

# Der Arealatz auf der linken Halbebene

Jakob Reiffenstein

Bachelorarbeit aus Analysis  
SS 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Der Dirichlet-Raum</b>	<b>4</b>
1.1	Definition und Charakterisierung . . . . .	4
1.2	Der Arealsatz . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Verallgemeinerungen des Dirichlet-Raums</b>	<b>9</b>
2.1	Verallgemeinerte Potenzreihen . . . . .	9
2.2	Pontryaginräume . . . . .	11
2.3	Transformation von $\mathcal{D}_\nu$ auf die Halbebene . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Der verallgemeinerte Arealsatz</b>	<b>17</b>
3.1	Der Gaußsche Integralsatz für Wegintegrale . . . . .	17
3.2	Die Beweisidee . . . . .	25
3.3	Normierte Riemann-Karten . . . . .	26
3.4	Der Arealsatz für $\mathcal{H}_\nu$ . . . . .	28

## Zusammenfassung

Der Dirichlet-Raum  $\mathcal{D}$  ist ein Hilbertraum spezieller analytischer Funktionen auf der Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D}$ . In Verbindung dazu betrachten wir die Menge  $\mathcal{B}$  der *normierten Riemann-Karten*, die gewisse konforme Abbildungen von  $\mathbb{D}$  nach  $\mathbb{D}$  enthält.

Ein zentraler Satz im Zusammenhang mit dem Dirichlet-Raum ist der Arealsatz, der sich sehr elegant beweisen lässt. Er besagt, dass für jedes  $B \in \mathcal{B}$  die Abbildung  $f \mapsto f \circ B$  überall auf  $\mathcal{D}$  definiert und kontraktiv bezüglich des Skalarproduktes auf  $\mathcal{D}$  ist. In ihrem Buch von 1994 betrachteten Marvin Rosenblum und James Rovnyak eine Verallgemeinerung des Dirichlet-Raumes. Bei dem verallgemeinerten Dirichlet-Raum handelt es sich nicht mehr zwingend um einen Hilbertraum. Trotzdem stellt sich heraus, dass sich der Arealsatz auf den verallgemeinerten Raum übertragen lässt. Der Beweis, der sich in Rosenblums und Rovnyaks Buch dazu findet, weist allerdings ein paar Unsauberheiten auf. In dieser Arbeit wird das Thema von einer etwas anderen Seite beleuchtet, was einen mathematisch standfesten Beweis ermöglicht.

# Kapitel 1

## Der Dirichlet-Raum

### 1.1 Definition und Charakterisierung

Wir verwenden die Bezeichnung  $\mathbb{D}$  für die Einheitscheibe, d.h.

$$\mathbb{D} := U_1^{\mathbb{C}}(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Den Einheitskreis nennen wir

$$\mathbb{T} := \partial U_1^{\mathbb{C}}(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}. \quad (1.1)$$

**Definition 1.1.1** Der Dirichlet-Raum  $\mathcal{D}$  sei die Menge aller auf  $\mathbb{D}$  analytischen Funktionen  $f = [z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n]$  mit  $f(0) = 0$  und

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 < +\infty.$$

Ist  $g$  eine weitere Funktion aus  $\mathcal{D}$  mit Potenzreihendarstellung  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ , so definieren wir das Skalarprodukt

$$(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \overline{b_n}.$$

Für  $f := [z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n]$ ,  $g := [z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n] \in \mathcal{D}$  erhalten wir aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n a_n \overline{b_n}| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}} |a_n| \cdot n^{\frac{1}{2}} |b_n| \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Somit konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \overline{b_n}$  absolut. Also ist  $(\cdot, \cdot)$  wohldefiniert.

*Bemerkung 1.1.2.* Auf den ersten Blick mag es überraschend erscheinen, dass wir  $f(0) = 0$  fordern. Täten wir das jedoch nicht, dann würden alle konstanten Funktionen  $f \equiv c \neq 0$  in  $\mathcal{D}$  liegen und es würde  $\|f\|^2 := (f, f) = 0$  gelten, obwohl  $f \neq 0$ . Die zusätzliche Forderung  $f(0) = 0$  wird gestellt, um ein positiv definites Skalarprodukt zu erhalten.

*Bemerkung 1.1.3.* Hat man  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  mit ad hoc unbekanntem Konvergenzradius, sodass  $\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 < +\infty$  gilt, dann ist  $f$  bereits analytisch auf  $\mathbb{D}$  und liegt somit in  $\mathcal{D}$ . Um das einzusehen, zeigen wir, dass  $f_N(z) := \sum_{n=1}^N a_n z^n$  für  $N \rightarrow \infty$  lokal gleichmäßig auf  $\mathbb{D}$  gegen  $f$  konvergiert. Dann erhalten wir die Analytizität von  $f$  auf  $\mathbb{D}$  als lokal gleichmäßigen Grenzwert analytischer Funktionen<sup>1</sup>. Sei also  $K \subseteq \mathbb{D}$  kompakt und  $M := \max_{z \in K} |z| < 1$ .

---

<sup>1</sup>Vgl. [C, 1.14.1]

Wegen  $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 < \infty$  gibt es ein  $C > 0$  mit  $|a_n| \leq C$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , womit

$$\sup_{z \in K} |f_N(z) - f(z)| = \sup_{z \in K} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n \right| \leq C \sum_{n=N+1}^{\infty} M^n = C \frac{M^{N+1}}{1-M} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

**Lemma 1.1.4**  $\mathcal{D}$  ist ein Hilbertraum.

*Beweis.* Der Raum  $\ell^2(\mathbb{N})$  aller quadratsummierbaren<sup>2</sup> Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $\mathbb{C}$  versehen mit

$$((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}})_{\ell^2(\mathbb{N})} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

ist bekanntermaßen ein Hilbertraum. Betrachte

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ [z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n] & \mapsto (\sqrt{n} a_n)_{n \in \mathbb{N}}. \end{cases}$$

Für  $f := [z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n]$ ,  $g := [z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n] \in \mathcal{D}$  gilt

$$(\Phi(f), \Phi(g))_{\ell^2(\mathbb{N})} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} a_n \cdot \sqrt{n} \overline{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \overline{b_n} = (f, g)_{\mathcal{D}}.$$

Somit ist  $\Phi$  isometrisch. Man überzeugt sich leicht davon, dass  $\Phi$  linear und bijektiv ist. Also handelt es sich bei  $\Phi$  sogar um einen isometrischen Isomorphismus. Daher ist  $\mathcal{D}$  genauso wie  $\ell^2(\mathbb{N})$  ein Hilbertraum.  $\square$

*Bemerkung 1.1.5.* Betrachte für beliebiges  $w \in \mathbb{D}$  die Funktion

$$k_w(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{w}^n}{n} z^n.$$

Diese Funktion liegt in  $\mathcal{D}$ , wie die Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left| \frac{\overline{w}^n}{n} \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|w|^{2n}}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |w^2|^n = \frac{|w^2|}{1-|w^2|} < +\infty$$

zeigt. Für alle Funktionen  $f = [z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n]$  aus  $\mathcal{D}$  gilt dann

$$(f, k_w) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{\overline{w}^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n = f(w).$$

Daraus erkennt man insbesondere, dass für alle  $w \in \mathbb{D}$  das Punktauswertungsfunktional  $f \mapsto f(w)$  stetig auf  $\mathcal{D}$  ist. Somit handelt es sich bei  $\mathcal{D}$  sogar um einen sogenannten *Reproducing Kernel Hilbert Space* (RKHS). Die zugehörige *Kernfunktion* ist gegeben durch

$$K(z, w) = (k_w, k_z) = k_w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n \overline{w}^n}{n}.$$

Zur Notation im folgenden Satz sei angemerkt, dass  $\lambda$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}$  bezeichnet, während  $\lambda_2$  das zweidimensionale Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^2$  ist.

---

<sup>2</sup>D.h.  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$ .

**Satz 1.1.6** Eine auf  $\mathbb{D}$  analytische Funktion  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(0) = 0$  liegt genau dann in  $\mathcal{D}$ , wenn

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f'(x + iy)|^2 d\lambda_2(x, y) < +\infty. \quad (1.2)$$

In diesem Fall gilt

$$\|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f'(x + iy)|^2 d\lambda_2(x, y). \quad (1.3)$$

*Beweis.* Setze wieder  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ . Dann gilt  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ . Sei außerdem  $R \in (0, 1)$  beliebig. Aufgrund der Kompaktheit von  $K_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$  und weil  $|f'|^2$  stetig ist, gilt<sup>3</sup>

$$\int_{U_R(0)} |f'(x + iy)|^2 d\lambda_2(x, y) \leq \int_{K_R(0)} |f'(x + iy)|^2 d\lambda_2(x, y) < +\infty.$$

Das erlaubt uns die Transformation auf Polarkoordinaten mithilfe der Transformationsregel. Weiters verwenden wir in den folgenden Gleichungen die Tatsache, dass

$$\int_0^{2\pi} \exp(ikt) dt = \begin{cases} 2\pi, & k = 0, \\ 0, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Auch die Sätze von Lebesgue (majorisierte Konvergenz) und Fubini kommen zum Einsatz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{U_R(0)} |f'(x + iy)|^2 d\lambda_2(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{U_R(0)} f'(x + iy) \overline{f'(x + iy)} d\lambda_2(x, y) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{(0, 2\pi) \times (0, R)} r \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N m a_m (r \exp(i\phi))^{m-1} \overline{\sum_{n=1}^N n a_n (r \exp(i\phi))^{n-1}} d\lambda_2(r, \phi) \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N m n a_m \overline{a_n} \int_{(0, 2\pi)} \exp((m-n)i\phi) d\lambda(\phi) \int_{(0, R)} r^{m+n-1} d\lambda(r) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi n^2 |a_n|^2 \int_{(0, R)} r^{2n-1} d\lambda(r) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 |a_n|^2 \frac{R^{2n}}{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 R^{2n}. \end{aligned}$$

Für  $R \nearrow 1$  folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f'(x + iy)|^2 d\lambda_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \in [0, +\infty].$$

Weil wir  $f(0) = 0$  vorausgesetzt haben, liegt  $f$  genau dann in  $\mathcal{D}$ , wenn obiger Ausdruck endlich ist. In diesem Fall erhalten wir insbesondere die Gleichheit (1.3). □

---

<sup>3</sup>Zur Notation:  $U_R(x) := \{z \in \mathbb{C} : |z - x| < R\}$ ,  $K_R(x) := \overline{U_R(x)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - x| \leq R\}$ .

## 1.2 Der Arealsatz

**Definition 1.2.1** Eine Riemann-Karte ist eine analytische und injektive Funktion von der Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D}$  in die komplexen Zahlen. Unter einer normierten Riemann-Karte<sup>4</sup> verstehen wir hingegen eine Riemann-Karte  $B$ , die zusätzlich folgende Eigenschaften hat:

- $B(0) = 0$ ,
- $B(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ .

Wir verwenden die Bezeichnung  $\mathcal{B}$  für die Menge aller normierten Riemann-Karten.

**Lemma 1.2.2 (Schwarz)** Für  $B \in \mathcal{B}$  tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

- Es gibt ein  $\lambda \in \mathbb{T}$ , sodass  $B(z) = \lambda z$  für alle  $z \in \mathbb{D}$ .
- $|B(z)| < |z|$  für alle  $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ .

*Beweis.* Siehe [C, 2.11.3]. □

**Lemma 1.2.3** Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $h : G \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch. Auf jeder Zusammenhangskomponente von  $G$  sei  $h$  nicht konstant. Dann ist  $h(G)$  offen in  $\mathbb{C}$ . Ist  $h$  analytisch und injektiv, so gilt:

- $h'(z) \neq 0$  für alle  $z \in G$  und
- $h^{-1} : h(G) \rightarrow G$  ist analytisch.

*Beweis.* Siehe [C, 2.10.3]. □

**Satz 1.2.4 (Arealatz)** Für alle  $f \in \mathcal{D}$  und  $B \in \mathcal{B}$  ist auch  $f \circ B$  ein Element von  $\mathcal{D}$ . Dabei gilt

$$\|f \circ B\| \leq \|f\|. \tag{1.5}$$

*Beweis.* Indem man  $\mathbb{D}$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  auffasst, lässt sich  $B$  nach Lemma 1.2.3 als  $C^1$ -Diffeomorphismus interpretieren. Seine Ableitung ist gegeben durch

$$dB = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} B & \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} B \\ \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} B & \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} B \end{pmatrix}.$$

Mithilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen  $\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} B = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} B$  und  $\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} B = -\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} B$  erkennt man

$$\begin{aligned} \det dB &= \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} B \cdot \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} B - \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} B \cdot \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} B \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} B\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} B\right)^2 = \left|\frac{\partial}{\partial x} B\right|^2 = |B'|^2. \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Diese Namensgebung weicht von der in [R] etwas ab.

Unter Anwendung der Transformationsregel zusammen mit  $B(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$  resultiert daraus

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |(f \circ B)'|^2 d\lambda_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f' \circ B|^2 |B'|^2 d\lambda_2 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f' \circ B|^2 |\det dB| d\lambda_2 = \frac{1}{\pi} \int_{B(\mathbb{D})} |f'|^2 d\lambda_2 \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f'|^2 d\lambda_2 = \|f\|^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Somit gilt  $f \circ B \in \mathcal{D}$ , denn  $f \circ B$  ist analytisch auf  $\mathbb{D}$  mit  $f(B(0)) = f(0) = 0$ . Dabei gilt wegen der soeben gezeigten Ungleichung auch (1.5).  $\square$

*Bemerkung 1.2.5.* Satz 1.2.4 lässt sich auch so formulieren, dass für jedes feste  $B \in \mathcal{B}$  der lineare Operator

$$T_B : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow \mathcal{D} \\ f & \mapsto f \circ B \end{cases}$$

wohldefiniert und stetig mit  $\|T_B\| \leq 1$  ist.

## Kapitel 2

# Verallgemeinerungen des Dirichlet-Raums

Wir betrachten im Folgenden die Verallgemeinerung des Dirichlet-Raums, wie sie in dem Buch von Rosenblum und Rovnyak untersucht wird. Schon in der Definition der Verallgemeinerung stößt man jedoch auf das Problem, dass für allgemeines  $\nu \in \mathbb{R}$  die  $\nu$ -te Potenz einer komplexen Zahl nicht wohldefiniert sein muss. Das hat in dem Beweis, den die Autoren für den verallgemeinerten Arealsatz angeben, zu einigen Ungenauigkeiten geführt. Um diese auszuräumen, werden wir eine weitere Verallgemeinerung des Dirichlet-Raumes betrachten.

### 2.1 Verallgemeinerte Potenzreihen

**Definition 2.1.1** Sei  $\nu \in \mathbb{R}$  beliebig. Wir definieren den Raum  $\mathcal{D}_\nu$  formal als Menge der verallgemeinerten Potenzreihen mit komplexen Koeffizienten der Form

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\nu+n},$$

für die zusätzlich gilt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\nu+n) |a_n|^2 < +\infty.$$

Auf  $\mathcal{D}_\nu$  ist durch

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{D}_\nu} := \sum_{n=1}^{\infty} (\nu+n) a_n \overline{b_n}$$

ein inneres Produkt definiert, wobei hier  $g \in \mathcal{D}_\nu$  die Darstellung  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{\nu+n}$  besitze.

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (\nu+n) a_n \overline{b_n}$  konvergiert für  $f := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\nu+n}$ ,  $g := \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{\nu+n} \in \mathcal{D}_\nu$  immer absolut. Um das zu begründen, genügt es zu zeigen, dass<sup>1</sup>  $\sum_{n=\lceil-\nu\rceil}^{\infty} |(\nu+n) a_n \overline{b_n}| < +\infty$ .

---

<sup>1</sup> $\lceil x \rceil := \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\}$ ,  $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ .

Wir folgern aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \sum_{n=\lceil -\nu \rceil}^{\infty} |(\nu + n)a_n \overline{b_n}| &= \sum_{n=\lceil -\nu \rceil}^{\infty} \left( \sqrt{\nu + n} |a_n| \cdot \sqrt{\nu + n} |b_n| \right) \\ &\leq \left( \sum_{n=\lceil -\nu \rceil}^{\infty} (\nu + n) |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=\lceil -\nu \rceil}^{\infty} (\nu + n) |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Wegen  $f, g \in \mathcal{D}_\nu$  sind  $\langle f, f \rangle_{\mathcal{D}_\nu}$  und  $\langle g, g \rangle_{\mathcal{D}_\nu}$  endlich. Also ist der Ausdruck in (2.1) endlich, denn die beiden Reihen unterscheiden sich jeweils nur in endlich vielen Summanden von  $\langle f, f \rangle_{\mathcal{D}_\nu}$  bzw. von  $\langle g, g \rangle_{\mathcal{D}_\nu}$ .

*Bemerkung 2.1.2.* Die Elemente von  $\mathcal{D}_\nu$  sind im Allgemeinen keine wohldefinierten Funktionen. Erst durch die Festlegung eines Astes von  $z \mapsto z^\nu$  könnten wir sie als solche interpretieren. Nichtsdestotrotz handelt es sich bei  $\mathcal{D}_\nu$  um einen Vektorraum. Dabei bilden wir die Summe zweier Elemente von  $\mathcal{D}_\nu$ , indem wir die Einträge der Koeffizientenfolge einzeln addieren. Auch die Skalarmultiplikation ist komponentenweise durchzuführen.

Um trotzdem eine Version des Arealsatzes für  $\mathcal{D}_\nu$  zu erhalten, steht man vor zwei Problemen. Erstens soll für  $B \in \mathcal{B}$  eine geeignete Definition von  $f \circ B$  gefunden werden, die wir als verallgemeinerte Potenzreihe der Form  $(f \circ B)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{\nu+n}$  schreiben können. Zweitens wollen wir die Ungleichung aus Satz 1.2.4 auf  $\mathcal{D}_\nu$  übertragen. Konkret ist zu zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\nu + n) |b_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\nu + n) |a_n|^2.$$

Wir werden am Ende der Arbeit eine Variante dieser Aussage beweisen, dafür ist aber einiges an Vorarbeit notwendig.

*Bemerkung 2.1.3.* Für  $\nu \leq -1$  liegt  $m_1(z) := z^{\nu+1}$ , also das Element mit Koeffizientenfolge  $(1, 0, 0, 0, \dots)$ , in  $\mathcal{D}_\nu$  und erfüllt

$$\langle m_1, m_1 \rangle_{\mathcal{D}_\nu} = \nu + 1 \leq 0.$$

Also ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}_\nu}$  nicht positiv definit. Wir definieren

$$m_n(z) := z^{\nu+n} \in \mathcal{D}_\nu, \quad n \in \mathbb{N},$$

und setzen  $\mathcal{V}^- := \text{span}(\{m_n : n \in \mathbb{N}, n < -\nu\})$ . Weiters sei  $\mathcal{V}^+ := \{\sum_{n=1}^{\infty} a_n m_n : a_n = 0, n \leq -\nu\}$ . Schließlich sei  $\mathcal{V}^\circ := \text{span}(\{m_{-\nu}\})$ , falls  $\nu \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, 0)$ , und  $\mathcal{V}^\circ := \{0\}$  sonst. Mit dieser Notation gilt

$$\mathcal{D}_\nu = \mathcal{V}^- \boxplus \mathcal{V}^\circ \boxplus \mathcal{V}^+,$$

wobei  $\boxplus$  für eine orthogonale direkte Summe steht.

**Lemma 2.1.4** *Für jedes  $\nu \in \mathbb{R}$  ist  $\mathcal{V}^+$  ein Hilbertraum.*

*Beweis.* Sei  $n_\nu := \max\{1, \lceil -\nu + 1 \rceil\}$ . Jedes Element  $f$  von  $\mathcal{V}^+$  lässt sich in der Form  $\sum_{n=n_\nu}^{\infty} a_n z^{\nu+n}$  schreiben, weil alle  $a_k$  mit  $k \leq -\nu$  verschwinden. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 1.1.4 sei

$$\Phi_\nu : \begin{cases} \mathcal{V}^+ & \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ \sum_{n=n_\nu}^{\infty} a_n z^{\nu+n} & \mapsto \left( \sqrt{\nu + (n + n_\nu - 1)} a_{n+n_\nu-1} \right)_{n \in \mathbb{N}}. \end{cases}$$

Es lässt sich nun leicht überprüfen, dass  $\Phi_\nu$  ein isometrischer Isomorphismus von  $\mathcal{D}_\nu$  auf den Hilbertraum  $\ell^2(\mathbb{N})$  ist. □

Wir betrachten noch einmal die Situation von Beispiel 2.1.3. Im Gegensatz zu  $\mathcal{V}^+$  ist die Einschränkung des Skalarproduktes auf  $\mathcal{V}^-$  negativ definit, während  $\mathcal{V}^\circ$  isotrop ist, d.h. für  $f \in \mathcal{V}^\circ$  gilt  $\langle f, g \rangle_{\mathcal{D}_\nu} = 0$  für alle  $g \in \mathcal{D}_\nu$ . Das bedeutet konkret, dass wir es mit einem (*Fast-*)*Pontryaginraum* zu tun haben. Dieser Begriff soll im nächsten Abschnitt ein wenig erläutert werden.

## 2.2 Pontryaginräume

**Definition 2.2.1** Sei  $\mathcal{A}$  ein Vektorraum und  $\mathcal{O}$  eine Topologie auf  $\mathcal{A}$ . Falls es ein Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  auf  $\mathcal{A}$  gibt, das  $\mathcal{A}$  zu einem Hilbertraum macht und  $\mathcal{O}$  erzeugt, so nennen wir  $\mathcal{O}$  eine Hilbertraumtopologie. Ist  $[\cdot, \cdot]$  eine weitere (nicht notwendigerweise positiv definite) hermitesche Sesquilinearform auf  $\mathcal{A}$ , die stetig bezüglich  $\mathcal{O}$  ist<sup>2</sup>, dann nennen wir das Tripel  $(\mathcal{A}, [\cdot, \cdot], \mathcal{O})$  einen Gramraum.

**Definition 2.2.2** Sei  $(\mathcal{A}, [\cdot, \cdot], \mathcal{O})$  ein Gramraum. Sei  $\mathcal{A}^\circ$  der isotrope Anteil von  $\mathcal{A}$  bezüglich  $[\cdot, \cdot]$ , d.h. die Menge aller  $x \in \mathcal{A}$ , für die  $[x, y] = 0$  für alle  $y \in \mathcal{A}$  gilt. Dann heißt  $(\mathcal{A}, [\cdot, \cdot], \mathcal{O})$  ein *Fast-Pontryaginraum*, falls

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^- \boxplus \mathcal{A}^\circ \boxplus \mathcal{A}^+,$$

wobei  $(\mathcal{A}^+, [\cdot, \cdot]|_{\mathcal{A}^+})$  ein Hilbertraum ist,  $\mathcal{A}^\circ$  endlichdimensional und  $(\mathcal{A}^-, [\cdot, \cdot]|_{\mathcal{A}^-})$  negativ definit und endlichdimensional ist. Mit  $\boxplus$  beschreiben wir hier die orthogonale direkte Summe. Ist zusätzlich  $\mathcal{A}^\circ = \{0\}$ , dann nennen wir  $(\mathcal{A}, [\cdot, \cdot], \mathcal{O})$  einen *Pontryaginraum*.

In dieser Situation erhalten wir aus dem Lemma von Lax-Milgram einen eindeutigen beschränkten Operator  $G$ , für den  $[x, y] = (Gx, y)$  für alle  $x, y \in \mathcal{A}$  gilt.

Wir betrachten den konkreten Fall von  $\mathcal{D}_\nu$  versehen mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}_\nu}$ . Sei  $(\cdot, \cdot)$  definiert durch

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\nu+n}, \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{\nu+n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_\nu(n) a_n \overline{b_n},$$

wobei

$$\zeta_\nu(n) := \begin{cases} -(\nu + n), & n < -\nu \\ 1, & n = -\nu \\ \nu + n, & n > -\nu. \end{cases}$$

Dann ist  $(\cdot, \cdot)$  ein positiv definites Skalarprodukt, und aufgrund der Isomorphie mit dem Folgenraum  $\ell^2(\mathbb{N})$  ist  $(\mathcal{D}_\nu, (\cdot, \cdot))$  sogar ein Hilbertraum. Wir verwenden wieder die Zerlegung  $\mathcal{D}_\nu = \mathcal{V}^- \boxplus \mathcal{V}^\circ \boxplus \mathcal{V}^+$  aus Bemerkung 2.1.3. Damit definieren wir den beschränkten Operator  $G : \mathcal{D}_\nu \rightarrow \mathcal{D}_\nu$  partiell durch<sup>3</sup>

$$G|_{\mathcal{V}^-} := -I|_{\mathcal{V}^-}, \quad G|_{\mathcal{V}^\circ} := 0, \quad G|_{\mathcal{V}^+} := I|_{\mathcal{V}^+}.$$

<sup>2</sup>Das bedeutet, dass  $[\cdot, \cdot]$  als Abbildung von  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$  versehen mit der Produkttopologie  $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$  nach  $\mathbb{C}$  stetig ist. Wird  $\mathcal{O}$  von einem Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  erzeugt, ist das äquivalent dazu, dass ein  $C > 0$  existiert, sodass  $[x, y] \leq C \|x\| \|y\|$  für alle  $x, y \in \mathcal{A}$ . Die Norm sei dabei die von  $(\cdot, \cdot)$  induzierte.

<sup>3</sup> $I$  ist die Identität auf  $\mathcal{D}_\nu$ .

Ein  $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\nu+n} \in \mathcal{D}_\nu$  wird unter  $G$  also abgebildet auf  $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n z^{\nu+n}$ , wobei  $\hat{a}_n = -a_n$  für  $n < -\nu$ ,  $\hat{a}_{-\nu} = 0$  und  $\hat{a}_n = a_n$  für alle  $n > -\nu$ . Wir sehen unmittelbar, dass  $G$  beschränkt ist. Ist  $g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{\nu+n}$  ein weiteres Element von  $\mathcal{D}_\nu$ , so erhalten wir<sup>4</sup>

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{D}_\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} (\nu + n) a_n \overline{b_n} = \sum_{n=1}^{[-\nu-1]} \zeta_\nu(n) (-a_n) \overline{b_n} + 0 + \sum_{n=[-\nu+1]}^{\infty} \zeta_\nu(n) a_n \overline{b_n} = (Gf, g).$$

Die Null auf der rechten Seite symbolisiert, dass für  $0 > \nu \in \mathbb{Z}$  der Ausdruck  $(\nu + (-\nu)) a_{-\nu} \overline{b_{-\nu}}$  mit Null übereinstimmt, ebenso wie der  $(-\nu)$ -te Koeffizient  $a_{-\nu}$  von  $Gf$ .

Aus obiger Darstellung folgt insbesondere, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}_\nu}$  stetig bezüglich  $(\cdot, \cdot)$  ist. Außerdem haben wir bereits eine Zerlegung von  $\mathcal{D}_\nu$  als direkte orthogonale Summe von Hilbertraum, endlichdimensionalem negativ definitem Unterraum und endlichdimensionalem isotropem Anteil gefunden. Das bedeutet, dass  $\mathcal{D}_\nu$  ein Fast-Pontryaginraum ist. Für  $\nu \notin \mathbb{Z}$  ist sogar  $\mathcal{V}^\circ = \{0\}$ , womit  $\mathcal{D}_\nu$  ein Pontryaginraum ist.

## 2.3 Transformation von $\mathcal{D}_\nu$ auf die Halbebene

Die linke Halbebene  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$  bezeichnen wir fortan mit  $\mathbb{L}$ . Die Exponentialfunktion bildet dann  $\mathbb{L}$  bekanntlich surjektiv auf  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$  ab.

**Definition 2.3.1** Sei  $\nu \in \mathbb{R}$ . Der Raum  $\mathcal{H}_\nu$  sei die Menge aller analytischen Funktionen  $h : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{C}$  der Form

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp((\nu + n)z) \tag{2.2}$$

mit  $a_n \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\nu + n) |a_n|^2 < +\infty.$$

Analog zu Definition 2.1.1 sei

$$\langle h, s \rangle_{\mathcal{H}_\nu} := \sum_{n=1}^{\infty} (\nu + n) a_n \overline{b_n}, \tag{2.3}$$

wobei  $s = [z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp((\nu + n)z)] \in \mathcal{H}_\nu$ , ein inneres Produkt<sup>5</sup> auf  $\mathcal{H}_\nu$ .

**Bemerkung 2.3.2.**

1. Sei  $\nu \in \mathbb{R}$  und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge komplexer Zahlen mit  $\sum_{n=1}^{\infty} (\nu + n) |a_n|^2 < +\infty$ . Weil  $\nu + n$  für  $n \rightarrow \infty$  bestimmt gegen  $+\infty$  divergiert, ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge und insbesondere beschränkt. In Bemerkung 1.1.3 haben wir gesehen, dass dann  $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  analytisch auf  $\mathbb{D}$  ist. Infolge ist  $(g \circ \exp)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(nz)$  analytisch auf  $\mathbb{L}$ . Weil auch die punktweise Multiplikation analytischer Funktionen wieder analytisch ist, ist auch die Funktion

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp((\nu + n)z) = \exp(\nu z) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(nz)$$

<sup>4</sup>Für  $k < m$  ist die Summe  $\sum_{n=m}^k [\dots]$  als Null zu interpretieren.

<sup>5</sup>Die Reihe in (2.3) konvergiert, weil  $[z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp((\nu + n)z)]$  genau dann in  $\mathcal{H}_\nu$  liegt, wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\nu+n}$  ein Element von  $\mathcal{D}_\nu$  ist.

analytisch auf  $\mathbb{L}$ .

2. Für alle  $h \in \mathcal{H}_\nu$  ist die Darstellung

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp((\nu + n)z)$$

eindeutig. Betrachten wir dazu eine weitere solche Darstellung:

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp((\nu + n)z).$$

Dann gilt

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) \exp((\nu + n)z) = \exp(\nu z) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) \exp(z)^n$$

für alle  $z \in \mathbb{L}$ . Wegen  $\exp(\nu z) \neq 0$  folgt

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) w^n$$

für alle  $w = \exp(z)$  mit  $z \in \mathbb{L}$ , d.h. für alle  $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ . Aus der Eindeutigkeit der Potenzreihendarstellung analytischer Funktionen folgt  $a_n - b_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Offensichtlich liegt  $[z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp((\nu + n)z)]$  genau dann in  $\mathcal{H}_\nu$ , wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\nu+n}$  in  $\mathcal{D}_\nu$  liegt. Intuitiv würde man sagen, dass

$$\mathcal{H}_\nu \approx \{f \circ \exp : f \in \mathcal{D}_\nu\}.$$

Indem wir beide Räume als Unterräume des Folgenraumes  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  betrachten, sehen wir unmittelbar, dass  $\mathcal{D}_\nu$  und  $\mathcal{H}_\nu$  isomorph sind. Der Grund, aus dem wir  $\mathcal{H}_\nu$  gesondert betrachten, ist der, dass wir es hier im Unterschied zu  $\mathcal{D}_\nu$  mit wohldefinierten Funktionen zu tun haben.

4. Ebenso wie  $\mathcal{D}_\nu$  ist auch  $\mathcal{H}_\nu$  genau dann ein Hilbertraum, wenn  $\nu > -1$ . Falls  $\nu \leq -1$ , ist  $\mathcal{H}_\nu$  ein Fast-Pontryaginraum und, falls zusätzlich  $\nu \notin \mathbb{Z}$ , sogar ein Pontryaginraum. Siehe dazu Abschnitt 2.2.
5. Wir haben in Bemerkung 1.1.5 gesehen, dass für jedes  $w \in \mathbb{D}$  ein  $k_w \in \mathcal{D}$  existiert, sodass  $(f, k_w) = f(w)$  für alle  $f \in \mathcal{D}$ . Dieselbe Aussage gilt für  $\mathcal{H}_\nu$ , wenn  $\nu$  keine negative ganze Zahl ist. Für  $w \in \mathbb{L}$  setze

$$q_w : \begin{cases} \mathbb{L} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp((\nu+n)\bar{w})}{\nu+n} \exp((\nu+n)z). \end{cases}$$

Es ist leicht zu überprüfen, dass  $q_w$  in  $\mathcal{H}_\nu$  liegt. Für jedes  $h \in \mathcal{H}_\nu$  folgt durch Einsetzen in die Definition, dass  $h(w) = \langle h, q_w \rangle_{\mathcal{H}_\nu}$ . Das bedeutet, dass  $\mathcal{H}_\nu$  ein kernreproduzierender Hilbert-/Pontryaginraum ist.

**Satz 2.3.3** Sei  $\nu \in \mathbb{R}$ ,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge aus  $\mathbb{C}$ , sodass  $h := [z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp((\nu + n)z)]$  eine analytische Funktion auf  $\mathbb{L}$  ist,<sup>6</sup> und  $s \in \mathbb{R}$ . Für alle  $\eta < 0$  sei  $L_{s,\eta} : [s, s + 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  der Weg  $t \mapsto \eta + it$ . Dann gilt

$$G_\eta := \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{s,\eta}} h'(z) \overline{h(z)} dz \in \mathbb{R},$$

und  $h$  liegt genau dann in  $\mathcal{H}_\nu$ , wenn  $G_\eta$  für  $\eta \nearrow 0$  gegen eine reelle Zahl konvergiert, oder äquivalent dazu, wenn  $\sup_{\eta < 0} G_\eta < +\infty$ .

In diesem Fall gilt

$$\langle h, h \rangle_{\mathcal{H}_\nu} = \lim_{\eta \nearrow 0} G_\eta.$$

*Beweis.* Da  $h$  eine analytische Funktion ist, konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp((\nu + n)z)$  lokal gleichmäßig, ebenso wie die Reihe  $h'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\nu + n) a_n \exp((\nu + n)z)$ . Also folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz unter Berücksichtigung von (1.4), dass

$$\begin{aligned} G_\eta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{s,\eta}} h'(z) \overline{h(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_s^{s+2\pi} ih'(\eta + it) \overline{h(\eta + it)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_s^{s+2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{m=1}^N (\nu + m) a_m \exp((\nu + m)(\eta + it)) \right) \overline{\left( \sum_{n=1}^N a_n \exp((\nu + n)(\eta + it)) \right)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (\nu + m) a_m \overline{a_n} \exp((2\nu + m + n)\eta) \int_s^{s+2\pi} \exp((m - n)it) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\nu + n) |a_n|^2 \exp(2(\nu + n)\eta) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

In der letzten Reihe sind alle Summanden bis auf endlich viele positiv. Daher kann der Satz von der monotonen Konvergenz angewandt werden, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \nearrow 0} G_\eta &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\eta \nearrow 0} (\nu + n) |a_n|^2 \exp(2(\nu + n)\eta) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\nu + n) |a_n|^2 \in (-\infty, +\infty]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Also konvergiert  $G_\eta$  genau dann, wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} (\nu + n) |a_n|^2 < +\infty$ , und in diesem Fall erhalten wir

$$\langle h, h \rangle_{\mathcal{H}_\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} (\nu + n) |a_n|^2 = \lim_{\eta \nearrow 0} G_\eta.$$

Im Fall  $\sup_{\eta < 0} G_\eta < +\infty$  sehen wir, dass  $\limsup_{\eta \rightarrow 0} G_\eta < +\infty$ , und aus (2.4) folgt die Konvergenz von  $G_\eta$ . Ist umgekehrt  $G_\eta$  konvergent, dann ist auch  $\sum_{n=\lceil -\nu \rceil}^{\infty} (\nu + n) |a_n|^2 \exp(2(\nu + n)\eta)$  konvergent und als monoton wachsendes und konvergentes Netz beschränkt. Das impliziert

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\nu + n) |a_n|^2 \exp(2(\nu + n)\eta) \leq \sum_{n=\lceil -\nu \rceil}^{\infty} (\nu + n) |a_n|^2 \exp(2(\nu + n)\eta) \leq C$$

<sup>6</sup>Jede beschränkte Folge erfüllt diese Voraussetzung; siehe dazu Bemerkung 2.3.2, 1.

für alle  $\eta < 0$ , weil alle Summanden mit Index  $n < -\nu$  negativ sind.  $\square$

Wie schon vorweggenommen, wird das Ziel dieser Arbeit sein, den Arealsatz auf  $\mathcal{D}_\nu$  zu übertragen. Der direkte Beweis, so wie man ihn in [R] findet, gelingt ohne Weiteres jedoch nicht. Daher werden wir ihn zuerst für  $\mathcal{H}_\nu$  beweisen. Daraus erhält man über die Isomorphie von  $\mathcal{H}_\nu$  und  $\mathcal{D}_\nu$  auch die entsprechende Aussage in  $\mathcal{D}_\nu$ . Nachdem  $\mathcal{H}_\nu$  im Wesentlichen eine transformierte Version von  $\mathcal{D}_\nu$  ist, müssen wir uns überlegen, welche Entsprechung der Ausdruck  $T_B(f) = f \circ B$  in  $\mathcal{H}_\nu$  hat. Dazu verwenden wir den Zugang  $\mathcal{H}_\nu \approx \{f \circ \exp : f \in \mathcal{D}_\nu\}$  aus Bemerkung 2.3.2, 2. Damit erscheint es sinnvoll, uns für  $h \approx f \circ \exp \in \mathcal{H}_\nu$  den Ausdruck  $Q_B(h) = Q_B(f \circ \exp) := f \circ B \circ \exp$  als Analogon von  $f \circ B$  in  $\mathcal{H}_\nu$  vorzustellen. Wir widmen uns auf den nächsten Seiten der Formalisierung dieser Idee.

**Lemma 2.3.4** *Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  einfach zusammenhängend und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch mit  $f(z) \neq 0$  für alle  $z \in G$ . Dann existiert eine analytische Funktion  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f = \exp \circ g$ .*

*Beweis.* Unter den gegebenen Voraussetzungen ist  $\frac{f'}{f}$  analytisch auf  $G$ . Weil  $G$  einfach zusammenhängend ist, existiert eine Stammfunktion  $F$  von  $\frac{f'}{f}$ . Nun gilt

$$\left(\frac{f}{\exp \circ F}\right)'(z) = \frac{1}{\exp(F(z))^2} \left(f'(z) \exp(F(z)) - f(z) \exp(F(z)) \frac{f'(z)}{f(z)}\right) = 0.$$

Also ist  $f/(\exp \circ F)$  konstant auf  $G$ . Somit gilt  $f(z) = \alpha \exp(F(z))$  für alle  $z \in G$  mit einem gewissen  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Für jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\exp(\lambda) = 1/\alpha$  ist  $g = F + \lambda$  ebenfalls eine Stammfunktion von  $f'/f$ . Wir sehen, dass  $g$  die gewünschte Gleichung erfüllt; vgl. [C, 1.11.3].  $\square$

Mithilfe dieses Lemmas können wir unsere Überlegungen fortführen. Weil jedes  $B \in \mathcal{B}$  injektiv mit  $B(0) = 0$  ist, verschwindet  $B$  nirgendwo auf  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ . Also hat  $B \circ \exp : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{C}$  keine Nullstellen, und  $\mathbb{L}$  ist augenscheinlich einfach zusammenhängend. Lemma 2.3.4 liefert eine analytische Funktion  $\tilde{B} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $B \circ \exp = \exp \circ \tilde{B}$ . Weil die linke Seite Werte in  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$  hat, bildet  $\tilde{B}$  nach  $\mathbb{L}$  hinein ab. Das erlaubt uns für  $h \approx f \circ \exp \in \mathcal{H}_\nu$  mit  $f \in \mathcal{D}_\nu$  die formale Umformung

$$f \circ B \circ \exp \approx f \circ \exp \circ \tilde{B} \approx h \circ \tilde{B}.$$

*Bemerkung 2.3.5.* Die Funktion  $\tilde{B}$  ist nicht eindeutig. Für jede weitere analytische Funktion  $\hat{B}$  mit  $B \circ \exp = \exp \circ \hat{B}$  gilt aber

$$\exp(\hat{B}(z) - \tilde{B}(z)) = \frac{\exp(\hat{B}(z))}{\exp(\tilde{B}(z))} = \frac{B(\exp(z))}{B(\exp(z))} = 1.$$

Also gilt  $\hat{B}(z) - \tilde{B}(z) = 2\pi ik$  mit einem  $k \in \mathbb{Z}$ , wobei  $k$  aus Gründen der Stetigkeit für alle  $z \in \mathbb{L}$  gleich bleibt. Daher gilt für jedes  $h = [z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp((\nu + n)z)] \in \mathcal{H}_\nu$ , dass

$$\begin{aligned} h(\hat{B}(z)) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp((\nu + n)(\tilde{B}(z) + 2\pi ik)) \\ &= \exp((\nu + n)2\pi ik) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp((\nu + n)\tilde{B}(z)) = \exp(\nu 2\pi ik) h(\tilde{B}(z)) \end{aligned}$$

für alle  $z \in \mathbb{L}$ . Für  $\nu \cdot k \notin \mathbb{Z}$  gilt keine Gleichheit. Immerhin gilt aber  $|h(\hat{B}(z))| = |h(\tilde{B}(z))|$  für alle  $z \in \mathbb{L}$ .

**Lemma 2.3.6** Sei  $h \in \mathcal{H}_\nu$ ,  $B \in \mathcal{B}$  und  $\tilde{B} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion mit  $B(\exp(z)) = \exp(\tilde{B}(z))$  für alle  $z \in \mathbb{L}$ . Dann existiert eine Folge  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  komplexer Zahlen mit

$$(h \circ \tilde{B})(z) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \exp((\nu + n)z), \quad z \in \mathbb{L}.$$

*Beweis.* Weil  $B$  analytisch mit  $B(0) = 0$  ist, besitzt  $B$  die Potenzreihendarstellung

$$B(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Folglich ist auch

$$P(z) := \frac{B(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

analytisch auf  $\mathbb{D}$  und erfüllt  $P(0) = \lim_{z \rightarrow 0} (B(z) - B(0))/z = B'(0) \neq 0$ . Auch auf  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$  hat  $P$  keine Nullstelle, denn  $B$  ist injektiv und kann daher außer bei 0 keine weitere Nullstelle haben. Somit ist Lemma 2.3.4 anwendbar, und wir erhalten eine analytische Funktion  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $P = \exp \circ g$ . Für  $z \in \mathbb{L}$  gilt dann

$$\exp(\tilde{B}(z) - z) = \frac{\exp(\tilde{B}(z))}{\exp(z)} = \frac{B(\exp(z))}{\exp(z)} = P(\exp(z)) = \exp(g(\exp(z))).$$

Das impliziert

$$\tilde{B}(z) - z = g(\exp(z)) + 2\pi ik,$$

wobei  $k \in \mathbb{Z}$  aus Stetigkeitsgründen für alle  $z \in \mathbb{L}$  gleich sein muss. Es folgt

$$\begin{aligned} h(\tilde{B}(z)) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp((\nu + n)\tilde{B}(z)) = \exp(\nu z) \exp(\nu(\tilde{B}(z) - z)) \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\exp(\tilde{B}(z)))^n \\ &= \exp(\nu z) \exp(\nu g(\exp(z))) \exp(\nu 2\pi ik) \sum_{n=1}^{\infty} a_n (B(\exp(z)))^n = \exp(\nu z) W(\exp(z)), \end{aligned}$$

wobei  $W$  die folgende analytische Funktion ist<sup>7</sup>:

$$W(z) = \exp(\nu 2\pi ik) \exp(\nu g(z)) \sum_{n=1}^{\infty} a_n (B(z))^n.$$

Wir können daher  $W$  in der folgenden Form schreiben:

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Allerdings ist  $w_0 = 0$ , weil mit  $B(0) = 0$  auch  $W(0) = 0$  gilt. Daraus erhalten wir schließlich für alle  $z \in \mathbb{D}$

$$(h \circ \tilde{B})(z) = \exp(\nu z) W(\exp(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \exp((\nu + n)z).$$

□

<sup>7</sup>Dass die Funktion  $z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  analytisch auf  $\mathbb{D}$  ist, haben wir in Bemerkung 2.3.2, 1., gesehen.

# Kapitel 3

## Der verallgemeinerte Arealsatz

In den nächsten Abschnitten werden einige Aussagen bewiesen, die für den Beweis des Arealsatzes für  $\mathcal{H}_\nu$  benötigt werden.

Wir erinnern an einige Begriffe im Zusammenhang mit Wegen.

1. Als Weg bezeichnen wir eine beliebige Abbildung  $\gamma$  von einem Intervall  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}^n$ . Im Falle  $n = 2$  können wir  $\gamma$  auch als Abbildung nach  $\mathbb{C}$  betrachten.
2. Jeder Weg auf  $[a, b]$  kann zu einem Weg auf  $[0, 1]$  umparametrisiert werden. Dazu verwenden wir die Abbildung  $t \mapsto a + t(b - a)$ . Genauso kann jeder Weg auf  $[0, 1]$  auf einen Weg mit Definitionsbereich  $[a, b]$  transformiert werden.
3. Sind  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und gilt  $b = c$ , dann sei der Weg  $\gamma \oplus \sigma : [a, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert durch

$$(\gamma \oplus \sigma)|_{[a,b]} := \gamma, \quad (\gamma \oplus \sigma)|_{(c,d]} := \sigma.$$

In den für diese Arbeit relevanten Fällen ist es allerdings nicht wichtig, auf welchem Intervall  $\gamma \oplus \sigma$  definiert ist. Daher werden wir die Voraussetzung  $b = c$  gegebenenfalls ignorieren, da wir immer so umparametrisieren können, dass die beiden Wege  $\gamma$  und  $\sigma$  zusammenpassen.

4. Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Weg. Dann ist der rückwärts durchlaufene Weg  $\gamma^-$  definiert als die Abbildung  $t \mapsto \gamma(a + b - t)$  auf  $[a, b]$ .
5. Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Den Weg  $\overrightarrow{[x, y]} : t \mapsto x + t(y - x)$  definiert auf  $[0, 1]$  nennen wir die gerade Strecke von  $x$  nach  $y$ .
6. Das komplexe Wegintegral sei wie in [K2, 11.7.2] definiert.

### 3.1 Der Gaußsche Integralsatz für Wegintegrale

**Definition 3.1.1** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Eine Jordankurve ist eine stetige Funktion  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , die injektiv auf  $[a, b]$  ist und  $\gamma(a) = \gamma(b)$  erfüllt.

**Satz 3.1.2 (Jordanscher Kurvensatz)** Sei  $\gamma$  eine Jordankurve. Dann zerfällt  $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$  in genau zwei Zusammenhangskomponenten  $G$  und  $E$ . Dabei ist  $G$  beschränkt,  $E$  unbeschränkt, und es gilt  $\partial G = \partial E = \gamma([a, b])$ . Wir nennen  $G$  das Innere und  $E$  das Äußere von  $\gamma$ .

*Beweis.* Siehe [B, 4.38/4.41]. □

Ist die Jordankurve  $\gamma$  stetig differenzierbar mit  $\gamma'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ , dann ist  $\gamma|_{(a,b)}$  eine Einbettung in die eindimensionale Mannigfaltigkeit  $\gamma((a, b)) \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ . Der Tangentialraum an den Punkt  $\gamma(t)$  ist gegeben durch  $\gamma'(t)\mathbb{R}$ . Als Element von  $\mathbb{R}^2$  gilt

$$\gamma'(t) \cong \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \gamma'(t) \\ \operatorname{Im} \gamma'(t) \end{pmatrix}$$

und

$$i\gamma'(t) = -\operatorname{Im} \gamma'(t) + i \operatorname{Re} \gamma'(t) \cong \begin{pmatrix} -\operatorname{Im} \gamma'(t) \\ \operatorname{Re} \gamma'(t) \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass  $i\gamma'(t)$  normal auf den Tangentialraum steht. Die beiden Normalvektoren sind somit gegeben durch  $\pm \frac{1}{\|\gamma'(t)\|_2} i\gamma'(t)$ .

Als nächstes sei  $\gamma$  nur stetig und stückweise stetig differenzierbar, d.h. es gibt endlich viele  $a = m_1 < m_2 < \dots < m_n = b \in [a, b]$ , sodass sich  $\gamma|_{(m_k, m_{k+1})}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , stetig differenzierbar auf  $[m_k, m_{k+1}]$  fortsetzen lässt. Dann gilt

$$\partial G = \gamma([a, b]) = \{\gamma(m_1), \gamma(m_2), \dots, \gamma(m_n)\} \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} \gamma((m_k, m_{k+1})).$$

Der Rand von  $G$  ist also bis auf endlich viele Punkte glatt. Wegen  $\gamma([a, b]) = \partial G = \partial E$  folgt für jedes  $t \in [a, b] \setminus \{m_1, \dots, m_n\}$  und jede Umgebung  $U$  von  $\gamma(t)$ , dass  $U \cap G$  und  $U \cap E$  nicht leer sind. Also gilt sogar

$$\partial G \setminus \{\gamma(m_1), \dots, \gamma(m_n)\} \subseteq \partial^0 G,$$

wobei mit  $\partial^0 G$  der orientierbare Rand von  $G$  gemeint ist. Näheres siehe [K3, 14.9.10].

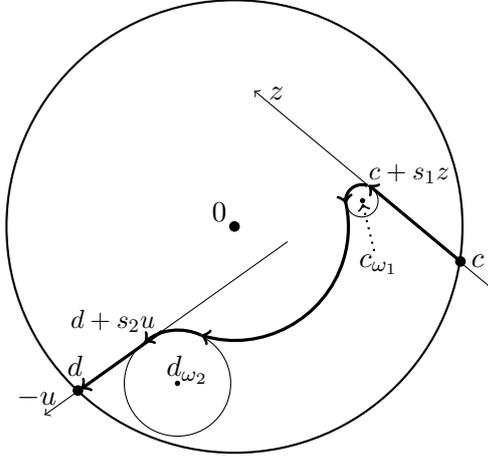
**Definition 3.1.3** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine stückweise stetig differenzierbare Jordankurve. Sei  $M = \{m_1, \dots, m_n\} \subseteq [a, b]$  die Menge aller Punkte, an denen  $\gamma'$  nicht existiert. Außerdem sei  $\gamma'(t) \neq 0$  für alle  $t \in (a, b) \setminus M$ . Dann heißt  $\gamma$  positiv orientiert, falls  $-\frac{1}{\|\gamma'(t)\|_2} i\gamma'(t)$  für alle  $t \in (a, b) \setminus M$  die äußere Normale<sup>1</sup> in Bezug auf das Innere  $G$  von  $\gamma$  ist.

*Bemerkung 3.1.4.* Die Multiplikation einer komplexen Zahl mit  $-i$  entspricht anschaulich einer Rechtsdrehung um  $90^\circ$ . Dass  $\gamma$  positiv orientiert ist, bedeutet daher, dass  $\gamma$  gegen den Uhrzeigersinn um sein Inneres  $G$  läuft. Die Anschauung motiviert, dass  $\gamma$  bereits dann positiv orientiert ist, wenn nur ein Punkt existiert, an dem  $-i\gamma'(t)$  ins Äußere zeigt. Der Beweis dieser Aussage ist mühsam, soll aber der Vollständigkeit halber hier behandelt werden. Er basiert auf der Idee, die Kurve  $\gamma$  lokal um jene Punkte, an denen  $\gamma'$  nicht existiert, zu glätten. Dazu benötigen wir folgendes Lemma.

**Lemma 3.1.5** Seien  $c, d \in \mathbb{T}$ , wobei  $c \neq d$ . Seien  $z, u \in \mathbb{C}$  und  $\eta > 0$ , sodass die Funktionen  $t \mapsto |c + tz|$  und  $t \mapsto |d + tu|$  monoton fallend auf  $(0, \eta)$  sind. Außerdem seien  $a < b$  aus  $\mathbb{R}$  beliebig. Dann existiert ein stetig differenzierbarer und injektiver Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , für den folgendes gilt:

<sup>1</sup>Dass  $-i\gamma'(t)$  ins Äußere zeigt, bedeutet, dass ein  $\eta > 0$  existiert, sodass  $\gamma(t) + \epsilon(-i\gamma'(t))$  für alle  $\epsilon \in (0, \eta)$  im Äußeren  $E$  von  $\gamma$  liegt. Beachte, dass die Abbildung  $v$ , die jedem Punkt  $y \in \partial^0 G$  die eindeutige äußere Normale  $v(y)$  zuweist, stetig auf  $\partial^0 G$  ist. Siehe auch [K3, 14.9].

- $\gamma((a, b)) \subseteq \mathbb{D}$ ,
- $\gamma'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ ,
- $\gamma(a) = c$  und  $\gamma(b) = d$ ,
- $\gamma'(a) = z$  und  $\gamma'(b) = -u$ .



Beweisskizze zu Lemma 3.1.5

*Beweis.* Wir schreiben  $c = \exp(i\phi_c)$ . Ist weiters  $z = |z| \exp(i\phi_z)$ , dann gilt für  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |c + tz|^2 &= |\exp(i\phi_c)|^2 |1 + t|z| \exp(i(\phi_z - \phi_c))|^2 \\ &= |1 + t|z| (\cos(\phi_z - \phi_c) + i \sin(\phi_z - \phi_c))|^2 \\ &= (1 + t|z| \cos(\phi_z - \phi_c))^2 + (t|z| \sin(\phi_z - \phi_c))^2 = 1 + 2t|z| \cos(\phi_z - \phi_c) + t^2|z|^2. \end{aligned}$$

Für  $t > 0$  und  $\cos(\phi_z - \phi_c) > 0$  ist  $|c + tz|^2$  also streng monoton wachsend in  $t$ , während für  $\cos(\phi_z - \phi_c) < 0$  und  $0 < t < -\frac{1}{|z|} \cos(\phi_z - \phi_c)$  dieser Ausdruck fällt. Weil  $\cos$  genau auf  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) + 2\pi\mathbb{Z}$  negativ ist, erhalten wir aus der Voraussetzung, dass wir  $\phi_z - \phi_c \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  annehmen können. Genauso können wir für  $d = \exp(i\phi_d)$  und  $u = |u| \exp(i\phi_u)$  voraussetzen, dass  $\phi_u - \phi_d \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ .

Als nächstes wählen wir  $\kappa > 0$ , sodass  $U_\kappa(c) \cap U_\kappa(d) = \emptyset$ . Weiters sollen alle  $p \in \mathbb{D} \cap U_\kappa(c)$  eine Darstellung  $p = |p| \exp(i\phi_p)$  besitzen<sup>2</sup>, sodass  $\phi_z - \phi_p \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ . Analoges gelte für  $\mathbb{D} \cap U_\kappa(d)$ . Sei jetzt  $s > 0$ , sodass für alle  $\delta \in (0, s)$  gilt  $c + \delta z \in U_\kappa(c)$  sowie  $d + \delta u \in U_\kappa(u)$ . Dabei sei  $s$  so klein, dass die Funktionen  $t \mapsto |c + tz|$  und  $t \mapsto |d + tu|$  auf  $(0, s)$  monoton fallend sind. Außerdem wählen wir  $s_1, s_2 \in (0, s)$  mit  $|c + s_1 z| = |d + s_2 u|$ . Schließlich sei  $\omega > 0$  mit  $U_{2\omega}(c + s_1 z) \subseteq U_\kappa(c)$  und  $U_{2\omega}(d + s_2 u) \subseteq U_\kappa(d)$ . Mit  $c_\omega := c + s_1 z + \omega i \frac{z}{|z|}$  ist dann die Kugel  $U_\omega(c_\omega)$  ganz in  $U_{2\omega}(c + s_1 z) \subseteq U_\kappa(c)$  enthalten und besitzt  $c + s_1 z$  als Randpunkt. Gleiches gilt für  $d_\omega := d + s_2 u - \omega i \frac{u}{|u|}$  und  $U_\omega(d_\omega)$ . Wir betrachten diejenigen Randpunkte dieser beiden Kugeln, die minimalen Betrag haben. Diese sind gegeben durch  $c_\omega - \omega \frac{c_\omega}{|c_\omega|}$  und  $d_\omega - \omega \frac{d_\omega}{|d_\omega|}$ . Falls die Beträge dieser beiden Punkte unterschiedlich sind, müssen wir noch eine kleine Modifikation vornehmen. Ist  $|c_\omega - \omega \frac{c_\omega}{|c_\omega|}| < |d_\omega - \omega \frac{d_\omega}{|d_\omega|}|$ , benötigen wir  $\tilde{\omega} < \omega$  mit

$$|c_{\tilde{\omega}} - \tilde{\omega} \frac{c_{\tilde{\omega}}}{|c_{\tilde{\omega}}|}| = |d_\omega - \omega \frac{d_\omega}{|d_\omega|}|.$$

<sup>2</sup>Die Argumentfunktion ist stetig auf einer geeigneten Teilmenge von  $\mathbb{D}$ , was uns diese Wahl von  $\kappa$  ermöglicht.

Dieses  $\tilde{\omega}$  erhält man aus dem Zwischenwertsatz, weil  $|c_\omega - \omega \frac{c_\omega}{|c_\omega|}|$  stetig von  $\omega$  abhängt und für  $\omega \rightarrow 0$  gegen  $|c + s_1 z|$  konvergiert. Außerdem muss aufgrund der Minimalität von  $|d_\omega - \omega \frac{d_\omega}{|d_\omega|}|$  auch

$$|c_\omega - \omega \frac{c_\omega}{|c_\omega|}| < |d_\omega - \omega \frac{d_\omega}{|d_\omega|}| < |d + s_2 u| = |c + s_1 z|.$$

Genauso verfährt man im Fall  $|c_\omega - \omega \frac{c_\omega}{|c_\omega|}| > |d_\omega - \omega \frac{d_\omega}{|d_\omega|}|$ . Wir erhalten also in jedem Fall gewisse  $\omega_1, \omega_2 > 0$  mit  $U_{2\omega_1}(c + s_1 z) \subseteq U_\kappa(c)$ ,  $U_{2\omega_2}(d + s_2 u) \subseteq U_\kappa(d)$  und

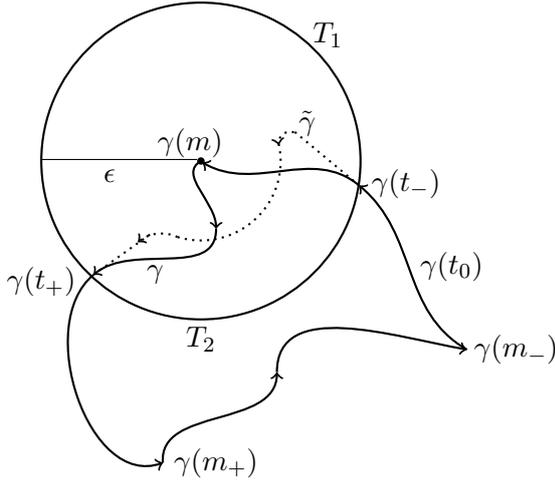
$$|c_{\omega_1} - \omega_1 \frac{c_{\omega_1}}{|c_{\omega_1}|}| = |d_{\omega_2} - \omega_2 \frac{d_{\omega_2}}{|d_{\omega_2}|}|.$$

Wir halten noch fest, dass aufgrund der Wahl von  $\kappa$  gilt, dass  $c_{\omega_1} = |c_{\omega_1}| \exp(i(\phi_c + \nu))$  mit  $\phi_z - (\phi_c + \nu) \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ . Der Punkt  $c_{\omega_1} - \omega_1 \frac{c_{\omega_1}}{|c_{\omega_1}|}$  besitzt denselben Winkel wie  $c_{\omega_1}$  und lässt sich daher als  $q \exp(i(\phi_c + \nu))$  mit  $q > 0$  schreiben. Ein Tangentialvektor an  $U_{\omega_1}(c_{\omega_1})$  im Punkt  $c_{\omega_1} - \omega_1 \frac{c_{\omega_1}}{|c_{\omega_1}|}$  ist durch  $-i \exp(i(\phi_c + \nu)) = \exp(i(\phi_c + \nu - \frac{\pi}{2}))$  gegeben. Gleichzeitig ist  $i(c + s_1 z - c_{\omega_1}) = \omega_1 \frac{z}{|z|} = \omega_1 \exp(i\phi_z)$  eine Tangente im Punkt  $c + s_1 z$ . Vergleichbare Darstellungen erhält man bei  $d_\omega$ , wobei wir einen Winkel  $\tilde{\nu}$  mit  $d_{\omega_2} = |d_{\omega_2}| \exp(i(\phi_d + \tilde{\nu}))$  erhalten. Für  $\tilde{\nu}$  erhalten wir Eigenschaften analog zu denen von  $\nu$ . Aufgrund der Wahl von  $\omega_1$  und  $\omega_2$  gilt  $d_{\omega_2} - \omega_2 \frac{d_{\omega_2}}{|d_{\omega_2}|} = q \exp(i(\phi_d + \tilde{\nu}))$ . Damit können wir den gesuchten Weg  $\gamma$  aus mehreren Teilen zusammensetzen. Wir setzen  $l_1 := s_1 + \frac{\omega_1}{|z|}(\phi_c + \nu - \phi_z - \frac{\pi}{2})$ ,  $l_2 := l_1 - \frac{q}{|z|}(\phi_d + \tilde{\nu} - (\phi_c + \nu))$ ,  $l_3 := l_2 + \frac{\omega_2}{|z|}(\phi_u - (\phi_d + \tilde{\nu}) - \frac{\pi}{2})$ ,  $\tilde{b} := l_3 + \frac{|u|}{|z|} s_2$ . Dabei nehmen wir an, dass  $\phi_d + \tilde{\nu} - (\phi_c + \nu) \in (-2\pi, 0)$ , was wir durch Addieren eines ganzzahligen Vielfaches von  $2\pi$  erreichen. Wir definieren

$$\tilde{\gamma}(t) := \begin{cases} c + tz, & t \in [0, s_1] \\ c_{\omega_1} + \omega_1 \exp(i(\phi_z + \frac{|z|}{\omega_1}(t - s_1) - \frac{\pi}{2})), & t \in [s_1, l_1] \\ q \exp(i(\phi_c + \nu + \frac{|z|}{q}(l_1 - t))), & t \in [l_1, l_2] \\ d_{\omega_2} + \omega_2 \exp(i(\phi_d + \tilde{\nu} + \frac{|z|}{\omega_2}(t - l_2) + \pi)), & t \in [l_2, l_3] \\ d + (s_2 - \frac{|z|}{|u|}(t - l_3))u, & t \in [l_3, \tilde{b}]. \end{cases}$$

Durch elementare Überlegungen findet sich eine streng monoton wachsende und stetig differenzierbare Funktion  $h : [a, b] \rightarrow [0, \tilde{b}]$  mit  $h(a) = 0, h'(a) = 1, h(b) = \tilde{b}$  und  $h'(b) = \frac{|u|}{|z|}$ . Dann erfüllt der Weg  $\gamma(t) := \tilde{\gamma}(h(t))$  für  $t \in [a, b]$  offensichtlich die geforderten Randbedingungen. Das Bild von  $\gamma$  stimmt mit dem von  $\tilde{\gamma}$  überein und ist eine Zusammensetzung von geraden Strecken mit Drehungen. Dabei ist der Winkel der Drehungen um die Punkte  $c_\omega$  und  $d_\omega$  jeweils zwischen 0 und  $\pi$ . Daraus erhält man, dass  $|\tilde{\gamma}(t)|$  auf  $[s_1, l_1]$  streng monoton fällt und auf  $[l_2, l_3]$  streng monoton wächst. Auch auf  $[0, s_1]$  fällt  $|\tilde{\gamma}(t)|$  streng monoton und wächst auf  $[l_3, \tilde{b}]$  streng monoton. Auf  $[l_1, l_2]$  schließlich ist  $\gamma(t)$  injektiv und der Betrag ist konstant. Das begründet die Injektivität von  $\tilde{\gamma}$ . Auch  $\gamma$  ist somit als Zusammensetzung injektiver Funktionen injektiv. Dass  $\tilde{\gamma}$  und damit auch  $\gamma$  stetig und stetig differenzierbar sind, überprüft man durch einfache Rechnung.  $\square$

**Satz 3.1.6** *Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine stückweise stetig differenzierbare Jordankurve und  $M \subseteq [a, b]$  die Menge der Punkte, an denen  $\gamma'$  nicht existiert. Es gelte  $\gamma'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b] \setminus M$ . Zusätzlich seien bei allen  $m \in M$  die links- und rechtsseitigen Grenzwerte  $\lim_{t \rightarrow m^-} \gamma'(t)$  und  $\lim_{t \rightarrow m^+} \gamma'(t)$  von 0 verschieden. Sei  $t_0 \in (a, b) \setminus M$ , sodass  $-i\gamma'(t_0)$  ins äußere von  $\gamma$  zeigt. Dann zeigt  $-i\gamma'(t)$  sogar für alle  $t \in (a, b) \setminus M$  ins äußere, d.h.  $\gamma$  ist positiv orientiert.*



Beweisskizze zu Satz 3.1.6

*Beweis.* Sei  $t_1 \in [a, b]$  derart, dass  $\gamma$  zwischen  $t_0$  und  $t_1$  stetig differenzierbar ist. Wir bezeichnen mit  $v(y)$  die (stetige) äußere Normale auf das Innere von  $\gamma$ . Das euklidische Skalarprodukt auf  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  notieren wir mit  $\cdot$  und setzen

$$\psi : \begin{cases} [\min\{t_0, t_1\}, \max\{t_0, t_1\}] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto v(\gamma(t)) \cdot \left(-i \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right). \end{cases}$$

Wir haben bereits gesehen, dass  $-i \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$  ein Normalvektor auf das Innere von  $\gamma$  im Punkt  $\gamma(t)$  ist und deshalb mit  $v(\gamma(t))$  oder mit  $-v(\gamma(t))$  übereinstimmt. Somit nimmt  $\psi$  nur die Werte 1 und  $-1$  an, wobei nach Voraussetzung gilt  $\psi(t_0) = v(\gamma(t_0)) \cdot v(\gamma(t_0)) = 1$ . Weil  $\psi$  stetig ist, gilt daher  $\psi \equiv 1$  auf  $[\min\{t_0, t_1\}, \max\{t_0, t_1\}]$ . Das bedeutet, dass  $-i\gamma'$  auch an  $t_1$  ins Äußere zeigt. Zu beweisen bleibt damit nur noch, dass  $-i\gamma'(t)$  auch über die Punkte von  $M$  hinweg immer ins Äußere zeigt.

Dazu wähle, falls möglich,  $m := \min\{t \in M \setminus \{a, b\} : t > t_0\}$  oder  $m := \max\{t \in M \setminus \{a, b\} : t < t_0\}$ . Zusätzlich wählen wir  $m_-, m_+ \in [a, b]$ , sodass  $t_0 \in (m_-, m_+)$  und  $M \cap (m_-, m_+) = \{m\}$ . Wir wollen zeigen, dass  $-i\gamma'(t)$  für alle  $t \in (m_-, m_+) \setminus \{m\}$  ins Äußere von  $\gamma$  zeigt. Indem wir anschließend dieses Argument endlich oft wiederholen, können wir darauf schließen, dass  $-i\gamma'(t)$  tatsächlich für alle  $t \in (a, b) \setminus M$  ins Äußere zeigt.

Dass  $\gamma$  bei  $m$  nicht differenzierbar ist, bedeutet aufgrund der stückweise stetigen Differenzierbarkeit, dass linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert von  $\gamma'$  an  $m$  existieren und mit der links- bzw. rechtsseitigen Ableitung bei  $m$  übereinstimmen, die beiden aber unterschiedlich sind. Wir bezeichnen die Grenzwerte mit  $\gamma'_-(m)$  und  $\gamma'_+(m)$ . Nach Voraussetzung sind beide nicht Null. Wir halten fest, dass wegen der stetigen Differenzierbarkeit gilt, dass

$$\gamma(t) - \gamma(m) = \gamma'_-(m)(t - m) + |t - m|\xi(t - m) \quad (3.1)$$

für alle  $m_- < t < m$  mit einer Funktion  $\xi$ , die  $\lim_{s \rightarrow 0} \xi(s) = 0$  erfüllt<sup>3</sup>. Betrachte die auf  $[a, b]$  definierte Funktion  $g : t \mapsto |\gamma(t) - \gamma(m)|^2 = (\operatorname{Re}(\gamma(t) - \gamma(m)))^2 + (\operatorname{Im}(\gamma(t) - \gamma(m)))^2$ . Wir behaupten, dass es ein  $w < m$  gibt mit  $g'(t) < 0$  für alle  $t \in (w, m)$ . Dazu schreiben wir die

<sup>3</sup>Vgl. [K2, 10.1.11].

Ableitung von  $g$  mithilfe von (3.1) als

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2 \operatorname{Re}(\gamma(t) - \gamma(m)) \operatorname{Re} \gamma'(t) + 2 \operatorname{Im}(\gamma(t) - \gamma(m)) \operatorname{Im} \gamma'(t) \\ &= 2(t - m) (\operatorname{Re} \gamma'_-(m) \operatorname{Re} \gamma'(t) + \operatorname{Im} \gamma'_-(m) \operatorname{Im} \gamma'(t)) \\ &\quad + 2|t - m| (\operatorname{Re} \xi(t - m) \operatorname{Re} \gamma'(t) + \operatorname{Im} \xi(t - m) \operatorname{Im} \gamma'(t)) \\ &=: 2(t - m)l(t) + 2|t - m|r(t) = 2(t - m)(l(t) - r(t)), \end{aligned}$$

wobei  $\lim_{t \rightarrow m}^- l(t) = |\gamma'_-(m)|^2 > 0$ , während  $\lim_{t \rightarrow m}^- r(t) = 0$ . Also gibt es  $w \in (m_-, m)$ , sodass  $l(t) - r(t) > 0$  für alle  $w < t < m$ . Also ist für  $w < t < m$  immer  $g'(t) < 0$ . Ähnliche Überlegungen liefern auch ein  $\tilde{w} \in (m, m_+)$ , sodass  $g'(t) > 0$  auf  $(m, \tilde{w})$ .

Dann ist  $\gamma([a, w] \cup [\tilde{w}, b])$  kompakt und enthält  $\gamma(m)$  nicht. Also gibt es ein  $\epsilon > 0$ , sodass  $\gamma(t_0) \notin K_\epsilon(\gamma(m))$  und  $U_\epsilon(\gamma(m)) \cap \gamma([a, w] \cup [\tilde{w}, b]) = \emptyset$ . Insbesondere ist  $g(w) > \epsilon^2$  und  $\lim_{t \rightarrow m}^- g(t) = 0$ . Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass ein Punkt  $t_- \in (w, m)$  existiert mit  $g(t_-) = \epsilon^2$ , oder gleichbedeutend  $\gamma(t_-) \in \partial U_\epsilon(\gamma(m))$ . Zudem ist  $t_-$  das einzige Element von  $[a, m]$ , für das  $\gamma(t_-)$  in  $\partial U_\epsilon(\gamma(m))$  liegt, denn  $g$  ist auf  $(w, m)$  streng monoton fallend. Genauso existiert ein eindeutiges  $t_+ \in [m, b]$ , sodass  $\gamma(t_+) \in \partial U_\epsilon(\gamma(m))$ .

Wir wenden Lemma 3.1.5 auf  $c = \epsilon^{-1}(\gamma(t_-) - \gamma(m))$ ,  $d = \epsilon^{-1}(\gamma(t_+) - \gamma(m))$  sowie  $z = \epsilon^{-1}\gamma'(t_-)$ ,  $u = -\epsilon^{-1}\gamma'(t_+)$  an. Wir erhalten einen stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Weg  $\tilde{\sigma} : [t_-, t_+] \rightarrow \mathbb{D}$ , wobei sogar  $\tilde{\sigma}((t_-, t_+)) \subseteq \mathbb{D}$ . Somit bildet  $\sigma := \epsilon \tilde{\sigma} + \gamma(m)$  nach  $K_\epsilon(\gamma(m))$  ab, und es gilt  $\sigma((t_-, t_+)) \subseteq U_\epsilon(\gamma(m))$ . Weiters gilt

$$\sigma(t_-) = \gamma(t_-), \quad \sigma'(t_-) = \gamma'(t_-), \quad \sigma(t_+) = \gamma(t_+), \quad \sigma'(t_+) = \gamma'(t_+).$$

Wir definieren den Weg  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\tilde{\gamma}(t) := \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a, t_-] \\ \sigma(t), & t \in [t_-, t_+] \\ \gamma(t), & t \in [t_+, b]. \end{cases}$$

Offenbar ist  $\tilde{\gamma}$  ebenfalls eine Jordankurve, weil  $\sigma$  injektiv ist, nur durch  $K_\epsilon(\gamma(m))$  verläuft und sich daher nicht mit  $\gamma([a, t_-] \cup (t_+, b])$  schneidet. Außerdem ist  $\tilde{\gamma}$  im ganzen Intervall  $[m_-, m_+]$  stetig differenzierbar.

Sei  $E(\gamma)$  das Äußere von  $\gamma$  und  $G(\gamma)$  das Innere von  $\gamma$ . Genauso seien  $E(\tilde{\gamma})$  und  $G(\tilde{\gamma})$  Äußeres bzw. Inneres von  $\tilde{\gamma}$ . Wir betrachten als nächstes den Rand von  $U_\epsilon(\gamma(m))$ . Sei  $\phi_{t_-} \in \mathbb{R}$  mit  $\gamma(t_-) = \gamma(m) + \epsilon \exp(i\phi_{t_-})$ . Wir weisen jedem weiteren Punkt  $x$  von  $\partial U_\epsilon(\gamma(m))$  den eindeutigen Winkel  $\phi_x \in [\phi_{t_-}, \phi_{t_-} + 2\pi)$  zu, sodass  $x = \gamma(m) + \epsilon \exp(i\phi_x)$ . Auf diese Art wird  $\partial U_\epsilon(\gamma(m)) \setminus \{\gamma(t_-), \gamma(t_+)\}$  in die zwei Mengen  $T_1 := \{x \in \partial U_\epsilon(\gamma(m)) : \phi_{t_-} < \phi_x < \phi_{t_+}\}$  und  $T_2 := \{x \in \partial U_\epsilon(\gamma(m)) : \phi_{t_+} < \phi_x < \phi_{t_-} + 2\pi\}$  geteilt. Diese beiden Mengen haben leeren Schnitt mit dem Bild von  $\gamma$  und sind daher jeweils ganz in  $E(\gamma)$  oder ganz in  $G(\gamma)$  enthalten. Die Kugel  $U_\epsilon(\gamma(m))$  enthält wegen  $\gamma(m) \in \overline{E(\gamma)} \cap \overline{G(\gamma)}$  sowohl ein  $x_E \in E(\gamma)$  als auch ein  $x_G \in G(\gamma)$ . Weil  $\gamma(a)$  auch in  $\overline{E(\gamma)} \cap \overline{G(\gamma)}$  liegt, aber nicht in  $K_\epsilon(\gamma(m))$ , finden wir auch Punkte  $y_E \in E(\gamma)$  und  $y_G \in G(\gamma)$ , die in  $[K_\epsilon(\gamma(m))]^c$  liegen. Das bedeutet, dass ein stetiger Weg existiert, der  $x_E$  und  $y_E$  in  $E(\gamma)$  verbindet<sup>4</sup>. Genauso lassen sich  $x_G$  und  $y_G$  in  $G(\gamma)$  verbinden. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass es Punkte auf diesen Verbindungsstrecken gibt, die in  $\partial U_\epsilon(\gamma(m))$  liegen. Also gilt  $T_1 \subseteq E(\gamma), T_2 \subseteq G(\gamma)$  oder  $T_1 \subseteq G(\gamma), T_2 \subseteq E(\gamma)$ . Die gleiche Aussage zeigt man für  $E(\tilde{\gamma})$  und  $G(\tilde{\gamma})$ . Dabei wissen wir noch nicht, ob etwa der Fall  $T_1 \subseteq E(\gamma) \cap G(\tilde{\gamma})$  eintreten kann. Im Folgenden zeigen wir, dass das nicht passieren kann.

<sup>4</sup>Gebiete in  $\mathbb{C}$  sind immer wegzusammenhängend; siehe [K2, 11.3.3]. Außerdem lässt sich leicht überprüfen, dass  $E(\gamma)$  und  $G(\gamma)$  offen, also tatsächlich Gebiete sind.

Angenommen,  $T_1 \subseteq E(\gamma)$ . Weil die Bilder von  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  kompakt und damit beschränkt sind, existiert ein Punkt  $y \in E(\gamma) \cap E(\tilde{\gamma}) \cap [K_\epsilon(\gamma(m))]^c$ . Also gibt es einen stetigen Weg  $\zeta : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow E(\gamma)$  mit  $\zeta(\tilde{a}) \in T_1$ ,  $\zeta(\tilde{b}) = y$ . Indem wir  $r := \max\{t \in [\tilde{a}, \tilde{b}] : \zeta(t) \in \partial U_\epsilon(\gamma(m))\}$  setzen und  $\zeta$  auf  $[r, \tilde{b}]$  einschränken, erreichen wir, dass das Bild von  $\zeta$  keine Punkte in  $U_\epsilon(\gamma(m))$  enthält. Das Bild von  $\tilde{\gamma}$  setzt sich aus Elementen im Bild von  $\gamma$  und Punkten in  $U_\epsilon(\gamma(m))$  zusammen. Weil  $\zeta|_{[r, \tilde{b}]}$  durch  $E(\gamma) \cap [U_\epsilon(\gamma(m))]^c$  verläuft, besitzt es also keine Schnittpunkte mit  $\tilde{\gamma}$ . Da der Endpunkt von  $\zeta$  ein Element von  $E(\tilde{\gamma})$  ist, muss auch  $\zeta(r)$  in  $E(\tilde{\gamma})$  liegen. Also gilt sogar  $T_1 \subseteq E(\tilde{\gamma})$ , und insbesondere  $T_1 \subseteq E(\gamma) \cap E(\tilde{\gamma})$ . Außerdem folgt  $T_2 \subseteq G(\gamma) \cap G(\tilde{\gamma})$ . Der Fall  $T_2 \subseteq E(\gamma)$  sei analog behandelt. Für den weiteren Beweisverlauf nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass  $T_1 \subseteq E(\gamma) \cap E(\tilde{\gamma})$ .

Sei  $\eta > 0$ , sodass für  $0 < \delta < \eta$  immer  $\gamma(t_0) + \delta i\gamma'(t_0) \in G(\gamma) \cap [K_\epsilon(\gamma(m))]^c$ . Wir wählen für beliebiges, aber festes  $\delta \in (0, \eta)$  einen stetigen Weg  $V_1$ , der  $\gamma(t_0) + \delta i\gamma'(t_0)$  mit einem Punkt von  $T_2$  verbindet und nicht durch  $U_\epsilon(\gamma(m))$  verläuft<sup>5</sup>. Es folgt wieder, dass  $V_1$  sich nicht mit  $\tilde{\gamma}$  schneidet. Wegen  $T_2 \subseteq G(\tilde{\gamma})$  erhalten wir, dass  $\gamma(t_0) + \delta i\gamma'(t_0) \in G(\tilde{\gamma})$ . Also zeigt  $i\tilde{\gamma}'(t_0) = i\gamma'(t_0)$  ins Innere von  $\tilde{\gamma}$ . Weil  $\tilde{\gamma}$  auf ganz  $(m_-, m_+)$  stetig differenzierbar ist, folgt aus dem ersten Beweisteil, dass  $i\tilde{\gamma}'(\tilde{t})$  sogar für alle  $t \in (m_-, m_+)$  ins Innere von  $\tilde{\gamma}$  zeigt. Als nächstes wählen wir ein  $h_0 \in (m_-, t_-] \cup [t_+, m_+)$ . Sei  $\tilde{\eta} > 0$ , sodass für alle  $0 < \delta < \tilde{\eta}$  die Punkte  $\tilde{\gamma}(h_0) + \delta i\tilde{\gamma}'(h_0)$  in  $G(\tilde{\gamma})$  liegen. Wieder wählen wir einen stetigen Weg  $V_2$ , der  $\tilde{\gamma}(h_0) + \delta i\tilde{\gamma}'(h_0)$  mit  $T_2 \subseteq G(\tilde{\gamma})$  verbindet, ohne durch  $U_\epsilon(\gamma(m))$  zu verlaufen. Da das Bild von  $\gamma$  wiederum nur aus Elementen im Bild von  $\tilde{\gamma}$  und in  $U_\epsilon(\gamma(m))$  besteht, schneiden sich  $V_2$  und  $\gamma$  nicht. Daraus folgt wegen  $T_2 \subseteq G(\gamma)$ , dass auch  $\gamma(h_0) + \delta i\gamma'(h_0) = \tilde{\gamma}(h_0) + \delta i\tilde{\gamma}'(h_0)$  in  $G(\gamma)$  liegt. Das bedeutet, dass  $i\gamma'(t)$  für alle  $t \in (m_-, t_-] \cup [t_+, m_+)$  ins Innere zeigt und damit sogar für alle  $t \in (m_-, m_+) \setminus \{m\}$ . Äquivalent dazu ist, dass  $-i\gamma'(t)$  für alle  $t \in (m_-, m_+) \setminus \{m\}$  ins Äußere von  $\gamma$  zeigt.  $\square$

**Satz 3.1.7 (Gaußscher Integralsatz für Wegintegrale)** *Sei  $\gamma$  eine stückweise stetig differenzierbare und positiv orientierte Jordankurve, sodass  $\gamma'(t) \neq 0$  überall, wo die Ableitung existiert. Sei  $G$  das Innere von  $\gamma$ . Seien  $f$  und  $g$  analytische Funktionen auf einer offenen Obermenge von  $\overline{G} = G \cup \gamma([a, b])$ . Dann gilt*

$$\int_G f(x + iy) \overline{g'(x + iy)} d\lambda_2(x, y) = \frac{1}{2i} \int_\gamma f(z) \overline{g'(z)} dz.$$

*Beweis.* Wir leiten den Satz aus dem reellen Gaußschen Integralsatz her, wobei wir uns notationell an [K3] halten. Zunächst fassen wir  $G$  für die Dauer dieses Beweises als Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  auf. Der orientierbare Rand von  $G$  sei mit  $\partial^0 G$  bezeichnet, und  $\mu$  sei das Oberflächenmaß auf  $\partial^0 G$ . Die Bedingungen an den Rand von  $G$  sind erfüllt, da  $\partial G \setminus \partial^0 G$  endlich ist. Außerdem ist  $G$  beschränkt, womit  $\mu(\partial^0 G) < +\infty$ . Im ersten Schritt wählen wir Funktionen  $p, q \in C(\overline{G}, \mathbb{R})$  mit  $p|_G, q|_G \in C^1(G, \mathbb{R})$ . Dann können wir den reellen Gaußschen Integralsatz (siehe [K3, 16.8.6]) auf das Vektorfeld  $\phi := (p, q)$  anwenden und erhalten<sup>6</sup>

$$\int_G \left( \frac{\partial}{\partial x} p(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} q(x, y) \right) d\lambda_2(x, y) = \int_G \operatorname{div} \phi d\lambda_2 = \int_{\partial^0 G} \phi(y) \cdot v(y) d\mu(y),$$

wobei  $v$  die äußere Normale auf  $G$  ist.

Sei  $M = \{m_1, \dots, m_n\}$  wie in Definition 3.1.3 die Menge der Punkte, an denen  $\gamma'$  nicht existiert. Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir  $m_1 = a$  und  $m_n = b$ , indem wir die Elemente von

<sup>5</sup>Das lässt sich mit demselben Argument begründen, das wir vorher verwendet haben, um  $\zeta$  so hinzubiegen, dass es auf keine Punkte in  $U_\epsilon(\gamma(m))$  abbildet.

<sup>6</sup>Wir schreiben  $\cdot$  für das euklidische Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^2$ .

$M$  gegebenenfalls umindizieren. Dann gilt  $\partial^0 G \supseteq \dot{\bigcup}_{i=1}^{n-1} \gamma((m_i, m_{i+1})) \supseteq \partial^0 G \setminus \gamma(M)$  aufgrund der Voraussetzungen, die wir an  $\gamma$  stellen. Um das Oberflächenintegral auf ein Integral bezüglich des Lebesgue-Maßes zurückzuführen, denken wir uns  $\gamma$  wieder als Einbettung mit Werten in  $\mathbb{R}^2$  und sehen  $\sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} = \sqrt{(\operatorname{Re} \gamma'(t))^2 + (\operatorname{Im} \gamma'(t))^2} = \|\gamma'(t)\|_2$ . Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial^0 G} \phi(y) \cdot v(y) d\mu(y) &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\gamma(m_i, m_{i+1})} \phi(y) \cdot v(y) d\mu(y) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{(m_i, m_{i+1})} \phi(\gamma(t)) \cdot v(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|_2 d\lambda(t). \end{aligned}$$

Weil  $-i\gamma'(t) \cong (\operatorname{Im} \gamma'(t), -\operatorname{Re} \gamma'(t))^T$  ins Äußere zeigt, stimmt dieser Ausdruck überein mit

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_{(m_i, m_{i+1})} \phi(\gamma(t)) \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Im} \gamma'(t) \\ -\operatorname{Re} \gamma'(t) \end{pmatrix} d\lambda(t).$$

Indem wir  $\tilde{\phi} := (-q, p)$  setzen, können wir mithilfe von [K2, 11.2.5] weiter umformen zu

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_{(m_i, m_{i+1})} \tilde{\phi}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) d\lambda(t) = \int_{\gamma} \tilde{\phi}(x) dx.$$

Insgesamt haben wir also

$$\int_G \left( \frac{\partial}{\partial x} p(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} q(x, y) \right) d\lambda_2(x, y) = \int_{\gamma} (-q(x), p(x)) dx. \quad (3.2)$$

Im nächsten Schritt definieren wir den Differentialoperator

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Jede analytische Funktion  $h$  erfüllt dann aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} h = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} h + i \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} h + i \left( \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} h + i \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} h \right) \right) = 0 \quad (3.3)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{h} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} h - i \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} h + i \left( \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} h - i \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} h \right) \right) = \bar{h}'. \quad (3.4)$$

Seien  $p, q$  wieder aus  $C(\bar{G}, \mathbb{R})$  mit  $p|_G, q|_G \in C^1(G, \mathbb{R})$ . Mit  $r(x, y) := p(x, y) + iq(x, y)$  folgt wegen (3.2)

$$\begin{aligned} \int_G \frac{\partial}{\partial \bar{z}} r d\lambda_2 &= \int_G \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (p + iq) d\lambda_2 = \frac{1}{2i} \int_G \left( i \frac{\partial}{\partial x} (p + iq) - \frac{\partial}{\partial y} (p + iq) \right) d\lambda_2 \\ &= \frac{1}{2i} \left( \int_G \left( \frac{\partial}{\partial x} (-q) + \frac{\partial}{\partial y} (-p) \right) d\lambda_2 + i \int_G \left( \frac{\partial}{\partial x} p + \frac{\partial}{\partial y} (-q) \right) d\lambda_2 \right) \\ &= \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \left( (p(x), -q(x)) + i(q(x), p(x)) \right) dx = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} r(z) dz. \end{aligned}$$

Wir begründen die Gleichung in der letzten Zeile. Dort steht rechts ein komplexes Wegintegral, während links ein Wegintegral über das Vektorfeld

$$\psi : \begin{cases} \overline{G} & \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \\ z & \mapsto \left( (\xi, \eta) \mapsto p(z)\xi - q(z)\eta + i(q(z)\xi + p(z)\eta) \right) = ((\xi, \eta) \mapsto (\xi + i\eta)r(z)). \end{cases}$$

steht. Obige Gleichung folgt dann über die Definition des Wegintegrals; vgl. [K2, 11.7.1]. Mit dem bisher Gezeigten erhalten wir den Satz, indem wir  $r(z) = f(z)\overline{g(z)}$  setzen, weil dann wegen (3.3) und (3.4) gilt

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} r(z) = f(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \overline{g(z)} + \overline{g(z)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = f(z) \overline{g'(z)}.$$

□

### 3.2 Die Beweisidee

Als nächstes skizzieren wir die Situation, die dem Beweis des verallgemeinerten Arealsatzes zugrundeliegt. Zur Veranschaulichung dient dabei die Skizze am Ende des Abschnittes.

Zunächst geben wir den Ansatz aus dem Buch [R] von Rosenblum und Rovnyak wieder. Sei  $B \in \mathcal{B}$ . Für den Fall  $B(z) = \lambda z$  für alle  $z \in \mathbb{D}$  mit  $\lambda \in \mathbb{T}$  ist der Beweis des Arealsatzes leicht. Aufgrund des Lemmas von Schwarz, 1.2.2, gilt andernfalls  $|B(z)| < |z|$  für alle  $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ . Sei  $0 < \rho < 1$  beliebig. Weil  $B$  stetig ist, ist  $B(\partial U_\rho(0))$  kompakt und damit  $\max_{z \in B(\partial U_\rho(0))} |z| < \rho$ . Sei  $w \in B(\partial U_\rho(0))$  mit maximalem Betrag und  $s \in [0, 2\pi)$  der Winkel von  $w$ . Die radiale Verbindungsstrecke von  $w$  nach  $\partial U_\rho(0)$  nennen wir  $V$ . Außerdem sei  $C_\rho$  die Parametrisierung von  $\partial U_\rho(0)$  beginnend beim Winkel  $s$ , d.h.:

$$V : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto w + \exp(is)(\rho - |w|)t, \end{cases} \quad C_\rho : \begin{cases} [s, s + 2\pi] & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \rho \exp(it). \end{cases}$$

Dann ist  $B \circ C_\rho$  eine Jordan-Kurve, deren Bild genau  $B(\partial U_\rho(0))$  ist und die  $w$  enthält. Unter der Annahme, dass  $B(C_\rho(s)) = w$ , bildet dann

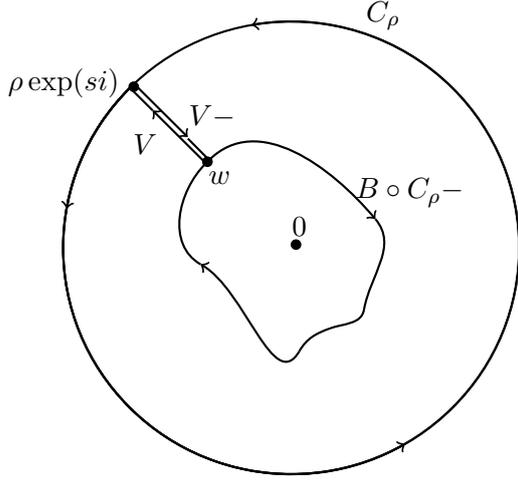
$$\sigma := (B \circ C_\rho -) \oplus V \oplus C_\rho \oplus (V -)$$

einen stetigen und geschlossenen Weg. Anschaulich ist  $\sigma$  fast eine Jordan-Kurve, tatsächlich aber wird  $V$  zweimal durchlaufen. Das ist der Grund dafür, dass der Gaußsche Integralsatz hier nicht unmittelbar anwendbar ist.

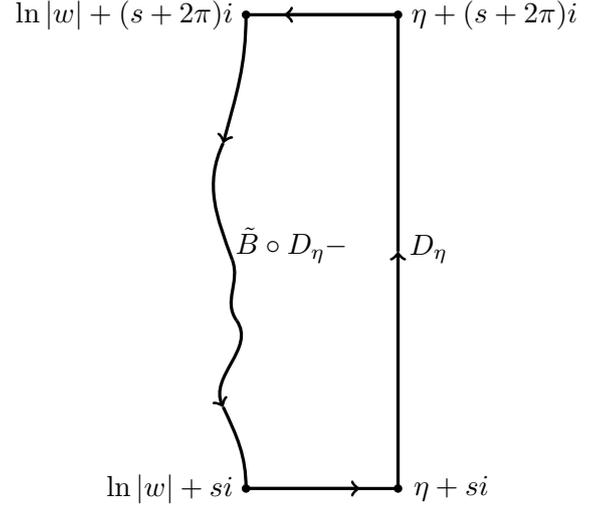
Die Lösung dieses Problems besteht darin, wie im Abschnitt 2.3 eine analytische Funktion  $\tilde{B} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $B \circ \exp = \exp \circ \tilde{B}$  zu betrachten. Das Analogon von  $\sigma$  in  $\mathbb{L}$  bildet dann die Jordankurve (!)

$$\tau := (\tilde{B}(D_\eta) -) \oplus \overrightarrow{[\ln |w| + si, \eta + si]} \oplus D_\eta \oplus \overrightarrow{[\eta + (s + 2\pi)i, \ln |w| + (s + 2\pi)i]}.$$

Dabei ist  $\eta := \ln \rho < 0$  und  $D_\eta$  die Verbindungsstrecke von  $\eta + si$  nach  $\eta + (s + 2\pi)i$ . Die folgende Skizze macht den Zusammenhang von  $\sigma$  und  $\tau$  deutlich:



Die Kurve  $\sigma$  in  $\mathbb{D}$



Die Kurve  $\tau$  in  $\mathbb{L}$

Tatsächlich ist  $\sigma = \exp \circ \tau$ . Die Skizze motiviert, dass der Gaußsche Integralsatz sich auf  $\tau$  anwenden lässt. Das zu beweisen, ist der Inhalt des folgenden Abschnittes.

### 3.3 Normierte Riemann-Karten

Wir verwenden weiterhin die Notation des letzten Abschnittes.

**Lemma 3.3.1** *Sei  $B \in \mathcal{B}$ ,  $0 < \rho < 1$ ,  $s \in \mathbb{R}$  und  $C_\rho : [s, s + 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  die Kurve  $t \mapsto \rho \exp(ti)$ . Dann ist  $B \circ C_\rho$  eine Jordankurve, und  $B(U_\rho(0))$  ist ihr Inneres.*

*Beweis.*  $B \circ C_\rho|_{[s, s+2\pi]}$  ist als Komposition injektiver und stetiger Abbildungen injektiv und stetig. Außerdem ist  $B \circ C_\rho$  geschlossen wegen  $C_\rho(s) = C_\rho(s+2\pi)$ . Somit ist  $B \circ C_\rho$  eine Jordankurve und teilt die Ebene daher in eine innere und eine äußere Zusammenhangskomponente.

Für die zweite Aussage leiten wir zunächst die Inklusion  $\partial[B(U_\rho(0))] \subseteq B(\partial U_\rho(0))$  her. Dazu sei  $k \in \partial[B(U_\rho(0))]$ . Die Menge  $B(K_\rho(0))$  ist kompakt und damit abgeschlossen. Wäre  $k \notin B(K_\rho(0))$ , dann gäbe es wegen der Offenheit von  $(B(K_\rho(0)))^c$  ein  $\epsilon > 0$  mit  $U_\epsilon(k) \subseteq (B(K_\rho(0)))^c \subseteq (B(U_\rho(0)))^c$ . Das wäre ein Widerspruch zu  $k \in \overline{B(U_\rho(0))}$ . Andererseits ist  $B(U_\rho(0))$  nach Lemma 1.2.3 offen und hat daher leeren Schnitt mit seinem Rand. Das bedeutet

$$k \in B(K_\rho(0)) \setminus B(U_\rho(0)) = B(K_\rho(0) \setminus U_\rho(0)) = B(\partial U_\rho(0)).$$

Als nächstes zeigen wir, dass  $a \in B(U_\rho(0))$  und  $b \notin B(U_\rho(0))$  niemals in der selben Zusammenhangskomponente  $Z$  von  $\mathbb{C} \setminus B(\partial U_\rho(0))$  liegen können. Wenn wir nämlich das Gegenteil annehmen, dann gäbe es einen stetigen Weg  $\zeta : [0, 1] \rightarrow Z$  mit  $\zeta(0) = a$  und  $\zeta(1) = b$ . Wegen  $a \in B(U_\rho(0))$  und  $b \notin B(U_\rho(0))$  gibt es ein  $t \in [0, 1]$  mit  $\zeta(t) \in \partial[B(U_\rho(0))] \subseteq B(\partial U_\rho(0))$ . Das steht im Widerspruch zur Disjunktheit von  $Z$  und  $B(\partial U_\rho(0)) = B(C_\rho([s, s+2\pi]))$ . Schließlich ist  $B(U_\rho(0))$  zusammenhängend und besitzt keinen gemeinsamen Punkt mit dem Bild von  $B \circ C_\rho$ . Also folgt, dass  $B(U_\rho(0))$  entweder ganz im Inneren oder ganz im Äußeren von  $B \circ C_\rho$  liegt. Aus dem gerade Gezeigten folgt zudem, dass  $B(U_\rho(0))$  bereits das ganze Innere oder das ganze Äußere von  $B \circ C_\rho$  ist. Aus der Beschränktheit von  $B(U_\rho(0))$  folgt die Aussage.  $\square$

**Lemma 3.3.2** *Sei  $B \in \mathcal{B}$  und  $\tilde{B} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch mit  $\exp \circ \tilde{B} = B \circ \exp$ . Dann gilt  $\tilde{B}'(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{L}$ .*

*Beweis.* Wegen Lemma 1.2.3 gilt  $B'(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{D}$  und damit

$$\exp(\tilde{B}(z))\tilde{B}'(z) = (\exp \circ \tilde{B})'(z) = (B \circ \exp)'(z) = B'(\exp(z))\exp(z) \neq 0$$

für alle  $z \in \mathbb{L}$ . □

**Lemma 3.3.3** *Sei  $B \in \mathcal{B}$  und  $\tilde{B} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch mit  $B \circ \exp = \exp \circ \tilde{B}$ . Sei  $\mathbb{L}_\alpha = \{z \in \mathbb{L} : \operatorname{Im} z \in [\alpha, \alpha + 2\pi)\}$  mit einem  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $\tilde{B}|_{\mathbb{L}_\alpha}$  injektiv.*

*Beweis.* Unter  $\exp$  wird  $\mathbb{L}_\alpha$  bijektiv nach  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$  abgebildet. Nach Voraussetzung ist  $B$  injektiv, womit auch  $\exp \circ \tilde{B}|_{\mathbb{L}_\alpha} = B \circ \exp|_{\mathbb{L}_\alpha}$  injektiv ist. □

**Lemma 3.3.4** *Sei  $B \in \mathcal{B}$  und  $0 < \rho < 1$ . Sei  $\tilde{B} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch mit  $B \circ \exp = \exp \circ \tilde{B}$ . Dann gibt es  $\theta \in [0, 2\pi)$ , sodass  $\operatorname{Re} \tilde{B}(\ln \rho + \theta i) \geq \operatorname{Re} \tilde{B}(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} z \leq \ln \rho$ .*

*Beweis.* Weil die Menge  $B(K_\rho(0))$  kompakt ist, enthält sie ein Element  $w$  mit maximalem Betrag. Angenommen,  $w$  läge in  $B(U_\rho(0))$ . Weil diese Menge nach Lemma 1.2.3 offen ist, gäbe es ein  $\epsilon > 0$  mit  $w \in U_\epsilon(w) \subseteq B(U_\rho(0))$ . Die Kugel  $U_\epsilon(w)$  enthält jedoch ein Element, dessen Betrag größer als der von  $w$  ist. Die Annahme  $w \in B(U_\rho(0))$  war also falsch, womit  $w$  in  $B(\partial U_\rho(0))$  liegt. Für  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$\exp(\operatorname{Re} \tilde{B}(\ln \rho + it)) = |\exp(\tilde{B}(\ln \rho + it))| = |B(\exp(\ln \rho + it))| = |B(\rho \exp(it))|.$$

Sei  $\theta \in [0, 2\pi)$  mit  $B(\rho \exp(\theta i)) = w$ . Aufgrund der Wahl von  $w$  gilt dann für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $0 \leq \tilde{\rho} \leq \rho$ , dass

$$\operatorname{Re} \tilde{B}(\ln \rho + \theta i) = \ln |B(\rho \exp(\theta i))| = \ln |w| \geq \ln |B(\tilde{\rho} \exp(ti))| = \operatorname{Re} \tilde{B}(\ln \tilde{\rho} + ti).$$

Das beweist die Aussage, weil jedes  $z \in \mathbb{L}$  mit  $\operatorname{Re} z \leq \ln \rho$  in der Form  $\ln \tilde{\rho} + ti$  mit  $0 \leq \tilde{\rho} \leq \rho$  und  $t \in \mathbb{R}$  darstellbar ist. □

**Proposition 3.3.5** *Sei  $B \in \mathcal{B}$  und  $0 < \rho < 1$ . Sei  $\tilde{B} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch mit  $B \circ \exp = \exp \circ \tilde{B}$ . Dann gilt*

$$\tilde{B}(\ln \rho + (s + 2\pi)i) = \tilde{B}(\ln \rho + si) + 2\pi i$$

für alle  $s \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Wir halten  $s \in \mathbb{R}$  fest. Sei  $C_\rho : [s, s + 2\pi)$  der Weg  $t \mapsto \rho \exp(it)$ . Dann gilt

$$\int_s^{s+2\pi} \frac{(B \circ C_\rho)'(t)}{(B \circ C_\rho)(t)} dt = \int_s^{s+2\pi} \frac{B'(C_\rho(t))C_\rho'(t)}{(B(C_\rho(t)))} dt = \int_{C_\rho} \frac{B'(z)}{B(z)} dz.$$

Als nächstes betrachte die analytische Funktion  $g : z \mapsto \frac{B'(z)}{B(z)} - \frac{1}{z}$  auf  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ . Wir zeigen, dass man  $g$  analytisch auf  $\mathbb{D}$  fortsetzen kann. Dazu schreiben wir  $B$  als Potenzreihe, also  $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n$ . Wegen  $B(0) = 0$  gilt dabei  $B_0 = 0$ . Außerdem ist  $B'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n B_n z^{n-1}$ . Damit erhalten wir

$$g(z) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n B_n z^{n-1}}{z \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{n-1}} - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{n-1}}{z \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{n-1}} = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) B_n z^{n-1}}{z \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{n-1}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n B_{n+1} z^{n-1}}{\sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{n-1}}.$$

Wegen  $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \frac{B_2}{B_1}$  ist  $g$  analytisch auf  $\mathbb{D}$  fortsetzbar; siehe [C, 2.6.1]. Weil  $\mathbb{D}$  einfach zusammenhängend ist und der Weg  $C_\rho$  geschlossen ist, folgt  $\int_{C_\rho} g(z) dz = 0$ . Also gilt

$$\int_{C_\rho} \frac{B'(z)}{B(z)} dz = \int_{C_\rho} \frac{1}{z} dz = \int_s^{s+2\pi} \frac{1}{\rho \exp(it)} i \rho \exp(it) dt = 2\pi i.$$

Andererseits gilt  $B(C_\rho(t)) = B(\exp(\ln \rho + it)) = \exp(\tilde{B}(\ln \rho + it))$ . Das impliziert

$$(B \circ C_\rho)'(t) = \exp(\tilde{B}(\ln \rho + it)) \tilde{B}'(\ln \rho + it) i.$$

Weil  $\tilde{B}$  analytisch ist und daher  $i \frac{\partial}{\partial x} \tilde{B} = \frac{\partial}{\partial y} \tilde{B}$  gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_s^{s+2\pi} \frac{(B \circ C_\rho)'(t)}{(B \circ C_\rho)(t)} dt &= \int_s^{s+2\pi} \frac{\exp(\tilde{B}(\ln \rho + it)) \tilde{B}'(\ln \rho + it) i}{\exp(\tilde{B}(\ln \rho + it))} dt \\ &= \int_s^{s+2\pi} i \frac{\partial}{\partial x} \tilde{B}(\ln \rho + it) dt = \int_s^{s+2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{B}(\ln \rho + it) dt \\ &= [\tilde{B}(\ln \rho + (s+2\pi)i) - \tilde{B}(\ln \rho + si)]. \end{aligned}$$

Wie bereits vorher bewiesen, stimmt dieser Ausdruck mit  $2\pi i$  überein. Die gewünschte Aussage folgt durch eine einfache Umformung.  $\square$

### 3.4 Der Arealsatz für $\mathcal{H}_\nu$

**Lemma 3.4.1** Sei  $B \in \mathcal{B}$ , wobei  $B$  nicht die Form  $z \mapsto \lambda z$ ,  $z \in \mathbb{D}$  mit  $\lambda \in \mathbb{T}$  habe. Sei weiters  $\tilde{B} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch mit  $B \circ \exp = \exp \circ \tilde{B}$ . Außerdem sei  $0 < \rho < 1$  beliebig und  $\theta \in [0, 2\pi)$  derart<sup>7</sup>, dass  $\operatorname{Re} \tilde{B}(L(\theta)) \geq \operatorname{Re} \tilde{B}(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} z \leq \ln \rho$ , wobei  $L(t) := \ln \rho + ti$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Sei  $\gamma := \tilde{B} \circ L|_{[\theta, \theta+2\pi]}$  und  $r := \operatorname{Re} \gamma(\theta)$ ,  $s := \operatorname{Im} \gamma(\theta)$ . Dann ist

$$\tau := \overrightarrow{[r + si, L(s)]} \oplus \overrightarrow{[L(s), L(s+2\pi)]} \oplus \overrightarrow{[L(s+2\pi), r + (s+2\pi)i]} \oplus \gamma-$$

eine stetige, stückweise stetig differenzierbare und positiv orientierte Jordankurve.

*Beweis.* Aus Proposition 3.3.5 folgt  $(\gamma-)(\theta) = \gamma(\theta + 2\pi) = r + (s+2\pi)i$ . Daraus folgt die Stetigkeit von  $\tau$ . Offensichtlich ist  $\tau$  auch stückweise stetig differenzierbar. Wegen  $(\gamma-)(\theta+2\pi) = \gamma(\theta) = r + si$  ist  $\tau$  auch geschlossen. Sei  $\beta$  die Verkettung der drei geraden Strecken von  $\tau$ , sodass also  $\tau = \beta \oplus \gamma-$ . Man sieht unmittelbar, dass  $\beta$  injektiv ist. Außerdem folgt aus dem Lemma von Schwarz, 1.2.2, dass  $|B(z)| < |z|$  für alle  $z \in \mathbb{D}$ . Das bedeutet

$$\exp(r) = \exp(\operatorname{Re} \tilde{B}(L(\theta))) = |\exp(\tilde{B}(L(\theta)))| = |B(\exp(L(\theta)))| < |\exp(L(\theta))| = \rho.$$

Daraus folgt  $r < \ln \rho$ . Die Realteile aller Punkte im Bild von  $\beta$  sind also bis auf die beiden Verbindungspunkte  $r + si$  und  $r + (s+2\pi)i$  größer als die Realteile aller Punkte von  $\gamma([\theta, \theta+2\pi])$ . Daraus folgt die Injektivität von  $\tau$ , womit  $\tau$  eine Jordankurve ist. Zu zeigen bleibt, dass  $\tau$  positiv orientiert ist. Die Ableitungen der drei geraden Strecken verschwinden nirgendwo, und aus Lemma 3.3.2 folgt, dass auch  $(\gamma-)'(t) = -\gamma'(2\theta + 2\pi - t) = -\tilde{B}'(L(2\theta + 2\pi - t))i \neq 0$ . Es gilt  $-i(\overrightarrow{[L(s), L(s+2\pi)]})'(t) = (-i)i = 1$ . Der Realteil aller Punkte im Bild von  $\tau$  ist durch  $\ln \rho$  nach oben beschränkt. Weil  $\overrightarrow{[L(s), L(s+2\pi)]}$  ganz auf der Geraden  $\operatorname{Re} z = \ln \rho$  verläuft, folgt

$$\operatorname{Re}(\overrightarrow{[L(s), L(s+2\pi)]}(t) - \delta i(\overrightarrow{[L(s), L(s+2\pi)]})'(t)) = \operatorname{Re}(\overrightarrow{[L(s), L(s+2\pi)]}(t)) + \delta > \ln \rho.$$

<sup>7</sup>So ein  $\theta$  existiert nach Lemma 3.3.4.

Somit zeigt  $-i\tau'$  im Bereich der Verbindungsstrecke  $\overrightarrow{[L(s), L(s+2\pi)]}$  ins Äußere. Aus Satz 3.1.6 folgt, dass  $\tau$  positiv orientiert ist.  $\square$

Mithilfe von Lemma 3.4.1 können wir die Verallgemeinerung des Arealsatzes für  $\mathcal{H}_\nu$  beweisen.

**Satz 3.4.2 (Arealatz für  $\mathcal{H}_\nu$ )** Sei  $B \in \mathcal{B}$  und  $\tilde{B} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch mit  $B \circ \exp = \exp \circ \tilde{B}$ . Dann liegt für alle  $h \in \mathcal{H}_\nu$  auch  $h \circ \tilde{B}$  in  $\mathcal{H}_\nu$ , wobei

$$\langle h \circ \tilde{B}, h \circ \tilde{B} \rangle_{\mathcal{H}_\nu} \leq \langle h, h \rangle_{\mathcal{H}_\nu}. \quad (3.5)$$

*Beweis.* Wir betrachten zuerst den einfachen Fall, dass  $B(z) = \lambda z$  für alle  $z \in \mathbb{D}$  mit  $\lambda \in \mathbb{T}$ . Sei  $\psi \in \mathbb{R}$  mit  $\exp(i\psi) = \lambda$ . Dann gilt

$$B(\exp(z)) = \lambda \exp(z) = \exp(i\psi + z).$$

Also erfüllt auch  $\hat{B} : z \mapsto i\psi + z$  die Gleichung  $B \circ \exp = \exp \circ \hat{B}$ . Wegen Bemerkung 2.3.5 gibt es ein  $k \in \mathbb{Z}$ , sodass  $\tilde{B}(z) = \hat{B}(z) + 2\pi ik = z + i\psi + 2\pi ik$  für alle  $z \in \mathbb{L}$ . Für  $h = [z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp((\nu + n)z)] \in \mathcal{H}_\nu$  gilt daher

$$\begin{aligned} h(\tilde{B}(z)) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp((\nu + n)(z + i\psi + 2\pi ik)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(i(\nu + n)(\psi + 2\pi k)) \exp((\nu + n)z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp((\nu + n)z), \end{aligned}$$

mit  $b_n := a_n \exp(i(\nu + n)(\psi + 2\pi k))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Offensichtlich gilt  $|b_n| = |a_n|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wir erhalten sogar

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\nu + n) |b_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\nu + n) |a_n|^2 = \langle h, h \rangle_{\mathcal{H}_\nu} < +\infty.$$

Daher liegt  $h \circ \tilde{B}$  in  $\mathcal{H}_\nu$  mit  $\langle h \circ \tilde{B}, h \circ \tilde{B} \rangle_{\mathcal{H}_\nu} = \langle h, h \rangle_{\mathcal{H}_\nu}$ .

Im Fall  $B \neq [z \mapsto \lambda z]$  mit  $\lambda \in \mathbb{T}$  wählen wir  $0 < \rho < 1$ . Dann erfüllt der Weg  $\tau$  aus Lemma 3.4.1 die Voraussetzungen von Satz 3.1.7. Sei  $G$  das Innere von  $\tau$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_G |h'(x + iy)|^2 d\lambda_2(x, y) = \int_G h'(x + iy) \overline{h'(x + iy)} d\lambda_2(x, y) = \int_\tau h'(z) \overline{h(z)} dz \\ &= \int_{\overrightarrow{[r+si, L(s)]}} h'(z) \overline{h(z)} dz + \int_{\overrightarrow{[L(s), L(s+2\pi)]}} h'(z) \overline{h(z)} dz \\ &\quad + \int_{\overrightarrow{[L(s+2\pi), r+(s+2\pi)i]}} h'(z) \overline{h(z)} dz + \int_{\gamma^-} h'(z) \overline{h(z)} dz. \end{aligned}$$

Das erste und das dritte Integral werden wegfallen. Um das zu zeigen, stellen wir fest, dass

$$\begin{aligned} h(z + 2\pi i) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp((\nu + n)(z + 2\pi i)) = \exp(\nu 2\pi i) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp((\nu + n)z) \\ &= \exp(\nu 2\pi i) h(z). \end{aligned}$$

Ganz analog gilt

$$\begin{aligned} h'(z + 2\pi i) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\nu + n) a_n \exp((\nu + n)(z + 2\pi i)) = \exp(\nu 2\pi i) \sum_{n=1}^{\infty} (\nu + n) a_n \exp((\nu + n)z) \\ &= \exp(\nu 2\pi i) h'(z). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$h'(z + 2\pi i)\overline{h(z + 2\pi i)} = \exp(\nu 2\pi i)\overline{\exp(\nu 2\pi i)h'(z)\overline{h(z)}} = h'(z)\overline{h(z)}.$$

Die gerade Strecke  $\overrightarrow{[r + si, L(s)]}$  als Funktion auf  $[r, \ln \rho]$  ist gegeben durch  $t \mapsto t + si$  und die Strecke  $\overrightarrow{[L(s + 2\pi), r + (s + 2\pi)i]}$  durch  $t \mapsto (r + \ln \rho - t) + si + 2\pi i$ . Das impliziert

$$\overrightarrow{[L(s + 2\pi), r + (s + 2\pi)i]} = (\overrightarrow{[r + si, L(s)]} - ) + 2\pi i,$$

wobei  $2\pi i$  punktweise addiert wird. Also erhalten wir wie angekündigt

$$\begin{aligned} \int_{\overrightarrow{[L(s+2\pi), r+(s+2\pi)i]}} h'(z)\overline{h(z)} dz &= \int_{\overrightarrow{[r+si, L(s)]} -} h'(z + 2\pi i)\overline{h(z + 2\pi i)} dz \\ &= - \int_{\overrightarrow{[r+si, L(s)]}} h'(z)\overline{h(z)} dz. \end{aligned}$$

Also haben wir bewiesen, dass

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\overrightarrow{[L(s), L(s+2\pi)]}} h'(z)\overline{h(z)} dz + \int_{\gamma -} h'(z)\overline{h(z)} dz \\ &= \int_{\overrightarrow{[L(s), L(s+2\pi)]}} h'(z)\overline{h(z)} dz - \int_{\gamma} h'(z)\overline{h(z)} dz. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} h'(z)\overline{h(z)} dz &= \int_{\tilde{B} \circ L|_{[\theta, \theta+2\pi]}} h'(z)\overline{h(z)} dz \\ &= \int_{\theta}^{\theta+2\pi} h'(\tilde{B}(L(t))) \overline{h(\tilde{B}(L(t)))} \tilde{B}'(L(t)) L'(t) dt \\ &= \int_{\theta}^{\theta+2\pi} (h \circ \tilde{B})'(L(t)) \overline{(h \circ \tilde{B})(L(t))} L'(t) dt \\ &= \int_{L|_{[\theta, \theta+2\pi]}} (h \circ \tilde{B})'(z) \overline{(h \circ \tilde{B})(z)} dz. \end{aligned}$$

Zusammen mit (3.6) ergibt das

$$\int_{L|_{[\theta, \theta+2\pi]}} (h \circ \tilde{B})'(z) \overline{(h \circ \tilde{B})(z)} dz \leq \int_{\overrightarrow{[L(s), L(s+2\pi)]}} h'(z)\overline{h(z)} dz. \quad (3.7)$$

Beachte, dass  $\overrightarrow{[L(s), L(s + 2\pi)]}$  mit dem Weg  $L_{s, \ln \rho}$  aus Satz 2.3.3 übereinstimmt. Analog dazu ist  $L|_{[\theta, \theta+2\pi]}$  genau der Weg  $L_{\theta, \ln \rho}$ . Aus (3.7) folgt also

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\theta, \ln \rho}} (h \circ \tilde{B})'(z) \overline{(h \circ \tilde{B})(z)} dz \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{s, \ln \rho}} h'(z) \overline{h(z)} dz.$$

Nach Satz 2.3.3 und wegen  $h \in \mathcal{H}_{\nu}$  ist die rechte Seite gleichmäßig in  $\rho$  beschränkt. Also ist auch die linke Seite gleichmäßig beschränkt. Wegen Lemma 2.3.6 können wir  $h \circ \tilde{B}$  in der Form  $z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp((\nu + n)z)$  schreiben. Wir verwenden abermals Satz 2.3.3 und erhalten  $h \circ \tilde{B} \in \mathcal{H}_{\nu}$  und

$$\begin{aligned} \langle h \circ \tilde{B}, h \circ \tilde{B} \rangle_{\mathcal{H}_{\nu}} &= \lim_{\rho \nearrow 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\theta, \ln \rho}} (h \circ \tilde{B})'(z) \overline{(h \circ \tilde{B})(z)} dz \\ &\leq \lim_{\rho \nearrow 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{s, \ln \rho}} h'(z) \overline{h(z)} dz = \langle h, h \rangle_{\mathcal{H}_{\nu}}. \end{aligned}$$

□

Wenn man den soeben bewiesenen Satz mit dem Arealsatz für  $\mathcal{D}$  vergleicht, fallen wesentliche Unterschiede auf. Erstens kommt in der Formulierung keine Norm mehr vor, d.h. die Ausdrücke  $\langle h \circ \tilde{B}, h \circ \tilde{B} \rangle_{\mathcal{H}_\nu}$  und  $\langle h, h \rangle_{\mathcal{H}_\nu}$  können durchaus auch negativ sein.

Zweitens ist für jedes  $B \in \mathcal{B}$  durch  $T_B : f \mapsto f \circ B$  ein Operator auf  $\mathcal{D}$  gegeben. Der Versuch, den Ausdruck  $f \circ B$  für  $f \in \mathcal{D}_\nu$  zu definieren, hat dann nahegelegt, stattdessen  $\mathcal{H}_\nu$  als Raum der *Funktionen* der Form  $h = f \circ \exp$  mit  $f \in \mathcal{D}_\nu$  zu betrachten. Dabei haben wir als natürliches Analogon zu  $T_B$  den Operator  $h \mapsto h \circ \tilde{B} \cong f \circ \exp \circ \tilde{B} \cong (f \circ B) \circ \exp$  gefunden. In Bemerkung 2.3.5 haben wir allerdings gesehen, dass  $\tilde{B}$  durch  $B$  nicht eindeutig bestimmt ist, wobei auch  $h \circ \tilde{B}$  vom konkret gewählten  $\tilde{B}$  abhängt. Daher können wir einem  $B \in \mathcal{B}$  im Allgemeinen keinen eindeutigen Operator auf  $\mathcal{H}_\nu$  zuweisen.

# Literaturverzeichnis

- [R] MARVIN ROSENBLUM, JAMES ROVNYAK: *Topics in Hardy Classes and Univalent Functions*  
Birkhäuser, 1994.
- [B] ROBERT B. BURCKEL: *An Introduction to Classical Complex Analysis*  
Academic Press, 1979.
- [C] MICHAEL KALTENBÄCK, HARALD WORACEK: *Komplexe Analysis. Vorlesungsskript SS 2013*
- [K2] MICHAEL KALTENBÄCK: *Analysis 2. Vorlesungsskript SS 2015*
- [K3] MICHAEL KALTENBÄCK: *Analysis 3. Vorlesungsskript WS 2015/2016*