Technische Universität Wien

Bachelorarbeit

DIE FEYNMAN-KAC-FORMEL

Autor:
Stefan RIGGER

Betreuer:
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.
Harald WORACEK

25.11.2015

Inhaltsverzeichnis

1 Wiener-Maß und Wiener-Integral **5**

1.1 Das bedingte Wiener-Maß und $\mathcal{W}(q, q')$ . . . 5

1.1.1 Definitionsbereich und σ-Additivität . . . 5

1.1.2 Die Borel-σ-Algebra auf $(\mathcal{W}(q, q'), \|.\|_\infty)$ . . . 14

1.1.3 Das Wiener-Maß auf $\mathcal{W}(q, q', T)$ . . . 16

1.2 Das Wiener-Integral . . . 17

2 Die Trotter-Produktformel **18**

2.1 Lie-Produktformel . . . 18

2.2 Der Satz von Hille-Yoshida . . . 21

2.3 Die Trotter-Produktformel . . . 26

3 Die Feynman-Kac-Formel **31**

Einleitung

Physikalischer und historischer Hintergrund

In diesem Abschnitt soll die Feynman-Kac-Formel heuristisch hergleitet werden.

Man betrachte die zeitabhängige (nichtrelativistische) Schrödingergleichung für ein einzelnes Teilchen in einem elektrischen Feld

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V(x,t)\right]\Psi(x,t).$$

Wobei m die reduzierte Masse, V die potentielle Energie und Ψ die Wellenfunktion bezeichne. Wir können die rechte Seite dieser Gleichung als (unbeschränkten) linearen Operator $\hat{H}$ auffassen, *Hamiltonian* genannt:

$$-\frac{1}{\hbar}\hat{H} = \frac{\hbar}{2m}\Delta - \frac{1}{\hbar}M_V$$

wobei M_V der Multiplikationsoperator mit der Funktion V sei, d.h. $(M_V\Psi)(x) = V(x)\cdot\Psi(x)$. Damit lässt sich die Schrödingergleichung kompakt anschreiben als

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = -\frac{i}{\hbar}(\hat{H}\Psi)(x,t).$$

Unter gewissen Anforderungen an den Operator $\hat{H}$ kann die Lösung dieser Gleichung für beliebige Anfangsbedingungen durch eine Operatorhalbgruppe dargestellt werden, formal

$$\Psi(x,t) = e^{-it\hat{H}/\hbar}\varphi(x), \quad \text{mit} \quad \Psi(x,0) =: \varphi(x).$$

Die Idee von Feynman war, die **Trotter-Produktformel** zur Berechnung dieser Operatorhalbgruppe zu verwenden, die besagt, dass für eine gewisse Klasse von Operatoren A, B die Gleichung

$$e^{-t(A+B)} = \lim_{N\to\infty}\left(e^{-tA/N}e^{-tB/N}\right)^N$$

gilt, wobei der Grenzwert bezüglich der Hilbertraumnorm (im Fall von $\hat{H}$ die $L^2(\mathbb{R}^n)$-Norm) zu verstehen ist. Damit erhält man

$$e^{-it\hat{H}/\hbar}\varphi = \lim_{N\to\infty}\left(\exp\left[\frac{it\hbar\Delta}{2mN}\right]\exp\left[-\frac{itM_V}{N\hbar}\right]\right)^N\varphi.$$

Unter geeigneten Anforderungen an die Funktion φ gilt die Formel

$$e^{it\hbar\Delta/(2mN)}\varphi(q) = \left(\frac{mN}{it\hbar}\right)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(i\frac{mN}{2t\hbar}\|x-q\|^2\right)\varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Der Operator $\exp\left(-\frac{itM_V}{N\hbar}\right)$ ist gleich dem Multiplikationsoperator mit der Funktion $\exp(-itV/(N\hbar))$. Durch iteriertes Anwenden der Beziehung (1) erhalten wir die Darstellung

$$\left[\left(\exp\left\{\frac{it\hbar\Delta}{2mN}\right\}\exp\left\{-\frac{itM_V}{N\hbar}\right\}\right)^N\varphi\right](q) =$$
$$C_N\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(i\frac{mN}{2t\hbar}\|x_1-q\|^2\right)\exp\left(-\frac{itV(x_1)}{N\hbar}\right)\times\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(i\frac{mN}{2t\hbar}\|x_2-x_1\|^2\right)\exp\left(-\frac{itV(x_2)}{N\hbar}\right)$$
$$\times\ldots\times\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(i\frac{mN}{2t\hbar}\|x_N-x_{N-1}\|^2\right)\exp\left(-\frac{itV(x_N)}{N\hbar}\right)\varphi(x_N)dx_N\,dx_{N-1}\ldots dx_1$$

mit $C_N = (mN/(it\hbar))^{nN/2}$. Wenn wir $\epsilon = t/N$, $x_0 := q$ setzen und annehmen, dass die Integrationsreihenfolge beliebig vertauscht werden darf, erhalten wir

$$(e^{-it\hat{H}/\hbar}\varphi)(q) = \lim_{N\to\infty} C_N\int_{(\mathbb{R}^n)^N}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^N\epsilon\left[\frac{m}{2}\left\|\frac{x_j-x_{j-1}}{\epsilon}\right\|^2 - V(x_{j-1})\right]\right)\varphi(x_N)dx_1\,dx_2\ldots dx_N.$$

Bis zu diesem Punkt lässt sich die Herleitung auch in einer rigorosen Variante durchführen. Wir versuchen nun, den Limes zu berechnen: Man kann sich die Werte x_j, $j = 0,\ldots,N$ als die Werte eines Weges $x(s)$ an den Punkten $s_j := j\epsilon = jt/N$ denken, dann gilt $x_j = x(jt/N)$, und wegen $|s_j - s_{j-1}| = \epsilon$ kann die Größe $\|x_j - x_{j-1}\|/\epsilon$ als Approximation an die Ableitung von x nach s gesehen werden. Weiter kann der Integrand der obigen Gleichung als Riemann-Summe interpretiert werden. Bezeichnen wir die Menge aller stetigen Wege $x(s)$ von $[0,t]$ nach $\mathbb{R}^n$, die $x(0) = q$ erfüllen mit $\mathcal{W}_q$. Indem man nun auf hochgradig nichtrigorose Weise den Limes berechnet, erhält man

$$(e^{-it\hat{H}/\hbar}\varphi)(q) = C\int_{\mathcal{W}_q}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^t\left[\frac{m}{2}\left\|\frac{dx}{ds}\right\|^2 - V(x(s))\right]ds\right)\varphi(x(t))\mu(dx) \tag{2}$$

mit einer Normierungskonstanten C. Das Maß μ ist auf $\mathcal{W}_q$ definiert und sollte in einem gewissen Sinn als "Verallgemeinerung" des Lebesgue-Maßes auf $\mathcal{W}_q$ interpretierbar sein. Interessant an der obigen Formel ist, dass der Integrand im Exponenten der Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ des Teilchens entspricht, $\mathcal{L} = T - V$ wobei $T = (1/2)m\|v\|^2$ die kinetische Energie des Teilchens ist und V dessen potentielle Energie. Die Formel (2) ist als *Pfadintegralformel von Feynman* bekannt und ist der Ausgangspunkt für die Pfadintegralformulierung der Quantenmechanik. Es fällt jedoch schwer, der obigen Formel streng Sinn zu verleihen, da einerseits das Maß μ in einem gewissen Sinn eine Verallgemeinerung des Lebesgue-Maßes sein sollte, es aber keine "vernünftige" (i.e. σ-endliche und translationsinvariante) Verallgemeinerung des Lebesgue-Maßes auf $C[0,1]$ gibt. Darüberhinaus ist offensichtlich die Folge der Konstanten C_N bestimmt divergent.

Um die Gültigkeit der Pfadintegralformel von Feynman mathematisch streng zu beweisen, untersuchte Mark Kac Operatoren der Form $\exp(-t\hat{H}/\hbar)$. Hat man die Formel für Operatoren dieses Typs bewiesen, kann man versuchen durch analytische Fortsetzung auf die Operatoren des Typs $\exp(-it\hat{H}/\hbar)$ zu schließen. Das formale Analogon von (2) für diesen Fall lautet

$$(e^{-t\hat{H}/\hbar}\varphi)(q) = C\int_{\mathcal{W}_q}\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_0^t\left[\frac{m}{2}\left\|\frac{dx}{ds}\right\|^2 + V(x(s))\right]ds\right)\varphi(x(t))\mu(dx). \tag{3}$$

Die Idee von Kac war, den quadratischen Teil des Exponenten separat zu betrachten und den Ausdruck

$$C \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \int_0^t \frac{m}{2} \left\| \frac{dx}{ds} \right\|^2 ds \right) \mu(dx) \tag{4}$$

als Maß auf $\mathcal{W}_q$ zu betrachten. Die spezielle Form von (4) lässt vermuten, dass es sich dabei um ein Gaußmaß handelt. Tatsächlich wird diese Rolle vom **Wiener-Maß** eingenommen.

Über die Arbeit

In Kapitel 1 wird das Wiener-Maß eingeführt und es werden die für den Beweis der Feynman-Kac-Formel wesentlichen Eigenschaften des Wiener-Maßes bewiesen. Der Inhalt dieses Kapitels ist eine Adaption/Verallgemeinerung von Kapitel I.3 in [3], für das Verständnis dieses Teiles sind Kenntnisse aus elementarer Analysis sowie Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie erforderlich.

In Kapitel 2 wird die Trotter-Produktformel gezeigt, die Beweise dieses Kapitels orientieren sich an [1], Seiten 8-15 sowie 27-30 und [2], Kapitel A.5. Für das Verständnis dieses Kapitels ist grundlegendes Wissen aus Funktionalanalysis notwendig.

In Kapitel 3 werden die Ergebnisse der beiden vorangegangen Kapitel verwendet um das Endresultat, die Feynman-Kac-Formel zu zeigen. Die Grundidee für diesen Beweis wurde aus [2], Kapitel 3 übernommen.

Kapitel 1

Wiener-Maß und Wiener-Integral

1.1 Das bedingte Wiener-Maß und $\mathcal{W}(q, q')$

1.1.1 Definitionsbereich und σ-Additivität

Definition 1.1. Es sei n eine natürliche Zahl und $q, q' \in \mathbb{R}^n$. Dann sei $\mathcal{W}(q, q', [0,1])$ definiert als die Menge aller stetigen Funktionen γ von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}^n$, die die Randbedingung $\gamma(0) = q$ und $\gamma(1) = q'$ erfüllen. Wir schreiben auch $\mathcal{W}(q, q')$ oder einfach $\mathcal{W}$.

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, das Wiener-Maß w einzuführen und zu zeigen, dass es sich dabei um ein endliches Maß auf der Borel-σ-Algebra auf $(\mathcal{W}(q, q', [0,1]), \|.\|_\infty)$ handelt, wobei $\|.\|_\infty$ die Supremumsnorm bezeichnet. Dazu betrachten wir zunächst ein einfaches Erzeugendensystem dieser σ-Algebra.

Definition 1.2. Wir bezeichnen eine Menge $I \subseteq \mathcal{W}$ als **Zylindermenge**, wenn sie sich für ein $m \in \mathbb{N}$ anschreiben lässt als

$$I = \{\gamma \in \mathcal{W} \mid (\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m)) \in A\},$$

wobei $A \subseteq \mathbb{R}^{nm}$ eine Borelmenge sei und $0 < t_1 < \dots < t_n < 1$. Für die obige Menge I schreiben wir auch abkürzend

$$I = R(t_1, ..., t_m; A).$$

Satz 1.3. *Die Menge aller Zylindermengen $\mathfrak{R}$ ist eine Algebra.*

Beweis. Offenbar gilt $\mathfrak{R} \neq \emptyset$. Wir zeigen die Abgeschlossenheit unter Vereinigungen für $I, J \in \mathfrak{R}$:

$$I = \{\gamma \in \mathcal{W} \mid (\gamma(t_1), ..., \gamma(t_m)) \in A\}, \quad J = \{\gamma \in \mathcal{W} \mid (\gamma(s_1), ..., \gamma(s_k)) \in B\}.$$

Es sei $0 < r_1 < ... < r_l < 1$ so gewählt, dass $\{r_1, ..., r_l\} = \{t_1, ..., t_m\} \cup \{s_1, ..., s_k\}$. Wählt man eine Permutation σ_A so, dass die ersten mn Einträge von $\sigma_A \circ (\gamma(r_1), ..., \gamma(r_l))$ genau $(\gamma(t_1), ..., \gamma(t_m))$ sind und eine Permutation σ_B so, dass die ersten kn Einträge von $\sigma_B \circ (\gamma(r_1), ..., \gamma(r_l))$ genau $(\gamma(s_1), ..., \gamma(s_k))$ sind, gilt

$$I = \{\gamma \in \mathcal{W} \mid \sigma_A \circ (\gamma(r_1), ..., \gamma(r_l)) \in A \times \mathbb{R}^{(l-m)n}\}, \tag{1.1}$$

$$J = \{\gamma \in \mathcal{W} \mid \sigma_B \circ (\gamma(r_1), ..., \gamma(r_l)) \in B \times \mathbb{R}^{(l-k)n}\}. \tag{1.2}$$

Es folgt

$$I \cup J = \left\{\gamma \in \mathcal{W} \mid (\gamma(r_1), ..., \gamma(r_l)) \in \sigma_A^{-1}(A \times \mathbb{R}^{(l-m)n}) \cup \sigma_B^{-1}(B \times \mathbb{R}^{(l-k)n})\right\} \in \mathfrak{R}.$$

Dass mit I auch I^c in $\mathfrak{R}$ liegt, sieht man noch einfacher:

$$I^c = \{\gamma \in \mathcal{W} \mid (\gamma(t_1), ..., \gamma(t_m)) \in A\}^c = \{\gamma \in \mathcal{W} \mid (\gamma(t_1), ..., \gamma(t_m)) \in A^c\} \in \mathfrak{R}.$$

□

Bemerkung 1.4. Das Mengensystem $\mathfrak{R}$ ist keine σ-Algebra, wie man sich leicht anhand eines Beispiels klar machen kann: Sei $\gamma_0 \in \mathcal{W}$ fest gewählt, dann gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=0}^{2^n} \left\{\gamma \in \mathcal{W} \mid \gamma\left(\frac{k}{2^n}\right) = \gamma_0\left(\frac{k}{2^n}\right)\right\} = \{\gamma_0\}.$$

Offenbar enhält $\mathfrak{R}$ keine einelementigen Mengen, also liegt diese Menge nicht in $\mathfrak{R}$.

Bemerkung 1.5. Inwieweit ist die Darstellung einer Menge als Zylindermenge eindeutig? Betrachten wir den Fall zweier nichtleerer Zylindermengen, die sich nur an einer „Stützstelle“ s unterscheiden und sei diese zunächst am Ende angehängt , d.h.

$$R(t_1, ..., t_m; A) = R(t_1, ..., t_m, s; B).$$

Für beliebiges $a \in A$ können wir durch passende Parametrisierung nun einen Polygonzug $p \in \mathcal{W}$ mit $(p(t_1), ..., p(t_m)) = a$ finden. Für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ können wir p zu einem Polygonzug $\overline{p} \in W$ mit $(\overline{p}(t_1), .., \overline{p}(t_m), \overline{p}(s)) = a \times x$ abändern und sehen, dass jeder solche Polygonzug $\overline{p}$ in der Menge $R(t_1, .., t_m, s; B)$ liegen muss. Es folgt $B = A \times \mathbb{R}^n$. Für den Fall, dass die sich unterscheidende Stützstelle s an einer beliebigen Stelle in der Kette $t_1 < ... < s < ... < t_m$ befindet, folgt mit einer passend gewählten Permutation σ

$$B = \sigma^{-1}(A \times \mathbb{R}^n).$$

Definition 1.6. Sei I eine Zylindermenge wie in Satz 1.3. Dann ist das Wiener-Maß w von I definiert durch $(t_0 := 0,\ u_0 := q,\ t_{m+1} := 1,\ u_{m+1} := q')$

$$w(I) := \prod_{i=1}^{m+1} [2\pi(t_i - t_{i-1})]^{-n/2} \cdot \int_A \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+1} \frac{\|u_i - u_{i-1}\|^2}{t_i - t_{i-1}}\right) du_1 du_2 ... du_m \qquad (1.3)$$

Definition 1.7. Wir führen Abkürzungen für Dichten von Normalverteilungen ein, es sei

$$\varphi(x) := [2\pi]^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad \varphi_t(x) := [2\pi t]^{-1/2} \exp\left(\frac{-x^2}{2t}\right).$$

Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ bezeichne $\mathcal{F}[f](k)$ die Fouriertransformierte von f an der Stelle k, d.h.

$$\mathcal{F}[f](k) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \exp(-ikx) dx$$

Lemma 1.8. *Für $t, s > 0$ gilt die Beziehung $\varphi_{t+s} = (\varphi_t * \varphi_s)$, das heißt*

$$[2\pi(t+s)]^{-1/2} \exp\left(\frac{-x^2}{2(t+s)}\right) = [(2\pi)^2 ts]^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-y)^2}{t} + \frac{y^2}{s}\right]\right) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst
$$\mathcal{F}[\varphi_t](k) = \exp\left(-\frac{tk^2}{2}\right).$$
Es sei daran erinnert, dass die Funktion φ die eindeutige Lösung der Differentialgleichung
$$\varphi' + x\varphi = 0,\ \varphi(0) = (2\pi)^{-1/2}$$
ist. Wendet man auf beide Seiten dieser Gleichung die Fouriertransformation an, so sieht man, dass $\mathcal{F}[\varphi]$ Lösung derselben Differentialgleichung ist, wobei aber $\mathcal{F}[\varphi](0) = 1$ gilt. Damit ist die obige Behauptung für $t = 1$ gezeigt, für allgemeines $t > 0$ folgt mit der Substitution $y = x/\sqrt{t}$
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\varphi_t](k) &= [2\pi t]^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t} - ikx\right) dx = [2\pi]^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{2} - ik\sqrt{t}y\right) dy \\ &= \mathcal{F}[\varphi](\sqrt{t}k) = \exp\left(-\frac{tk^2}{2}\right).\end{aligned}$$
Es folgt
$$\mathcal{F}[\varphi_{t+s}] = \mathcal{F}[\varphi_t] \cdot \mathcal{F}[\varphi_s] = \mathcal{F}[\varphi_t * \varphi_s].$$
Die Behauptung folgt nun daraus, dass die Fouriertransformation auf der Schwartzklasse injektiv ist. □

Satz 1.9. *Das Wiener-Maß ist ein Inhalt auf* $\mathfrak{R}$.

Beweis. Nach Bemerkung 1.5 ist die Darstellung einer Menge als Zylindermenge nicht eindeutig, wir zeigen deshalb zuerst die Wohldefiniertheit für zwei nichtleere Zylindermengen (die leere Menge lässt sich auf vielfältige Weise als Zylindermenge anschreiben, trivialerweise liefert aber jede dieser Darstellungen den Wert 0). Wir wollen mit den Bezeichnungen von Bemerkung 1.5 folgendes zeigen:
$$w(R(t_1, ..., t_m; A)) = w(R(t_1, ..., t_{l-1}, s, t_l, ..., t_m; \sigma^{-1}(A \times \mathbb{R}^n))).$$
Es genügt dabei, die Gleichheit für Produkte von Intervallen zu zeigen. Durch Einsetzen in (1.3) wird klar, dass die behauptete Gleichheit sicher erfüllt ist wenn gilt
$$[(2\pi)^2(s - t_{l-1})(t_l - s)]^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{\|u_s - u_{l-1}\|^2}{s - t_{l-1}} + \frac{\|u_l - u_s\|^2}{t_l - s}\right]\right) du_s = \tag{1.4}$$
$$[2\pi(t_l - t_{l-1})]^{-n/2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\|u_l - u_{l-1}\|^2}{t_l - t_{l-1}}\right). \tag{1.5}$$
Wir zeigen diese Gleichheit komponentenweise: für die erste Komponente soll gelten
$$[(2\pi)^2(t_l - s)(s - t_{l-1})]^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{(u_l^{(1)} - z)^2}{t_l - s} + \frac{(z - u_{l-1}^{(1)})^2}{s - t_{l-1}}\right]\right) dz = \tag{1.6}$$
$$[2\pi(t_l - t_{l-1})]^{-1/2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(u_l^{(1)} - u_{l-1}^{(1)}\right)^2}{t_l - t_{l-1}}\right). \tag{1.7}$$
Dies folgt aus Lemma 1.8, wenn man die Substitution $z = y + u_{l-1}^{(1)}$ durchführt und $x = u_l^{(1)} - u_{l-1}^{(1)}$ einsetzt. Indem man das Produkt über alle Komponenten bildet erhält man die behauptete

Gleichheit und damit die Wohldefiniertheit.

Wir zeigen die Additivität. Für $I, J \in \mathfrak{R}$ übernehmen wir die Bezeichungen aus Satz 1.3. Wenn man den Beweis von Satz 1.3 betrachtet wird die folgende Äquivalenz klar:

$$I \cap J = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_A^{-1}(A \times \mathbb{R}^{(l-m)m}) \cap \sigma_B^{-1}(B \times \mathbb{R}^{(l-k)n}) = \emptyset.$$

Wenn man nun $w(I), w(J)$ unter Verwendung der Darstellung in Gleichung 1.1 respektive 1.2 ausrechnet, ist die Additivität klar. □

Bemerkung 1.10. Mithilfe von Lemma 1.8 kann leicht die Gesamtmasse von w berechnet werden. Es gilt mit $t \in (0,1)$ beliebig

$$w(\mathcal{W}(q,q')) = w(\{\gamma \in \mathcal{W} \mid \gamma(t) \in \mathbb{R}^n\}) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|q'-q\|^2}{2}\right).$$

Das bedingte Wiener-Maß ist demnach kein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Beispiel 1.11. Für $0 < t < 1$, A Borelmenge im $\mathbb{R}^n$ und $\mu := tq' + (1-t)q$ gilt

$$\begin{aligned} w(\{\gamma \in \mathcal{W} \mid \gamma(t) \in A\}) &= [(2\pi)^2 t(1-t)]^{-n/2} \int_A \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{\|q-u\|^2}{t} + \frac{\|q'-u\|^2}{1-t}\right]\right) du \\ &= [(2\pi)^2 t(1-t)]^{-n/2} \int_A \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{\|u-\mu\|^2}{t(1-t)} + \|q'-q\|^2\right]\right) du \\ &= w(\mathcal{W}) \cdot [2\pi t(1-t)]^{-n/2} \int_A \exp\left(-\frac{\|u-\mu\|^2}{2t(1-t)}\right) du. \end{aligned}$$

Beispiel 1.12. Es sei $0 < s < t < 1$ und zunächst $n = 1$ angenommen, $a < b$ und es bezeichne $E := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : a \leq v - u \leq b\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &w(\{\gamma \in \mathcal{W} \mid \gamma(t) - \gamma(s) \in (a,b]\}) = w(\{\gamma \in \mathcal{W} \mid (\gamma(s), \gamma(t)) \in E\}) = \\ &= [(2\pi)^3 s(t-s)(1-t)]^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \int_{u+a}^{u+b} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{(u-q)^2}{s} + \frac{(v-u)^2}{t-s} + \frac{(q'-v)^2}{1-t}\right]\right) dvdu. \end{aligned}$$

Die Transformation $\alpha = u - q$, $\beta = v - u$ führt auf

$$= [(2\pi)^3 s(t-s)(1-t)]^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \int_a^b \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha^2}{s} + \frac{\beta^2}{t-s} + \frac{(q'-q-\beta-\alpha)^2}{1-t}\right]\right) d\beta d\alpha.$$

Eine Vertauschung der Integrationsreihenfolge zusammen mit Lemma 1.8 führt auf

$$\begin{aligned} &= [(2\pi)^2 (t-s)(1-(t-s))]^{-1/2} \int_a^b \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{\beta^2}{t-s} + \frac{(q'-q-\beta)^2}{1-(t-s)}\right]\right) d\beta \\ &= [(2\pi)^2 (t-s)(1-(t-s))]^{-1/2} \int_a^b \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{(\beta-(t-s)(q'-q))^2}{(t-s)(1-(t-s))} + (q'-q)^2\right]\right) d\beta. \end{aligned}$$

Durch Aufmultiplizieren folgt für beliebiges n und für jede Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} &w(\{\gamma \in \mathcal{W} \mid \gamma(t) - \gamma(s) \in A\}) = \\ &= w(\mathcal{W}) \cdot [(2\pi(t-s)(1-(t-s))]^{-n/2} \int_A \exp\left(\frac{\|x-(t-s)(q'-q)\|^2}{2(t-s)(1-(t-s))}\right) dx. \end{aligned}$$

Definition 1.13. Sei S die Menge aller Binärzahlen im Intervall $[0,1]$. Für $\alpha > 0$, $m \in \mathbb{N}$ führen wir folgende Bezeichnungen ein:

1. $H_\alpha[a] := \{\gamma \in \mathcal{W} \mid \exists s_1, s_2 \in S \ : \ \|\gamma(s_1) - \gamma(s_2)\| > a|s_1 - s_2|^\alpha \}$
2. $H_\alpha := \{\gamma \in \mathcal{W} \mid \forall a > 0\ \exists s_1, s_2 \in S \ : \ \|\gamma(s_1) - \gamma(s_2)\| > a|s_1 - s_2|^\alpha \}$
3. $I_{\alpha,a,k,m} := \left\{\gamma \in \mathcal{W} \mid \left\|\gamma\left(\frac{k}{2^m}\right) - \gamma\left(\frac{k-1}{2^m}\right)\right\| > a\left(\frac{1}{2^m}\right)^\alpha\right\}$, $k = 1, 2, 3, \dots, 2^m$

Das von w induzierte äußere Maß wird im Weiteren als w^* bezeichnet.

Lemma 1.14. *Es sei* $0 < \alpha < 1$ *und* $a > 0$. *Erfüllt* $\gamma \in \mathcal{W}$ *die Bedingung*

$$\left\|\gamma\left(\frac{k}{2^m}\right) - \gamma\left(\frac{k-1}{2^m}\right)\right\| \leq a\left(\frac{1}{2^m}\right)^\alpha \qquad m \in \mathbb{N},\ k \in \{1, \dots, 2^m\},$$

so folgt

$$\|\gamma(s_1) - \gamma(s_2)\| \leq \frac{2a}{1-2^{-\alpha}}|s_1 - s_2|^\alpha \quad s_1, s_2 \in S.$$

Beweis. Wir können O.B.d.A. $s_1 < s_2$ und $[s_1, s_2] \neq [0,1]$ annehmen, da der Fall $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ direkt aus der Voraussetzung mit $m = 0$ folgt. Da die Differenz zweier Binärzahlen wiederum eine Binärzahl ist, besitzt $s_2 - s_1$ eine Darstellung der Form

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{2^{k_1}} + \frac{1}{2^{k_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{k_j}} \quad \text{mit} \quad k_1 < k_2 < \ldots < k_j.$$

Betrachten wir die Intervalle

$$[s_1, s_1 + \frac{1}{2^{k_j}}], [s_1 + \frac{1}{2^{k_j}}, s_1 + \frac{1}{2^{k_j}} + \frac{1}{2^{k_{j-1}}}], \ldots, [s_2 - \frac{1}{2^{k_1}}, s_2].$$

Durch Bilden einer Teleskopsumme und Verwenden der Voraussetzung folgt

$$\|\gamma(s_2) - \gamma(s_1)\| \leq 2a\sum_{i=k_1}^{k_j}\left(\frac{1}{2^i}\right)^\alpha \leq 2a\sum_{i=k_1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^i}\right)^\alpha = 2a \cdot \frac{\left(\frac{1}{2^{k_1}}\right)^\alpha}{1-2^{-\alpha}} \leq \frac{2a}{1-2^{-\alpha}}(s_2 - s_1)^\alpha.$$

□

Definition 1.15. Für $t > 0$ ist die Gammafunktion definiert durch

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1}\exp(-x)\,dx$$

Als unvollständige obere Gammafunktion wird die folgende Funktion bezeichnet ($b > 0$):

$$\Gamma(t, b) := \int_b^\infty x^{t-1}\exp(-x)\,dx$$

Lemma 1.16. *Es gilt für* $k \in \mathbb{N}$

$$\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k)!}{4^k k!}\sqrt{\pi}.$$

Beweis. Die folgende Relation kann leicht mittels partieller Integration gezeigt werden:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0.$$

Mit dieser Identität kann die Behauptung durch vollständige Induktion gezeigt werden. □

Lemma 1.17. *Für natürliche Zahlen $k \geq 1$ gilt*

$$\Gamma(k,b) = (k-1)! \cdot \exp(-b) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{b^i}{i!}$$

Beweis. Die folgende Rekursionsrelation kann unmittelbar durch partielle Integration gezeigt werden:

$$\Gamma(k,b) = (k-1) \cdot \Gamma(k-1,b) + b^{k-1} \exp(-b).$$

Die Behauptung folgt mittels vollständiger Induktion. □

Definition 1.18. Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir die Zufallsvariable Y mit der Dichte

$$f_Y(x) := \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} \exp(-x/2)$$

als Chiquadratverteilung mit Freiheitsgrad k, in Zeichen $Y \sim \chi_k(0)$

Lemma 1.19. *Ist Y_k eine Chiquadratverteilung mit Freiheitsgrad k, so folgt für die charakteristische Funktion*

$$\mathbb{E}[\exp(itY_k)] = \mathcal{F}[f_{Y_k}](-t) = (1-2it)^{-k/2}$$

Beweis.

$$\mathcal{F}[f_{Y_k}](-t) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \int_{\mathbb{R}} x^{k/2-1} \exp(-x/2 + itx)dx = \frac{1}{\Gamma(k/2)} \int_{\mathbb{R}} x^{k/2-1} \exp(-x(1-2it))dx.$$

Die Substiution $u = x(1-2it)$ führt auf

$$= \frac{1}{\Gamma(k/2)} (1-2it)^{-k/2} \int_{\mathbb{R}} u^{k/2-1} \exp(-u)du = (1-2it)^{-k/2}.$$

□

Satz 1.20. *Es seien $X_1, .., X_n$ unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen, wobei $X_i \sim N(\mu_i, 1)$. Sei $\lambda := \sum_{i=1}^n \mu_i^2$ und es bezeichne $Y_l \sim \chi_l(0)$ mit Dichte f_{Y_l}. Dann hat die Zufallsvariable $Y := \sum_{i=1}^n X_i^2$ die Dichte*

$$f_Y(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda/2)(\lambda/2)^i}{i!} f_{Y_{n+2i}}(x). \tag{1.8}$$

Beweis. Offenbar gilt $f_Y \in L^1(\mathbb{R})$. Mit dem Satz von Fubini und Lemma 1.19 folgt

$$\mathcal{F}[f_Y](t) = \exp(-\lambda/2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^j}{j!} \cdot \mathcal{F}[f_{Y_{n+2j}}](t) = (1+2it)^{-n/2} \exp(-\lambda/2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^j}{j!} (1+2it)^{-j}$$
$$= (1+2it)^{-n/2} \exp\left(\frac{\lambda it}{1+2it}\right).$$

Wir berechnen die Dichte von X_k^2 für $k \in \{1, \ldots, n\}$. Es gilt

$$P(X_k^2 \leq x) = P(X_k \leq \sqrt{x}) + P(X_k \geq -\sqrt{x}).$$

Setzt man auf der rechten Seite ein und differenziert nach x, ergibt sich

$$\begin{aligned} f_{X_k^2}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi x}}\left[\exp\left(\frac{(\sqrt{x}-\mu_k)^2}{2}\right)+\exp\left(\frac{(\sqrt{x}+\mu_k)^2}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\exp\left(-\frac{(x+\mu_k^2)}{2}\right)\cdot\cosh(\sqrt{x}\mu_k). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Potenzreihenentwicklung des Cosinus Hyperbolicus ergibt

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\exp\left(-\frac{(x+\mu_k^2)}{2}\right)\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(x\mu_k^2)^j}{(2j)!}.$$

Was mit Lemma 1.16 umgeformt werden kann zu

$$= \exp\left(-\frac{\mu_k^2}{2}\right)\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\mu_k^2/2)^j}{(j)!}\frac{x^{(2j+1)/2-1}\exp\left(-x/2\right)}{2^{(2j+1)/2}\Gamma((2j+1)/2)}$$

Dies entspricht genau der Form (1.8) für $n=1$, folglich muss gelten

$$\mathcal{F}[f_{X_k^2}](t) = (1+2it)^{-1/2}\exp\left(\frac{\mu_k^2 it}{1+2it}\right).$$

Aufgrund der Faltungseigenschaft der Fouriertransformation muss die Fouriertransformation der Dichte der Zufallsvariable $\sum_{j=1}^n X_i^2$ gleich dem Produkt der Fouriertransformationen der einzelnen Dichten sein, also gleich

$$\prod_{k=1}^{n}\mathcal{F}[f_{X_k^2}](t) = (1+2it)^{-n/2}\exp\left(\frac{\lambda it}{1+2it}\right).$$

Da die Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R})$ injektiv ist, muss daher f_Y (fast überall) gleich der Dichte von $\sum_{k=1}^n X_i^2$ sein. □

Definition 1.21. Verteilungen mit einer Dichte der Form (1.8) werden als nichtzentrale Chiquadrat-Verteilungen bezeichnet, wir schreiben auch $Y \sim \chi_n(\lambda)$.

Lemma 1.22. *Es seien $X_1,...,X_n$ unabhängige normalverteilte Zufallsvariable, wobei $X_i \sim N(\mu_i,\sigma)$. Die Zufallsvariable $\|X\|$ sei gegeben durch $\|X\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}$. Dann gilt mit $\lambda := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mu_i}{\sigma}\right)^2$*

$$P(\|X\|>c) \le 2^{n/2}\cdot\exp\left(-\frac{c^2}{\sigma^2}+\frac{\lambda}{2}\right).$$

Beweis. Es sei $p := \lceil\frac{n}{2}\rceil$. Ist n ungerade, so sei $X_{2p} \sim N(0,\sigma)$ sodass $X_1,...,X_{2p}$ unabhängig bleiben. Damit gilt jedenfalls

$$P(\|X\|>c) \le P\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{2p}X_i^2}>c\right) = P\left(\sum_{i=1}^{2p}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 > \left(\frac{c}{\sigma}\right)^2\right)$$

Diese Wahrscheinlichkeit kann mithilfe von Satz 1.20 berechnet werden. Wir führen für die weitere Rechnung die Abkürzung $b := (c/\sigma)^2$ ein. Damit folgt

$$P\left(\sum_{i=1}^{2p}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 > b\right) = \int_b^\infty \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda/2)(\lambda/2)^i}{i!} \frac{1}{2^{p+i}\Gamma(p+i)} x^{p+i-1}\exp(-x/2)dx$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda/2)(\lambda/2)^i}{i!} \frac{1}{2^{p+i}\Gamma(p+i)} \int_b^\infty x^{p+i-1}\exp(-x/2)\,dx$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda/2)(\lambda/2)^i}{i!} \frac{1}{\Gamma(p+i)} \int_{2b}^\infty x^{p+i-1}\exp(-x)\,dx$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda/2)(\lambda/2)^i}{i!} \frac{\Gamma(p+i,2b)}{\Gamma(p+i)}$$

Die Vertauschung von Integration und Summation kann hier beispielsweise mit dem Satz von Fubini gerechtfertigt werden. Mit der Identität $\Gamma(p) = (p-1)!$ und Lemma 1.17 folgt weiter

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda/2)(\lambda/2)^i}{i!} \exp(-2b) \sum_{k=0}^{p+i-1} \frac{(2b)^k}{k!} \leq 2^{p-1}\exp(-2b-\lambda/2)\cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \sum_{k=0}^{p+i-1} \frac{b^k}{k!}$$
$$\leq\ 2^{p-1}\cdot\exp\left(-b+\frac{\lambda}{2}\right).$$

□

Definition 1.23. Für $I \in \mathfrak{R}$ sei $\hat{w}$ definiert als

$$\hat{w}(I) := w(I)/w(\mathcal{W})$$

Lemma 1.24. *Für $I_{\alpha,a,k,m}$ wie in Definition 1.13 gilt die Abschätzung*

$$w(I_{\alpha,a,k,m}) \leq \pi^{-n/2}\cdot\exp\left(-a^2\left(\frac{1}{2^m}\right)^{2\alpha-1}\right).$$

Beweis. Nach Beispiel 1.12 gilt, dass die i-te Komponente von $\gamma\left(\frac{k}{2^m}\right) - \gamma\left(\frac{k-1}{2^m}\right)$ unter $\hat{w}$ normalverteilt ist mit Erwartungswert $\mu_i = 2^{-m}\cdot(q'^{(i)} - q^{(i)})$ und Varianz $\sigma^2 = \frac{1}{2^m}\cdot(1-\frac{1}{2^m})$. Es folgt mit Lemma 1.22

$$\hat{w}\left(\left\|\gamma\left(\frac{k}{2^m}\right) - \gamma\left(\frac{k-1}{2^m}\right)\right\| > a\left(\frac{1}{2^m}\right)^\alpha\right) \leq 2^{n/2}\cdot\exp\left(-\frac{a^2\left(\frac{1}{2^m}\right)^{2\alpha-1}}{1-\frac{1}{2^m}} + \frac{\left(\frac{1}{2^m}\right)^2\|q'-q\|^2}{\frac{1}{2^{m-1}}\left(1-\frac{1}{2^m}\right)}\right)$$
$$\leq 2^{n/2}\cdot\exp\left(-a^2\left(\frac{1}{2^m}\right)^{2\alpha-1} + \frac{\|q'-q\|^2}{2}\right).$$

Für w folgt damit

$$w(I_{\alpha,a,k,m}) = \hat{w}(I_{\alpha,a,k,m})\cdot w(\mathcal{W})\ \leq\ \pi^{-n/2}\cdot\exp\left(-a^2\left(\frac{1}{2^m}\right)^{2\alpha-1}\right).$$

□

Proposition 1.25. *Für $\alpha < 1/2$ gilt*

$$\lim_{a\to\infty} w^*\left(H_\alpha\left[\frac{2a}{1-2^{-\alpha}}\right]\right) = 0.$$

Beweis. Nach Lemma 1.14 gilt

$$\bigcap_{m=0}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{2^m} I^c_{\alpha,a,k,m} \subseteq H_\alpha\left[\frac{2a}{1-2^{-\alpha}}\right]^c \quad \Leftrightarrow \quad H_\alpha\left[\frac{2a}{1-2^{-\alpha}}\right] \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^m} I_{\alpha,a,k,m}$$

Unter Verwendung der Subadditvität von w^* und Lemma 1.24 erhalten wir

$$\begin{aligned} w^*\left(H_\alpha\left[\frac{2a}{1-2^{-\alpha}}\right]\right) &\le \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^m} w(I_{\alpha,a,k,m}) = \pi^{-n/2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^m}\exp\left(-a^2\left(\frac{1}{2^m}\right)^{2\alpha-1}\right) \\ &= \pi^{-n/2}\sum_{m=0}^{\infty} 2^m\exp\left(-a^2\left(\frac{1}{2^m}\right)^{2\alpha-1}\right). \end{aligned}$$

Mit $\delta := 1/2-\alpha$ und der Abschätzung $2^x \ge \frac{x}{2}$ lässt sich dies für hinreichend großes a anschreiben als

$$= \pi^{-n/2}\sum_{m=0}^{\infty} 2^m\exp\left(-a^2\cdot 2^{2\delta m}\right) \le \pi^{-n/2}\sum_{m=0}^{\infty} 2^m\exp\left(-a^2\delta m\right) = \frac{\pi^{-n/2}}{1-2\exp(-a^2\delta)}.$$

Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz. □

Satz 1.26. *Das Wiener-Maß w ist σ-additiv auf der von $\mathfrak{R}$ erzeugten σ-Algebra.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für jede Folge von Zylindermengen I_k mit den Eigenschaften

$$I_{k+1} \subseteq I_k \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \bigcap_{k=0}^{\infty} I_k = \emptyset$$

bereits folgt, dass

$$\lim_{k\to\infty} w(I_k) = 0.$$

Wir schreiben $I_k = R(t_{k,1}, t_{k,2}, \ldots, t_{k,m(k)}; E_k)$.

<u>Schritt 1</u>: Wir können für jedes k eine abgeschlossene Menge $A_k \subseteq E_k$ finden mit $w(I_k \setminus J_k) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$, wobei $J_k := R(t_{k,1}, t_{k,2}, \ldots, t_{k,m(k)}; A_k)$. Definiere

$$L_k := \bigcap_{i=1}^{k} J_i \in \mathfrak{R}, \quad \text{es gilt} \quad L_k \subseteq J_k \subseteq I_k \quad \text{womit folgt} \quad w(I_k) = w(I_k \setminus L_k) + w(L_k)$$

Es gilt die Inklusion

$$I_k \setminus L_k = I_k \setminus \bigcap_{i=1}^{k} J_i = \bigcup_{i=1}^{k}(I_k \setminus J_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k}(I_i \setminus J_i)$$

Daher folgt

$$w(I_k \setminus L_k) \le \sum_{i=1}^{k}\frac{\epsilon}{2^{i+1}} \le \frac{\epsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad w(I_k) \le \frac{\epsilon}{2} + w(L_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Schritt 2: Wir zeigen die Existenz einer natürlichen Zahl k_0, sodass $w(L_k) < \epsilon/2$ für alle $k \geq k_0$. Sei $0 < \alpha < 1/2$ und $b := \frac{2a}{1-2^{-\alpha}}$. Nach Proposition 1.25 gilt für hinreichend großes b, dass $w(I) < \epsilon/2$ wenn nur $I \subseteq H_\alpha[b]$. Wir zeigen in diesem Schritt die Existenz eines k_0, sodass

$$M_k := L_k \cap H_\alpha[b]^c = \emptyset, \quad k \geq k_0.$$

Offenbar ist M_k monoton fallend und es gilt $\cap_{k=1}^{\infty} M_k = \emptyset$. Angenommen, es wäre $M_k \neq \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann gäbe es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \in M_k$. Man beachte

$$\begin{aligned} H_\alpha[b]^c &= \{\gamma \in \mathcal{W} \; : \; \|\gamma(t) - \gamma(s)\| \leq b|t-s|^\alpha \; \forall t,s \in [0,1]\} \\ &\subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \left\{\gamma \in \mathcal{W} \; : \; |\gamma(t)^{(i)} - \gamma(s)^{(i)}| \leq b|t-s|^\alpha \; \forall t,s \in [0,1]\right\}. \end{aligned}$$

Daher ist die Familie $\left\{x_k^{(i)} : k \in \mathbb{N}\right\}$ gleichgradig stetig und wegen

$$\left|x_k^{(i)}(t)\right| = \left|x_k^{(i)}(t) - x_k^{(i)}(0) + x_k^{(i)}(0)\right| \leq b \cdot t^\alpha + |q^{(i)}| \leq b + |q^{(i)}|$$

auch gleichmäßig beschränkt. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli gibt es eine Teilfolge $x_{k_j}^{(i)}$ von $x_k^{(i)}$ mit $\lim_{j\to\infty} x_{k_j}^{(i)} = x_0 \in C[0,1]$, wobei Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm gemeint ist. Es folgt die Existenz einer Teilfolge x_{k_j} und eines $x_0 \in C([0,1], \mathbb{R}^n)$ mit $\|x_{k_j}^{(i)} - x_0^{(i)}\|_\infty \overset{\infty}{\to} 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ woraus die Konvergenz gegen x_0 in $\mathcal{W}(q, q')$ folgt.

Für jedes k_0 gilt $x \in M_{k_0} \Rightarrow x \in M_k$ für alle $k \geq k_0$. Da M_{k_0} abgeschlossen ist, folgt $x_0 \in M_{k_0}$ und da k_0 beliebig war erhalten wir $x_0 \in \cap_{k=1}^{\infty} M_k$, Widerspruch. Es folgt die Existenz eines $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $M_k = \emptyset$ für alle $k \geq k_0$. □

Korollar 1.27. *Wiener-Pfade (d.h. Wege $\gamma \in \mathcal{W}$) sind $\hat{w}$-fast sicher Hölder-stetig zum Exponenten α solange* $0 < \alpha < 1/2$

Beweis. Es bezeichne C_α die Menge der zum Exponent α Hölder-stetigen Funktionen. Mit Proposition 1.25 folgt

$$\hat{w}(C_\alpha) = \hat{w}(H_\alpha^c) = \lim_{n\to\infty} \hat{w}(H_\alpha[n]^c) = 1 - \lim_{n\to\infty} \hat{w}(H_\alpha[n]) = 1.$$

□

1.1.2 Die Borel-σ-Algebra auf $(\mathcal{W}(q,q'), \|.\|_\infty)$

Es bezeichne $\mathcal{T}_\mathcal{W}$ das System der $(\mathcal{W}(q,q'), \|.\|_\infty)$ - offenen Mengen. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die von $\mathfrak{R}$ erzeugte σ-Algebra mit der Borel-σ-Algebra auf $W(q, q', [0,1])$, im Folgenden mit $\sigma(\mathcal{T}_\mathcal{W})$ bezeichnet, übereinstimmt.

Lemma 1.28. *Es sei (X, d) ein separabler metrischer Raum. Dann kann jede offene Menge als abzählbare Vereinigung offener Kugeln dargestellt werden.*

Beweis. Sei A eine abzählbare Teilmenge von X mit $\overline{A} = X$ und O eine offene Menge. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von A. Definiere

$$\epsilon_n := \begin{cases} d(a_n, \partial O) & a_n \in O \\ 0 & a_n \notin O \end{cases}$$

Sei $x \in O$ beliebig. Wähle eine Teilfolge $a_{n_k} \in O$ mit $a_{n_k} \to x$. Angenommen, es würde $d(\partial O, a_{n_k}) \to 0$ gelten, dann würde folgen

$$d(x, \partial O) \ \leq \ d(x, a_{n_k}) + d(a_{n_k} \partial O) \to 0$$

ein Widerspruch zu O offen. Also gilt $d(a_{n_k}, \partial O) > c > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wählt man k so groß, dass $d(x, a_{n_k}) < c$ erfüllt ist, folgt $x \in U_{\epsilon_{n_k}}(a_{n_k})$. Wir haben folgendes gezeigt:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} U_{\epsilon_n}(a_n) = O.$$

$\square$

Satz 1.29. *Die von $\mathfrak{R}$ erzeugte σ-Algebra stimmt mit der Borel-σ-Algebra $\sigma(\mathcal{T}_{\mathcal{W}})$ überein*

Beweis. $[\mathfrak{R} \subseteq \sigma(\mathcal{T}_{\mathcal{W}})]$: Betrachten wir $I \in \mathfrak{R}$ mit $I = R(t_1, \ldots, t_m; A)$. Die Funktion

$$F_{t_1,\ldots,t_m} : \ (\mathcal{W}(q, q'), \|.\|_\infty) \to (\mathbb{R}^{nm}, \|.\|), \quad \gamma \mapsto (\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_m))$$

ist stetig, daher borelmessbar und es folgt $I = F^{-1}_{t_1,\ldots,t_m}(A) \in \sigma(\mathcal{T}_{\mathcal{W}})$.

$[\mathcal{T}_{\mathcal{W}} \subseteq \sigma(\mathfrak{R})]$: Zunächst ist $(\mathcal{W}(q, q'), \|.\|_\infty)$ separabel, da das n-fache kartesische Produkt der Menge aller Polynome mit rationalen Koeffizienten nach dem Satz von Weierstraß dicht in $(\mathcal{W}(q, q'), \|.\|_\infty)$ liegt. Nach Lemma 1.28 genügt es deshalb zu zeigen, dass jede offene Kugel in $\sigma(\mathfrak{R})$ liegt. Es gilt für alle $\epsilon > 0$ und für jedes $\gamma_0 \in \mathcal{W}$:

$$\{\gamma \in \mathcal{W} \ : \ \|\gamma - \gamma_0\|_\infty \geq \epsilon\} = \bigcap_{m=0}^{\infty} \left\{\gamma \in \mathcal{W} \ : \ \|\gamma(t) - \gamma_0(t)\| \geq \epsilon \ \forall t \in \left\{\frac{1}{2^m}, \frac{2}{2^m}, \ldots, 1\right\}\right\} \in \sigma(\mathfrak{R}).$$

$\square$

1.1.3 Das Wiener-Maß auf $\mathcal{W}(q,q',T)$

Definition 1.30. Es sei $T>0$. In Analogie zur Definition von $\mathcal{W}(q,q')$ sei $\mathcal{W}(q,q',T)$ definiert als die Menge aller stetigen Funktionen γ von $[0,T]$ nach $\mathbb{R}^n$, die die Randbedingung $\gamma(0)=q$ und $\gamma(T)=q'$ erfüllen. Wir schreiben abkürzend $\mathcal{W}_T$. Darüberhinaus bezeichne $\mathfrak{R}_T$ die ebenfalls analog zu definierenden Zylindermengen auf $\mathcal{W}(q,q',T)$.

Definition 1.31. Das Wiener-Maß w_T auf $\mathcal{W}(q,q',T)$ sei für eine Zylindermenge $I:=\{\gamma\in\mathcal{W}(q,q',T)\ :(\gamma(t_1),\dots,\gamma(t_m))\in A\}$ mit $0<t_1<\ldots<t_m<T$ und A Borelteilmenge des $\mathbb{R}^{mn}$ definiert als ($t_0:=0,t_{m+1}:=T,u_0:=q,u_{m+1}=q'$)

$$w_T(I):=\prod_{i=1}^{m+1}[2\pi(t_i-t_{i-1})]^{-n/2}\cdot\int_A\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+1}\frac{\|u_i-u_{i-1}\|^2}{t_i-t_{i-1}}\right)du_1du_2\ ...du_m \tag{1.9}$$

Satz 1.32. *w_T ist ein Maß auf der Borel-σ-Algebra auf $\mathcal{W}(q,q',T)$*

Beweis. Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned}\Phi:&(\mathcal{W}(q,q'),\|.\|_\infty)\longrightarrow(\mathcal{W}(q,q',T),\|.\|_\infty)\\&[t\mapsto\gamma(t)]\mapsto[t\mapsto\gamma(Tt)]\end{aligned}$$

Offensichtlich ist Φ isometrisch und bijektiv, also insbesondere messbar. Damit ist für alle Borelmengen $B\subseteq\mathcal{W}(q,q',T)$ ein Maß erklärt:

$$w\Phi^{-1}(B):=w(\Phi^{-1}(B))$$

Man rechnet leicht nach, dass $w\Phi^{-1}$ auf allen Zylindermengen mit w_T wie in (1.9) definiert übereinstimmt. □

Bemerkung 1.33. Mit Lemma 1.8 lässt sich die Gesamtmasse von $\mathcal{W}(q,q',T)$ berechnen, es gilt

$$w_T(\mathcal{W})=(2\pi T)^{-n/2}\exp\left(-\frac{\|q'-q\|^2}{2T}\right).$$

Definition 1.34. Für I Borelmenge auf $\mathcal{W}_T$ sei

$$\hat{w}_T(I):=\frac{w_T(I)}{w_T(\mathcal{W}_T)}.$$

Beispiel 1.35. In Analogie zu Beispiel 1.11 folgt für $0<t<T$ mit $\mu(t):=\frac{t}{T}q'+\frac{T-t}{T}q$

$$w_T(\{\gamma\in\mathcal{W}_T\mid\gamma(t)\in A\})=w_T(\mathcal{W}_T)\cdot[2\pi t(T-t)]^{-n/2}\int_A\exp\left(-\frac{\|u-\mu\|^2}{2t(T-t)}\right)du.$$

Beispiel 1.36. Ebenfalls analog zu Beispiel 1.12 folgt für $0<s<t<T$

$$\begin{aligned}&w_T(\{\gamma\in\mathcal{W}_T\mid\gamma(t)-\gamma(s)\in A\})=\\&=w_T(\mathcal{W}_T)\cdot[(2\pi(t-s)(T-(t-s))]^{-n/2}\int_A\exp\left(\frac{\|x-\frac{t-s}{T}(q'-q)\|^2}{2(t-s)(T-(t-s))}\right)dx.\end{aligned}$$

1.2 Das Wiener-Integral

In diesem Abschnitt werden mehrere einfache Wiener-Integrale konkret berechnet.

Definition 1.37. Für Wiener-integrierbare Funktionen $f : \mathcal{W}_T \to \mathbb{R}$ schreiben wir das Wiener-Integral von f als

$$\mathbb{E}_w[f] := \int_{\mathcal{W}(q,q',T)} f(\gamma)\; dw(\gamma)$$

Und analog für $\hat{w}$

$$\mathbb{E}_{\hat{w}}[f] := \int_{\mathcal{W}(q,q',T)} f(\gamma)\; d\hat{w}(\gamma) = \frac{\mathbb{E}_w[f]}{w(\mathcal{W}_T)}.$$

Für vektorwertige Funktionen $g : \mathcal{W}_T \to \mathbb{R}^n$ sei das Integral in naheliegender Weise definiert als der Vektor der Integrale der Komponenten, d.h.

$$\mathbb{E}_w[g] := (\mathbb{E}_w[g^{(1)}], \ldots, \mathbb{E}_w[g^{(n)}]).$$

Beispiel 1.38. Beispiel 1.11 zeigt, dass für $0 < t < 1$ die Zufallsvariable $\gamma(t)^{(i)}$ unter $\hat{w}_T$ eine $N((\frac{t}{T}q'^{(i)} + \frac{1-t}{T}q^{(i)}, t(T-t))$-Verteilung hat, dementsprechend muss mit $\mu(t) := \frac{t}{T}q' + \frac{T-t}{T}q$ gelten

$$\int_{\mathcal{W}(q,q',T)} \gamma(t)\; d\hat{w}(\gamma) = \mu(t), \quad \int_{\mathcal{W}(q,q',T)} \|\gamma(t) - \mu(t)\|^2\; d\hat{w}(\gamma) = t(T-t).$$

Beispiel 1.39. Genauso folgt wegen Beispiel 1.36 für $0 < s < t < 1$

$$\int_{\mathcal{W}(q,q',T)} [\gamma(t) - \gamma(s)]\; d\hat{w}(\gamma) = \frac{t-s}{T}(q' - q),$$

$$\int_{\mathcal{W}(q,q',T)} \|\gamma(t) - \gamma(s) - \frac{t-s}{T}(q'-q)\|^2\; d\hat{w}(\gamma) = (t-s)(T-(t-s)).$$

Beispiel 1.40. Mit dem Satz von Fubini und Beispiel 1.38 können wir auch den Erwartungswert der Zufallsvariable $\int_0^T \gamma(t)dt$ berechnen:

$$\int_{\mathcal{W}(q,q')} \left[\int_0^T \gamma(t)\; dt\right]\; d\hat{w}(\gamma) = \int_0^T \int_{\mathcal{W}(q,q')} \gamma(t)\; d\hat{w}(\gamma)dt = \int_0^T \mu(t)\; dt = \frac{q'+q}{2}.$$

Satz 1.41. *Sei* $0 < t_1 < \ldots < t_m < T$*, sei* g *eine messbare Funktion von* $\mathbb{R}^{nm}$ *nach* $\mathbb{R}$*. Dann gilt*

$$\int_{\mathcal{W}(q,q',T)} g(\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_m))dw(\gamma) =$$
$$\prod_{i=1}^m [2\pi(t_i - t_{i-1})]^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{nm}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \frac{\|u_i - u_{i-1}\|^2}{t_i - t_{i-1}}\right) g(u_1, \ldots, u_m)du_1 \ldots du_m.$$

Beweis. Die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen $\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_m)$ unter $\hat{w}$ ist gegeben durch

$$f(u_1, \ldots, u_m) := \frac{1}{w(\mathcal{W}_T)}[2\pi(t_i - t_{i-1})]^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \frac{\|u_i - u_{i-1}\|^2}{t_i - t_{i-1}}\right),$$

wie das Berechnen der Randdichten (Lemma 1.8) zeigt. Die Behauptung folgt somit aus dem „*law of the unconscious statistician*“. □

Kapitel 2

Die Trotter-Produktformel

2.1 Lie-Produktformel

Es sei H ein Hilbertraum und $\mathcal{B}(H)$ die Menge der beschränkten Operatoren auf H. Für $A \in \mathcal{B}(H)$ kann e^A definiert werden als

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Offenbar gilt $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$, also ist auf diese Weise ein beschränkter linearer Operator definiert.

Lemma 2.1. *[Cauchy-Produkt auf $\mathcal{B}(H)$] Es seien A_n, B_n Folgen von beschränkten Operatoren auf H, sodass die Reihe $A := \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ absolut konvergiert und $B := \sum_{n=0}^{\infty} B_n$ konvergiert. Dann gilt*

$$AB = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}$$

Beweis. Der Beweis ist derselbe wie im Fall von Folgen komplexer Zahlen, es geht hier nur darum klar zu machen dass die Kommutativität der Multiplikation nicht benötigt wird. Definiere

$$S_n^A := \sum_{k=0}^{n} A_k, \quad S_n^B := \sum_{k=0}^{n} B_k, \quad C_n := \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} A_i B_{k-i}$$

Es gilt

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k} S_k^B = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}(S_k^B - B) + S_n^A$$

Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ sodass

$$\|S_n^B - B\| \leq \frac{\epsilon}{3 \sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\|} \quad \forall n \geq N$$

Wegen $\|A_n\| \to 0$ gibt es ein $M \in \mathbb{N}$ mit

$$\|A_n\| \leq \frac{\epsilon}{3 \sum_{k=0}^{N-1} \|S_k^B - B\|} \quad \forall n \geq M$$

Schließlich gibt es ein $L \in \mathbb{N}$, sodass

$$\|S_n^A - A\| \leq \frac{\epsilon}{3\|B\|} \quad \forall n \geq L$$

Insgesamt folgt für $n \geq \max(L, M+N)$

$$\|C_n - AB\| = \left\| \sum_{i=0}^{n} A_{n-i}(S_i^B - B) + (S_n^A - A)B \right\|$$
$$\leq \sum_{i=0}^{N-1} \|A_{n-i}\| \cdot \|S_i^B - B\| + \sum_{i=N}^{n} \|A_{n-i}\| \cdot \|S_i^B - B\| + \|S_n^A - A\| \cdot \|B\| \leq \epsilon$$

□

Lemma 2.2. *Für $A, B \in \mathcal{B}(H)$ mit $AB = BA$ gilt*

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$$

Beweis. Mit Lemma 2.1 folgt

$$e^A e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Da A mit B kommutiert kann nun der binomische Lehrsatz angewendet werden, dies führt auf

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = e^{A+B}$$

Analog folgt $e^B e^A = e^{B+A} = e^{A+B}$. □

Bemerkung 2.3. Die folgenden Tatsachen betreffend Differential- und Integralrechnung auf Banachräumen werden als bekannt vorausgesetzt: Für eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ sei $C(X, H)$ die Menge aller stetigen Funktionen die X auf H abbilden. Es gilt

1. Ist $u \in C(X, H)$ mit $\int_X \|u(t)\|\, dt < \infty$, dann ist u auf X (riemann-)integrierbar und es gilt
$$\left\| \int_X u(t)\, dt \right\| \leq \int_X \|u(t)\|\, dt.$$
2. Sei $A \in \mathcal{B}(H)$. Gilt $u \in C(X, H), Au \in C(X, H)$ und sind u und Au auf X integrierbar, folgt
$$A \int_X u(t)\, dt = \int_X Au(t)\, dt.$$
3. Für $u \in C^1([a, b], H)$ gilt
$$\int_a^b \frac{d}{dt} u(t)\, dt = u(b) - u(a).$$

Definition 2.4. Eine **Operatorhalbgruppe** ist ein stark stetiger Homomorphismus $t \mapsto T_t$ der die positiven reellen Zahlen $[0, \infty)$ auf auf $\mathcal{B}(H)$ abbildet. Die Homomorphieeigenschaft schreibt sich als

$$T(s)T(t) = T(s+t) \quad \forall s, t \in [0, \infty)$$

Die starke Ableitung

$$\frac{d}{dt} T(t)|_{t=0} = A$$

wird infinitesimaler **Erzeuger** oder infinitesimaler **Generator** genannt.

Satz 2.5. *Für $A \in \mathcal{B}(H)$ ist*

$$T(t) : [0,\infty) \to \mathcal{B}(H), \quad t \mapsto e^{tA}$$

eine Operatorhalbgruppe mit infinitesimalem Generator A.

Beweis. Die Homomorphieeigenschaft folgt aus Lemma 2.2. Für jedes kompakte Intervall $[a,b]$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t^n|}{n!} \|A\|^n \leq \exp\left(\max(|a|,|b|)\|A\|\right) < \infty.$$

Also konvergiert die Reihe e^{tA} gleichmäßig, damit ist $t \mapsto e^{tA}$ als gleichmäßiger Grenzwert von Polynomen stetig auf jedem kompakten Intervall $[a,b]$ und damit stetig auf $[0,\infty)$. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt wegen der gleichmäßigen Konvergenz von e^{sA} auf $[-t,t]$

$$\begin{aligned}\int_0^t Ae^{sA}\, ds &= A\int_0^t e^{sA}\, ds = A\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t \frac{s^n A^n}{n!}\, ds = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}A^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!} = e^{tA} - I\end{aligned}$$

Also gilt $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$.

□

Satz 2.6. (Lie-Produktformel) *Für $A, B \in \mathcal{B}(H)$ gilt*

$$e^{A+B} = \lim_{k\to\infty}\left(e^{A/k}e^{B/k}\right)^k \tag{2.1}$$

in der Operatortopologie.

Beweis. Definiere $C := e^{(A+B)/k}$ und $D := e^{A/k}e^{B/k}$. Für die Norm von C, D folgt

$$\|C\|, \|D\| \leq \exp\left[\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right] = \exp(\|A\| + \|B\|)^{1/k}$$

Für die Potenzreihenentwicklung von D gilt mit Lemma 2.1

$$D = e^{A/k}e^{B/k} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(A/k)^i}{i!}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(B/k)^j}{j!} = \sum_{m=0}^{\infty}k^{-m}\sum_{i=0}^{m}\frac{A^i}{i!}\cdot\frac{B^{m-i}}{(m-i)!}$$

Damit lässt sich die Norm von $C - D$ abschätzen durch

$$\begin{aligned}\|C - D\| &= \left\|\sum_{i=0}^{\infty}\frac{([A+B]/k)^i}{i!} - \sum_{m=0}^{\infty}k^{-m}\sum_{i=0}^{m}\frac{A^i}{i!}\cdot\frac{B^{m-i}}{(m-i)!}\right\| \\ &= \left\|\sum_{i=2}^{\infty}k^{-i}\frac{(A+B)^i}{i!} - \sum_{m=2}^{\infty}k^{-m}\sum_{i=0}^{m}\frac{A^i}{i!}\cdot\frac{B^{m-i}}{(m-i)!}\right\| \\ &\leq \frac{1}{k^2}\cdot\left[\exp(\|A\| + \|B\|) + \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{i=0}^{m}\frac{\|A\|^i}{i!}\cdot\frac{\|B\|^{m-i}}{(m-i)!}\right] \\ &\leq \frac{2}{k^2}\cdot\exp(\|A\| + \|B\|)\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\|C^k - D^k\| = \left\| \sum_{m=0}^{k-1} C^m (C-D) D^{k-m-1} \right\| \leq \exp(\|A\| + \|B\|) \cdot k \cdot \|C - D\|$$

woraus die Behauptung folgt. $\square$

2.2 Der Satz von Hille-Yoshida

Die Beziehung (2.1) lässt sich in einem gewissem Sinn auf unbeschränkte Operatoren ausweiten (Trotter-Produktformel). Für den Beweis brauchen wir einige Hilfsmittel, die in diesem Abschnitt hergeleitet werden. Wir führen einige Definitionen/Konventionen für unbeschränkte Operatoren ein:

Definition 2.7. Es sei A ein Operator auf einem linearen Unterraum $\mathcal{D}(A)$ von H, der $\mathcal{D}(A)$ auf H abbildet. Wir nennen $\mathcal{D}(A)$ den **Definitionsbereich** von A und nehmen an, dass $\mathcal{D}(A)$ dicht in H liegt. Es gelten die Definitionen

$$\ker(A) := \{x \in \mathcal{D}(A) : Ax = 0\}$$

$$\operatorname{ran}(A) := \{y \in H : \exists x \in \mathcal{D}(A) : Ax = y\}$$

Der **Graph** von A ist definiert durch

$$\Gamma(A) := \{(x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A)\}$$

A ist **abgeschlossen**, wenn $\Gamma(A)$ abgeschlossen ist und **abschließbar**, falls $\overline{\Gamma(A)}$ der Graph eines Operators $\overline{A}$ ist. Der zu A **adjungierte** Operator A^* ist durch die Formel

$$(A^* x, y) = (x, Ay)$$

definiert, falls es für $x \in H$ ein $C > 0$ gibt, sodass gilt

$$|(x, Ay)| \leq C\|y\|, \quad \forall y \in \mathcal{D}(A)$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so folgt aus dem Darstellungssatz von Riesz und der Dichtheit von $\mathcal{D}(A)$, dass $A^* x \in H$ eindeutig bestimmt ist. Für den Definitionsbereich dieses Operators gilt

$$\mathcal{D}(A^*) = \{x \in H \mid \exists C > 0 : |(x, Ay)| \leq C\|y\|, \quad \forall y \in \mathcal{D}(A)\}$$

Ein Operator A ist **selbstadjungiert**, wenn $A = A^*$ und **essentiell selbstadjungiert**, wenn gilt $\overline{A} = A^*$ oder äquivalent dazu $A^* = A^{**}$.

Die **Resolvente** $\rho(A)$ eines Operators A ist gegeben durch

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ (A - \lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(H)\}$$

und dessen Komplement, das **Spektrum** durch

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

Wir nennen A **halbbeschränkt von unten**, falls es ein $c > 0$ gibt mit

$$(x, Ax) \geq c\|x\|^2$$

und **positiv semidefinit**, wenn gilt

$$(x, Ax) \geq 0 \quad \forall x \neq 0$$

A heißt **dissipativ**, wenn für jedes $\lambda > 0$ und alle $x \in \mathcal{D}(A)$ gilt, dass

$$\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|.$$

Definition 2.8. Eine **Kontraktionsoperatorhalbgruppe** ist eine Operatorhalbgruppe, die zusätzlich die Eigenschaft

$$\|T(t)\| \leq 1, \quad t \geq 0$$

aufweist. Ist A der Erzeuger einer Operatorhalbgruppe, dann gilt für$\mathcal{D}(A)$

$$\mathcal{D}(A) := \left\{ x \in H : \exists \lim_{t \to 0} \frac{(T_t - I)x}{t} \right\}$$

Wir notieren die von A erzeugte Operatorhalbgruppe auch als

$$T(t) =: e^{At}$$

Proposition 2.9. *Sei $T(t)$ eine stark stetige Kontraktionsoperatorhalbgruppe mit Erzeuger A.*

a) Für $x \in H$ und $t \geq 0$ ist $\int_0^t T(s)x \, ds \in \mathcal{D}(A)$ und

$$T(t)x - x = A \int_0^t T(s)x \, ds. \tag{2.2}$$

b) Für $x \in \mathcal{D}(A), t \geq 0$ ist $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ und

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax \tag{2.3}$$

c) Ist $x \in \mathcal{D}(A)$ und $t \geq 0$, folgt

$$T(t)x - x = \int_0^t AT(s)x \, ds = \int_0^t T(s)Ax \, ds. \tag{2.4}$$

Beweis. a) Für alle $h > 0$ können wir die folgenden Umformungen durchführen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} [T(h) - I] \int_0^t T(s)x \, ds &= \frac{1}{h} \int_0^t [T(s+h)x - T(s)x] \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x \, ds \end{aligned}$$

Was für $h \to 0$ gegen $T(t)x - x$ konvergiert.

b) Mit $A_h := h^{-1}[T(h) - I]$ gilt für $h > 0$

$$\frac{1}{h}[T(t+h)x - T(t)x] = A_h T(t)x = T(t)A_h x$$

Was $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ und die Behauptung für den rechtsseitigen Limes zeigt. Für den linksseitigen Limes betrachte man für $0 < h \leq t$

$$\frac{1}{-h}[T(t-h)x - T(t)x] - T(t)Ax = T(t-h)[A_h - A]x + [T(t-h) - T(t)]Ax$$

c) Folgt unmittelbar aus b).

□

Korollar 2.10. *Ist A Erzeuger einer stark stetigen Operatorhalbgruppe auf H, dann ist $\mathcal{D}(A)$ dicht in H und A ist abgeschlossen.*

Beweis. Nach Proposition 2.9 gilt $\lim_{t\to 0+} t^{-1}\int_0^t T(s)x\,ds = x$ für alle $x \in H$, wonach $\mathcal{D}(A)$ dicht in H liegt. Die Abgeschlossenheit folgt leicht aus Punkt a). □

Korollar 2.11. *Sei $T(t)$ eine stark stetige Operatorhalbgrupppe und A ihr infinitesimaler Erzeuger. Zu jedem $x \in \mathcal{D}(A)$ ist $u(t) := T(t)x, t \in [0,\infty)$, die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems*

$$u' = Au, \quad u(0) = x. \tag{2.5}$$

Beweis. Dass $u(t) = T(t)x$ das Anfangswertproblem löst, folgt aus Proposition 2.9. Ist $v : [0,\infty) \to \mathcal{D}(A)$ eine weitere Lösung von (2.5), so gilt für festes $t > 0$ und $s \in [0,t]$

$$\frac{d}{ds}(T(s)v(t-s)) = T(s)Av(t-s) - T(s)Av(t-s) = 0$$

Somit ist $T(s)v(s-t)$ in s konstant und es gilt $T(t)x = T(t)v(t-t) = T(0)v(t) = v(t)$. □

Korollar 2.12. *Seien T_1, T_2 stark stetige Operatorhalbgruppen mit infinitesimalen Generatoren A_1, A_2. Falls $A_1 \subseteq A_2$, folgt $T_1 = T_2$.*

Beweis. Für $x \in \mathcal{D}(A_1) \subseteq \mathcal{D}(A_2)$ ist sowohl $T_1(t)x$ als auch $T_2(t)x$ eine Lösung von (2.5). Es folgt $T_1(t)x = T_2(t)x$ für alle $x \in \mathcal{D}(A_1)$. Da $\mathcal{D}(A_1)$ dicht liegt, folgt die Behauptung. □

Proposition 2.13. *Sei $T(t)$ eine stark stetige Kontraktionsoperatorhalbgruppe mit Generator A. Dann ist $(0,\infty) \subseteq \rho(A)$ und*

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt, \tag{2.6}$$

für alle $x \in H$ und $\lambda > 0$.

Beweis. Definiere für beliebiges $\lambda > 0$ den Operator $U_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt$. Wegen

$$\|U_\lambda x\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|T(t)x\|\,dt \leq \lambda^{-1}\|x\|$$

ist $U_\lambda \in \mathcal{B}(H)$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}[T(h) - I]U_\lambda x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}[T(t+h)x - T(t)x]\,dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)x\,dt\end{aligned}$$

Für $h \to 0$ folgt $U_\lambda x \in \mathcal{D}(A)$ und $AU_\lambda x = \lambda U_\lambda g - g$, also

$$(\lambda - A)U_\lambda x = x, \quad x \in H. \tag{2.7}$$

Für $x \in \mathcal{D}(A)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} U_\lambda A x &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) A x \, dt = \int_0^\infty A[e^{-\lambda t} T(t) x] \, dt \\ &= A \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x \, dt = A U_\lambda x, \end{aligned}$$

also folgt

$$U_\lambda(\lambda - A)x = x, \quad x \in \mathcal{D}(A) \tag{2.8}$$

□

Definition 2.14. Sei A ein dissipativer, abgeschlossener linearer Operator auf H mit dichtem Definitionsbereich und $(0, \infty) \subseteq \rho(A)$. Dann ist die **Yoshida-Approximation** A_λ von A für $\lambda > 0$ definiert als

$$A_\lambda := \lambda A(\lambda - A)^{-1} \tag{2.9}$$

Proposition 2.15. *Die Yoshida-Approximation A_λ hat die Eigenschaften*

a) A_λ *ist für jedes* $\lambda > 0$ *ein beschränkter linearer Operator auf* H *und* e^{tA_λ} *ist eine stark stetige Kontraktionsoperatorhalbgruppe*

b) $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$ *für alle* $\lambda, \mu > 0$.

c) $\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax$ *für alle* $x \in \mathcal{D}(A)$

Beweis. Für $\lambda > 0$ sei $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$. Da A dissipativ ist, folgt $\|R_\lambda\| \leq \lambda^{-1}$. Es gilt $(\lambda - A)R_\lambda = I$ auf H und $R_\lambda(\lambda - A) = I$ auf $\mathcal{D}(A)$, daraus folgt

$$A_\lambda = \lambda^2 R_\lambda - \lambda I \quad \text{auf} \quad H, \quad \lambda > 0, \tag{2.10}$$

und

$$A_\lambda = \lambda R_\lambda A \quad \text{auf} \quad \mathcal{D}(A), \quad \lambda > 0. \tag{2.11}$$

Gleichung (2.10) zeigt, dass A_λ beschränkt ist und es gilt mit Lemma 2.2

$$\|e^{tA_\lambda}\| = \exp(-t\lambda)\|e^{-t\lambda^2 R_\lambda}\| \leq \exp(-t\lambda) \cdot \exp(t\lambda^2 \|R_\lambda\|) \leq 1.$$

Damit ist *a*) gezeigt. Punkt *b*) folgt aus (2.10) und $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$ für alle $\lambda, \mu \in rho(A)$. Für Punkt *c*) zeigen wir zunächst

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R_\lambda x = x, \quad x \in H. \tag{2.12}$$

Denn für $x \in \mathcal{D}(A)$ ergibt sich $\|\lambda R_\lambda x - x\| = \|R_\lambda A x\| \leq \lambda^{-1}\|Ax\| \to 0$ für $\lambda \to \infty$. Die Beziehung (2.12) folgt, da $\mathcal{D}(A)$ dicht in H ist und $\|\lambda R_\lambda - I\| \leq 2$ für alle $\lambda > 0$. Die Behauptung *c*) folgt unmittelbar aus (2.10) und (2.12). □

Lemma 2.16. *Sind B, C beschränkte lineare Operatoren auf H die $BC = CB$ sowie $\|e^{tB}\| \leq 1$ und $\|e^{tC}\| \leq 1$ für alle $t \geq 0$ erfüllen, dann folgt*

$$\|e^{tB}x - e^{tC}x\| \leq t\|Bx - Cx\|, \quad x \in H, \ t \geq 0. \tag{2.13}$$

Beweis. Dieses Resultat folgt aus der Identität

$$\begin{aligned} e^{tB}x - e^{tC}x &= \int_0^t \frac{d}{ds}\left[e^{sB}e^{(t-s)C}\right] x\, ds = \int_0^t e^{sB}(B-C)e^{(t-s)C}x\, ds \\ &= \int_0^t e^{sB}e^{(t-s)C}(B-C)x\, ds \end{aligned}$$

wobei bei der letzten Gleichheit eingeht, dass die Operatoren B und C kommutieren (Lemma 2.2). □

Lemma 2.17. *Sei A ein dissipativer abgeschlossener linearer Operator auf H, definiere $\rho^+(A) = \rho(A) \cap (0,\infty)$. Wenn $\rho^+(A)$ nichtleer ist, folgt $\rho^+(A) = (0,\infty)$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\rho^+(A)$ offen und abgeschlossen in $(0,\infty)$ versehen mit der Spurtopologie ist. Da $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ stetig von $(\mathbb{C}, |.|)$ nach $(\mathbb{R}, |.|)$ ist, ist $\rho(A)$ offen in $\mathbb{R}$, womit $\rho^+(A)$ offen in $(0,\infty)$ ist.
Für den Beweis der Abgeschlossenheit sei eine Folge $\lambda_n \in \rho^+(A)$ mit $\lambda_n \to \lambda > 0$ gegeben. Für $x \in H$ definiere $x_n = (\lambda - A)(\lambda_n - A)^{-1}x$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da A dissipativ ist gilt die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \lim_{n\to\infty} \|(\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1}x\| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|\lambda - \lambda_n|}{\lambda_n}\|x\| = 0.$$

Daher ist $\mathrm{ran}(\lambda - A)$ dicht in H, aber da A abgeschlossen und dissipativ ist, ist $\mathrm{ran}(\lambda - A)$ abgeschlossen und es folgt $\mathrm{ran}(\lambda - A) = H$. Da A dissipativ ist folgt wiederum, dass $\lambda - A$ injektiv ist und $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}$. Insgesamt erhalten wir also $\lambda \in \rho^+(A)$, was zu zeigen war. □

Satz 2.18. (Satz von Hille-Yoshida)*: Der lineare Operator A auf H ist genau dann der Erzeuger einer stark stetigen Kontraktionsoperatorhalbgruppe auf H wenn gilt:*

a) $\mathcal{D}(A)$ ist dicht in H

b) A ist dissipativ

c) $\mathrm{ran}(\lambda - A) = H$ für ein $\lambda > 0$.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen folgt aus Korollar 2.10 und Proposition 2.6. [Markov] Wir zeigen, dass die Bedingungen $a) - c)$ hinreichend sind:
Ein dissipativer Operator A ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathrm{ran}(\lambda - A)$ für $\lambda > 0$ abgeschlossen ist. Die Bedingungen $b), c)$ implizieren daher, dass A abgeschlossen ist und $\rho(A) \cap (0,\infty)$ nichtleer ist, woraus wegen Lemma 2.17 bereits $(0,\infty) \subseteq \rho(A)$ folgt. Mit Lemma 2.15(b) sowie 2.16 folgt

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|, \quad x \in H, \;\; \lambda, \mu > 0, \;\; t \geq 0. \tag{2.14}$$

Wegen Lemma 2.15c) und der Vollständigkeit von H existiert deshalb $\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$ für alle $x \in \mathcal{D}(A)$ und alle $t \geq 0$. Da die Familie von Halbgruppen $\{e^{tA_\lambda}, \lambda > 0\}$ gleichmäßig beschränkt ist und $\mathcal{D}(A)$ dicht in H liegt, existiert $T(t)x := \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$ für alle $x \in H$. Weiter ergibt sich für $s, t \geq 0$ $(T_\lambda(t) := e^{tA_\lambda})$

$$T(s+t) - T(s)T(t) = T(s+t) - T_\lambda(s+t) + T_\lambda(s)\left[T_\lambda(t) - T(t)\right] + \left[T_\lambda(s) - T(s)\right]T(t)$$

woraus man schließen kann, dass $T(t)$ eine stark stetige Kontraktionsoperatorhalbgruppe auf H ist. Es bleibt zu zeigen, dass A der infinitesimale Generator von $T(t)$ ist. Gemäß Proposition 1.5c) erhalten wir

$$T_\lambda(t)x - x = \int_0^t T_\lambda(s)A_\lambda x \, ds, \quad x \in H. \tag{2.15}$$

Für $x \in \mathcal{D}(A)$ folgt aus der Identität

$$T_\lambda(s)A_\lambda x - T(s)Ax = T_\lambda(s)(A_\lambda x - Ax) + [T_\lambda(s) - T(s)]\, Ax,$$

zusammen mit Lemma 2.10c), dass $T_\lambda(s)A_\lambda x \to T(s)Ax$ für $\lambda \to \infty$, gleichmäßig für $s \in [0,t]$. Insgesamt folgt mit (2.15)

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax \, ds, \quad x \in \mathcal{D}(A), \;\; t \geq 0.$$

Differenzieren an der Stelle 0 zeigt, dass der Generator B von $T(t)$ eine Fortsetzung von A sein muss. Aufgrund der Notwendigkeit der Bedingung *b)* ist $\lambda - B$ für jedes $\lambda > 0$ injektiv, und nach *c)* gilt $\operatorname{ran}(\lambda - A) = H$ für ein $\lambda > 0$. Da $\mathcal{D}(A)$ dicht in H liegt folgt $B = A$, was den Beweis beendet.

□

Korollar 2.19. *Sei e^{-tA} eine stark stetige Kontraktionsoperatorhalbgruppe mit infinitesimalem Generator A und sei A_λ die Yoshida-Approximation zu A. Dann gilt*

$$\|e^{-tA_\lambda}x - e^{-tA}x\| \leq t\|A_\lambda x - Ax\|, \quad x \in \mathcal{D}(A), \; t \geq 0, \; \lambda > 0 \tag{2.16}$$

Daher gilt $\lim_{\lambda\to\infty} e^{-tA_\lambda}x = e^{-tA}x$ für jedes $x \in H$ und alle $t \geq 0$, gleichmäßig auf kompakten Intervallen.

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 2.18 □

2.3 Die Trotter-Produktformel

Lemma 2.20. *Ist $C : \mathcal{D}(C) \to H$ ein positiver und selbstadjungierter linearer Operator, so ist der Operator $-C$ Generator einer Kontraktionsoperatorhalbgruppe.*

Beweis. Für $x \in \mathcal{D}(C)$ und $\lambda \in (0,\infty)$ gilt

$$\|(-C-\lambda)x\|^2 = \|(C+\lambda)x\|^2 = \|Cx\|^2 + 2\lambda \cdot \operatorname{Re}(Cx, x) + \lambda^2\|x\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2.$$

Also ist $-C$ dissipativ. Daher ist $-C - \lambda$ für $\lambda > 0$ insbesondere injektiv, woraus folgt

$$\ker(-C-\lambda)^\perp = \overline{\operatorname{ran}(-C-\lambda)} = H.$$

Da $-C$ abgeschlossen und dissipativ ist, ist $\operatorname{ran}(-C-\lambda)$ abgeschlossen, woraus die Surjektivität von $-C-\lambda$ folgt. Nach Dem Satz von Hille-Yoshida (Satz 2.18) erzeugt $-C$ eine Kontraktionsoperatorhalbgruppe. □

Bemerkung 2.21. Wir können nun die Trotter-Produktformel formulieren: Seien A, B positive, essentiell selbstadjungierte Operatoren. Ist $A + B$ essentiell selbstadjungiert auf $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$, folgt

$$e^{-t(A+B)} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n \tag{2.17}$$

in der starken Operatortopologie. Lemma 2.20 zeigt, dass $\overline{A}, \overline{B}, \overline{A+B}$ Halbgruppen erzeugen, daher macht (2.17) Sinn. Die wesentlichen Schritte im Beweis der Trotter-Produktformel werden sein, Kontraktionsoperatorhalbgruppen zu finden, die mit der rechten Seite von 2.17 identifizert werden können und die Konvergenz ihrer Generatoren gegen $-(A + B)$ zu zeigen, woraus die Konvergenz der zugehörigen Kontraktionsoperatorhalbgruppen folgt.

Definition 2.22. Es sei $t \in [0, \infty)$ und $n \in \mathbb{N}$, die Operatoren A, B seien positiv und essentiell selbstadjungiert, und es sei $(A + B)$ ebenfalls essentiell selbstadjungiert. Es bezeichne

$$F(t) := e^{-tA}e^{-tB}, \quad C_n := n\left(I - F\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Lemma 2.23. *$F(t)$ ist eine stark stetige Abbildung von $[0, \infty)$ in die Kontraktionsoperatoren auf H. Darüberhinaus gilt $F(0) = I$ und die starke Ableitung $F'(0)$ ist eine Fortsetzung von $-(A + B)$.*

Beweis. Die Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit der Abbildungen $t \mapsto e^A$ respektive $t \mapsto e^B$. Für $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A + B)$ gilt

$$\frac{F(t) - I}{t} = t^{-1}[e^{-tA}(e^{-tB}x - x) + (e^{-tA}x - x)] \overset{t\to 0}{\longrightarrow} -(A + B)x$$

□

Lemma 2.24. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist e^{-tC_n} eine Kontraktionsoperatorhalbgruppe, wobei die Abbildung $t \mapsto e^{-tC_n}$ sogar stetig bezüglich der Operatornorm ist.*

Beweis. Man beachte, dass C_n ein beschränkter Operator ist. Es folgt

$$\|e^{-tC_n}\| = \|e^{-tn(I-F(1/n))}\| = \|e^{-tnI}e^{tnF(1/n)}\| \leq e^{-tn} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tn)^k}{k!} \left\|F\left(\frac{1}{n}\right)\right\| \leq 1.$$

Was die Kontraktionseigenschaft zeigt. Die Behauptung folgt mit Satz 2.5. □

Satz 2.25. *Sei $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter Generatoren von Kontraktionsoperatorhalbgruppen. Sei C positiv, essentiell selbstadjungiert auf $\mathcal{D}(C)$ und es gelte $C_nx \to Cx$ für alle $x \in \mathcal{D}(C)$. Dann folgt für $\lambda > 0$*

$$(\lambda + C_n)^{-1} \to (\lambda + C)^{-1}$$

in der starken Operatortopologie.

Beweis. Sei C O.B.d.A selbstadjungiert. Wegen

$$\operatorname{ran}(\lambda + C)^{\perp} = \ker(\lambda + C) = \{0\}$$

liegt $\operatorname{ran}(\lambda + C)$ dicht in H. Mit $x \in \mathcal{D}(C)$ folgt für $y = (\lambda + C)x$

$$\begin{aligned}\|(\lambda + C_n)^{-1}y - (\lambda + C)^{-1}y\| &= \|(\lambda + C_n)^{-1}(\lambda + C_n)x + (\lambda + C_n^{-1})(C - C_n)x - x\| \\ &= \|(\lambda + C_n^{-1})(C - C_n)x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|(C - C_n)x\| \to 0\end{aligned}$$

Nach Lemma 2.20 ist der Operator $(\lambda + C)^{-1}$ beschränkt mit Operatornorm kleiner gleich $(1/\lambda)$. Sei $z \in H$ beliebig und $y \in \operatorname{ran}(\lambda + C)$ mit $\|y - z\| < \epsilon\lambda/4$ und sei $x = (\lambda + C)^{-1}y$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\|(C - C_n)x\| < \epsilon\lambda/2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|(\lambda + C_n)^{-1}z - (\lambda + C)^{-1}z\| &= \|[(\lambda + C_n)^{-1} + (\lambda + C)^{-1}](z - y) + (\lambda + C_n)^{-1}y - (\lambda + C)^{-1}y\| \\ &\leq \frac{2}{\lambda}\|z - y\| + \|(\lambda + C_n)^{-1}y - (\lambda + C)^{-1}y\| \ \leq \ \epsilon\end{aligned}$$

□

Satz 2.26. *Sei $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter Generatoren von Kontraktionsoperatorhalbgruppen. Es sei C positiv und essentiell selbstadjungiert auf $\mathcal{D}(C)$. Gilt $C_n x \to Cx$ für alle $x \in \mathcal{D}(C)$, so folgt $e^{tC_n}x \to e^{tC}x$ für alle $x \in H$, gleichmäßig auf kompakten Intervallen.*

Beweis. Schritt 1: Wir zeigen zunächst für $\lambda > 0$, dass C_n^λ stark gegen C_λ konvergiert. Betrachte $y := (\lambda - C)x$ für $x \in \mathcal{D}(C)$. Mit (2.10) folgt

$$\begin{aligned}\|C_n^\lambda y - C_\lambda y\| &= \|[\lambda^2(\lambda - C_n)^{-1} - \lambda I]y - [\lambda^2(\lambda - C)^{-1} - \lambda I]y\| \\ &\leq \lambda^2\|(\lambda - C_n)^{-1}y - (\lambda - C)^{-1}y\|.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck konvergiert wegen Satz 2.25 mit $n \to \infty$ gegen 0. Da $\operatorname{ran}(\lambda - C)$ dicht in H liegt und die Operatoren $C_n^\lambda - C_\lambda$ gleichmäßig in n beschränkt sind, folgt die starke Konvergenz von C_n^λ gegen C_λ.

Schritt 2: Für $t \geq 0$ und $x \in H$ gilt $e^{tC_n^\lambda}x \to e^{tC_\lambda}x$, gleichmäßig in t auf kompakten Intervallen: Es gilt die Identität

$$e^{tC_n^\lambda}x - e^{tC_\lambda}x = \int_0^t e^{(t-s)C_n^\lambda}(C_n^\lambda - C_\lambda)e^{sC_\lambda}x \, ds, \tag{2.18}$$

denn der Integrand in (2.18) ist gleich $-\frac{d}{ds}\left[e^{(t-s)C_n^\lambda}e^{sC}x\right]$. Damit erhält man die Abschätzung

$$\|e^{tC_n^\lambda}x - e^{tC_\lambda}x\| \leq \int_0^t \|(C_n^\lambda - C_\lambda)e^{sC_\lambda}x\|. \, ds \tag{2.19}$$

Wegen Schritt 1 und dem Satz von der majorisierten Konvergenz konvergiert die rechte Seite von (2.19) für $n \to \infty$ gegen 0.

Schritt 3: Sei $x \in \mathcal{D}(C)$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\|e^{tC_n}x - e^{tC}x\| \leq \|e^{tC_n}x - e^{tC_n^\lambda}x\| + \|e^{tC_n^\lambda}x - e^{tC_\lambda}x\| + \|e^{tC_\lambda}x - e^{tC}x\|. \tag{2.20}$$

Mit Korollar 2.19 können wir den ersten Summanden in (2.20) weiter abschätzen durch

$$\begin{aligned}\|e^{C_n}x - e^{tC_n^\lambda}x\| &\leq t \cdot \|C_n x - C_n^\lambda x\| \\ &\leq t \cdot \left(\|C_n x - Cx\| + \|Cx - C_\lambda x\| + \|C_\lambda x - C_n^\lambda x\|\right).\end{aligned}$$

Mit Schritt 1 folgt

$$\lim_{n\to\infty} \|e^{tC_n}x - e^{tC_n^\lambda}x\| \le t \cdot \|Cx - C_\lambda x\|.$$

Wegen Schritt 2 konvergiert auch der zweite Summand in (2.20) für $n \to \infty$ gegen 0, und es folgt wiederum mit Korollar 2.19

$$\lim_{n\to\infty} \|e^{tC_n}x - e^{tC}x\| \le 2t \cdot \|C_\lambda x - Cx\|,$$

woraus mit Lemma 2.15c) folgt, dass $e^{tC_n}x \to e^{tC}x$. Da $\mathcal{D}(C)$ dicht in H liegt und die Operatoren $e^{tC_n} - e^{tC}$ gleichmäßig beschränkt sind, folgt die Behauptung. □

Lemma 2.27. *Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt die Abschätzung*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!}|k-n| \le n^{1/2}e^n$$

Beweis. Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung ergibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!}|k-n| \le \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!}\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!}(k-n)^2\right)^{1/2} = \exp(n/2) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!}(k-n)^2\right)^{1/2}$$

Die Identität $(k-n)^2 = k(k-1) + k - 2kn + n^2$ führt weiter auf

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!}(k-n)^2 &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n^k}{(k-2)!} + (1-2n)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k}{(k-1)!} + n^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} \\ &= n^2 \exp(n) + n(1-2n)\exp(n) + n^2\exp(n) = n \cdot \exp(n)\end{aligned}$$

Einsetzen in die obere Ungleichung führt auf das gewünschte Ergebnis. □

Satz 2.28. (Trotter-Produktformel)*: Die Operatoren A, B seien positiv und essentiell selbstadjungiert, und es sei $(A+B)$ essentiell selbstadjungiert auf $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$. Dann gilt für $t \in [0,\infty)$*

$$e^{-t(A+B)} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n \tag{2.21}$$

im starken Sinn.

Beweis. Die Lemmata 2.23 und 2.24 zeigen, dass die Folge von Operatoren $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Generatoren von Kontraktionsoperatorhalbgruppen besteht, und dass diese Folge auf $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ stark gegen $(A+B)$ konvergiert. Mit Satz 2.26 folgt die Konvergenz von e^{-tC_n} gegen $e^{-t(A+B)}$. Es bleibt zu zeigen, dass e^{-C_n} stark gegen $\left(e^{-A/n}e^{-B/n}\right)^n$ konvergiert.
Schritt 1: Wir zeigen die Behauptung für $t = 1$, sei $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$:

$$\begin{aligned}\left\|e^{-C_n}x - \left(e^{-A/n}e^{-B/n}\right)^n x\right\| = \left\|e^{-C_n}x - F\left(\frac{1}{n}\right)^n x\right\| &\le e^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}\left\|\left(F\left(\frac{1}{n}\right)^k - F\left(\frac{1}{n}\right)^n\right)x\right\| \\ &= e^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}\left\|\left(F\left(\frac{1}{n}\right)^{|k-n|} - I\right)x\right\| \\ &\le e^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}|k-n|\left\|\left(F\left(\frac{1}{n}\right) - I\right)x\right\|\end{aligned}$$

Wegen Lemma 2.23 konvergiert die Folge $n\left(F\left(\frac{1}{n}\right)-I\right)x$ stark, daher gibt es ein $C>0$ mit $\left\|n\left(F\left(\frac{1}{n}\right)-I\right)x\right\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zusammen mit Lemma 2.27 ergibt sich

$$n^{1/2}\left\|\left(F\left(\frac{1}{n}\right)-I\right)x\right\| = n^{-1/2}\left\|n\left(F\left(\frac{1}{n}\right)-I\right)x\right\| \leq C \cdot n^{-1/2}.$$

Die Behauptung folgt für beliebiges $x \in H$ aus der gleichmäßigen Beschränktheit der Operatoren.

Schritt 2: Für beliebiges $t \geq 0$ betrachte die Operatoren $A_t := tA, B_t := tB$. Nach Schritt 1 gilt

$$e^{-(A_t+B_t)} = \lim_{n\to\infty}(e^{-A_t/n}e^{-B_t/n})^n$$

Nun sind für $x \in \mathcal{D}(A)$ die Funktionen

$$f(s) := e^{-s(tA)}x$$
$$g(s) := e^{-sA_t}x$$

beide Lösungen der Differentialgleichung

$$u' = -tAu, \quad u(0) = x$$

woraus mit Korollar 2.11 schon die Gleichheit $f(s) = g(s)$ und damit $e^{-A_t} = e^{-tA}$ folgt. Analog folgt $e^{-B_t} = e^{-tB}$, womit die Behauptung gezeigt ist. □

Kapitel 3

Die Feynman-Kac-Formel

Definition 3.1. Einer Konvention der Hamilton'schen Mechanik folgend werden Ortskoordinaten im Folgenden mit q bezeichnet. Für die kommenden Betrachtungen werden wir als Grundraum den Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^n)$ heranziehen. Für eine Funktion $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ definieren wir den zugehörigen Multiplikationsoperator M_φ mittels

$$M_\varphi : \mathcal{D}(M_\varphi) \leq L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto \varphi \cdot f$$

Besitzt ein Operator $A : \mathcal{D}(A) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ einen Integralkern k, d.h. gilt für eine Funktion k und alle $\varphi \in \mathcal{D}(A)$

$$(A\varphi)(q) = \int_{\mathbb{R}^n} k(q, q')\varphi(q')dq$$

so notieren wir das als $k = \mathcal{K}(A)$.

Satz 3.2 (Feynman-Kac-Formel)**.** *Sei V eine stetige, von unten beschränkte reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und sei $H := -\frac{1}{2}\Delta + M_V$ essentiell selbstadjungiert. Dann gilt für $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$*

$$\left(e^{-tH}\varphi\right)(q) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathcal{W}(q,q',T)} \exp\left(-\int_0^T V(\gamma(t))\, dt\right) dw(\gamma)\right] \varphi(q')dq', \tag{3.1}$$

wobei die Gleichheit fast überall zu verstehen ist.

Betrachten wir zuerst den Fall $V = 0$, d.h. $H = H_0 := -\frac{1}{2}\Delta$. Dann ist $e^{-tH_0}f$ für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gerade die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(q,t) = -H_o u = \frac{1}{2}\Delta u(q,t), \quad u(q,0) = f(q) \qquad q \in \mathbb{R}^n, t \in [0,\infty).$$

Bekanntlich ist die Fundamentallösung dieser Gleichung gerade

$$\varphi_t(q) := (2\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|q\|^2}{2t}\right)$$

womit folgt

$$(e^{-tH_0}f)(q) = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|q-q'\|^2}{2t}\right) \cdot f(q')\, dq'. \tag{3.2}$$

Daraus erhalten wir den folgenden Zusammenhang:

Satz 3.3. *Es sei $0 \le t_1 < \ldots < t_m \le T$, sei $\psi_i \in L^\infty$ für $i = 1, \ldots, n$ und bezeichne mit M_{ψ_i} die zugehörigen Multiplikationsoperatoren. Dann gilt*

$$\int_{\mathcal{W}(q,q',T)} \prod_{i=1}^{m} \psi_i(\gamma(t_i)) dw(\gamma) = \mathcal{K}\left(e^{-t_1 H_0} M_{\psi_1} e^{-(t_2-t_1)H_0} M_{\psi_2} \cdots M_{\psi_m} e^{-(T-t_m)H_0}\right)$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 1.41 durch iteriertes Anwenden der Beziehung (3.2). □

Beweis der Feynman-Kac-Formel, Satz 3.2. Definiere

$$k(q,q') := \int_{\mathcal{W}(q,q',t)} \exp\left(-\int_0^t V(\gamma(s))\, ds\right) dw(\gamma), \tag{3.3}$$

und den dazugehörigen Operator

$$\begin{aligned} A : L^2(\mathbb{R}^n) &\to L^2(\mathbb{R}^n) \\ \varphi &\mapsto \int_{\mathbb{R}^n} k(\cdot, q')\varphi(q')\, dq'. \end{aligned}$$

Schritt 1: Wir zeigen, dass der Operator A beschränkt ist. Da V nach unten beschränkt ist, ist der Integrand in (3.3) durch eine Konstante $C > 0$ beschränkt, und mit der expliziten Darstellung von $w(\mathcal{W}(q,q',t))$ folgt

$$|k(q,q')| \le C(2\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|q-q'\|^2}{2t}\right)$$

Wir erhalten mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz für $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|A\varphi\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} k(q,q')\varphi(q')\, dq' \right|^2 dq \le \|\varphi\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |k(q,q')|^2\, dq'\, dq.$$

Für $a > 0$ und $b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-(ax^2+bx+c)\right)\, dx &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} - c\right)\, dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a} - c\right). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |k(q,q')|^2\, dq'\, dq &\le C^2(2\pi t)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\|q-q'\|^2}{t}\right)\, dq'\, dq \\ &= C^2(2\pi t)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\left(q^{(i)} - q'^{(i)}\right)^2}{t}\right)\, dq'^{(i)}\right]\, dq \\ &= C^2 2^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\|q\|^2\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)\, dq\ < \infty. \end{aligned}$$

Was zeigt, dass A ein beschränkter (sogar kompakter) Operator ist.

Schritt 2: Wir zeigen, dass für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (unendlich oft differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}^n$) gilt, dass $A\varphi = e^{-tH}\varphi$: Aus der Trotter-Produktformel, Satz 2.28, erhalten wir (starke Konvergenz)

$$e^{-tH} = \lim_{N\to\infty} \left(e^{-tH_0/N} e^{-tM_V/N}\right)^N \tag{3.4}$$

Offenbar ist durch $t \mapsto M_{e^{-tV}}$ eine stark stetige Operatorhalbgruppe mit Generator M_V definiert, womit nach Korollar 2.12 bereits $e^{-tM_V} = M_{e^{-tV}}$ folgt.
Bei (3.4) ist zu beachten, dass M_V genau dann positiv semidefinit ist wenn V positiv semidefinit ist. A priori kann die Trotter-Produktformel also nur für $V \geq 0$ angewandt werden. Für allgemeine halbbeschränkte Potentiale sei $c \in \mathbb{R}$ mit $V(x) \geq c$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Durch Anwenden der Trotter-Produktformel auf $H_0 + M_{(V-c)}$ erhält man durch Kürzen des Faktors e^{-tc} wieder (3.4). Wir zeigen, dass die durch

$$k_N(q,q') := \mathcal{K}\left(\left(e^{-tH_0/N} M_{e^{-tV/N}}\right)^N\right)(q,q')$$

definierte Funktionenfolge punktweise (in beiden Argumenten) gegen $k(q,q')$ konvergiert: Wir erhalten mit Satz 3.3

$$\mathcal{K}\left(\left(e^{-tH_0/N} M_{e^{-tV/N}}\right)^N\right)(q,q') = \int_{\mathcal{W}(q,q',t)} \exp\left[-\frac{t}{N}\sum_{j=1}^N V\left(\gamma\left(\frac{jt}{N}\right)\right)\right] dw(\gamma) \tag{3.5}$$

Die Funktion $s \mapsto V(\gamma(s))$ ist stetig, daher Riemann-integrierbar und es gilt für festes $\gamma \in \mathcal{W}$

$$-\frac{t}{N}\sum_{j=1}^N V\left(\gamma\left(\frac{jt}{N}\right)\right) \quad \to \quad \int_0^t V(\gamma(s))ds\ .$$

Da V von unten beschränkt ist, folgt die gleichmäßige Beschränktheit der Integranden in (3.5). Da Konstanten bezüglich w integrierbar sind, folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathcal{W}(q,q',t)} \exp\left[-\frac{t}{N}\sum_{j=1}^N V\left(\gamma\left(\frac{jt}{N}\right)\right)\right] dw(\gamma) = \int_{\mathcal{W}(q,q',t)} \exp\left(-\int_0^t V(\gamma(s))ds\right) dw(\gamma).$$

Also gilt $k_N(q,q') \to k(q,q')$. Für $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ bedeutet (3.4) gerade

$$\int_{\mathbb{R}^n} k_N(\cdot,q')\varphi(q')\ dq' \xrightarrow{L^2} e^{-tH}\varphi.$$

Indem wir zu einer Teilfolge übergehen, können wir O.B.d.A. annehmen, dass die Konvergenz auch punktweise (fast überall) gilt. Für $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ folgt aus der gleichmäßigen Beschränktheit der k_N mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz für fast alle $q \in \mathbb{R}^n$

$$(e^{-tH}\varphi)(q) = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} k_N(q,q')\varphi(q')\ dq' = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{N\to\infty} k_N(q,q')\varphi(q') = (A\varphi)(q) \tag{3.6}$$

Die Gleichung (3.6) gilt also insbesondere für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, und da diese Menge einen dichten Unterraum von $L^2(\mathbb{R}^n)$ bildet und beide Operatoren in (3.6) beschränkt sind, folgt $e^{-tH} = A$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$\square$

Literaturverzeichnis

[1] Stewart N. Ethier and Thomas G. Kurtz. *Markov processes.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986. Characterization and convergence.

[2] James Glimm and Arthur Jaffe. *Quantum physics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1987. A functional integral point of view.

[3] Hui Hsiung Kuo. *Gaussian measures in Banach spaces.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 463. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.