Der Satz von Kreĭn und schwach stetige Operatorhalbgruppen

Florian Karl Richter

21. Juli 2010 in Wien

Bachelorarbeit aus Funktionalanalysis

Institut für Analysis und Scientific Computing

Technische Universität Wien

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitende Worte **3**

2 $\sigma(X, X')$-Kompaktheit: Die Sätze von James und Kreĭn **3**

2.1 Grundbegriffe . . . 3
2.2 James-Schranken . . . 5
2.3 Der Satz von Kreîn . . . 7

3 Operatorhalbgruppen **16**

3.1 Grundbegriffe . . . 16
3.2 Stark stetige Operatorhalbgruppen . . . 18
3.3 Schwach stetige Operatorhalbgruppen . . . 21

4 Literaturverzeichnis **25**

1 Einleitende Worte

Diese Bachelorarbeit ist im Zuge der Lehrveranstaltung "Praktikum mit Bachelorarbeit" vom Institut für Analysis und Scientific Computing unter der Betreuung von Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Kaltenbäck entstanden. Die Arbeit lässt sich inhaltlich in zwei Teile unterteilen:

Der erste Teil der Arbeit widmet sich vordergründig dem Satz von Kreĭn. Dahingehend werden Begriffe wie 'Extremalpunkte', 'konvexe Hülle' u.a. wiederholt beziehungsweise definiert und eingehend besprochen. Zusätzlich steht inhaltlich auch der Begriff der $\sigma(X, X')$-Kompaktheit im Mittelpunkt der ersten Hälfte.

Im zweiten Teil der Arbeit befassen wir uns mit Operatorhalbgruppen auf Banachräumen. Hier stehen vor allem die verschiedenen Stetigkeitsauffassungen im Mittelpunkt der Arbeit. Ziel wird es sein, zu zeigen, dass Operatorhalbgruppen bezüglich der starken Operatortopologie stetige sind, genau dann wenn sie bezüglich der schwachen Operatortopologie stetig sind.

Vorrausgesetzt sind nur die grundlegenden Kenntnisse aus der Einführungsveranstaltung "Funktionalanalysis 1". Insbesondere werden die Sätze von Hahn-Banach, Banach-Steinhaus und Banach-Alaoglu als bekannt vorrausgesetzt.

2 $\sigma(X, X')$-Kompaktheit: Die Sätze von James und Kreĭn

2.1 Grundbegriffe

Im weiteren Verlauf bezeichne U_X die abgeschlossene Einheitskugel eines normierten Raumes X und $\mathfrak{B}(X)$ die Menge aller beschränkten linearen Abbildungen von X auf sich selbst. Weiters bleiben die Variablensymbole x, y, z für Variablen aus X vorbehalten, f, g, s für Variablen aus X' und Symbole der Form F, G, S für Variablen aus X''.

Definition 2.1.1. *Eine Menge U heißt* ***konvex*** *wenn für alle $0 < \lambda < 1$ und $x, y \in U$ folgt, dass auch $\lambda x + (1 - \lambda)y \in U$ ist. Ist B eine beliebige Menge, so bezeichne $co(B)$ die* ***konvexe Hülle*** *von B und ist definiert als die kleinste konvexe Menge, die B enthält. Befinden wir uns auf einem topologischen Raum, so ist $\overline{co}(B)$, die* ***abgeschlossene konvexe Hülle*** *von B, definiert als die kleinste abgeschlossene und konvexe Menge, die B enthält.*

Definition 2.1.2. *Sei X ein Vektorraum und $K \subseteq X$ konvex.*

(a) $F \subseteq K$ *heißt* ***Seite*** *von* K*, falls* F *konvex ist und*

$$x_1, x_2 \in K, \exists \lambda : 0 < \lambda < 1, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in F \implies x_1, x_2 \in F$$

erfüllt.

(b) $x \in K$ *heißt* ***Extremalpunkt*** *von* K*, falls* $\{x\}$ *eine Seite von* K *ist, mit anderen Worten, falls*

$$x_1, x_2 \in K, \exists \lambda : 0 < \lambda < 1, \ \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x \implies x_1 = x_2 = x.$$

gilt. $\mathrm{ex}(K)$ *bezeichne die Menge aller Extremalpunkte von* K*.*

Lemma 2.1.3. *Ist* K *konvex,* $F \subseteq K$ *eine Seite in* K *und* $G \subseteq F$ *eine Seite von* F*, so ist* G *eine Seite in* K*. Speziell gilt* $\mathrm{ex}(F) = \mathrm{ex}(K) \cap F$*.*

Beweis. Angenommen es existiert zu den Punkten $x_1, x_2 \in K$ ein $\lambda \in (0,1)$, sodass $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in G$ erfüllt ist. Damit liegt $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ auch in F und, da F eine Seite von K ist, folgern wir $x_1, x_2 \in F$. Verwenden wir nun dir Vorraussetzung, dass G eine Seite von F ist, erhalten wir $x_1, x_2 \in G$. Deshalb ist G eine Seite von K.

□

Lemma 2.1.4. *Sei* X *ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und sei* A *konvex in* X*. Dann gilt*

$$\overline{A} = \overline{A}^{\sigma(X,X')}.$$

Beweis. Sei A eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge von X. Für $x_0 \notin A$ existiert nach dem Satz von Hahn-Banch ein $f \in X'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass

$$\sup_{x \in A} \mathrm{Re}\ f(x) < \alpha < \mathrm{Re}\ f(x_0)$$

erfüllt ist. Klarerweise ist dann $O := \{x \in X : \mathrm{Re}\ f(x) > \alpha\}$ offen in X bezüglich der schwachen Topologie und erfüllt $x_0 \in O$ und $A \cap O = \emptyset$. Damit ist gezeigt, dass es für jedes $x_0 \in X \backslash A$ eine offene Umgebung um x_0 gibt, die ganz in $X \backslash A$ enthalten ist. Dies entspricht genau der Bedingung, dass $X \backslash A$ eine offen Menge der schwachen Topologie ist und damit ist A abgeschlossen in der schwachen Topologie.

Demzufolge ist jede bezüglich der ursprünglichen Topologie auf X abgeschlossenen konvexe Menge auch bezüglich der schwachen Topologie abgeschlossen. Andererseits ist die schwache Topologie die gröbere von den beiden und damit ist jede schwach abgeschlossene Menge auch abgeschlossen. Damit folgt die Behauptung.

□

2.2 James-Schranken

Definition 2.2.1. *Sei $(X, ||.||)$ ein Banachraum und bezeichne C eine beschränkte Teilmenge von X'. Dann nennt man $B \subset C$ eine **James-Schranke**(engl. "James boundary") von C, wenn für alle $x \in X$ ein $g \in B$ existiert, sodass Re $g(x) = \sup\{Re\ f(x) : f \in C\}$. Man nennt B ein James-Schranke von X, wenn $B \subset U_{X'}$ erfüllt ist und B eine James-Schranke von $U_{X'}$ darstellt.*

1. Bemerkung: Man erkennt hier, dass die obige Bedingung an eine James-Schranke homogen in x ist. Da wir uns in einem Banachraum befinden können wir mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach zu jedem $x \in X$ ein Funktional aus $U_{X'}$ finden, für das $f(x) = ||x||$ erfüllt ist. Deshalb kann man die Bedingung an eine James-Schranke von X umformulieren in:
$B \subset U_{X'}$ ist eine James-Schranke von X genau dann wenn für jedes $x \in X$ mit $||x|| = 1$ ein $g \in B$ existiert, sodass g(x)=1 erfüllt ist.
2. Bemerkung: In der Definition wird vorausgesetzt, dass C beschränkt ist. Ist C zusätzlich noch schwach-*-abgeschlossen und kreisförmig so folgt aus dem Satz von Banach-Alaoglu, dass C schwach-*-kompakt in X' ist. Damit ist die Menge $\{f(x), f \in C\}$ nichts anderes als das Bild der kompakten Menge C unter dem (schwach-*-stetigen) Funktional $x \in X''$ und damit selbst kompakt in $\mathbb{C}$. Daraus folgt die Existenz eines Funktionales $g \in C$, sodass $|\text{Re } g(x)| = \sup\{|\text{Re } f(x)| : f \in C\}$ erfüllt ist und aus der Kreisförmigkeit folgt, dass es sogar ein g gibt welches Re $g(x) = \sup\{\text{Re } f(x) : f \in C\}$ erfüllt. Damit ist C eine James-Schranke für sich selbst. Also lässt sich zumindest für diesen Spezialfall die Frage nach der Existenz einer James-Schranke schnell beantworten.

Satz 2.2.2. *Sei X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum mit kompakter und konvexer Teilmenge K. Dann gilt: Jede nicht leere abgeschlossene Seite $\mathcal{F}$ von K enthält einen Extremalpunkt von K.*

Beweis. Der Beweis fußt auf dem Lemma von Zorn und dem Satz von Hahn-Banach.
Bezeichne $\mathcal{M}$ die Menge aller abgeschlossenen nichtleeren Seiten von K die in $\mathcal{F}$ enthalten sind, versehen mit der durch $\subseteq$ induzierten Halbordnung. $\mathcal{M}$ ist nicht leer, da $\mathcal{F}$ in $\mathcal{M}$ enthalten ist. Sei nun $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ eine totalgeordnete Kette aus $(\mathcal{M}, \subseteq)$. Dann ist $\hat{\mathcal{F}} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ wieder eine abgeschlossene Teilmenge von K. Wir wollen nun zeigen, dass $\hat{\mathcal{F}}$ ebenfalls ein Element aus $\mathcal{M}$ ist. Dazu bleibt noch zu zeigen, dass $\hat{\mathcal{F}}$ eine nicht leere Seite von K ist.

Sei also $x_1,\ x_2 \in K$ beliebig. Angenommen es existiert ein $\lambda \in (0, 1)$ sodass $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \hat{\mathcal{F}}$ erfüllt ist. Daraus folgt $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \mathcal{F}_i$, für alle $i \in I$. Da $\mathcal{F}_i$ eine Seite von K ist folgt $x_1,\ x_2 \in \mathcal{F}_i, \forall i \in I$. Ist aber $x_1,\ x_2 \in \mathcal{F}_i, \forall i \in I$, so sind x_1 und x_2 auch im Schnitt aller $\mathcal{F}_i$ also in $\hat{\mathcal{F}}$ enthalten. Damit ist $\hat{\mathcal{F}}$ eine Seite von K.

Um nachzuweisen, dass $\hat{\mathcal{F}}$ nicht leer ist, muss man sich lediglich in Erinnerung rufen, dass K kompakt ist und damit auf K die Endliche Durchschnittseigenschaft erfüllt ist. Da der Schnitt von verschiedenen $\mathcal{F}_i$ über eine endliche Indexmenge nie leer ist, gilt dies auch für den Schnitt über die gesamte Indexmenge I.

$\hat{\mathcal{F}}$ ist damit eine untere Schranke der Kette $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{M}$. Damit sind alle Vorraussetzung an das Lemma von Zorn erfüllt und wir wissen daher, dass in $\mathcal{M}$ ein minimales Element $\mathcal{F}_0$ existiert.

Angenommen $\mathcal{F}_0$ ist kein Extremalpunkt: Damit enthält $\mathcal{F}_0$ mindestens 2 unterschiedliche Elemente $x \neq y$. Da X laut Voraussetzung lokalkonvex ist, existiert nach dem Satz von Hahn-Banach ein Funktional $f \in X'$ mit

$$Re\ f(x) < Ref(y). \tag{1}$$

Betrachte nun die Menge

$$\mathcal{F}_1 := \{z \in \mathcal{F}_0\ :\ Re\ f(z) = \sup_{z'\in\mathcal{F}_0}(Re\ f(z'))\}.$$

Da f stetig ist und $\mathcal{F}_0$ als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge K selbst kompakt ist, wird das Supremum an mindestens einer Stelle angenommen und $\mathcal{F}_1$ ist damit nicht leer. Ferner ist $\mathcal{F}_1$ abgeschlossen, da man $\mathcal{F}_1$ darstellen kann als $\mathcal{F}_0 \cap (Re\ f)^{-1}(\{z_0\})$, mit $z_0 := \sup_{z'\in\mathcal{F}_0}(Re\ f(z'))$.

Zusätzlich ist $\mathcal{F}_1$ eine Seite von $\mathcal{F}_0$. Um das einzusehen seien zwei beliebige Punkte x_1 und x_2 aus $\mathcal{F}_0$ gegeben, für die ein $0 < \lambda < 1$ existiert, welches $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \mathcal{F}_1$ erfüllt. Damit folgt $\mathrm{Re}f\Big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\Big) = z_0$, was wir auch schreiben können als $\lambda\mathrm{Re}f(x_1) + (1-\lambda)\mathrm{Re}f(x_2) = z_0$.
Da z_0 jedoch das Supremum über alle Realteile ist, kann dieses über eine Konvexkombination $\lambda\mathrm{Re}f(x_1)+(1-\lambda)\mathrm{Re}f(x_2)$ nur dann angenommen werden, wenn $\mathrm{Re}f(x_1) = \mathrm{Re}f(x_2) = z_0$ erfüllt ist. Damit folgt bereits, dass x_1 und x_2 in $\mathcal{F}_1$ enthalten sind und damit ist $\mathcal{F}_1$ eine Seite von $\mathcal{F}_0$. Als solche ist $\mathcal{F}_1$ aber auch eine Seite von K(vergleiche Lemma 2.1.3) und damit enthalten in der teilgeordneten Menge $\mathcal{M}$. Zusätzlich folgt aus (1), dass $\mathcal{F}_1$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{F}_0$ ist, was im Widerspruch zur Minimalität von $\mathcal{F}_0$ steht.

□

Korollar. *Für jeden Banachraum X ist* $\mathrm{ex}(U_{X'})$ *eine James-Schranke von X.*

Beweis. Sei $x \in X$ mit $||x|| = 1$. Betrachte die Menge $\mathcal{H} := \{f \in U_{X'}\ :\ f(x) = 1\}$. Erneut gilt nach dem Satz von Hahn-Banch, dass zumindest ein solches f existiert und damit ist $\mathcal{H}$ nicht leer. Indem man sehr ähnlich argumentiert wie im Beweis von Satz 2.2.2 kann man zeigen, dass $\mathcal{H}$ eine $\sigma(X', X)$-abgeschlossene Seite von $U_{X'}$ ist. Damit folgt aus Satz 2.2.2, dass $\mathcal{H}$ mindestens einen Extremalpunkt von $U_{X'}$ enthält. Damit ist bereits gezeigt, dass $\mathrm{ex}(U_{X'})$ eine James-Schranke von $U_{X'}$ ist. □

2. Bemerkung: Allgemein werden wir uns im nächsten Kapitel der Frage widmen, ob eine James-Schranke einer Menge bereits groß genug ist, sodass die abgeschlossene Konvexe Hülle davon die gesamte Menge aufspannt. Die Antwort lautet 'ja', für separable Banachräume. Das eben bewiesene Korollar in Verbindung mit den Satz von Kreîn-Milman([Wer06], VIII.4.4) stellt bereits einen Vorboten dieser Aussage dar. Denn nach dem Satz noch Kreîn-Milman gilt $\overline{co}(ex(U_{X'})) = U_{X'}$, wobei $ex(U_{X'})$ eine James-Schranke von $U_{X'}$ ist.

2.3 Der Satz von Kreîn

Das folgende Kapitel widmet sich dem Satz von Kreîn und den ihm zugrunde liegenden Theoremen. Der Satz von Kreîn besagt, dass in einem Banchraum X die abgeschlossne konvexe Hülle einer bezüglich der schwachen Topologie $\sigma(X, X')$ kompakten Menge wieder schwach-kompakt ist.
Im Rahmen dieser Bachelorarbeit beschränken wir uns jedoch auf den Fall eines separablen Banachraumes. Der Grund dafür liegt einerseits darin, dass der Beweis des Sates von James für den allgemeinen Fall sehr technisch verläuft und andererseits darin, dass im separablen Fall die Herleitung mittels den bereits oben erörterten James-Schrenken erfolgen kann. Dieser Zugang hat meiner Ansicht nach den großen Vorteil eine Einführung als auch einen breiten Überblick über zentrale Begriffe der unendlichdimensionalen Geometrie in Banachräumen und dessen Dualräumen zu liefern, ohne auf längere Sicht die inhaltliche Zusammengehörigkeit zu verlieren. So werden nun im folgenden Kapitel mit den Sätzen von Kreîn, James und Godefroy die Begriffe 'Konvexe Hülle', 'Extremalpunkte' und 'James-Schranke' erneut einander gegenübergestellt.

Im weiteren Verlauf der Arbeit verwenden wir des öfteren den Satz von Goldstine. Deshalb sei hier auf Grund der Vollständigkeit der Beweis des Satzes erbracht:

Satz 2.3.1 (von Goldstine)**.** *Sei X ein ein normierter Raum. Dann ist U_X $\sigma(X'', X')$-dicht in $U_{X''}$ und folglich ist ganz X $\sigma(X'', X')$-dicht in X''.*

Beweis. Wir folgen der Beweisstruktur des Bipolarensatzes(für detailliertere Informationen über den Zusammenhang zwischen den Satz von Goldstine und dem Bipolarensatz siehe [Wer06], Kapitel VIII., bzw. für einen alternativen Beweis siehe [Fab00], 73ff):
Für jede Menge $B \subseteq X'$ sei B° definiert als

$$B^\circ := \{F \in X'' : \text{Re } F(g) \le 1, \ \forall g \in A\},$$

sowie für alle $A \in X''$ sei A° definiert als

$$A^\circ := \{f \in X' : \text{Re } G(f) \le 1, \ \forall G \in B\}.$$

Dann gilt für alle $A \subseteq X''$:

- A° lässt sich schreiben als $A^\circ = \bigcap_{G\in A}\{f \in X' : \text{Re } G(f) \leq 1\}$ und ist damit als Schnitt von abgeschlossenen und konvexen Mengen selbst abgeschlossen und konvex in der Topologie von $\sigma(X', X'')$.
- Für alle A gilt $0 \in A^\circ$.
- Klarerweise gilt $A \subseteq A^{\circ\circ}$.

Mit diesen Eigenschaften folgt sofort $\overline{co}(A \cup \{0\}) \subseteq A^{\circ\circ}$, wobei der Abschluss bezüglich der $\sigma(X'', X')$-Topologie zu verstehen ist.

Angenommen es gibt ein $F_0 \in A^{\circ\circ}\setminus\overline{co}(A \cup \{0\})$. Nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach gibt es deshalb ein $\sigma(X', X'')$-stetiges Funktional $g \in X'$, welches

$$\text{Re } F_0(g) > 1 \geq \text{Re } G(g), \quad \forall G \in A$$

erfüllt. Aus der rechten Ungleichung folgt $g \in A^\circ$ und aus dem linken Teil folgt damit $F_0 \notin A^{\circ\circ}$. Das steht bereits im Widerspruch zu $F_0 \in A^{\circ\circ}\setminus\overline{co}(A \cup \{0\})$.

Damit ist $\overline{co}(A \cup \{0\}) = A^{\circ\circ}$ bewiesen. Wenden wir dieses Ergebnis auf die kanonische Einbettung von U_X in X'' an, erhalten wir

$$U_{X''} = U_X^{\circ\circ} = \overline{co}(U_X) = \overline{U}_X^{\sigma(X'',X')}.$$

□

Lemma 2.3.2. *Sei X ein separabler Banachraum sei $S_X := \{x \in X : ||x|| = 1\}$. Weiters sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S_X$ dicht in S_X. Dann wird $U_{X'}$ versehen mit*

$$d(f, g) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}|f(x_i) - g(x_i)|, \quad \forall f, g \in U_{X'},$$

zu einem kompakten metrischen Raum. Ferner ist die identische Abbildung

$$id_{U_{X'}} : (U_{X'}, \sigma(X', X'')) \to (U_{X'}, d)$$

ein Homöomorphismus.

Beweis. Dass $d(.,.)$ die Eigenschaften einer Metrik hat, ist auf der Hand liegend. Deshalb wollen wir zuerst die Stetigkeit von $\text{id}_{U_{X'}}$ überprüfen. Dazu sei eine offene Umgebung $O := \{g \in U_{X'} : d(f, g) < \epsilon\}$ von einem Punkt $f \in U_{X'}$ gegeben. Klarerweise gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $2^{-N} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-N-i} < \frac{\epsilon}{4}$ erfüllt ist.

Definiere Q_i als die Menge $Q_i := \{g \in U_{X'} : |(f-g)(x_i)| < \frac{\epsilon}{2N}\}$. Q_i ist damit eine offene Menge in der schwach-*-Topologie und damit ist auch $Q := \bigcap_{i=1}^N Q_i$ eine offene Menge in dieser Topologie. Zusätzlich gilt $f \in Q$.

Für alle $g \in Q$ folgt somit

$$d(f,g) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}|f(x_i) - g(x_i)| =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} 2^{-i}|f(x_i) - g(x_i)| + \sum_{i=N+1}^{\infty} 2^{-i}|f(x_i) - g(x_i)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-N-i+1} = \epsilon.$$

Damit haben wir gezeigt, dass es zu jedem $f \in U_{X'}$ und jeder Umgebung O um f eine $\sigma(X', X'')$-offene Umgebung Q um $\mathrm{id}_{U_{X'}}^{-1}(f) = f$ gibt, sodass $Q \subseteq \mathrm{id}_{U_{X'}}^{-1}(O) = O$ erfüllt ist. Demnach ist $\mathrm{id}_{U_{X'}}$ stetig.

Da $(U_{X'}, \sigma(X', X'')$ ein kompakter Raum ist, ist jede stetige und bijektive Funktion, die auf $(U_{X'}, \sigma(X', X'')$ definiert ist und in einen Hausdorff-Raum hinein abbildet, bereits homöomorph. Damit haben wir abschließend gezeigt, dass $\mathrm{id}_{U_{X'}}$ homöomorph ist, und damit auch, dass $(U_{X'}, d)$ ein kompakter Raum ist.

$\square$

Satz 2.3.3 (nach Godefroy)**.** *Sei X ein Banachraum und sei C eine beschränkte abgeschlossene und konvexe Teilmenge von X'. Ist B eine James-Schranke von C und separabel in $(X', ||.||_{X'})$, so gilt $\overline{co}(B) = C$.*

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir noch folgendes technisches Lemma. $l^\infty(B)$ bezeichne im Folgenden den Banachraum $\{x : B \to \mathbb{R} : \sup_{\beta \in B} |x(\beta)| < \infty\}$ versehen mit der Norm $||x|| := \sup_{\beta \in B} |x(\beta)|$.

Lemma 2.3.4 (Simon's inequality)**.** *Sei B eine beliebige Menge und sei C eine unter unendlichen Konvexkombinationen abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $l^\infty(B)$, d.h. für alle Koeffizientenfolgen $\lambda_i > 0$ mit $\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i = 1$ und allen $c_i \in C$ folgt $\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i c_i \in C$. Sei weiters vorausgesetzt, dass für alle $c \in C$ ein $b \in B$ existiert, sodass*

$$c(b) = \sup_{\beta \in B}(c(\beta)).$$

Dann gilt für jede Folge $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ aus C

$$\inf_{c \in C} \sup_{\beta \in B} c(\beta) \leq \sup_{\beta \in B} \limsup_{i \in \mathbb{N}} c_i(\beta).$$

Beweis. Sei $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ aus C. Definiere $C_k := \{\sum_{i=k}^{\infty} \lambda_i c_i \;:\; \lambda_i \geq 0,\; \sum_{i=k}^{\infty} \lambda_i = 1\}$. Wir müssen zeigen, dass

$$\inf_{c\in C_1}\sup_{\beta\in B} c(\beta) \le \sup_{\beta\in B}\limsup_{i\in\mathbb{N}} c_i(\beta),$$

denn daraus folgt bereits mit der Ungleichungskette

$$\inf_{c\in C}\sup_{\beta\in B} c(\beta) \le \inf_{c\in C_1}\sup_{\beta\in B} c(\beta) \le \sup_{\beta\in B}\limsup_{i\in\mathbb{N}} c_i(\beta),$$

die behauptetet Aussage:
Sei $\epsilon > 0$. Wähle induktiv $z_k \in C_k$ so, dass für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\sup_{\beta\in B}(2^k v_k + z_{k+1})(\beta) \le \inf_{z\in C_{k+1}}\sup_{\beta\in B}(2^k v_k + z)(\beta) + \frac{\epsilon}{2^{k+1}},$$

erfüllt ist, wobei $v_0 := 0$ und $v_k := \sum_{i=1}^{k} \frac{z_i}{2^i}$ für $k \in \mathbb{N}$. Setze $v := \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{z_i}{2^i}$.

Da $z_{k+1} = 2^{k+1}v_{k+1} - 2^{k+1}v_k$ gilt, erhalten wir

$$2^{k+1}v_{k+1} - 2^k v_k = z_{k+1} + 2^k v_k$$

und unter Verwendung von $2^k v - 2^k v_k = 2^k \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{z_i}{2^i} \in C_{k+1}$ erhalten wir für alle $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\sup_{\beta\in B}(2^{k+1}v_{k+1} - 2^k v_k)(\beta) \le \sup_{\beta\in B}(2^{k+1}v_{k+1} + (2^k v - 2^k v_k))(\beta) + \frac{\epsilon}{2^{k+1}} =$$

$$= \sup_{\beta\in B}(2^k v)(\beta) + \frac{\epsilon}{2^{k+1}} = 2^k \sup_{\beta\in B} v(\beta) + \frac{\epsilon}{2^{k+1}}.$$

Da v aus C_1 stammt existiert ein $b \in B$, sodass v sein Supremum an der Stelle b annimmt. Mit Hilfe der Formel $\sum_{k=0}^{m-1} 2^k = 2^m - 1$ erhalten wir aus der letzten Ungleichung

$$2^m v_m(b) = \sum_{k=0}^{m-1}(2^{k+1}v_{k+1} - 2^k v_k)(b)$$

$$\le (2^m - 1)\sup_{\beta\in B} v(\beta) + \epsilon = 2^m v(b) + \epsilon - \sup_{\beta\in B} v(\beta).$$

Daraus folgt $\sup_{\beta\in B} v(\beta) \le 2^m v(b) - 2^m v_m(b) + \epsilon$ und daher folgt

$$\inf_{c\in C_1}\sup_{\beta\in B} c(\beta) \le \sup_{\beta\in B} v(\beta) \le \limsup_{m\in\mathbb{N}}(2^m v - 2^m v_m)(b) + \epsilon,$$

und das für beliebige $\epsilon > 0$. Verwenden wir schlussendlich $2^m v - 2^m v_m \in C_{m+1}$, so können wir den Limes superior abschätzen mit

$$\limsup_{m\in\mathbb{N}} (2^m v - 2^m v_m)(b) + \epsilon \leq \limsup_{m\in\mathbb{N}} c_m(b) + \epsilon,$$

und damit folgt

$$\inf_{c\in C_1} \sup_{\beta\in B} c(\beta) \leq \limsup_{m\in\mathbb{N}} (2^m v - 2^m v_m)(b) + \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Daraus folgt die Behauptung.

□

Beweis. (von Satz 2.3.3). Angenommen $\overline{co}(B) \neq C$. Da C eine abgeschlossene konvexe Übermenge von B ist gilt $\overline{co}(B) \subseteq C$ und mit der Annahme $\overline{co}(B) \neq C$ erhalten wir $C \backslash \overline{co}(B) \neq \emptyset$.

(1. Schritt). Sei $g \in C\backslash\overline{co}(B)$. Zuvorderst suchen wir ein $F \in X''$ mit $||F|| = 1$, sodass ein α und ein β existieren, mit

$$\alpha < \beta, \qquad \text{Re } F(g) > \beta \qquad \text{und} \qquad \text{Re } F(f) \leq \alpha \quad \forall f \in B. \tag{2}$$

Dazu verwenden wir den Trennungssatz von Hahn-Banach, der gerade besagt, dass man eine abgeschlossene konvexe Mengen und eine kompakte konvexe Menge in einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum mittels einer reellen Hyperebene von einander trennen kann. Das bedeutet genau ein solches $F \in X''$ existiert.

(2. Schritt). Sei $S := \{x \in U_X \ : \ \text{Re}(g(x)) > \beta\}$. Nach dem Satz von Goldstine gilt $F \in \overline{U_X}^{\omega^*}$[1], d.h. es existiert ein Netz $(y_i)_{i\in I}$ mit Elementen aus U_X, sodass für alle $f \in X'$ gilt:

$$\lim_{i\in I} y_i(f) = \lim_{i\in I} f(y_i) = F(f) \quad \text{ in } \mathbb{C}.$$

Weil Re$F(g) > \beta$ gilt, kann man alle y_i sogar aus S wählen. Da das Netz $(y_i)_{i\in I}$ als Netz von Funktionalen aus X'' punktweise für jedes $f \in X'$ gegen F konvergiert, gilt dies insbesondere für alle $f \in B \subseteq X'$.

Definiere $Y := \overline{span(B)}$. Dann ist Y ein abgeschlossener und separabler Teilraum von X'. Nach Lemma 2.3.2 ist $(U_{Y'}, \sigma(Y', Y''))$ damit kompakt und metrisierbar. Deshalb besitzt in diesem Raum jedes Netz eine konvergente Teilfolge. Konvergiert das Netz, so konvergiert natürlich auch die Teilfolge gegen den selben Grenzwert. Das Netz $(y_i|_Y)_{i\in I}$

[1] Hier bezeichne $\overline{U_X}^{\omega^*}$ den Abschluss von U_X in X'' bezüglich der Topologie $\sigma(X'', X')$.

liegt in $U_{Y'}$. Damit gibt es eine Teilfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von$(y_i)_{i\in I}$, sodass $(x_n|_Y)_{n\in\mathbb{N}}$ in $U_{Y'}$ bzgl. der schwach-*-Topologie gegen $F|_Y$ konvergiert.
Insgesamt erhalten wir demnach eine Folge x_n aus S, die auf ganz Y und damit auf ganz B punktweise gegen F konvergiert.

(3.Schritt). Es gilt $\lim(f(x_n)) \to F(f)$ für $f \in B$. Damit folgt

$$\sup_{f\in B}(\lim_{n\in N}(\mathrm{Re}f(x_n))) \;=\; \sup_{f\in B}(\mathrm{Re}F(f)) \leq \alpha. \tag{3}$$

Weil B eine James-Schranke von C ist, gilt

$$\sup_{f\in B}\mathrm{Re}f(x) = \sup_{f\in C}\mathrm{Re}f(x) \quad \forall x \in X,$$

und aus $g \in C$ folgt

$$\sup_{f\in C}\mathrm{Re}f(x) \geq \mathrm{Re}g(x) > \beta \quad \forall x \in S,$$

und damit auch

$$\inf_{x\in S}\sup_{f\in C}\mathrm{Re}f(x) \geq \inf_{x\in S}\mathrm{Re}g(x) \geq \beta. \tag{4}$$

Aus der ursprünglichen Annahme $\alpha < \beta$ und aus den Ungleichungen (3) und (4) folgt somit

$$\sup_{f\in B}(\lim_{n\in N}(\mathrm{Re}f(x_n))) \leq \alpha < \beta \leq \inf_{x\in S}\sup_{f\in C}\mathrm{Re}f(x) = \inf_{x\in S}\sup_{f\in B}\mathrm{Re}f(x). \tag{5}$$

Es ist sehr leicht ersichtlich, dass S unter unendlichen Konvexkombinationen abgeschlossen ist. Weil B eine James-Schranke von C ist, sind alle Vorraussetzungen an Lemma 2.3.4 erfüllt und damit können wir auf die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus S die Ungleichung von Simon anwenden und erhalten

$$\sup_{f\in B}(\lim_{n\in N}(\mathrm{Re}f(x_n))) \geq \inf_{x\in S}\sup_{f\in B}\mathrm{Re}f(x). \tag{6}$$

Die Ungleichungen (5) und (6) stehen jedoch im direkten Widerspruch zu einander, wodurch die ursprüngliche Annahme $\overline{co}(B) \neq C$ ad absurdum geführt wurde. $\square$

Bemerkung: Die Vorraussetzung in Satz 2.3.3, dass B eine in der Topologie des Banachraumes X' separable Menge ist, ist unabdingbar, wie man am folgenden Beispiel sieht:

Beispiel: Sei X der Banchraum $C[0,1]$, der Raum aller komplexwertigen setigen Funktionen definiert auf dem Intervall $[0,1]$ versehen mit der Supremumsnorm. Damit lässt sich X' identifizieren mit den Raum $\mathcal{M}([0,1], \mathfrak{B}_{[0,1]})$, der Raum aller Komplexen Maße auf [0,1] versehen mit der Totalvariation als Norm.

Definiere δ_t, $t \in [0,1]$, als das normierte Punktmaß zu t, mit anderen Worten jenes Maß, das definiert ist durch

$$\delta_t(A) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } t \in A \\ 0, & \text{wenn } t \notin A \end{cases}, \qquad \forall A \in \mathfrak{B}_{[0,1]}.$$

Die Totalvariation von δ_t ist 1 und damit gilt $\delta_t \in U_{X'}$. Betrachte nun die Menge $B := \{\delta_t \ : \ 0 \leq t \leq 1\} \subseteq U_{X'}$. Für jedes $f \in C([0,1])$ gibt es ein t_0, sodass

$$\sup_{t\in[0,1]} (\mathrm{Re} f(t)) = \mathrm{Re} f(t_0).$$

Damit folgt auch, dass

$$\sup_{||\mu||=1} \int_{[0,1]} \mathrm{Re} f(t) d\mu(t) = \sup_{t\in[0,1]} (\mathrm{Re} f(t)) = \mathrm{Re} f(t_0) = \int_{[0,1]} \mathrm{Re} f(t) d\delta_{t_0}(t),$$

und damit ist gezeigt, dass B eine James-Schranke von $U_{X'}$ ist.

Betrachten wir nun die abgeschlossene Konvexe Hülle von B. Es ist leicht ersichtlich, dass mit der Menge $\{\sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{t_j} \ : \ n \in \mathbb{N}, \ t_j \in [0,1], \ \lambda_j \geq 0, \ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1\}$ eine konvexe Obermenge von B gegeben ist. Andererseits kann man jedes Element aus dieser Menge durch endliches Konvexkompinieren aus B erhalten. Damit ist klar, dass $co(B)$ die oben angegeben Gestalt besitzen muss. An dieser Stelle sei bemerkt, dass man an dieser Darstellung erkennt, dass $\overline{co}(B)$ kein einziges kontinuierliches Maß enthält und damit nicht die gesamte Einheitskugel in $\mathcal{M}([0,1])$ aufspannt. Aus dem Satz 2.3.3 wissen wir jedoch, dass dies für separable James-Schranken von $U_{X'}$ gelten sollte. In diesem Beispiel ist B aber keine separable Menge, weil B ein überabzählbares, linear unabhängiges System ist, das keine Häufungspunkte besitzt. Und in Folge dessen ist auch $\overline{co}(B) \neq U_{X'}$.

Das in einem Raum wie $\mathcal{M}([0,1])$ die Einheitskugel gar keine separable James-Schrenke besitzen kann, zeigt folgender Satz:

Satz 2.3.5. *Sei X ein Banachraum. Besitzt X eine separable James-Schranke, so ist bereits ganz X' separabel.*

Beweis. Besitzt $U_{X'}$ eine separable James-Schranke so ist auch die abgeschlossene und konvexe Hülle dieser Schranke separabel. Nach dem vorangegangenen Satz folgt damit, dass $U_{X'}$ separabel ist. □

Satz 2.3.6 (von James, für separable Banachräume)**.** *Sei C eine abgeschlossne konvexe Teilmenge eines separablen Banachraumes X. Dann gilt: C ist genau dann schwach kompakt wenn für jedes $f \in X'$ gilt, dass Re f sein Supremum über C an einem Punkt in C annimmt.*

Beweis. ($\Rightarrow$): Angenommen C ist kompakt in der schwachen Topologie $\sigma(X, X')$. Auf Grund der Tatsache, dass jedes f aus X' stetig bezüglich der schwachen Topologie auf X ist, ist das Bild von C unter Re f kompakt in $\mathbb{R}$. Daraus folgt bereits, dass das Supremum an einer gewissen Stelle angenommen wird.

($\Leftarrow$): Als erstes wollen wir überprüfen, dass C eine James-Schranke von $\overline{C}^{w^*}$ in X'' ist. Das heißt es ist zu zeigen, dass zu jedem $f \in X'$ ein $x_0 \in C$ gibt, sodass

$$\text{Re } f(x_0) \;=\; \sup_{F \in \overline{C}^{w^*}} \text{Re } F(f)$$

erfüllt ist. An dieser Stelle genügt es jedoch das Supremum über die Menge C zu wählen, da C klarerweise dicht in $\overline{C}^{w^*}$ ist. Gesucht ist also ein $x_0 \in C$ mit der Eigenschaft

$$\text{Re } f(x_0) \;=\; \sup_{x \in C} \text{Re } f(x)$$

Das entspricht aber genau der Voraussetzungen des Satzes, nämlich dass alle f das Supremum an irgendeiner Stelle x_0 in C angenommen wird. Demnach ist C eine James-Schranke von $\overline{C}^{w^*}$.

Hier können wir nun Satz 2.3.3 anwenden, und erhalten $\overline{co}(C) = \overline{C}^{w^*}$. Da C bereits selbst eine abgeschlossene und konvexe Menge ist, gilt $C = \overline{co}(C)$ und zusammen mit der vorangegangenen Identität erhalten wir

$$C = \overline{C}^{w^*}.$$

Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist $U_{X''}$ kompakt in der Topologie $\sigma(X'', X')$. Und da, wie eben gezeigt wurde, C eine beschränkte und bezüglich der Topologie $\sigma(X'', X')$ abgeschlossene Menge ist, ist C ebenfalls bezüglich $\sigma(X'', X')$ kompakt.

Da wir einerseits mit $\sigma(X'', X')$ nichts anderes gegeben haben, als eine Initiale Topologie bzgl. der Familie X' und weil andererseits $\sigma(X, X')$ nichts anderes ist, als eine Initiale Topologie bzgl. der Familie X' und weil zusätzlich $X \subseteq X''$ gilt, stimmt die Spurtopologie $(X, \sigma(X'', X')|_X)$ mit der Topologie $(X, \sigma(X, X'))$ überein. Deshalb erhalten wir, weil C kompakt in $(X'', \sigma(X'', X'))$ und ganz in X enthalten ist, dass auch C kompakt in $(X, \sigma(X, X'))$ ist. $\square$

Satz 2.3.7 (von Kreîn, für separable Banachräume)**.** *Sei X ein separabler Banachraum. Ist C schwach kompakt in X, so ist auch $\overline{co}(C)$ schwach kompakt in X.*

Beweis. Sei $f \in X'$. Zuerst soll gezeigt werden, dass

$$\sup_{x \in \overline{co}(C)} \operatorname{Re} f(x) \;=\; \sup_{x \in C} \operatorname{Re} f(x). \tag{7}$$

Dazu betrachten wir die Konstruktion der konvexen Hülle von C:

$$co(C) = \{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j c_j \;:\; m \in \mathbb{N},\; c_j \in C,\; \lambda_j \geq 0,\; \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1\}.$$

Angenommen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge aus $co(C)$, für die gilt

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Re} f(x_n) \;=\; \sup_{x \in co(C)} \operatorname{Re} f(x).$$

Jedes x_n lässt sich damit in der Form

$$x_n = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{j,n} c_{j,n} \text{ schreiben, mit } \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_{j,n} = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wähle $y_n := c_{j_0,n}$, wobei $c_{j_0,n}$ bestimmt ist durch $\operatorname{Re} f(c_{j_0,n}) = \max_{j=1}^{m}(\operatorname{Re} f(c_{j,n}))$. Man achte darauf, dass hier jedes y_n aus C stammt, und nicht mehr aus $co(C)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(x_n) &= \operatorname{Re} f\big(\sum_{j=1}^{m} \lambda_{j,n} c_{j,n}\big) = \\ = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{j,n} \operatorname{Re} f(c_{j,n}) &\leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_{j,n} \operatorname{Re} f(y_n) = \\ &= \operatorname{Re} f(y_n)\big(\sum_{j=1}^{m} \lambda_{j,n}\big) = \operatorname{Re} f(y_n). \end{aligned}$$

Man erhält

$$\sup_{x \in co(C)} \operatorname{Re} f(x) \;=\; \lim_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Re} f(x_n) \;\leq\; \lim_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Re} f(y_n) \;\leq\; \sup_{x \in C} \operatorname{Re} f(x),$$

und damit folgert man

$$\sup_{x \in \overline{co}(C)} \operatorname{Re} f(x) \;=\; \sup_{x \in co(C)} \operatorname{Re} f(x) \;=\; \sup_{x \in C} \operatorname{Re} f(x).$$

Damit ist die Gleichheit in (7) bewiesen.

Da C $\sigma(X, X')$-kompakt ist, folgt aus Satz 2.3.6, dass für jedes $f \in X$ das Supremum von Re f an einer Stelle x_0 in C angenommen wird. Andererseits kann man Satz 2.3.6 auch auf die Menge $\overline{co}(C)$ anwenden, da aus (7) bereits folgt, dass jedes reele Funktional sein Supremum auf $\overline{co}(C)$ annimmt, nämlich an der selben Stelle x_0. Damit folgt auch schon die $\sigma(X, X')$-Kompaktheit von $\overline{co}(C)$.

□

3 Operatorhalbgruppen

3.1 Grundbegriffe

Unter einem *dynamische System*, oder auch *deterministischen System*, versteht man im allgemeinen einen zeitabhängigen Prozess, der zwar vom Anfangszustand, aber nicht vom Anfangszeitpunkt abhängt. Man spricht in diesem Fall von einem homogen bezüglich der Zeit abhängigen Modell. Dynamische Systeme finden vielfältige Anwendungen in Bereichen der Mathematik, dienen jedoch hauptsächlich zur Beschreibung von verschiedensten Prozessen in der Physik.

Formal wird ein dynamisches System beschrieben durch eine Familie $(T(t))_{t>0}$ von Abbildungen auf einer Menge X mit den Eigenschaften

$$\begin{cases} T(s+t) &= T(s)T(t), \quad \text{für alle } t, s \geq 0, \\ T(0) &= id_X. \end{cases} \tag{8}$$

Hier bezeichnet X den Zustandsraum, $t \in \mathbb{R}_0^+$ den Zeitraum, und jedes $x \in X$ nennt sich einen Zustand. Für jeden Zustand x beschreibt die Abbildung T die zeitliche Entwicklung von X. Das heißt der Zustand x geht zum Zeitpunkt t über in den Zustand $T(t)x$.

Ist X ein Banachraum und sind alle Abbildungen $T(t) \in \mathfrak{B}(X)$, so spricht man auch von einer Operatorhalbgruppe.

Definition 3.1.1. *Sei $(X, ||.||)$ ein Banachraum. Eine Abbildung $T : \ [0, \infty) \to \mathfrak{B}(X)$ heißt **Operatorhalbgruppe**, falls*

$$(i) \quad T(s+t) = T(s)T(t), \quad \textit{für alle } s, t \in [0, \infty), \tag{9}$$

$$(ii) \quad T(0) = I. \tag{10}$$

Die Standardsituation in der oftmals Operatorhalbgruppen in natürlicher Weise auftreten sind sogenannte abstrakte Cauchy-Probleme (ACP)

$$\begin{cases} \dot{u}(t) &= Au(t), \quad \text{für } t \geq 0, \\ u(0) &= x, \end{cases} \tag{11}$$

wobei A ein Linearer Operator auf einem Banachraum X ist. Existiert für jeden Punkt $x \in X$ ein globale Lösung $u(t,x)$, dann definiert

$$T(t)x \ := \ u(t,x), \quad t \geq 0, \ x \in X,$$

eine Operatorhalbgruppe auf X.

Beispiel: Das wohl bekannteste Beispiel für ein ACP ist der in der Quantenmechanik verwendetet Zeitentwicklungsoperator $U(t)$ zu einem zeitunabhängigen Hamiltonoperator H. Befindet man sich in einem Hilbertraum(Zustandsraum) $\mathcal{H}$, so genügt jeder Zustand $\psi(x,t)$ der Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) \ = \ H\psi(x,t),$$

wobei H ein selbstadjungierter, nicht notwendigerweise beschränkter, linearer Operator auf $\mathcal{H}$ ist. Wie man an der Gestalt leicht erkennt, beschreibt die Schrödigergleichung die zeitliche Entwicklung von Quantenzuständen und zwar in dem Sinn, dass jedem Quantenzustand eine Funktion $\psi(x,t)$ in Abhängigkeit von der Zeitvariable t und der Ortsvariable x zugeordnet wird und die Zeitableitung der Funktion durch den Operator H evaluiert werden kann. Verschiede Eigenschaften von ψ wie Parität oder Periodizität entsprechen dann den verschiedenen physikalischen Interpretationen.

Weil H ein selbstadjungierter linearer Operator ist, kann man den Operator $U(t) := e^{-\frac{i}{\hbar}tH}$ definieren[2], welcher der Differenzialgleichung $\frac{\partial}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}tH} = -\frac{i}{\hbar}He^{Ht}$ genügt. Damit lässt sich die zeitliche Entwicklung von ψ mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperators und des Grundzustandes beschreiben:

- $\psi(x,t) \ = \ U(t)\psi(x,0) \ = \ U(t)\psi_0(x)$,
- $U(0)\psi_0 \ = \ \psi_0$,
- $(U(t+s)\psi_0) \ = \ U(t)U(s)\psi_0$,
- für jede Funktion $\phi(x) \in \mathcal{H}$ gilt: $U(t)\phi(x)$ genügt der Schrödingergleichung.

[2]Ist H beschränkt, so lässt sich e^{Ht} einfach über das Riesz-Dunfordsche Funktionalkalkül definieren und auch die Gleichheit $\frac{\partial}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}tH} = -\frac{i}{\hbar}He^{-\frac{i}{\hbar}tH}$ lässt sich auf elementare Art und Weise nachrechnen. Ist H jedoch nicht beschränkt, so muss man auf den Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren zurückgreifen, was die Sache etwas verkompliziert.

3.2 Stark stetige Operatorhalbgruppen

Definition 3.2.1. *Eine Operatorhalbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf einem Banachraum X heißt* ***stark stetig Operatorhalbgruppe****, oder C_0-Halbgruppe, wenn die Abbildung $T : [0,\infty) \to \mathfrak{B}(X)$ bezüglich der starken Operatortopologie setig ist. Das ist genau dann der Fall, wenn für jedes $x \in X$ die Bahnkurve*

$$\xi_x : \ t \ \mapsto \ \xi_x(t) \ := \ T(t)x \tag{12}$$

eine stetige Abbildung von $\mathbb{R}^+$ nach $(X, ||.||)$ darstellt.

Unser nächstes Ziel ist es, zu untersuchen, unter welchen notwendigen beziehungsweise hinreichenden Bedingungen eine Operatorhalbgruppe stark stetig ist. Eines der fundamentalen Ergebnisse der Funktionalanalyis Familien von linearen, beschränkten Operatoren betreffend ist der Satz von Banach-Steinhaus oder auch bekannt als das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (uniform boundedness principle). Wenden wir dieses Wissen auf die Definition einer stark stetigen Operatorhalbgruppe an, erhalten wir folgendes Lemma:

Lemma 3.2.2. *Sei X ein Banchraum und sein T eine Funktion von einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ in den Raum $\mathfrak{B}(X)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*
(i): T ist stetig bezüglich der starken Operatortopologie auf $\mathfrak{B}(X)$, d.h. die Abbildungen

$$\begin{cases} K \ \to \ X \\ t \ \mapsto \ T(t)x \end{cases}$$

sind stetig für jedes $x \in X$.

(ii): Das Bild von K ist beschränkt in $\mathfrak{B}(X)$ und die Abbildungen

$$\begin{cases} K \ \to \ X \\ t \ \mapsto \ T(t)x \end{cases}$$

sind stetig in jedem Punkt x einer in X dichten Menge $D \subset X$.
(iii): Die Abbildung

$$\begin{cases} K \times C \ \to \ X \\ (t,x) \ \mapsto \ T(t)x \end{cases}$$

ist gleichmäßig stetig für jede in $(X, ||.||)$ kompakte Menge C.

Beweis. Die Richtung (iii) $\implies$ (i) ist trivial, da man als C das Singleton $\{x\}$ wählen kann, wodurch aus der gleichmäßigen Stetigkeit die Stetigkeit in der starken Operatortopologie folgt.

Auch die Richtung (i) $\implies$ (ii) ist nicht sehr aufwendig. Als dichte Teilmenge D wähle man ganz K und um zu zeigen, dass $T(K)$ beschränkt ist verwende man das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, welches direkt zum Ziel führt.

Nun zu (ii) $\implies$ (iii): Sei C ein in X kompakte Menge und sei die Abbildungsnorm $||T(t)|| \leq M$ für alle $t \in K$.

Wähle ein $\epsilon > 0$ beliebig:
Weil C totalbeschränkt ist existiert eine endliche Ansammlung von Punkten $x_1, \ \ldots, \ x_m \in D$, sodass die Umgebungen $U_{\frac{\epsilon}{M}}(x_i) := \{x \in X : ||x - x_i|| < \frac{\epsilon}{M}\}$ ganz C überdecken.
Nun wähle $\delta > 0$ derart, dass $T(t)x_i - T(s)x_i \leq \epsilon$ für alle $i = 1, \ \ldots, m$ und $s, t \in K$ mit $|s - t| \leq \delta$. Dies ist möglich, weil die Funktionen $T(t)x_i$, $t \in K$, als stetige Funktionen auf einem Kompaktum gleichmäßig stetig sind.

Daraus folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung für beliebige $x, y \in C$ mit $||x - y|| \leq \frac{\epsilon}{M}$ und $t, s \in K$ mit $|t - s| \leq \delta$

$$||T(t)x - T(s)y|| \leq$$

$$\leq ||T(t)(x - x_j)|| + ||(T(t) - T(s))x_j|| + ||T(s)(x_j - x)|| + ||T(s)(x - y)|| = 4\epsilon,$$

wobie j aus $\{1, \ \ldots, m\}$ so gewählt sei, sodass $||x - x_j|| \leq \frac{\epsilon}{M}$ erfüllt ist.

□

Satz 3.2.3. *Für eine Operatorhalbgruppe $T(t)_{t \geq 0}$ auf einem Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $T(t)_{t \geq 0}$ *ist stark stetig.*

(b) $\lim_{t \to 0} T(t)x = x$*, für alle* $x \in X$*.*

(c) Es existiert ein $\delta > 0$*,* $M \geq 1$ *und eine Dichte Teilmenge* $D \subseteq X$*, sodass*

(i): $||T(t)|| \leq M$*, für alle* $t \in [0, \delta]$*,*
(ii): $\lim_{t \to 0} T(t)x = x$*, für alle* $x \in D$*.*

Beweis. (a) $\implies$ (c): Wähle $D := X$ und wähle $\delta > 0$ beliebig. Dann ist die Bahnkurve

$$\xi_x : \begin{cases} [0, \delta] \to X \\ t \ \mapsto \ \xi_x(t) \ := \ T(t)x \end{cases}$$

zu jedem $x \in X$ als stetige Abbildung von einem Kompakten Intervall in einem Banachraum beschränkt. Damit gilt

$$\sup_{t\in[0,\delta]} ||T(t)x|| < \infty, \qquad \forall x \in X$$

und damit folgt nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

$$\sup_{t\in[0,\delta]} ||T(t)|| < \infty.$$

Damit ist (a) $\implies$ (c)$_{(i)}$ gezeigt. Der zweite Tail (a) $\implies$ (c)$_{(ii)}$ folgt direkt aus der starken Stetigkeit von $T(t)_{t\geq 0}$.

(c) $\implies$ (b): Um diese Richtung zu zeigen definieren wir die Menge $K := \{t_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ für eine beliebige Nullfolge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$. Es folgt aus der Annahme $t_n \to 0$, dass die Menge $\{||T(t_n)|| \ : \ t_n > \delta\}$ endlich ist, und damit ein Maximum M_0 besitzt. Damit gilt, zusammen mit den Vorraussetzungen von Punkt (c), dass das Bild von K unter T beschränkt ist mit der oberen Schranke $M_1 := \max\{M,\ M_0\}$. Zusätzlich ist $T(.)x : K \to X$ laut Vorraussetzungen stetig im Punkt 0 für jedes $x \in D$ und damit, weil K sich nur um 0 häuft, stetig auf ganz K. Aus Lemma 3.2.2$_{(ii)}$ folgt somit die Stetigkeit für alle $x \in X$ und weil t_n beliebig gewählt war, gilt dies sogar für alle Nullfolgen. Damit ist (c) $\implies$ (b) bewiesen.

(b) $\implies$ (a): Sei $t_0 > 0$ und sei $x \in X$. Aus

$$\lim_{h\searrow 0} ||T(t_0+h)x - T(t_0)x|| \leq ||T(t_0)|| \lim_{h\searrow 0} ||T(h)x - x|| = 0$$

folgt die Rechtsstetigkeit. Für den Fall $h < 0$ folgt aus

$$||T(t_0+h)x - T(t_0)x|| \leq ||T(t_0+h)||\ ||x - T(-h)x||$$

die Linksstetigkeit, wenn $||T(t_0+h)||$ für alle h aus einer Umgebung $(t_0+h_0, t_0]$, $h_0 < 0$, beschränkt ist. Um einzusehen, dass $||T(t)||_{t\in(t_0+h_0,t_0]}$ beschränkt ist, betrachten wir ein beliebiges $x \in X$.
Aus den Vorraussetzungen in (b) folgt $\lim_{t\searrow 0} ||T(t)x - x|| = 0$. Daraus folgt die Existenz eines $\delta > 0$, sodass alle $(T(t)x)_{t\in[0,\delta]}$ in $x + U_X$ enthalten sind und damit durch ein Konstante M beschränkt sind. Nun gilt

$$\sup_{t\in(t_0+h_0,t_0]} ||T(t)x|| \leq \sup_{t\in(0,t_0]} ||T(t)x|| \leq \max_{m=0}^{\lfloor\frac{t_0}{\delta}\rfloor} ||T(m\delta)||M < \infty.$$

Alles Weitere folgt wiederum aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.

□

3.3 Schwach stetige Operatorhalbgruppen

Ähnlich wie im vorrangegangenen Kapitel über stark stetige Operatorhalbgruppen kann man sich die Frage stellen, ob es Sinn macht, schwach stetige Operatorhalbgruppen zu definieren. Die Frage lautet demnach welche Aussagen man über Operatorhalbgruppen $T : (0, \infty] \to \mathfrak{B}(X)$ treffen kann, wenn man nicht wie im Kapitel zuvor Stetigkeit bezüglich der starken Operatortopologie fordert, sonder lediglich Stetigkeit bezüglich der schwachen Operatortopologie. Die erste Vermutung wäre, dass schwach stetige Opereratorhalbgruppen im allgemeinen weniger Eigenschaften besitzen als stark stetige. Denn immerhin ist jede stark stetige Operatorhalbgruppe auch schwach stetig, die Umkehrung scheint jedoch auf dem ersten Blick nicht zu gelten. Satz 3.3.2 beweist jedoch das Gegenteil.

Definition 3.3.1. *Eine Operatorhalbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf einem Banachraum X heißt* ***schwach stetig Operatorhalbgruppe****, wenn die Abbildung $T : [0, \infty) \to \mathfrak{B}(X)$ bezüglich der schwachen Operatortopologie setig ist. Das ist genau dann der Fall, wenn für alle $x \in X$ und für alle $f \in X'$ die Abbildung*

$$f(T(.)x) : \begin{cases} [0, \infty) \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(T(t)x) \end{cases} \tag{13}$$

stetig ist.

Satz 3.3.2. *Eine Operatorhalbgruppe $T(t)_{t\geq 0}$ ist genau dann stark stetig, wenn sie schwachstetig ist.*

Beweis. Zu zeigen ist nur, dass schwach stetig stark stetig impliziert. Sei K eine in $[0, \infty)$ kompakte Menge. Betrachte $T(t)x$ für festes x als lineare und beschränkte Abbildung von X' nach $\mathbb{C}$. Dann gilt auf Grund der schwachen Stetigkeit

$$\sup_{t\in K} f(T(t)x) < \infty, \qquad \forall f \in X'.$$

Damit gilt nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, dass

$$\sup_{t\in K} ||T(t)x|| < \infty, \qquad \forall x \in X.$$

Wenden wir darauf ein weiteres Mal das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit an erhalten wir

$$\sup_{t\in K} ||T(t)|| < \infty,$$

für alle kompakten Mengen K. Um die starke Stetigkeit der Operatorhalbgruppe nachzuweisen können wir demnach Satz $(3.2.3)_{(c)}$ verwenden. Zu zeigen bleibt damit noch, dass die Menge

$$E := \{x \in X : \lim_{t \searrow 0} ||T(t)x - x|| = 0\}$$

dicht in X ist.
Nun definieren wir für jedes $x \in X$ und $r > 0$ das Funktional

$$x_r(f) \ := \ \frac{1}{r} \int_0^r f(T(s)x)ds, \quad \forall f \in X'. \tag{14}$$

□

Dieses Funktional ist als Zusammensetzung von linearen Funktionen linear und erfüllt

$$|x_r(f)| \ \leq \ \frac{1}{r} \int_0^r |f(T(s)x)|ds \ \leq \ \sup_{t \in [0,r]} ||T(s)|| \ ||x|| \ ||f||,$$

Damit ist $x_r \in X''$.

Als nächstes betrachten wir die Funktion $T(.)x : [0,r] \to X$. Diese Funktion ist stetig bezüglich der $\sigma(X,X')$-Topologie. Um das einzusehen, bedenke man, dass $\sigma(X,X')$ die initiale Topologie bezüglich X' ist. Eine Funktion die nach X abbildet ist demnach genau dann stetig, wenn alle Verknüpfungen mit Funktionen aus X' stetig sind. In unserem Fall ist das genau die Forderung nach schwacher Stetigkeit für die Operatorhalbgruppe $T(t)$.

Als stetige Funktion bildet $T(.)x : [0,r] \to X$ kompakte Mengen auf kompakte Mengen ab und deshalb ist die Menge

$$\hat{B} := \{T(s)x \ : \ s \in [0,r]\}$$

$\sigma(X,X')$-kompakt für alle $r > 0$. Betrachte nun die Menge

$$B := \{T(s)x \ : \ s \in [0,r] \cap \mathbb{Q}\}$$

und definiere den Teilraum Y als $Y := \overline{span(B)}$. Da B abzählbar ist, ist Y ein bezüglich der Norm-Topologie separabler und abgeschlossener Teilraum. Damit gilt

$$\overline{B}^{\sigma(Y,Y')} = \overline{B}^{\sigma(X,X')}. \tag{15}$$

$\overline{B}^{\sigma(X,X')}$ ist eine schwach-abgeschlossene Teilmenge von $\hat{B}$ und damit selbst schwach kompakt. Deshalb ist auch $\overline{B}^{\sigma(Y,Y')}$ kompakt in $\sigma(Y,Y')$. Mit Satz 2.3.7 erhalten wir demnach, dass $\overline{co}(\overline{B}^{\sigma(Y,Y')})$ kompakt in $\sigma(Y,Y')$ ist und zwar unabhängig davon, ob die abgeschlossene Konvexe Hülle sich nun auf $(X, ||.||)$ oder auf $(Y, ||.||)$ bezieht.

Klarerweise ist $\overline{co}(B) \subseteq \overline{co}(\overline{B}^{\sigma(Y,Y')})$. Nach Lemma 2.1.4 gilt aber auch

$$\overline{\overline{co}(B)}^{\sigma(Y,Y')} = \overline{co}(B)$$

und damit folgt $\overline{co}(B) \supseteq \overline{B}^{\sigma(Y,Y')}$, was wiederum

$$\overline{co}(B) \supseteq \overline{co}(\overline{B}^{\sigma(Y,Y')})$$

impliziert. Damit ist die Gleichheit $\overline{co}(B) = \overline{co}(\overline{B}^{\sigma(Y,Y')})$ gezeigt und demzufolge ist auch $\overline{co}(B)$ eine $\sigma(Y,Y')$-kompakte Menge.
Folgern wir wie in (15), so erhalten wir:

$\overline{co}(B)$ ist $\sigma(X,X')$-kompakt.

Bezeichne $\mathfrak{R}_r$ die Menge aller Rieman-Zerlegungen $\mathcal{R} = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}, (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})})$ des Intervalls $[0,r]$ mit Zwischenstellen α_j, die ausschließlich aus $[0,r] \cap \mathbb{Q}$ stammen. Dann lässt sich (14) schreiben als

$$\begin{aligned} x_r(f) &= \frac{1}{r} \lim_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}_r} \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} (\xi_j - \xi_{j-1}) f(T(\alpha_j)x) = \\ &= \lim_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}_r} \Big(\sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \frac{(\xi_j - \xi_{j-1})}{r} T(\alpha_j)x \Big)(f). \end{aligned}$$

Diese Gleichheit gilt für alle $f \in X'$ woraus direkt folgt

$$x_r = \lim_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}_r} \Big(\sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \frac{(\xi_j - \xi_{j-1})}{r} T(\alpha_j)x \Big). \tag{16}$$

Auf Grund der Tatsache, dass das obige Integral existiert, existiert auch der Grenzwert in (16) und ist eindeutig bestimmt. Hinzu kommt noch, dass

$$\sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \frac{(\xi_j - \xi_{j-1})}{r} = \frac{(\xi_{n(\mathcal{R})} - \xi_1)}{r} = 1$$

ist und damit ist jede Partialsumme $\sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \frac{(\xi_j-\xi_{j-1})}{r} T(\alpha_j)x$ eine Konvexkombination von Werten $T(\alpha_j)x$ aus B und damit ist

$$\sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \frac{(\xi_j - \xi_{j-1})}{r} T(\alpha_j)x \ \in co(B),$$

woraus man

$$x_r \ = \ \lim_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}_r} \Big(\sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \frac{(\xi_j - \xi_{j-1})}{r} T(\alpha_j)x \ \Big) \in \overline{co}(B)$$

folgern kann. Daraus kann man $x_r \in X$ schließen, für alle $r \in \mathbb{Q}^+$.

Für jedes $x \in X$ ist

$$\lim_{r\searrow 0} |f(x_r) - f(x)| \leq \lim_{r\searrow 0} \sup_{s\in[0,r]} |f(T(s)x) - f(x)| = 0,$$

da die Operatorhalbgruppe $T(s)$ schwach stetig ist. Das heißt x_r konvergiert gegen x für $r \searrow 0$ bezüglich der schwachen Topologie und damit ist die Menge

$$D \ := \ \{x_r, r \in \mathbb{Q}^+, x \in X\}$$

schwach dicht in X. Auf Grund von Lemma 2.1.4 ist die Menge sogar dicht bezüglich der Norm-Topologie.

Andererseits gilt für alle x_r:

$$||T(t)x_r - x_r|| = \sup_{||f||\leq 1} |\frac{1}{r} \int_t^{t+r} f(T(s)x) - \frac{1}{r} \int_0^r f(T(s)x)| \leq$$

$$\leq \sup_{||f||\leq 1} |\frac{1}{r} \int_t^{t+r} f(T(s)x)| + |\frac{1}{r} \int_0^r f(T(s)x)| \leq$$

$$\leq \frac{2t}{r} ||x|| \sup_{s\in[0,r+t]} ||T(s)|| \xrightarrow{t\searrow 0} 0.$$

Daraus folgt $D \subseteq E$, und weil D bereits dicht in X ist, gilt dies auch für E. Damit ist der Beweis vollendet.

4 Literaturverzeichnis

[Wer06] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. 6. Aufl. Springer Berlin Heidelberg New York; 2007.

[Fab00] M. Fabian, P. Habala, P. Hajek. *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*. Springer-Verlag New York; 2001.

[EnNa] K.J. Engel, R. Nagel. *A Short Course on Operator Semigroups*. Springer Science+Business Media, LLC; 2006.

[aPaz] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations* . Springer-Verlag; 1992.