\mathcal{U}} := \left\{\alpha \subseteq \mathcal{P}(X) \,\middle|\, \exists U^\alpha \in \mathcal{U} : \forall x \in X\, \exists A \in \alpha \text{ mit } U^\alpha_x \subseteq A\right\}$$

Ist uns umgekehrt eine Uniformität Γ wie in Definition 2.1.4 gegeben, so können wir daraus ebenfalls eine Uniformität $\mathcal{U}_\Gamma$ wie in Definition 2.1.1 konstruieren:

$$\mathcal{U}_\Gamma := \mathfrak{F}\left(\left\{ \bigcup_{A \in \alpha} A \times A \,\middle|\, \alpha \in \Gamma \right\}\right)$$

Dabei gilt, dass diese Konstruktionen zueinander invers sind, also für ein $\tilde{\mathcal{U}}$ bzw. ein $\tilde{\Gamma}$ stets $\mathcal{U}_{\Gamma_{\tilde{\mathcal{U}}}} = \tilde{\mathcal{U}}$ bzw. $\Gamma_{\mathcal{U}_{\tilde{\Gamma}}} = \tilde{\Gamma}$ gilt. Damit ist $\Gamma_{\tilde{\mathcal{U}}} = \tilde{\Gamma}$ äquivalent zu $\mathcal{U}_{\tilde{\Gamma}} = \tilde{\mathcal{U}}$, und wir sprechen in diesem Fall von äquivalenten *Uniformitäten.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\Gamma_{\mathcal{U}}$ tatsächlich die Eigenschaften (U_G1) bis (U_G4) erfüllt:

Die Nachbarschaft U^α, die zu jedem $\alpha \in \Gamma_{\mathcal{U}}$ existiert, enthält wegen (U_N1) immer die ganze Diagonale, was gleichbedeutend mit $x \in U_x^\alpha$ für alle x ist. Da es per definitionem zu jedem $x \in X$ eine Menge $A \in \alpha$ mit $U_x^\alpha \subseteq A$ gibt, ergibt sich $\bigcup \alpha = X$, und damit (U_G1).

Um (U_G2) zu sehen, sei uns ein $\alpha \subseteq \mathcal{P}(X)$ und ein $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{U}}$ mit $\gamma < \alpha$ gegeben. Weil γ ein Element von $\Gamma_{\mathcal{U}}$ ist, existiert eine Nachbarschaft $U^\gamma \in \mathcal{U}$, sodass es zu jedem $x \in X$ eine Menge $C \in \gamma$ gibt mit $U_x^\gamma \subseteq C$. Aus $\gamma < \alpha$ folgt, dass es zu jeder Menge $C \in \gamma$ eine Menge $A \in \alpha$ gibt, mit $C \subseteq A$. Damit gilt $U_x^\gamma \subseteq C \subseteq A$ und daher $\alpha \in \Gamma_{\mathcal{U}}$.

Um Eigenschaft (U_G3) nachzuweisen, seien uns α und $\beta \in \Gamma_{\mathcal{U}}$ gegeben. Wir definieren $\gamma := \{A \cap B \mid A \in \alpha, B \in \beta\}$. Klarerweise gilt $\gamma < \alpha, \beta$, denn ein beliebiges Element $C \in \gamma$ ist von der Gestalt $C = A \cap B$ und erfüllt offensichtlich $C \subseteq A, B$. Bleibt noch zu überprüfen, ob γ auch ein Element von $\Gamma_{\mathcal{U}}$ ist. Wir wissen von der Existenz zweier Nachbarschaften U^α und U^β, wobei für jedes $x \in X$ ein $A \in \alpha$ und auch ein $B \in \beta$ existiert mit $U_x^\alpha \subseteq A$ bzw. $U_x^\beta \subseteq B$. Nun ist $U^\alpha \cap U^\beta$ wieder eine Nachbarschaft aus $\mathcal{U}$ und erfüllt $\left(U^\alpha \cap U^\beta\right)_x = U_x^\alpha \cap U_x^\beta \subseteq A \cap B$, womit $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{U}}$ verifiziert wäre.

Um Eigenschaft (U_G4) zu belegen, sei $\alpha \in \Gamma_{\mathcal{U}}$ beliebig. Wir müssen ein $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{U}}$ konstruieren mit $\gamma <^* \alpha$. Zunächst bemerken wir, dass für eine beliebige Nachbarschaft $U \in \mathcal{U}$ die Menge aller x-Schnitte $\{U_x \mid x \in X\}$ wegen (U_N1) eine Überdeckung von X ist, die, wie man leicht sieht, sogar ein Element von $\Gamma_{\mathcal{U}}$ ist. Wegen (U_N3) existiert ausgehend von der Nachbarschaft U^α sicherlich ein $V \in \mathcal{U}$ mit $V \circ V \subseteq U^\alpha$. Wenn wir zu $W := V \cap V^{-1}$ übergehen, wird W symmetrisch, d.h. $W = W^{-1}$, und es gilt immer noch $W \circ W \subseteq U^\alpha$. Man beachte, dass wegen (U_N2) die Menge V^{-1} wieder aus $\mathcal{U}$ ist (und damit, wegen der Filtereigenschaft, auch $W \in \mathcal{U}$). Definiere nun $\gamma := \{W_x \mid x \in X\}$. Wie oben schon bemerkt, gilt $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{U}}$. Es bleibt also noch $\gamma <^* \alpha$ zu zeigen:

Für ein beliebiges $y \in X$ müssen wir ein $A \in \alpha$ finden, sodass $\gamma(y) \subseteq A$ gilt. Zu y gibt es aber wegen $\alpha \in \Gamma_{\mathcal{U}}$ sicher ein $A \in \alpha$, so dass $U_y^\alpha \subseteq A$. Wir behaupten jetzt, dass dieses A auch schon eine Obermenge von $\gamma(y)$ ist. Um das zu zeigen, sei z beliebig aus

$$\gamma(y) = \bigcup \{B \mid y \in B \in \gamma\} = \bigcup \{W_x \mid x \in X \text{ mit } y \in W_x\}.$$

Damit gilt $z \in W_x$ für ein passendes $x \in X$, was aber zu $(x, z) \in W$ äquivalent ist. Es gilt auch $y \in W_x$ und damit $(x, y) \in W$, bzw. aufgrund der Symmetrie von W auch $(y, x) \in W$. Daraus folgt $(y, z) \in W \circ W \subseteq U^\alpha$, womit aber aus $z \in U_y^\alpha \subseteq A$ schließlich $\gamma(y) \subseteq A$, und damit $\gamma <^* \alpha$ folgt.

Nun zur Konstruktion von $\mathcal{U}_\Gamma$. Zunächst überzeugen wir uns, dass das Mengensystem

$$\mathfrak{B} := \left\{ \bigcup_{A \in \alpha} A \times A \,\middle|\, \alpha \in \Gamma \right\}$$

überhaupt eine Filterbasis ist: Klarerweise gilt $\emptyset \notin \mathfrak{B} \neq \emptyset$. Seien zwei Mengen B_1 und B_2 aus $\mathfrak{B}$ gegeben, das heißt $B_1 = \bigcup_{A \in \alpha} A \times A$ und $B_2 = \bigcup_{B \in \beta} B \times B$ für gewisse α, β in Γ. Nun gibt es wegen (U_G3) ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma < \alpha, \beta$. Die dazugehörige Menge $B_3 = \bigcup_{C \in \gamma} C \times C \in \mathfrak{B}$ erfüllt damit $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Also macht die Definition von $\mathcal{U}_\Gamma$ Sinn. Um zu zeigen, dass dadurch wieder eine Uniformität im Sinne von 2.1.1 definiert wird, müssen noch die Eigenschaften (U_N1) bis (U_N3) nachgewiesen werden:

Zu $U \in \mathcal{U}_\Gamma$ gibt es per definitionem immer ein $B \in \mathfrak{B}$ mit $B \subseteq U$. Da aber schon jedes Basiselement stets die gesamte Diagonale enthält (hier geht (U_G1) ein - also die Tatsache, dass jedes $\alpha \in \Gamma$ eine Überdeckung ist), folgt $\Delta \subseteq U$, also (U_N1).

Für U beliebig aus $\mathcal{U}_\Gamma$ folgt aus $B \subseteq U$, mit $B \in \mathfrak{B}$ passend, sofort $B^{-1} \subseteq U^{-1}$ (Inklusionen bleiben beim Umdrehen aller Paare erhalten). Weil jede Basismenge symmetrisch ist, also $B = B^{-1}$ gilt, haben wir $U^{-1} \in \mathcal{U}_\Gamma$ gezeigt, und damit (U_N2).

Zu U beliebig aus $\mathcal{U}_\Gamma$ sei wieder B eine Basismenge mit $B \subseteq U$ und sei $\alpha \in \Gamma$ eine gleichmäßige Überdeckung, für die $B = \bigcup_{A\in\alpha} A \times A$ gilt. Aufgrund von (U_G4) gibt es jetzt eine Sternverfeinerung $\gamma \in \Gamma$ von α, das heißt $\gamma <^* \alpha$. Wir behaupten nun, dass die Menge $V := \bigcup_{C\in\gamma} C \times C$ aus $\mathcal{U}_\Gamma$ die Beziehung $V \circ V \subseteq U$ erfüllt. Sei dazu (x, z) ein Element von $V \circ V$. Das bedeutet, dass es ein $y \in X$ gibt, sodass die Paare (x, y) und (y, z) jeweils in V enthalten sind. Nach Definition von V gibt es also eine Menge $C_1 \in \gamma$, die beide Punkte x und y enthält, und es gibt eine Menge $C_2 \in \gamma$, die beide Punkte y und z enthält. Insbesondere enthalten beide Mengen den Punkt y, woraus sofort $C_1, C_2 \subseteq \gamma(y)$ folgt. Weil γ eine Sternverfeinerung von α ist, gibt es aber zu diesem y sicher eine Menge A in α, für die $\gamma(y) \subseteq A$ gilt. Also sind C_1 und C_2 in A enthalten, insbesondere also die zwei Punkte x und z. Die zwei Punkte liegen in der selben Menge $A \in \alpha$, womit $(x, z) \in \bigcup_{A\in\alpha} A \times A = B \subseteq U$ folgt. Wir haben damit $V \circ V \subseteq U$ verifiziert. Es gilt also (U_N3).

Zu zeigen bleibt, dass diese Konstruktionen zueinander invers sind.
Wir beginnen mit $\Gamma_{\mathcal{U}_{\tilde\Gamma}} = \tilde\Gamma$.

$\Gamma_{\mathcal{U}_{\tilde\Gamma}} \supseteq \tilde\Gamma$: Sei $\alpha \in \tilde\Gamma$ beliebig. Um $\alpha \in \Gamma_{\mathcal{U}_{\tilde\Gamma}}$ zu verifizieren, müssen wir eine Nachbarschaft $U^\alpha \in \mathcal{U}_{\tilde\Gamma}$ angeben, sodass für jedes $x \in X$ ein $A \in \alpha$ mit $U^\alpha_x \subseteq A$ existiert. Zunächst bemerken wir, dass für ein beliebiges $\gamma \in \tilde\Gamma$ und die dazugehörige Nachbarschaft $\bigcup_{C\in\gamma} C \times C \in \mathcal{U}_{\tilde\Gamma}$ folgender Zusammenhang gilt:

$$\Big(\bigcup_{C\in\gamma} C \times C\Big)_x = \{y \mid \exists C \in \gamma : x, y \in C\} = \bigcup_{C\in\gamma, x\in C} C = \gamma(x) \tag{1}$$

Wenn wir nun speziell γ als Sternverfeinerung von α, also $\gamma <^* \alpha$, und dann als Nachbarschaft U^α einfach $U^\alpha := \bigcup_{C\in\gamma} C \times C$ wählen, ergibt sich für beliebiges $x \in X$ wegen (1) schließlich $U^\alpha_x = \gamma(x) \subseteq A$ für ein $A \in \alpha$, womit $\alpha \in \Gamma_{\mathcal{U}_{\tilde\Gamma}}$ gezeigt wäre.

$\Gamma_{\mathcal{U}_{\tilde\Gamma}} \subseteq \tilde\Gamma$: Sei nun $\alpha \in \Gamma_{\mathcal{U}_{\tilde\Gamma}}$ beliebig. Per definitionem existiert eine Nachbarschaft $U^\alpha \in \mathcal{U}_{\tilde\Gamma}$, sodass für alle $x \in X$ ein $A \in \alpha$ existiert mit $U^\alpha_x \subseteq A$. Konstruktionsbedingt enthält die Nachbarschaft ein Basiselement, d.h. $\bigcup_{B\in\beta} B \times B \subseteq U^\alpha$ für ein $\beta \in \tilde\Gamma$. Mit der Identität (1) ergibt sich für ein beliebiges $x \in X$

$$\Big(\bigcup_{B\in\beta} B \times B\Big)_x = \beta(x) \subseteq U^\alpha_x \subseteq A.$$

Also ist β eine Sternverfeinerung von α, d.h. $\beta <^* \alpha$. Damit ist insbesondere β eine Verfeinerung von α, d.h. $\beta < \alpha$. Wegen Eigenschaft (U_G2) folgt $\alpha \in \tilde\Gamma$.

Es bleibt noch $\mathcal{U}_{\Gamma_{\tilde{\mathcal{U}}}} = \tilde{\mathcal{U}}$ zu zeigen.

$\mathcal{U}_{\Gamma_{\tilde{\mathcal{U}}}} \supseteq \tilde{\mathcal{U}}$: Sei $U \in \tilde{\mathcal{U}}$ beliebig. Um $U \in \mathcal{U}_{\Gamma_{\tilde{\mathcal{U}}}}$ zu zeigen, müssen wir ein $\alpha \in \Gamma_{\tilde{\mathcal{U}}}$ finden, sodass $\bigcup_{A\in\alpha} A \times A \subseteq U$. Konstruiere zu dem U ein symmetrisches $V \in \tilde{\mathcal{U}}$ mit $V \circ V \subseteq U$.

Definiere jetzt α als die Menge der x-Schnitte von V, d.h. $\alpha := \{V_x \mid x \in X\}$. Offenbar liegt α in $\Gamma_{\tilde{\mathcal{U}}}$. Wir behaupten, dass mit diesem α bereits $\bigcup_{A\in\alpha} A \times A \subseteq U$ gilt. Sei dazu $(x,y) \in \bigcup_{A\in\alpha} A \times A$ beliebig. Damit sind x und y in einer Menge $A \in \alpha$ enthalten, also $x, y \in V_t$ für ein $t \in X$. Damit sind die Paare (t,x) und (t,y), bzw. wegen der Symmetrie von V auch das Paar (x,t), Elemente von V. Es folgt $(x,y) \in V \circ V \subseteq U$.

$\mathcal{U}_{\Gamma_{\tilde{\mathcal{U}}}} \subseteq \tilde{\mathcal{U}}$: Sei nun U beliebig aus $\mathcal{U}_{\Gamma_{\tilde{\mathcal{U}}}}$. Es gibt also ein $\alpha \in \Gamma_{\tilde{\mathcal{U}}}$, sodass $\bigcup_{A\in\alpha} A \times A \subseteq U$, wobei es zu diesem α konstruktionsbedingt wieder eine Nachbarschaft $U^\alpha \in \tilde{\mathcal{U}}$ gibt, sodass es für alle $x \in X$ eine Menge $A \in \alpha$ mit $U^\alpha_x \subseteq A$ gibt. Wir behaupten nun, dass $U^\alpha \subseteq U$ gilt, woraus wegen der Filtereigenschaft $U \in \tilde{\mathcal{U}}$ folgt. Sei dazu ein Paar (x,y) beliebig aus U^α. Damit ist $y \in U^\alpha_x$, wobei $U^\alpha_x \subseteq A$ für ein $A \in \alpha$. Da klarerweise auch x ein Element von U^α_x ist, folgt $x, y \in A$. Damit ist aber $(x,y) \in \bigcup_{A\in\alpha} A \times A \subseteq U$. □

Eine Uniformität erzeugt auf natürliche Art und Weise eine Topologie.

2.1.7 Definition. Für einen uniformen Raum $(X,\mathcal{U})$ wie in Definition 2.1.1 definieren wir folgendes Mengensystem:

$$\mathcal{T}(\mathcal{U}) := \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \exists U \in \mathcal{U} : U_x \subseteq O\}$$

Für einen uniformen Raum (X,Γ) nach Definition 2.1.4, definieren wir auf ähnliche Art und Weise

$$\mathcal{T}(\Gamma) := \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \exists \alpha \in \Gamma : \alpha(x) \subseteq O\}.$$

2.1.8 Lemma. *Die oben definierten Mengensysteme $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ und $\mathcal{T}(\Gamma)$ sind Topologien auf X. Falls $\tilde{\mathcal{U}}$ und $\tilde{\Gamma}$ zwei äquivalente Uniformitäten sind, d.h. falls $\Gamma_{\tilde{\mathcal{U}}} = \tilde{\Gamma}$ gilt, so erzeugen sie dieselbe Topologie, d.h. $\mathcal{T}(\tilde{\mathcal{U}}) = \mathcal{T}(\tilde{\Gamma})$.*

Beweis. Es ist sofort ersichtlich, dass die leere Menge und der ganze Raum jeweils Elemente von beiden Mengensystemen sind.

Seien $O_1, O_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{U})$ beliebig. Zu $x \in O_1 \cap O_2$ gibt es demnach zwei Nachbarschaften U^1 bzw. U^2 aus $\mathcal{U}$, mit $U^1_x \subseteq O_1$ bzw. $U^2_x \subseteq O_2$. Damit gilt für die Nachbarschaft $U^1 \cap U^2$ klarerweise $\left(U^1 \cap U^2\right)_x = U^1_x \cap U^2_x \subseteq O_1 \cap O_2$, womit $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{U})$ verifiziert wäre.

Die Vereinigung von einer Familie von Mengen aus $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ ist wieder in $\mathcal{T}(\mathcal{U})$, denn ein beliebiges x aus der Vereinigung ist sicher in einer Menge O aus der Familie enthalten. Es gibt also eine Nachbarschaft U mit $U_x \subseteq O$. Klarerweise ist U_x auch in der Vereinigung enthalten.

Seien $O_1, O_2 \in \mathcal{T}(\Gamma)$ beliebig. Zu $x \in O_1 \cap O_2$ gibt es demnach zwei gleichmäßige Überdeckungen α bzw. β aus Γ, mit $\alpha(x) \subseteq O_1$ bzw. $\beta(x) \subseteq O_2$. Nach (U_G3) gibt es eine gleichmäßige Überdeckung $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma < \alpha, \beta$, woraus unmittelbar $\gamma(x) \subseteq \alpha(x) \cap \beta(x)$ und schließlich $\gamma(x) \subseteq O_1 \cap O_2$ folgt.

Bei der Vereinigung argumentiert man genauso wie bei $\mathcal{T}(\mathcal{U})$.

Seien nun $\tilde{\mathcal{U}}$ und $\tilde{\Gamma}$ zwei äquivalente Uniformitäten. Es gelte also $\Gamma_{\tilde{\mathcal{U}}} = \tilde{\Gamma}$, oder dazu äquivalent $\mathcal{U}_{\tilde{\Gamma}} = \tilde{\mathcal{U}}$. Wir zeigen $\mathcal{T}(\tilde{\mathcal{U}}) = \mathcal{T}(\tilde{\Gamma})$.

$\mathcal{T}(\tilde{\mathcal{U}}) \subseteq \mathcal{T}(\tilde{\Gamma})$: Sei $O \in \mathcal{T}(\tilde{\mathcal{U}})$ beliebig. Es gibt also für jedes $x \in X$ eine Nachbarschaft $U \in \tilde{\mathcal{U}}$ mit $U_x \subseteq O$. Weil U auch in $\mathcal{U}_{\tilde{\Gamma}}$ enthalten ist (es gilt $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}_{\tilde{\Gamma}}$), existiert ein $\alpha \in \tilde{\Gamma}$ mit $\bigcup_{A\in\alpha} A \times A \subseteq U$. Wenn man hier zum x-Schnitt übergeht, ergibt sich mit (1) $\alpha(x) \subseteq U_x \subseteq O$, also $O \in \mathcal{T}(\tilde{\Gamma})$.

$\mathcal{T}(\tilde{\mathcal{U}}) \supseteq \mathcal{T}(\tilde{\Gamma})$: Sei $O \in \mathcal{T}(\tilde{\Gamma})$ beliebig. Es gibt also zu jedem $x \in X$ eine gleichmäßige Überdeckung $\alpha \in \tilde{\Gamma}$ mit $\alpha(x) \subseteq O$. Weil α auch in $\Gamma_{\tilde{\mathcal{U}}}$ enthalten ist (es gilt $\tilde{\Gamma} = \Gamma_{\tilde{\mathcal{U}}}$), gibt es eine Nachbarschaft $U^\alpha \in \tilde{\mathcal{U}}$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in X$ eine Menge $A \in \alpha$ existiert mit $U_x^\alpha \subseteq A$. Daraus folgt, dass die Menge A den Punkt x enthält. Es ergibt sich $U_x^\alpha \subseteq A \subseteq \alpha(x) \subseteq O$, also $O \in \mathcal{T}(\tilde{\mathcal{U}})$. □

Der folgende Satz soll die weitere Vorgehensweise motivieren und wird hier nur zitiert. Für einen Beweis siehe [2, III. Theorem 13.11].

2.1.9 Satz. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt genau dann das Trennungsaxiom* T3$\frac{1}{2}$*, wenn es eine Uniformität $\mathcal{U}$ auf X gibt, sodass $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{U})$.*

2.1.10 Bemerkung. Klarerweise gilt auch die entsprechende Formulierung von Satz 2.1.9 im Kontext von gleichmäßigen Überdeckungen.

Wenn man an Satz 2.1.9 denkt, wirkt es - in Hinblick auf unser Ziel, äquivalente Formulierungen von T3 zu finden - plausibel, das Konzept von Uniformitäten zu verallgemeinern und dann auf eine ähnliche Aussage (siehe Korollar 2.2.7) zu hoffen.

2.2 Semiuniformität

2.2.1 Definition. Sei Γ eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. Für α und γ aus Γ heißt α eine (bzgl. Γ) *lokale Sternverfeinerung* von γ, in Zeichen $\alpha <^+ \gamma$, falls es für alle $A \in \alpha$ ein $\beta_A \in \Gamma$ und ein $C \in \gamma$ gibt, mit $\beta_A(A) \subseteq C$.

2.2.2 Definition (Semiuniformität)**.** Sei $X \neq \emptyset$. Eine nichtleere Menge $\Gamma \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ heißt *Semiuniformität* oder *semiuniforme Struktur*, falls die Bedingungen (U_G1) bis (U_G3) von Definition 2.1.4 (Uniformität mit gleichmäßigen Überdeckungen) erfüllt sind, und außerdem noch folgende Eigenschaft gilt:

(S) Für alle $\gamma \in \Gamma$ gibt es ein $\alpha \in \Gamma$ mit $\alpha <^+ \gamma$.

Das Paar (X, Γ) heißt *semiuniformer Raum.*

2.2.3 Bemerkung. Mit dem Begriff der Semiuniformität liegt tatsächlich eine Verallgemeinerung von Uniformitäten vor, denn jede Uniformität ist auch eine Semiuniformität:

Um Eigenschaft (S) nachzuweisen, wählen wir zu einem beliebigen $\gamma \in \Gamma$ eine Sternverfeinerung β. Eine Sternverfeinerung muss im Allgemeinen nicht eine lokale Sternverfeinerung sein. Wenn wir aber zu β nochmals eine Sternverfeinerung α wählen, so gilt $\alpha <^* \beta <^* \gamma$ und nach Proposition 2.1.3 $\alpha <^{**} \gamma$. Eine starke Sternverfeinerung ist immer auch eine lokale Sternverfeinerung:

Zu beliebigem $A \in \alpha$ wähle $\beta_A := \alpha$. Nun existiert aufgrund der starken Sternverfeinerung eine Menge $C \in \gamma$ mit $\alpha(A) \subseteq C$, womit $\alpha <^+ \gamma$ gezeigt wäre.

Bemerke insbesondere die Tatsache, dass bei starken Sternverfeinerungen das β_A nicht von A abhängt.

Wir wollen ausgehend von einer Semiuniformität wieder eine Topologie erzeugen. Wenn wir zu Definition 2.1.7 und Lemma 2.1.8 zurückblättern, erkennen wir, dass die Eigenschaft (U_G4), für den Nachweis, dass $\mathcal{T}(\Gamma)$ eine Topologie ist, an keiner Stelle erforderlich war. Damit ist folgende Definition sinnvoll.

2.2.4 Definition. Für einen semiuniformen Raum (X, Γ) sei $\mathcal{T}(\Gamma)$ die Topologie

$$\mathcal{T}(\Gamma) := \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \exists \alpha \in \Gamma : \alpha(x) \subseteq O\}.$$

Folgendes Lemma beinhaltet einige Eigenschaften dieser Topologie.

2.2.5 Lemma. *Für einen semiuniformen Raum* (X, Γ) *gilt:*

(*i*) $A' := \{x \in A \mid \exists \alpha \in \Gamma : \alpha(x) \subseteq A\} = A^\circ$ *für alle* $A \subseteq X$.

(*ii*) *Zu* $\alpha \in \Gamma$ *ist auch* $\alpha^\circ := \{A^\circ \mid A \in \alpha\} \in \Gamma$.

(*iii*) *Für jedes* $x \in X$ *ist* $\{\alpha(x) \mid \alpha \in \Gamma\}$ *eine Filterbasis des Umgebungsfilters* $\mathfrak{U}_x^{\mathcal{T}(\Gamma)}$.

(*iv*) *Mit* $\{\alpha^\circ(x) \mid x \in X, \alpha \in \Gamma\}$ *liegt eine Basis der Topologie* $\mathcal{T}(\Gamma)$ *vor.*

(*v*) $(X, \mathcal{T}(\Gamma))$ *ist ein T3-Raum.*

(*vi*) *Für alle* $x \in X$ *und für alle* $\alpha \in \Gamma$ *existiert ein* $\gamma \in \Gamma$ *mit* $\gamma(\gamma(x)) \subseteq \alpha(x)$.

Beweis. (*i*) Sei $A \subseteq X$ beliebig. Wir zeigen zunächst $A' \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Zu $x \in A'$ existiert per definitionem ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(x) \subseteq A$. Für $A' \in \mathcal{T}(\Gamma)$ müssen aber ein $\alpha \in \Gamma$ finden, sodass sogar $\alpha(x) \subseteq A'$. Wir wählen α als lokale Sternverfeinerung von γ, $\alpha <^+ \gamma$, die nach Eigenschaft (S) existiert, und zeigen $\alpha(x) \subseteq A'$:

Sei $y \in \alpha(x)$ beliebig, dann existiert ein $A_0 \in \alpha$ mit $x, y \in A_0$. Wegen der lokalen Sterneigenschaft gibt es ein $\beta_{A_0} \in \Gamma$ und eine Menge $C \in \gamma$ mit $\beta_{A_0}(A_0) \subseteq C$. Insbesondere gilt $\beta_{A_0}(y) \subseteq \beta_{A_0}(A_0) \subseteq C \subseteq \gamma(x) \subseteq A$, was $y \in A'$ zur Folge hat. Damit haben wir gezeigt, dass die Menge A' offen ist.

Weil mit A' eine offene Teilmenge von A vorliegt, gilt $A' \subseteq A^\circ$. Um die andere Inklusion zu zeigen, sei $x \in A^\circ$ beliebig. Weil A° offen ist, gibt es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(x) \subseteq A^\circ \subseteq A$, woraus $x \in A'$ folgt.

(*ii*) Sei $\alpha \in \Gamma$. Es gibt ein $\beta \in \Gamma$ mit $\beta <^+ \alpha$. Zu beliebigem $B \in \beta$ gibt es ein $\beta_B \in \Gamma$ und ein $A \in \alpha$ mit $\beta_B(B) \subseteq A$. Für jedes $b \in B$ gilt damit $\beta_B(b) \subseteq A$, was $b \in A' = A^\circ$ bedeutet. Daher gilt $B \subseteq A^\circ$ und folglich $\beta < \alpha^\circ$. Nach Eigenschaft ($\mathrm{U}_G 2$) gilt $\alpha^\circ \in \Gamma$.

(*iii*) Sei $x \in X$ beliebig. Zunächst muss $\alpha(x)$ für jedes $\alpha \in \Gamma$ überhaupt eine Umgebung von x sein. Dies folgt aber aus $x \in \alpha^\circ(x) \subseteq \alpha(x)$ und der Tatsache, dass $\alpha^\circ(x)$ als Vereinigung von offenen Mengen wieder offen ist.

Sei jetzt $U \in \mathfrak{U}_x^{\mathcal{T}(\Gamma)}$ beliebig. Es gilt demnach $x \in O \subseteq U$ für ein $O \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Per definitionem gibt es dann ein $\alpha \in \Gamma$ mit $\alpha(x) \subseteq O \subseteq U$.

(*iv*) Die Mengen aus der etwaigen Basis können als Vereinigung von offenen Mengen geschrieben werden, sind also selbst schon offen. Sei nun $O \in \mathcal{T}(\Gamma)$ und $x \in O$ beliebig. Per definitionem gibt es ein $\alpha \in \Gamma$ mit $\alpha(x) \subseteq O$. Damit haben wir ein Basiselement, nämlich $\alpha^\circ(x)$, gefunden, sodass $x \in \alpha^\circ(x) \subseteq O$ gilt.

(*v*) Wir zeigen die zu T3 äquivalente Eigenschaft aus Lemma 1.1.2. Sei dazu $x \in O$ für ein offenes O beliebig. Wegen der Offenheit existiert zu dem x ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(x) \subseteq O$. Wähle zu diesem γ eine lokale Sternverfeinerung $\alpha <^+ \gamma$. Weil α° nach Punkt (*ii*) aus Γ ist, also insbesondere eine Überdeckung von X ist, findet sich ein $A \in \alpha$ mit $x \in A^\circ$. Wir behaupten nun, dass $\overline{A} \subseteq O$. Daraus würde nämlich $x \in A^\circ \subseteq \overline{A^\circ}(\subseteq \overline{A}) \subseteq O$ folgen, womit T3 gezeigt wäre. Um die Behauptung zu verifizieren, sei $y \in \overline{A}$ beliebig. Wegen $\alpha <^+ \gamma$ existiert zu der Menge $A \in \alpha$ ein $\beta_A \in \Gamma$ und ein $C \in \gamma$ mit $\beta_A(A) \subseteq C$. Aufgrund von

$\beta_A^\circ \in \Gamma$ gibt es ein $B \in \beta_A$ mit $y \in B^\circ$. Wäre $A \cap B = \emptyset$, so stünde das im Widerspruch zu $y \in \overline{A}$. Aus $A \cap B \neq \emptyset$ folgt aber $B \subseteq \beta_A(A)$. Konstruktionsbedingt gilt jetzt sowohl $x \in \beta_A(A)$ (wegen $x \in A$), als auch $y \in \beta_A(A)$ (wegen $y \in B$). Wegen $\beta_A(A) \subseteq C$ gilt $x, y \in C$, woraus $C \subseteq \gamma(x) \subseteq O$ und schließlich $y \in O$ folgt.

(*vi*) Sei $x \in X$ und $\alpha \in \Gamma$ beliebig. Zu α gibt es eine lokale Sternverfeinerung $\eta <^+ \alpha$. Wähle ein $E \in \eta$ mit $x \in E^\circ$. Nun gibt es zu diesem $E \in \eta$ ein $\beta_E \in \Gamma$ und ein $A \in \alpha$ mit $\beta_E(E) \subseteq A$. Andererseits gibt es, wegen der Offenheit von E°, auch ein $\delta \in \Gamma$ mit $\delta(x) \subseteq E^\circ$. Jetzt gibt es wegen ($U_G3$) ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma < \beta_E, \delta$. Es ergibt sich

$$\gamma(\gamma(x)) \subseteq \gamma(\delta(x)) \subseteq \gamma(E^\circ) \subseteq \gamma(E) \subseteq \beta_E(E) \subseteq A.$$

Dabei ist $x \in \gamma(\gamma(x))$ und damit auch $x \in A$, woraus $A \subseteq \alpha(x)$ folgt. □

2.2.6 Satz. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein T3-Raum. Dann gilt*

(*i*) $\Gamma_{\mathcal{T}} := \{\gamma \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \exists \alpha \subseteq \mathcal{T} \text{ mit } \bigcup \alpha = X \text{ und } \alpha < \gamma\}$ *ist eine Semiuniformität.*

(*ii*) *Die Topologie $\mathcal{T}$ wird durch die Semiuniformität $\Gamma_{\mathcal{T}}$ aus Punkt (i) erzeugt, also $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\Gamma_{\mathcal{T}})$.*

2.2.7 Korollar. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann ein T3-Raum, falls es eine Semiuniformität Γ auf X mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\Gamma)$ gibt.*

Beweis. (von Satz 2.2.6)

(*i*) Wir müssen Eigenschaften (U_G1) bis (U_G3) und Eigenschaft (S) zeigen.

Zu beliebigem $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{T}}$ existiert stets eine offene Überdeckung α mit $\alpha < \gamma$. Wenn α schon ganz X überdeckt, dann erst recht γ, womit (U_G1) klar wäre.

Um (U_G2) zu sehen, sei $\beta \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{T}}$ mit $\gamma < \beta$. Per definitionem existiert eine offene Überdeckung α mit $\alpha < \gamma$. Damit gilt auch $\alpha < \beta$ und wir haben $\beta \in \Gamma_{\mathcal{T}}$ gezeigt.

Für (U_G3) sei γ_1, γ_2 aus $\Gamma_{\mathcal{T}}$. Es gibt offene Überdeckungen α, β mit $\alpha < \gamma_1$ bzw. $\beta < \gamma_2$. Offenbar ist dann $\alpha \wedge \beta := \{A \cap B \mid A \in \alpha, B \in \beta\}$ eine offene Überdeckung, und damit klarerweise ein Element von $\Gamma_{\mathcal{T}}$, das sogar $\alpha \wedge \beta < \gamma_1, \gamma_2$ erfüllt.

Um Eigenschaft (S) zu zeigen, sei γ beliebig aus $\Gamma_{\mathcal{T}}$. Sei β eine offene Überdeckung von X mit $\beta < \gamma$. Wir müssen jetzt eine lokale Sternverfeinerung von γ konstruieren. Zu beliebigem $B \in \beta$ und $x \in B$ existiert wegen T3 eine offene Menge $O_{B,x} \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_{B,x} \subseteq \overline{O_{B,x}} \subseteq B$ (siehe Lemma 1.1.2). Wir definieren

$$\alpha := \{O_{B,x} \mid B \in \beta, x \in B\}.$$

Klarerweise ist α eine offene Überdeckung von X und damit ein Element von $\Gamma_{\mathcal{T}}$. Wir behaupten nun $\alpha <^+ \gamma$. Ist nämlich $A \in \alpha$ beliebig, so ist $A = O_{B,x}$ für ein $B \in \beta$ und $x \in B$ passend. Nun wähle $\beta_A := \left\{B, \overline{O_{B,x}}^c\right\} \in \Gamma_{\mathcal{T}}$. Damit gilt $\beta_A(A) = \beta_A(O_{B,x}) = B$. Beachte aber, dass es zu dem $B \in \beta$ wegen $\beta < \gamma$ bestimmt ein $C \in \gamma$ gibt mit $B \subseteq C$. Wir haben also $\beta_A(A) \subseteq C$ und damit $\alpha <^+ \gamma$ gezeigt.

(*ii*) Es bleibt noch $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\Gamma_{\mathcal{T}})$ zu zeigen.

Sei $O \in \mathcal{T}$. Für jedes $x \in O$ gibt es wegen T3 ein $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq O$. Nun ist $\gamma := \left\{O, \overline{U}^c\right\}$ ein Element von $\Gamma_{\mathcal{T}}$ mit $\gamma(x) = O \subseteq O$, was $O \in \mathcal{T}(\Gamma_{\mathcal{T}})$ zur Folge hat.

Sei $O \in \mathcal{T}(\Gamma_{\mathcal{T}})$. Für jedes $x \in O$ gibt es ein $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{T}}$ mit $\gamma(x) \subseteq O$. Zu γ gibt es eine offene Überdeckung α mit $\alpha < \gamma$, woraus $x \in \alpha(x) \subseteq \gamma(x) \subseteq O$ folgt. Damit ist $O \in \mathcal{T}$, denn es lässt sich schreiben als Vereinigung von offenen Mengen $O = \bigcup_{x \in O} \alpha(x)$. □

3 Stetige Konvergenz

3.1 Ursprüngliche Definition

Ausgangspunkt für weitere Überlegungen ist folgende Definition, die auf Hans Hahn im Jahre 1921 zurückgeht (namentlich wären auch noch Weierstrass, P. Du Bois-Reymond und Caratheodory zu nennen). Sie beinhaltet, neben den wohlbekannten Konzepten der punktweisen Konvergenz und der gleichmäßigen Konvergenz, eine weitere Möglichkeit, die Konvergenz von Funktionenfolgen zu beschreiben.

3.1.1 Definition (stetige Konvergenz)**.** Eine Folge reeller Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konvergiert stetig im Punkt* x gegen eine Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, falls für jede gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Falls eine Folge von Funktionen im Punkt x stetig konvergiert gegen ein f, und zwar für alle $x \in X$, so sagen wir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert stetig* gegen f.

3.1.2 Bemerkung. Aus der stetigen Konvergenz folgt stets die punktweise Konvergenz, indem man für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einfach die konstante Folge $x_n := x$ wählt. Mit geeigneten Gegenbeispielen sieht man auch, dass die gleichmäßige Konvergenz nicht die stetige Konvergenz impliziert, und auch nicht umgekehrt.

3.2 Definition im Kontext topologischer Räume

Um thematisch wieder in Richtung Trennungsaxiom T3 zu gelangen, werden wir Definition 3.1.1 auf die Situation verallgemeinern, in der der Ausgangsraum und der Zielraum der Funktionen f_n verschiedene topologische Räume sind. Eigentlich könnte man die Definition direkt übernehmen, denn alle Begriffe, insbesondere Folgen und deren Konvergenz, sind ja bekanntlich auch in topologischen Räumen erklärt. Diese Vorgehensweise wird aber kaum sinnvoll sein, da nicht einmal so elementare Konzepte wie die Stetigkeit einer Funktion durch die Folgenkonvergenz beschreibbar sind. Als natürliche Verallgemeinerung der Folgenkonvergenz dient uns oft die Netzkonvergenz (auch Moore-Smith Konvergenz) oder auch die Filterkonvergenz, deren Konzepte jedoch äquivalent sind. Wir wählen hier den Weg über die Theorie der Filterkonvergenz.

3.2.1 Definition (stetige Konvergenz eines Filters)**.** Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ zwei topologische Räume, und sei ϕ ein Filter auf einer nichtleeren Teilmenge Z von Y^X. Definiere für einen beliebigen Filter ψ auf X mit Hilfe von ϕ das Objekt

$$\phi(\psi) := \{A \subseteq Y \,|\, \exists P \in \phi, Q \in \psi \text{ mit } P(Q) \subseteq A\},$$

wobei $P(Q) := \{g(x) \,|\, g \in P \text{ und } x \in Q\}$. Dabei ist $\phi(\psi)$ offensichtlich ein Filter auf Y.

Wir sagen nun, dass ϕ *stetig auf* Z *gegen* $f : X \to Y$ *konvergiert*, in Zeichen $\phi \overset{s}{\to} f$, falls für alle Filter ψ auf X und alle $x \in X$ folgende Implikation gilt:

$$\psi \overset{\mathcal{T}}{\to} x \;\Rightarrow\; \phi(\psi) \overset{\mathcal{O}}{\to} f(x)$$

3.2.2 Bemerkung. Sei ϕ ein Filter auf $Z \subseteq Y^X$, und $f \in Y^X$. Bezeichne Φ die Menge aller Obermengen von Mengen aus ϕ, also $\Phi := \left\{A \subseteq Y^X \,|\, \exists P \in \phi \text{ mit } P \subseteq A\right\}$, so gilt

$$\phi \overset{s}{\to} f \text{ auf } Z \iff \Phi \overset{s}{\to} f \text{ auf } Y^X$$

Wir können also in Definition 3.2.1 bei Bedarf $Z = Y^X$ voraussetzen.

3.2.3 Bemerkung. Im Folgenden verstehen wir unter dem mit einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus einer Menge A assoziierten Filter den Filter $\phi^{a_n} := \mathfrak{F}(\{\{a_n \mid n \geq m\} \mid m \in \mathbb{N}\})$ auf A.

Falls auf A noch eine Topologie $\mathcal{T}$ vorhanden ist, so ist folgende Äquivalenz leicht ersichtlich:

$$a_n \xrightarrow{\mathcal{T}} a \Longleftrightarrow \phi^{a_n} \xrightarrow{\mathcal{T}} a$$

Auf der linken Seite meinen wir die Konvergenz einer Folge, auf der rechten Seite die Filterkonvergenz.

Folgendes Lemma gibt darüber Auskunft, inwiefern Definition 3.2.1 eine Verallgemeinerung von Definition 3.1.1 ist.

3.2.4 Lemma. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $Z \subseteq Y^X$ und erfülle $(X, \mathcal{T})$ das erste Abzählbarkeitsaxiom (jeder Punkt hat eine abzählbare Umgebungsbasis). Dann sind folgende zwei Aussagen äquivalent.*

(*i*) *Der mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Filter ϕ^{f_n} auf Z* (siehe Bemerkung 3.2.3) *konvergiert stetig auf Z gegen f, also $\phi^{f_n} \xrightarrow{s} f$.*

(*ii*) *Für alle $x \in X$ und für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X mit $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ gilt $f_n(x_n) \xrightarrow{\mathcal{O}} f(x)$* (also im wesentlichen die ursprüngliche Definition der stetigen Konvergenz von H. Hahn).

Beweis. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) Sei $x \in X$ und eine dagegen konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebig. Bezeichne mit ϕ^{x_n} und ϕ^{f_n} die mit den beiden Folgen assoziierten Filter auf X bzw. Z. Laut Voraussetzung gilt $\phi^{f_n} \xrightarrow{s} f$, was gemeinsam mit $\phi^{x_n} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ natürlich $\phi^{f_n}(\phi^{x_n}) \xrightarrow{\mathcal{O}} f(x)$ zur Folge hat. Das bedeutet, dass jedes $U \in \mathfrak{U}^{\mathcal{O}}_{f(x)}$ auch ein Element von $\phi^{f_n}(\phi^{x_n})$ ist, weshalb es ein $P \in \phi^{f_n}$ und ein $Q \in \phi^{x_n}$ gibt mit $P(Q) \subseteq U$. Folglich gibt es zwei Indizes $N_1, N_2 \in N$ mit $f_n(x_m) \in U$ für $n \geq N_1$ und $m \geq N_2$. Für $n, m \geq N := \max(N_1, N_2)$ gilt $f_n(x_m) \in U$ und damit insbesondere $f_n(x_n) \in U$. Weil die Umgebung U von $f(x)$ beliebige war, folgt $f_n(x_n) \xrightarrow{\mathcal{O}} f(x)$.

Bemerke, dass diese Beweisrichtung ohne dem ersten Abzählbarkeitsaxiom auskommt.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*) Sei wieder ϕ^{f_n} der mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Filter auf Z. Sei $x \in X$ und ein Filter φ auf X beliebig, mit $\varphi \xrightarrow{\mathcal{T}} x$. Zu zeigen ist $\phi^{f_n}(\varphi) \xrightarrow{\mathcal{O}} f(x)$. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis von x, die o.B.d.A. auch $A_n \supseteq A_{n+1}$ erfüllt. Klarerweise gilt insbesondere $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \varphi$.

Angenommen, es gilt nicht $\phi^{f_n}(\varphi) \xrightarrow{\mathcal{O}} f(x)$, d.h. $\mathfrak{U}^{\mathcal{O}}_{f(x)} \nsubseteq \phi^{f_n}(\varphi)$. Es gibt dann eine Umgebung U von $f(x)$, die nicht in $\phi^{f_n}(\varphi)$ ist, was wiederum bedeutet, dass für alle $P \in \phi^{f_n}$ und alle $Q \in \varphi$ immer $P(Q) \nsubseteq U$ gilt. Indem wir für ein $k \in \mathbb{N}$ konkret $P := \{f_j \mid j > k\}$ wählen, folgt:

$$\text{Für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und für alle } Q \in \varphi \text{ gibt es ein } n > k \text{ mit } f_n(Q) \nsubseteq U.$$

Damit können wir folgende Konstruktion durchführen, in der induktiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert wird:

1. Zu 1 und A_1 gibt es ein $n_1 > 1$ und einen Punkt $a_1 \in A_1$ mit $f_{n_1}(a_1) \notin U$.

   Definiere die ersten n_1 Folgeglieder durch $x_1 := x_2 := \ldots := x_{n_1} := a_1$, sodass insbesondere $f_{n_1}(x_{n_1}) \notin U$ gilt.

2. Zu n_1 und A_2 gibt es ein $n_2 > n_1$ und einen Punkt $a_2 \in A_2$ mit $f_{n_2}(a_2) \notin U$.

   Definiere die nächsten $n_2 - n_1$ Folgeglieder durch $x_{n_1+1} := \ldots := x_{n_2} := a_2$, sodass insbesondere $f_{n_2}(x_{n_2}) \notin U$ gilt.

3. Zu n_2 und A_3 gibt es ein $n_3 > n_2$ und einen Punkt $a_3 \in A_3$ mit $f_{n_3}(a_3) \notin U$.

   Definiere die nächsten $n_3 - n_2$ Folgeglieder durch $x_{n_2+1} := \ldots := x_{n_3} := a_3$, sodass insbesondere $f_{n_3}(x_{n_3}) \notin U$ gilt.

   $\vdots$

Wir zeigen nun, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert: Dazu sei O eine beliebige Umgebung von x. Es gibt sicher ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A_m \subseteq O$, denn $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Umgebungsbasis von x. Nun gilt $x_j \in A_m \subseteq O$ für alle $j \geq n_m$. Für $j = n_m$ gilt ja $x_{n_m} = a_m \in A_m$ und für größere j folgt die Aussage aus $A_k \subseteq A_m$ für $k > m$.

Aus der Voraussetzung folgt $f_n(x_n) \to f(x)$. Daher müsste es für jede Umgebung von $f(x)$, insbesondere für unser U, einen Index $N \in \mathbb{N}$ geben, sodass $f_n(x_n) \in U$ für alle $n \geq N$. Angenommen es gäbe ein solches N, dann wählen wir ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n_m > N$, und erhalten den Widerspruch $f_{n_m}(x_{n_m}) \notin U$. □

An dieser Stelle könnte man sich fragen, woher der Name *stetige* Konvergenz kommt? Bisher wurde von keiner Abbildung gefordert oder bewiesen, dass sie stetig ist. Außerdem ist unklar, was das mit dem Trennungsaxiom T3 zu tun hat. Beide Fragen werden mit dem nächsten Resultat beantwortet:

3.2.5 Satz. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume und Y erfülle T3. Ist ϕ ein Filter auf $Z \subseteq Y^X$, der stetig gegen ein $f \in Y^X$ konvergiert, so ist f stetig.*

Beweis. Wegen Korollar 2.2.7 und der Tatsache, dass $(Y, \mathcal{O})$ ein T3-Raum ist, gibt es eine Semiuniformität Γ auf Y mit $\mathcal{T}_\Gamma = \mathcal{O}$. Sei $x \in X$ und φ ein Filter auf X mit $\varphi \xrightarrow{\mathcal{T}} x$. Wir zeigen $f(\varphi) \xrightarrow{\mathcal{O}=\mathcal{T}_\Gamma} f(x)$, was bekannterweise äquivalent zur Stetigkeit von f ist. Wir zeigen nur $\{\alpha(f(x)) \mid \alpha \in \Gamma\} \subseteq f(\varphi)$, was dank Punkt (iii) von Lemma 2.2.5 aber gleichbedeutend ist mit $\mathfrak{U}^{\mathcal{O}}_{f(x)} \subseteq f(\varphi)$.

Sei $\alpha \in \Gamma$ beliebig. Wir zeigen $\alpha(f(x)) \in f(\varphi)$. Bezeichne β eine lokale Sternverfeinerung von α, $\beta <^+ \alpha$. Wir finden sicher ein $B \in \beta$, das eine Umgebung des Punktes $f(x)$ ist. Dies gelingt, da β° ebenfalls aus Γ und damit insbesondere eine Überdeckung von Y ist. Es gibt also ein $B \in \beta$ mit $f(x) \in B^\circ \subseteq B$, was $B \in \mathfrak{U}^{\mathcal{O}}_{f(x)}$ bedeutet. Aus $\phi \xrightarrow{s} f$ und $\varphi \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ folgt $\phi(\varphi) \to f(x)$. Jede Umgebung von $f(x)$ ist demnach auch ein Element von $\phi(\varphi)$, also insbesondere $B \in \phi(\varphi)$. Damit muss es ein $P \in \phi$ und ein $Q \in \varphi$ geben, sodass $P(Q) \subseteq B$. Wegen $\beta <^+ \alpha$ gibt es zu $B \in \beta$ ein $\beta_B \in \Gamma$ und ein $A \in \alpha$ mit $\beta_B(B) \subseteq A$. Wir behaupten nun $f(Q) \subseteq \beta_B(B)$.

Wenn sich die Behauptung als richtig herausstellt, gilt $f(Q) \subseteq \beta_B(B) \subseteq A$, was aber $A \in f(\varphi)$ und daher $\alpha(f(x)) \in f(\varphi)$ zur Folge hätte. Damit wäre die Stetigkeit von f gezeigt.

Zu zeigen bleibt $f(Q) \subseteq \beta_B(B)$. Angenommen, es gäbe ein $z \in Q$, sodass $f(z) \notin \beta_B(B)$ gilt. Analog zum 2. Absatz des Beweises findet man ein $D \in \beta_B$, welches eine Umgebung von $f(z)$ ist. Aus $\uparrow z \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ folgt, aufgrund der stetigen Konvergenz von f, $\phi(\uparrow z) \xrightarrow{\mathcal{O}} f(z)$.

Zu der Umgebung D gibt es nun ein $P' \in \phi$ und ein $Q' \in {\uparrow}z$ mit $P'(Q') \subseteq D$. Betrachte nun $P'' := P \cap P' \in \phi$. Es gilt

$$P''(z) \subseteq P'(Q') \subseteq D \quad \text{und} \quad P''(z) \subseteq P(Q) \subseteq B,$$

da $z \in Q$. Wegen $f(z) \in D \in \beta_B$ und $f(z) \notin \beta_B(B)$ gilt aber $B \cap D = \emptyset$, was jedoch aufgrund von $P''(z) \neq \emptyset$ im Widerspruch zum Gezeigten steht. □

3.2.6 Problemstellung. Ist die in Satz 3.2.5 genannte Eigenschaft von T3-Räumen charakteristisch für T3? Mit anderen Worten:

Wenn man von einem topologischen Raum $(Y, \mathcal{O})$ nur weiß, dass für alle topologischen Räume $(X, \mathcal{T})$ und für alle Filter ϕ auf Y^X, die stetig gegen ein f konvergieren, f immer stetig ist, erfüllt dann Y schon T3?

Diese Frage wurde erstmals in der Diplomarbeit von Karsten Evers, siehe [1], beantwortet.

3.3 Schwach stetige Abbildungen

Bei der Untersuchung dieser Fragestellung wird sich folgende Begriffsbildung als nützlich erweisen.

3.3.1 Definition. Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume. Wir nennen eine Abbildung $f : X \to Y$ *schwach stetig im Punkt* x, falls

$$\text{für alle } V \in \mathfrak{U}_{f(x)} \text{ existiert ein } U \in \mathfrak{U}_x \text{ mit } f(U) \subseteq \overline{V}.$$

Die Abbildung f heißt *schwach stetig*, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ schwach stetig ist.

3.3.2 Bemerkung. Falls mit $\mathfrak{W}_x$ bzw. $\mathfrak{W}_{f(x)}$ Umgebungsbasen von $\mathfrak{U}_x$ bzw. $\mathfrak{U}_{f(x)}$ vorliegen, so kann man in Definition 3.3.1 auch $V \in \mathfrak{W}_{f(x)}$ und $U \in \mathfrak{W}_x$ fordern, und erhält, wie man sich leicht überzeugen kann, einen äquivalenten Begriff.

Wenn man zusätzlich annimmt, dass der Zielraum $(Y, \mathcal{O})$ ein T3-Raum ist, so ist aus Korollar 1.1.3 bekannt, dass die abgeschlossenen Umgebungen eine Umgebungsbasis bilden. In diesem Fall verkommt die Forderung $f(U) \subseteq \overline{V}$ für $V \in \overline{\mathfrak{U}_{f(x)}}$ zu $f(U) \subseteq V$, weil V bereits abgeschlossen ist. Es fallen hier also die Begriffe „stetig“ und „schwach stetig“ zusammen. Damit ergibt sich folgendes

3.3.3 Lemma. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume. Ist $f : X \to Y$ schwach stetig und der Zielraum T3, so ist f stetig.*

Eine Funktion ist bekanntlich genau dann stetig, wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Menge wieder abgeschlossen ist. Das nächste Lemma beinhaltet die entsprechende Aussage in abgeschwächter Form.

3.3.4 Lemma. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann schwach stetig, wenn für alle $x \in X$ das Urbild jeder abgeschlossenen Umgebung von $f(x)$ eine Umgebung von x ist.*

Beweis. Angenommen f ist schwach stetig, und A sei eine abgeschlossene Umgebung von $f(x)$. Die schwache Stetigkeit liefert die Existenz einer Umgebung U von x mit $f(U) \subseteq \overline{A} = A$. Geht man zu den Urbildern unter der Abbildung f über, so folgt $x \in U \subseteq f^{-1}(A)$.

Sei nun die andere Eigenschaft vorausgesetzt. Für jedes $V \in \mathfrak{U}_{f(x)}$ ist $\overline{V}$ eine abgeschlossene Umgebung von $f(x)$. Wir folgern, dass $f^{-1}(\overline{V})$ eine Umgebung von x ist, was $x \in O \subseteq f^{-1}(\overline{V})$ mit $O \in \mathcal{T}$ bedeutet. Indem wir die Abbildung f auf beiden Seiten der Inklusion anwenden, folgt $f(O) \subseteq \overline{V}$. □

In dem nächsten Lemma werden zwei Situationen beschrieben, in denen sich der Begriff der schwachen Stetigkeit natürlich ergibt.

3.3.5 Lemma. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume, so gilt*

(*i*) *Ist ϕ ein Filter, der stetig gegen $g : X \to Y$ konvergiert, so ist g schwach stetig.*

(*ii*) *Ist $f : D \to Y$ stetig, wobei $D \subseteq X$ dicht ist, und gelte noch folgende Eigenschaft:*

Für alle $x \in X$ gibt es eine stetige Fortsetzung $f_x : D \cup \{x\} \to Y$, $f_x|_D = f$.

Dann ist die Abbildung $F : X \to Y, F(x) := f_x(x)$ schwach stetig.

Falls $(Y, \mathcal{O})$ zusätzlich T3 erfüllt, so erhalten wir (mit dem Wissen aus Lemma 3.3.3) in beiden Fällen als Korollar: g bzw. F sind stetig. (Insbesondere folgt erneut die Aussage aus Satz 3.2.5)

Beweis. (*i*) Sei $x \in X$ und $V \in \mathfrak{U}^{\mathcal{O}}_{g(x)}$ beliebig. Wir müssen ein $U \in \mathfrak{U}^{\mathcal{T}}_x$ finden mit $g(U) \subseteq \overline{V}$. Wegen $\phi \overset{s}{\to} g$ folgt aus der Trivialität $\mathfrak{U}^{\mathcal{T}}_x \overset{\mathcal{T}}{\to} x$ nun $\phi(\mathfrak{U}^{\mathcal{T}}_x) \overset{\mathcal{O}}{\to} g(x)$. Damit ist $V \in \phi(\mathfrak{U}^{\mathcal{T}}_x)$, es gibt also ein $P \in \phi$ und ein $U \in \mathfrak{U}^{\mathcal{T}}_x$ mit $P(U) \subseteq V$. Angenommen $g(U) \nsubseteq \overline{V}$:

Dann gäbe es ein $z \in U$ mit $g(z) \notin \overline{V}$, also $g(z) \in \overline{V}^c \in \mathfrak{U}^{\mathcal{O}}_{g(z)}$. Aus der stetigen Konvergenz von ϕ und $\uparrow z \overset{\mathcal{T}}{\to} z$ folgt $\phi(\uparrow z) \overset{\mathcal{O}}{\to} g(z)$, speziell $\overline{V}^c \in \phi(\uparrow z)$. Damit gibt es ein $P' \in \phi$ und ein $Q \in \uparrow z$ mit $P'(Q) \subseteq \overline{V}^c$, insbesondere $P'(z) \subseteq \overline{V}^c$. Betrachte nun $P'' := P \cap P' \in \phi$. Einerseits gilt $P''(z) \subseteq P'(z) \subseteq \overline{V}^c$, andererseits folgt auch $P''(z) \subseteq P(z) \subseteq P(U) \subseteq V \subseteq \overline{V}$. Dies ist nur möglich, wenn $P''(z) = \emptyset$ gilt, was aber $P'' = \emptyset$ zur Folge hätte. Dies stünde aber im Widerspruch zu $P'' \in \phi$, womit $g(U) \subseteq \overline{V}$ gezeigt wäre.

(*ii*) Seien $x \in X$ und $V \in \mathfrak{U}^{\mathcal{O}}_{F(x)}$ beliebig. Wir müssen ein $U \in \mathfrak{U}^{\mathcal{T}}_x$ finden, mit $F(U) \subseteq \overline{V}$. Aufgrund der Stetigkeit von f_x bei x gibt es eine offene Umgebung U von x, sodass $f_x(U \cap (D \cup \{x\})) \subseteq V$. Angenommen $F(U) \nsubseteq \overline{V}$.

Dann gäbe es ein $z \in U$ mit $F(z) \in \overline{V}^c \in \mathfrak{U}^{\mathcal{O}}_{F(z)}$. Zu dieser Umgebung von $f_z(z)$ gibt es, wegen der Stetigkeit von f_z, eine offene Umgebung U' von z, dh. $z \in U' \in \mathcal{T}$, mit $f_z(U' \cap (D \cup \{z\})) \subseteq \overline{V}^c$. Nun gilt $z \in U \cap U' \in \mathcal{T}$. Es gibt, aufgrund der Dichtheit von D, bestimmt ein $d \in D$ mit $d \in U \cap U'$. Einerseits gilt

$$f_z(d) \subseteq f_z(U' \cap (D \cup \{z\})) \subseteq \overline{V}^c,$$

andererseits ergibt sich auch

$$f_z(d) = f_x(d) \subseteq f_x(U \cap (D \cup \{x\})) \subseteq V \subseteq \overline{V}.$$

Dieser Widerspruch beweist $F(U) \subseteq \overline{V}$. □

3.3.6 Bemerkung. Noch ungeklärt ist die Frage, ob in Lemma 3.3.5 (*i*) auch die Umkehrung gilt:

Gibt es für jede schwach stetige Funkion f einen Filter ψ auf Y^X (oder geeignetem $Z \subseteq Y^X$), der stetig gegen f konvergiert?

3.4 Charakterisierungen von T3

Wir kommen nun zum Hauptresultat in dieser Arbeit, das neben der Beantwortung der Problemstellung 3.2.6 auch noch andere äquivalente Formulierungen von T3 enthält.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass Karsten Evers in seiner Diplomarbeit unter anderem diesen Satz erstmals formuliert und bewiesen hat, siehe [1, Satz 2.2.3].

3.4.1 Satz. *Für jeden topologischen Raum $(Y, \mathcal{O})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $(Y, \mathcal{O})$ *ist ein T3-Raum.*

(ii) Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, jeden Filter ψ auf Y^X und jede Abbildung $f : X \to Y$ gilt:

$$\psi \xrightarrow{s} f \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist stetig} .$$

(iii) Für alle topologischen Räume $(X, \mathcal{T})$ gilt, dass jede schwach stetige Abbildung $f : X \to Y$ sogar stetig ist.

(iv) Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, jede dichte Teilmenge $D \subseteq X$ und jede stetige Abbildung $f : D \to Y$ mit der Eigenschaft

$$\text{Für alle } x \in X \text{ existiert eine stetige Fortsetzung } f_x : D \cup \{x\} \to Y.$$

ist die Abbildung $F : X \to Y, F(x) := f_x(x)$ stetig.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Diese Richtung wurde in Satz 3.2.5 oder durch Lemma 3.3.5 (i) zusammen mit Lemma 3.3.3 bewiesen.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Wir zeigen stattdessen die Kontraposition $\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$.

Angenommen es gilt nicht T3. Wir müssen jetzt einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, einen Filter ψ auf Y^X und eine Funktion $f : X \to Y$ derart konstruieren, dass zwar $\psi \xrightarrow{s} f$ gilt, aber f nicht stetig ist.

Wegen $\neg$T3 und Lemma 1.1.2 gibt es einen Punkt $a \in Y$ und eine offene Menge $U \in \mathcal{O}$ mit $a \in U$, sodass es keine abgeschlossene Umgebung von a gibt, die in U enthalten ist. Für jedes $V \in \uparrow\! a \cap \mathcal{O}$ setze $\vec{V} := \{W \in \uparrow\! a \cap \mathcal{O} \mid W \subseteq V\}$. Bezeichne ∞ ein Element, das in keiner hier definierten Menge als Element vorkommt.

$$\begin{aligned} X &:= \Big(\bigcup_{V \in \uparrow a \cap \mathcal{O}} \overline{V} \times \{V\} \Big) \cup \{(a, \infty)\} \\ \mathfrak{A}_1 &:= \big\{ (\overline{W} \cap V) \times \{W\} \,\big|\, W \in \uparrow\! a \cap \mathcal{O} \text{ und } V \in \mathcal{O} \big\} \\ \mathfrak{A}_2 &:= \Big\{ \Big(\bigcup_{Q \in \vec{W}} \overline{Q} \times \{Q\} \Big) \cup \{(a, \infty)\} \,\Big|\, W \in \uparrow\! a \cap \mathcal{O} \Big\} \\ \mathfrak{B} &:= \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2 \text{ und schließlich } \mathcal{T} := \Big\{ \bigcup \mathcal{V} \,\Big|\, \mathcal{V} \subseteq \mathfrak{B} \Big\} \end{aligned}$$

Beachte, dass X eine Teilmenge von $Y \times (\mathcal{P}(Y) \cup \{\infty\})$ ist, die auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$X = \big\{ (y, V) \big| y \in \overline{V}, V \in \uparrow\! a \cap \mathcal{O} \big\} \cup \{(a, \infty)\}$$

1. Schritt: $\mathcal{T}$ *ist eine Topologie auf* X.

Um das zu verifizieren, rechnen wir vor, dass $\mathfrak{B}$ eine Basis einer Topologie ist.

Zunächst gilt sicher $\bigcup \mathfrak{B} = X$: Der Punkt (a, ∞) ist in jeder Menge aus $\mathfrak{A}_2$ enthalten, und ein beliebiger anderer Punkt aus X ist von der Gestalt (y, Q), wobei $a \in Q \in \mathcal{O}$ und $y \in \overline{Q}$ gilt. In diesem Fall lässt sich eine Menge in $\mathfrak{A}_1$ finden, die (y, Q) enthält, indem wir einfach $W = Q$ und $V = Y$ wählen.

Seien nun zwei Mengen $A, B \in \mathfrak{B}$ und ein $x \in A \cap B$ beliebig. Um zu zeigen, dass $\mathfrak{B}$ Basis einer Topologie ist, müssen wir jetzt eine Menge $D \in \mathfrak{B}$ finden, sodass $x \in D \subseteq A \cap B$ gilt. Dazu unterscheiden wir 3 Fälle:

1.: Falls $A, B \in \mathfrak{A}_1$, so gilt $A = (\overline{W_1} \cap V_1) \times \{W_1\}$, $B = (\overline{W_2} \cap V_2) \times \{W_2\}$ wobei $V_1, V_2 \in \mathcal{O}$ und $W_1, W_2 \in {\uparrow}a \cap \mathcal{O}$. Aus $x = (y, Q) \in A \cap B$ folgt nun $W_1 = Q = W_2$. Die Wahl $D := (\overline{Q} \cap V_1 \cap V_2) \times \{Q\} \in \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{B}$ erfüllt nun $x \in D \subseteq A \cap B$.

2.: Falls $A, B \in \mathfrak{A}_2$, so gilt $A = \big(\bigcup_{Q \in \vec{W}_1} \overline{Q} \times \{Q\}\big) \cup \{(a, \infty)\}$ und $B = \big(\bigcup_{Q \in \vec{W}_2} \overline{Q} \times \{Q\}\big) \cup \{(a, \infty)\}$, für $W_1, W_2 \in {\uparrow}a \cap \mathcal{O}$. Mit $W_3 := W_1 \cap W_2 \in {\uparrow}a \cap \mathcal{O}$ folgt nun offenbar $A \cap B = \big(\bigcup_{Q \in \vec{W}_3} \overline{Q} \times \{Q\}\big) \cup \{(a, \infty)\} \in \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{B}$.

3.: Falls $A \in \mathfrak{A}_1$ und $B \in \mathfrak{A}_2$, so gilt $A = (\overline{W_1} \cap V) \times \{W_1\}$, $B = \big(\bigcup_{Q \in \vec{W}_2} \overline{Q} \times \{Q\}\big) \cup \{(a, \infty)\}$, mit $W_1, W_2 \in {\uparrow}a \cap \mathcal{O}$ und $V \in \mathcal{O}$. Aus $x = (y, Q) \in A \cap B$ folgt nun $Q = W_1 \in \vec{W}_2$ und damit $(y, Q) \in A = A \cap B$.

Definiere nun $f : X \to Y$, $(y, z) \mapsto y$.

2. Schritt: f *ist im Punkt* (a, ∞) *nicht stetig.*

Wäre f im Punkt (a, ∞) doch stetig, so müsste es zu jeder Umgebung W von $f((a, \infty)) = a$ eine Umgebung V von (a, ∞) geben, sodass $f(V) \subseteq W$. Wir wählen speziell $W = U$, und bemerken, dass es für eine Umgebung V von (a, ∞) stets ein $A \in \mathfrak{A}_2$ gibt, sodass $(a, \infty) \in A \subseteq V$ gilt. Demnach müsste $f(V) \subseteq U$, also insbesondere $f(A) \subseteq U$, gelten. Sei $W \in {\uparrow}a \cap \mathcal{O}$ mit $A = \big(\bigcup_{Q \in \vec{W}} \overline{Q} \times \{Q\}\big) \cup \{(a, \infty)\}$. Wir erhalten $\overline{W} = f(\overline{W} \times \{W\}) \subseteq f(A) \subseteq U$, was aber im Widerspruch zur Wahl von U, ganz zu Beginn des Beweises, steht.

Wir müssen nun einen Filter ψ auf Y^X konstruieren, der stetig gegen unser nicht stetiges f konvergiert. Definiere dazu für $(y, Q) \in X$, wobei $(y, Q) \neq (a, \infty)$, $V \in {\uparrow}y \cap \mathcal{O}$ und $W \in {\uparrow}a \cap \mathcal{O}$:

$$P_0((y, Q), V) := \big\{g : X \to Y \mid g((\overline{Q} \cap V) \times \{Q\}) \subseteq V\big\}$$
$$P_a(W) := \Big\{g : X \to Y \mid g\big(\big(\bigcup_{Q \in \vec{W}} \overline{Q} \times \{Q\}\big) \cup \{(a, \infty)\}\big) \subseteq W\Big\}$$

Dabei handelt es sich bei der ersten Definition - für einen festen Punkt $(y, Q) \in X$ und ein festes V - um jene Abbildungen g, die eine Umgebung des Punktes (y, Q) (nämlich jene Menge aus $\mathfrak{A}_1$, die sich aus $W = Q$ und $V = V$ ergibt) ganz in eine Umgebung von $f((y, Q)) = y$ (nämlich V) hinein abbilden. Ähnliches gilt für die zweite Definition, allerdings im Punkt (a, ∞). Wir setzten nun

$$\vartheta := \{P_0((y, Q), V) \mid (a, \infty) \neq (y, Q) \in X, V \in {\uparrow}y \cap \mathcal{O}\} \cup \{P_a(W) \mid W \in {\uparrow}a \cap \mathcal{O}\}.$$

Es handelt sich dabei aber - im Allgemeinen - noch nicht um einen Filter. Im 3. Schritt werden wir zeigen, dass endlich viele Mengen aus ϑ stets nichtleeren Schnitt haben. Daraus ergibt sich natürlich, dass die Menge aller endlichen Schnitte eine Filterbasis ist. Der davon erzeugte Filter wird unser ψ sein.

3. Schritt: *Endlich viele Elemente aus ϑ haben einen nichtleeren Schnitt.*

Seien endlich viele Elemente $P_0((y_i, Q_i), V_i), i \in J$ und $P_a(W_i), i \in K$ aus ϑ gegeben ($J \cap K = \emptyset$). Definiere

$$\mathfrak{D}_i := \begin{cases} \Big\{(\overline{Q_i} \cap V_i) \times \{Q_i\} \, , \, X\backslash \big[(\overline{Q_i} \cap V_i) \times \{Q_i\}\big]\Big\} & \text{falls } i \in J \\ \Big\{\big(\bigcup_{Q \in \vec{W}_i} \overline{Q} \times \{Q\}\big) \cup \{(a, \infty)\} \, , \, X\backslash\big[\big(\bigcup_{Q \in \vec{W}_i} \overline{Q} \times \{Q\}\big) \cup \{(a,\infty)\}\big]\Big\} & \text{falls } i \in K \end{cases}$$

Beachte, dass für jeden Index die Menge $\mathfrak{D}_i$ zwei Elemente enthält, die wiederum Paare, nämlich Elemente von X, enthalten. Definiere weiters

$$\mathfrak{D} := \prod_{i \in J \cup K} \mathfrak{D}_i \quad \text{und} \quad \xi := \Big\{ \bigcap_{i \in J \cup K} \alpha(i) \,\Big|\, \alpha \in \mathfrak{D} \Big\}.$$

Offenbar ist ξ eine Zerlegung von X. Wir definieren nun punktweise eine Funktion $g : X \to Y$, welche im Schnitt der endlich vielen Mengen aus ϑ liegt. Dazu muss g gewisse Umgebungen in gewisse andere Umgebungen hinein abbilden. Sei also $(y, Q) \in X$. Es gibt nun genau ein $\alpha \in \mathfrak{D}$ mit $(y, Q) \in \bigcap_{i \in J \cup K} \alpha(i)$. Um die Situation übersichtlicher zu machen, definieren wir

$$\begin{aligned} J_\alpha &:= \big\{ i \in J \mid \alpha(i) = (\overline{Q_i} \cap V_i) \times \{Q_i\} \big\} \\ K_\alpha &:= \big\{ i \in K \mid \alpha(i) = \big(\bigcup_{Q \in \vec{W}_i} \overline{Q} \times \{Q\}\big) \cup \{(a,\infty)\} \big\}. \end{aligned}$$

Um g an der Stelle (y, Q) einen Wert in Y zuzuordnen, unterscheiden wir 4 Fälle:

1. Fall: $J_\alpha = \emptyset, K_\alpha \neq \emptyset$. Dann sei $g((y, Q))$ beliebig aus $\bigcap_{k \in K_\alpha} W_k$. Diese Menge ist nicht leer, da sie z.B. a enthält.

2. Fall: $J_\alpha \neq \emptyset, K_\alpha = \emptyset$. Dann sei $g((y, Q))$ beliebig aus $\bigcap_{i \in J_\alpha} V_i$. Warum ist diese Menge nicht leer? Wegen $(y, Q) \in \bigcap_{i \in J \cup K} \alpha(i)$ gilt

$$\emptyset \neq \bigcap_{i \in J_\alpha} \alpha(i) = \bigcap_{i \in J_\alpha} (\overline{Q_i} \cap V_i) \times \{Q_i\}$$

Damit gilt bereits $Q_i = Q$ für alle $i \in J_\alpha$, und wir können den Ausdruck vereinfachen zu

$$\big(Q \cap \bigcap_{i \in J_\alpha} V_i\big) \times \{Q\} \neq \emptyset, \quad \text{woraus} \quad \bigcap_{i \in J_\alpha} V_i \neq \emptyset \;\; \text{folgt.}$$

3. Fall: $J_\alpha = \emptyset, K_\alpha = \emptyset$. Dann sei $g((y, Q))$ vollkommen beliebig aus Y.

4. Fall: $J_\alpha \neq \emptyset, K_\alpha \neq \emptyset$. Dann sei $g((y, Q))$ beliebig aus $\big(\bigcap_{i \in J_\alpha} V_i\big) \cap \big(\bigcap_{k \in K_\alpha} W_k\big)$. Könnte diese Menge leer sein? Ähnlich zum 2. Fall gilt

$$(y, Q) \in \bigcap_{i \in J \cup K} \alpha(i) \subseteq \bigcap_{i \in J_\alpha} \alpha(i) \cap \bigcap_{k \in K_\alpha} \alpha(k) =$$

$$= \Big(\bigcap_{i\in J_\alpha} (\overline{Q_i} \cap V_i) \times \{Q_i\}\Big) \cap \Big(\bigcap_{k\in K_\alpha} (\bigcup_{Q\in \vec{W}_k} \overline{Q} \times \{Q\}) \cup \{(a,\infty)\}\Big),$$

woraus $Q_i = Q$ für alle $i \in J_\alpha$ und $Q \in \vec{W}_k$ - also $Q \subseteq W_k$ - für alle $k \in K_\alpha$ folgt. Außerdem gilt $y \in (\bigcap_{i\in J_\alpha} V_i) \cap \overline{Q}$, woraus

$$\emptyset \neq (\bigcap_{i\in J_\alpha} V_i) \cap Q \subseteq (\bigcap_{i\in J_\alpha} V_i) \cap (\bigcap_{k\in K_\alpha} W_k) \text{ folgt.}$$

Offenbar gilt nun $g \in \big(\bigcap_{i\in J} P_0((y_i, Q_i), V_i)\big) \cap \big(\bigcap_{k\in K} P_a(W_k)\big)$, womit der 3. Schritt abgeschlossen wäre.

Wir definieren nun den Filter ψ durch

$$\psi := \left\{F \subseteq Y^X \mid \exists n \in \mathbb{N}\, \exists P_1, \ldots, P_n \in \vartheta \text{ mit } P_1 \cap \ldots \cap P_n \subseteq F\right\}.$$

<u>4. Schritt</u>: *Der Filter ψ konvergiert stetig gegen f.*

Sei $\phi \xrightarrow{\mathcal{T}} (y, V) \in X$ beliebig, wir müssen $\psi(\phi) \xrightarrow{\mathcal{O}} f((y, V)) = y$ zeigen. Sei dazu $O \in \uparrow y \cap \mathcal{O}$ beliebig. Um $O \in \psi(\phi)$ zu zeigen, muss $P(F) \subseteq O$ für ein $P \in \psi$ und ein $F \in \phi$ gezeigt werden.

1. Fall: $V = \infty$. Dann ist $y = a$, und für die Wahl $P := P_a(O) \in \psi$, $F := \big(\bigcup_{Q\in\vec{O}} \overline{Q} \times \{Q\}\big) \cup \{(a,\infty)\} \in \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{U}_a^{\mathcal{T}} \subseteq \phi$ gilt - konstruktionsbedingt - $P(F) \subseteq O$.

2. Fall: $V \neq \infty$, d.h. $V \in \uparrow a \cap \mathcal{O}$. Wähle in diesem Fall $P := P_0((y, V), O)$, $F := (\overline{V} \cap O) \times \{V\}$, damit $P(F) \subseteq O$ gilt.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Wenn der Zielraum einer schwach stetigen Abbildung ein T3-Raum ist, ist sie automatisch stetig, siehe Lemma 3.3.3.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Wir zeigen wieder die Kontraposition $\neg(i) \Rightarrow \neg(iii)$. Oben haben wir bereits ein $f : X \to Y$ konstruiert, das zwar schwach stetig (dies folgt aus Lemma 3.3.5 (i)), aber nicht stetig ist, womit $\neg(iii)$ gezeigt wäre.

$(i) \Rightarrow (iv)$ Die im Punkt (iv) defnierte Funtion $F : X \to Y$ ist wegen Lemma 3.3.5 (ii) schwach stetig, und, weil Y T3 ist, sogar stetig (Lemma 3.3.3).

$(iv) \Rightarrow (i)$ Wir zeigen $\neg(i) \Rightarrow \neg(iv)$, und knüpfen dazu an obiger Konstruktion an. Neben $(X, \mathcal{T})$ und $f : X \to Y$ definieren wir noch

$$D := \bigcup_{Q\in\uparrow a\cap\mathcal{O}} Q \times \{Q\} \quad \text{und} \quad g : D \to Y, (y, Q) \mapsto y.$$

<u>1. Schritt</u>: *$\overline{D} = X$.*

Um zu zeigen, dass D dicht ist, weisen wir nach, dass jede offene, nichtleere Teilmenge von X nichtleeren Schnitt mit D hat. Es reicht, dies für alle nichtleeren Mengen aus unserer Basis $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ zu zeigen.

1. Fall: $A \in \mathfrak{A}_1$, d.h. $A = (\overline{W} \cap V) \times \{W\}$ für ein $W \in \uparrow a \cap \mathcal{O}$ und $V \in \mathcal{O}$. Weil A nicht leer ist, gibt es ein $y \in \overline{W} \cap V$, woraus $W \cap V \neq \emptyset$ folgt. Für ein $z \in W \cap V$ gilt nun $(z, W) \in A \cap D$, und daher $A \cap D \neq \emptyset$.

2. Fall: $A \in \mathfrak{A}_2$, also $A = \left(\bigcup_{Q\in\vec{W}} \overline{Q} \times \{Q\}\right) \cup \{(a,\infty)\}$ für ein $W \in \uparrow a \cap \mathcal{O}$. In diesem Fall gilt $\emptyset \neq W \times \{W\} \subseteq A \cap D$.

<u>2. Schritt</u>: *g lässt sich stetig auf jedes $(y,z) \in X$ fortsetzen.*

Wir zeigen zunächst, dass sowohl die Einschränkung von $f : X \to Y$ auf $X\backslash\{(a,\infty)\}$, als auch die Einschränkung von f auf $D \cup \{(a,\infty)\}$ bezüglich der jeweiligen Spurtopologie stetig ist:

ad $f|_{X\backslash\{(a,\infty)\}} =: h$

Sei $(y,Q) \in X\backslash\{(a,\infty)\}$, und $h((y,Q)) = y \in O \in \mathcal{O}$ beliebig, so gilt für die Umgebung $(\overline{Q} \cap O) \times \{Q\} \in \mathfrak{A}_1$ von (y,Q)

$$h\left((\overline{Q} \cap O) \times \{Q\}\right) = \overline{Q} \cap O \subseteq O.$$

ad $f|_{D\cup\{(a,\infty)\}} =: h$

Für den Punkt (a,∞) und beliebiges $W \in \uparrow a \cap \mathcal{O}$ ist

$$\left(D \cup \{(a,\infty)\}\right) \cap \Big(\big(\bigcup_{Q\in\vec{W}} \overline{Q} \times \{Q\}\big) \cup \{(a,\infty)\}\Big)$$

eine Umgebung von (a,∞), die auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\Big(D \cap \bigcup_{Q\in\vec{W}} \overline{Q} \times \{Q\}\Big) \cup \{(a,\infty)\} = \{(y,Q) \mid y \in Q \in \vec{W}\} \cup \{(a,\infty)\}.$$

Es ist ersichtlich, dass diese Umgebung unter der Abbildung h genau auf W abgebildet wird. Insbesondere ist die Bildmenge in W enthalten, was die Stetigkeit in (a,∞) zeigt.

Um die Stetigkeit von h in den übrigen Punkte $(y,Q) \in D$ nachzuweisen, nehme man für beliebiges $O \in \uparrow y \cap \mathcal{O}$ die Umgebung

$$\left(D \cup \{(a,\infty)\}\right) \cap \left((\overline{Q} \cap O) \times \{Q\}\right) = (Q \cap O) \times \{Q\},$$

für die $h((Q \cap O) \times \{Q\}) \subseteq O$ gilt.

Nun kann man g auf beliebige Punkte stetig fortsetzen, indem die jeweils passende stetige Einschränkung von f eventuell weiter eingeschränkt wird.

<u>3. Schritt</u>: *Die Fortsetzung von g auf X, bezeichnet als G, ist nicht stetig.*

Klarerweise gilt aufgrund von $G((y,z)) = g_{(y,z)}((y,z)) = f((y,z)) = y$ nun $G = f$, womit gezeigt wäre, dass G nicht stetig ist. $\square$

Literatur

[1] Karsten Evers: *Stetige Konvergenz im Kontext äquivalenter Formulierungen des T3-Axioms*, Diplomarbeit, Universität Rostock, Juni 2010 (online verfügbar auf http://mathekarsten.npage.de)

[2] Richard A. Alò, Harvey L. Shapiro: *Normal topological spaces*, Cambridge University Press 1974

[3] Michael Kaltenbäck: *Analysis 2 für technische Mathematik*, Skriptum, TU Wien, 2010