Hardyräume

Bachelorarbeit aus Analysis

Claudio Rojik

Matrikelnummer: 0725653

Betreuer: Ao. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Michael Kaltenbäck

10. März 2011

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Arbeit werden Hardyräume betrachtet und mit deren Hilfe Probleme aus der Analysis mit operatortheoretischen Methoden behandelt. Zwei wichtige Resultate sind das erklärte Ziel der Arbeit: Einerseits ein Interpolationsproblem, und andererseits eine mögliche Faktorisierung holomorpher Funktionen in zwei Funktionen mit besonderen Eigenschaften.
Vorausgesetzt werden grundlegende Kenntnisse der Analysis, die in den ersten Semestern erlernt werden, sowie maßtheoretische Kenntnisse. Notwendig sind außerdem grundlegende Ergebnisse aus der Funktionalanalysis, die in [W] enthalten sind. Ergebnisse aus der höheren Funktionalanalysis werden zur Einführung kurz in Kapitel 1 zusammengefasst, wo sie allerdings ohne Beweise angeführt werden. Die Beweise zu diesen Resultaten finden sich in [K].
In Kapitel 2 werden kernreproduzierende Hilberträume eingeführt und der Hardyraum auf der Einheitskreisscheibe als solcher genauer studiert. Weiters werden Multiplierer-Funktionale eingeführt, die sich für den weiteren Verlauf der Arbeit als sehr wichtig herausstellen werden.
Kapitel 3 beschäftigt sich mit einem Interpolationsproblem, dem Nevanlinna-Pick-Problem, welches sich mit der bisher eingeführten Theorie elegant lösen lässt. Die Kernidee für die Lösung liefert hier das Commutant Lifting Theorem. Um dessen Wichtigkeit zu zeigen, werden wir es auch noch für die Lösung des Carathéodory-Fejér-Problems verwenden, das sich mit der Fortsetzung zu holomorphen Funktionen beschäftigt.
In Kapitel 4 betrachten wir schlussendlich noch den Hardyraum am Einheitskreis, den wir mit dem zuvor eingeführten Hardyraum vergleichen und in Verbindung setzen werden. Den Hauptsatz dieses Kapitels stellt der Satz von Beurling dar, mit dessen Hilfe wir unter anderem die Inner-Outer-Faktorisierung einer holomorphen Funktion zeigen können.

In Kapitel 2 werden all die Grundlagen und Eigenschaften von Hardyräumen bereitgestellt, die wir für die Lösung der Probleme in den darauffolgenden Kapiteln benötigen. Die Kapitel 3 und 4 können allerdings unabhängig voneinander gelesen werden.

1 Wichtige Resultate aus Analysis und Funktionalanalysis

In diesem Kapitel werden wir wichtige Resultate zusammenfassen, die teilweise aus der Theorie der höheren Funktionalanalysis stammen und in Beweisen aus den späteren Kapiteln benötigt werden.

1.1 Sätze aus der Funktionalanalysis und komplexen Analysis

1.1.1 Satz (Konvergenzsatz von Weierstrass). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakt konvergente Folge von auf G holomorphen Funktionen. Dann ist die Grenzfunktion auch holomorph in G.

1.1.2 Satz (Satz vom abgeschlossenen Graphen). Seien X und Y Banachräume und sei T eine lineare Abbildung von X nach Y. Sei der Graph von T abgeschlossen in $X \times Y$. Dann ist T stetig und beschränkt.

1.1.3 Lemma. Sei S eine Selbstabbildung auf einem Hilbertraum. Dann ist S genau dann eine Kontraktion, wenn $I - S^*S \geq 0$ gilt.

Beweis. $((I - S^*S)x, x) \geq 0$ gilt genau dann, wenn $(x, x) - (Sx, Sx) \geq 0$ gilt. Dies wiederum gilt genau dann, wenn $\|Sx\| \leq \|x\|$.

$\square$

1.1.4 Lemma. Seien X und Z normierte Räume, $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Teilraum und $\iota : X \to Z$ eine Isometrie. Dann ist auch $\iota(Y)$ abgeschlossen.

1.1.5 Lemma. Sei $\mathcal{P}$ ein Hilbertraum und $V : \mathrm{dom}(V) \to \mathrm{ran}(V)$ isometrisch, wobei $\mathrm{dom}(V) \subseteq \mathcal{P}$ und $\mathrm{ran}(V) \subseteq \mathcal{P}$. Dann existiert ein Hilbertraum $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{P}$ und eine unitäre Abbildung $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, die V fortsetzt.

1.2 Lineare Relationen

1.2.1 Definition. Seien X und Y Vektorräume. T heißt lineare Relation zwischen X und Y, wenn T ein linearer Unterraum von $X \times Y$ ist.
Seien X und Y normierte Räume und sei $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen. Ist T abgeschlossen, so spricht man von einer abgeschlossenen linearen Relation. Mit $\overline{T}$ bezeichnet man den Abschluss von T.
Den Definitionsbereich bezeichnet man mit $\mathrm{dom}\, T := \{x \in X : \exists y \in Y : (x; y) \in T\}$ und den Multi-Valued-Part mit $\mathrm{mul}(T) := \{y \in Y : (0; y) \in T\}$.

Folgendes Lemma legt nahe, lineare Relationen als mehrwertige Funktionen zu betrachten.

1.2.2 Lemma. Ist $(f; g) \in T$, so gilt $\{h \in Y : (f; h) \in T\} = g + \mathrm{mul}(T)$.

1.2.3 Bemerkung. Indem man einen linearen Operator T von X nach Y mit seinem Graph identifiziert, kann man T als lineare Relation betrachten, die offenbar $\operatorname{mul}(T) = \{0\}$ erfüllt. Umgekehrt ist eine lineare Relation T mit $\operatorname{mul}(T) = \{0\}$ der Graph eines Operators.

1.2.4 Lemma. Seien X und Y normierte Räume, und sei $T \leq X \times Y$ eine lineare Relation. Für alle $(x; y) \in T$ gelte $\|y\| \leq \|x\|$. Dann folgt $\operatorname{mul}(T) = \{0\}$, und T ist ein Operator von $\operatorname{dom} T$ nach Y.

1.2.5 Definition. Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Hilberträume und $T \leq \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ eine lineare Relation. Dann heißt

$$T^* := \{(x; y) \in \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 : (x, v) = (y, u) \quad \forall (u; v) \in T\}$$

die adjungierte Relation zu T.

1.2.6 Bemerkung. Für beschränkte Operatoren $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ist T^* der übliche adjungierte Operator.

1.2.7 Lemma. Sei T^* der adjungierte Operator zu T. Dann gilt

$$\operatorname{mul}(T^*) = (\operatorname{dom} T)^\perp$$

und

$$(T^*)^* = \overline{T}.$$

1.2.8 Lemma. Sei $R \leq X \times Y$ eine abgeschlossene lineare Relation mit $\operatorname{mul}(R) = \{0\}$ und sei $D \subseteq X$ ein dichter Teilraum, für den $\operatorname{dom}(R) \supseteq D$ gilt. Falls $R|_D \in \mathcal{B}(D, Y)$, so folgt $R \in \mathcal{B}(X, Y)$. In dem Fall gilt auch $\overline{R|_D} = R = \tilde{R}$, wobei wir mit $\tilde{R}$ die eindeutige, beschränkte Fortsetzung von $R|_D$ auf X bezeichnen.

Beweis. Setzen wir den beschränkten Operator $R|_D$ zu $\tilde{R} \in \mathcal{B}(X, Y)$ fort, so folgt wegen der Beschränktheit von $\tilde{R}$ die Abgeschlossenheit von $\tilde{R} \leq X \times Y$. Somit gilt (als lineare Relationen betrachtet) auch $\overline{R|_D} \subseteq \tilde{R}$.
Zu $x \in X \backslash D$ gibt es wegen der Dichtheit von D Elemente $x_n \in D$ mit $x_n \to x$. Wegen der Stetigkeit von $R|_D$ folgt

$$\begin{array}{ccc} (x_n; R|_D x_n) & \to & (x; \tilde{R}x) \\ \in & & \in \\ R|_D & & \overline{R|_D} \end{array}$$

und somit $\operatorname{dom}(\overline{R|_D}) = X$. Da $\overline{R|_D}$ und $\tilde{R}$ beides Operatoren sind, gilt damit

$$\overline{R|_D} = \tilde{R}. \tag{1}$$

Klarerweise gilt $R|_D \subseteq R$. Da R abgeschlossen ist, haben wir $\overline{R|_D} \subseteq \overline{R} = R$. Weil es sich auch hier um Operatoren handelt, folgt die Gleichheit

$$\overline{R|_D} = R$$

und mit (1)

$$\tilde{R} = \overline{R|_D} = R.$$

□

1.3 Multiplikationsoperatoren

Dass im folgenden Lemma aus (c) der Punkt (b) folgt, ist Konsequenz aus Lemma 1.2.8.

1.3.1 Lemma. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\mu \geq 0$ ein endliches Maß, und $h : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar. Setze

$$M_h : \begin{cases} \operatorname{dom}(M_h) & \to & L^2(\mu) \\ g & \mapsto & g \cdot h \end{cases},$$

wobei wir mit $\operatorname{dom}(M_h)$ den linearen Teilraum

$$\operatorname{dom}(M_h) = \left\{ g \in L^2(\mu) : gh \in L^2(\mu) \right\}$$

von $L^2(\mu)$ bezeichnen. Dann gilt:

(i) Der Definitionsbereich $\operatorname{dom}(M_h)$ liegt dicht in $L^2(\mu)$ und M_h ist ein abgeschlossener Operator, wobei der Graph von M_h abgeschlossen ist im Raum $L^2(\mu) \times L^2(\mu)$ (versehen mit der Produkttopologie).

(ii) Folgende vier Aussagen sind äquivalent:

  (a) $h \in L^\infty(\mu)$, d.h. beschränkt auf dem Komplement einer Nullmenge.

  (b) $\operatorname{dom}(M_h) = L^2(\mu)$ und M_h ist beschränkt.

  (c) M_h ist beschränkt auf zumindest einem $L^2(\mu)$-dichten Teilraum $\mathcal{M}(\subseteq \operatorname{dom}(M_h))$.

  (d) $\operatorname{dom}(M_h) = L^2(\mu)$.

  In diesem Fall ist $M_h : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ beschränkt und

$$\|M_h\| = \|h\|_\infty (= \inf\{\eta \in (0, +\infty) : \mu\{x \in \Omega : |h(x)| > \eta\} = 0\}).$$

2 Der Hardyraum als kernreproduzierender Hilbertraum

In diesem Abschnitt werden wir Hardyräume als Beispiele für kernreproduzierende Hilberträume (kurz: RKHS) einführen. Dafür benötigen wir erst einige Eigenschaften von RKHS.

2.1 Kernreproduzierende Hilberträume

2.1.1 Definition (RKHS). Sei Ω eine nichtleere Menge und der Hilbertraum $\mathcal{H}$ ein linearer Teilraum des Vektorraums $\mathbb{C}^\Omega$ aller linearer Funktionen von Ω nach $\mathbb{C}$. Die Elemente von $\mathcal{H}$ sind lineare Funktionen, für die Addition und skalare Multiplikation punktweise definiert sind.
Der Raum $\mathcal{H}$ heißt dann *kernreproduzierender Hilbertraum* (Reproducing Kernel Hilbert Space, RKHS), wenn die Abbildung

$$\iota_x : \begin{cases} \mathcal{H} & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

für alle $x \in \Omega$ auf $\mathcal{H}$ stetig ist.

2.1.2 Bemerkung. Bezeichne mit $(.,.)_\mathcal{H}$ das Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$. Nach dem Satz von Riesz-Fischer existiert für jedes $y \in \Omega$ eine eindeutige Funktion $k_y \in \mathcal{H}$, sodass $f(y) = (f, k_y)_\mathcal{H}$ für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt.

2.1.3 Definition. Sei $y \in \Omega$ gegeben, und bezeichne $k_y : \Omega \to \mathbb{C}$ die eindeutig bestimmte Funktion aus Bemerkung 2.1.2. Dann heißt die Abbildung

$$K : \begin{cases} \Omega \times \Omega & \to & \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto & K(x, y) := (k_y, k_x)_\mathcal{H} = k_y(x) \end{cases}$$

Kernfunktion von $\mathcal{H}$.

2.1.4 Lemma. Es gilt $\overline{\operatorname{span}\{k_y : y \in \Omega\}} = \mathcal{H}$.

Beweis. Sei $f \in \operatorname{span}\{k_y : y \in \Omega\}^\perp$ beliebig. Da dann $f(y) = (f, k_y) = 0$ für alle $y \in \Omega$, muss f schon identisch die Nullfunktion sein.

□

Wir benötigen noch folgende Tatsachen über den Zusammenhang einer Funktion auf einem RKHS und der zugehörigen Kernfunktion.

2.1.5 Lemma. Seien Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{H}$ ein RKHS auf Ω. Sei K die Kernfunktion von H und $A \subseteq \Omega$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Alle Funktionen $f \in \mathcal{H}$ sind auf A beschränkt (d.h. $|f(t)| \leq C_f$ für alle $t \in A$).

(ii) Die Abbildung $\omega \mapsto K(\omega, \omega)$ ist auf A beschränkt.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Seien die Abbildungen $f \in \mathcal{H}$ beschränkt auf A. Betrachte die Menge $\{k_t : t \in A\} \subseteq \mathcal{H}$ als Menge von linearen Funktionalen $(f \mapsto (f, k_t))$ auf $\mathcal{H}$, indem $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$ nach dem Satz von Riesz-Fischer miteinander identifiziert werden. Für alle $f \in \mathcal{H}$ folgt somit $|(f, k_t)| = |f(t)| \leq C_f$. Aus dem Satz von Banach-Steinhaus folgt die Existenz einer Konstanten $C > 0$, die unabhängig von der gewählten Funktion f ist, sodass $\|(f \mapsto (f, k_t))\| \leq C$ für alle $t \in A$ gilt. Mit Hilfe der Riesz-Fischer-Identifikation folgt

$$K(t,t) = (k_t, k_t) = \|k_t\|^2 = \|(f \mapsto (f, k_t))\|^2 \leq C^2$$

für alle $t \in A$. Somit haben wir die Beschränktheit der Kernfunktion gezeigt.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Seien $f \in \mathcal{H}$ und $t \in A$ gegeben. Dann gilt

$$|f(t)| = |(f, k_t)| \leq \|f\| \cdot \|k_t\| = \|f\| \cdot \sqrt{(k_t, k_t)} = \|f\| \cdot \sqrt{K(t,t)},$$

wobei die Ungleichung aus dem Satz von Cauchy-Schwarz folgt. Somit ist f auf A beschränkt.

□

2.1.6 Korollar. Seien Ω eine nichtleere Menge, $\mathcal{H}$ ein RKHS auf Ω und K die zugehörige Kernfunktion. Weiters gelte $K(\omega, \omega) \leq C$ für alle $\omega \in M$ für eine Teilmenge $M \subseteq \Omega$. Dann folgt aus der Konvergenz in der Norm bereits die gleichmäßige Konvergenz auf M.

Beweis. Sei (f_n) eine Folge von Funktionen, die in der Norm gegen eine Funktion f konvergiert. Es folgt

$$|f_n(t) - f(t)| = |(f_n - f, k_t)| \leq \|f_n - f\| \cdot \sqrt{K(t,t)} \leq \sqrt{C} \cdot \|f_n - f\|$$

für alle $t \in M$, wobei die erste Ungleichung aus dem Satz von Cauchy-Schwarz und die zweite aus der vorausgesetzten Beschränktheit der Kernfunktion folgt. Diese Abschätzung ist von $t \in M$ unabhängig und gilt somit auch für die Supremumsnorm. Es folgt

$$\|f_n|_M - f|_M\|_\infty \leq \sqrt{C} \cdot \|f_n - f\| \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

□

2.1.7 Proposition. Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\mathcal{H}$ ein RKHS auf Ω und K die zugehörige Kernfunktion. Dann sind äquivalent:

(i). Alle $f \in \mathcal{H}$ sind holomorph.

(ii). Für alle $\omega \in \Omega$ ist die Funktion $z \mapsto K(z, \omega) = (k_\omega, k_z) = k_\omega(z)$ holomorph und $\omega \mapsto K(\omega, \omega)$ ist als Funktion von Ω nach $[0, \infty)$ lokal beschränkt (d.h. beschränkt auf kompakten Teilmengen von Ω).

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $f \in \mathcal{H}$ eine beliebige holomorphe Funktion und sei $A \subseteq \Omega$ kompakt. Dann ist f insbesondere stetig, und $f(A) \subseteq \mathbb{C}$ ist als stetiges Bild einer kompakten Menge selber kompakt und somit beschränkt. Nach Lemma 2.1.5 folgt die Beschränktheit der Abbildung $\omega \mapsto K(\omega, \omega)$ auf A. Die Funktion $z \mapsto K(z, \omega) = k_\omega(z)$ ist nichts anderes als die Funktion $k_\omega \in \mathcal{H}$, welche nach Voraussetzung holomorph ist.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Nach Lemma 2.1.4 liegt $span\{k_\omega : \omega \in \Omega\}$ dicht in $\mathcal{H}$. Somit existiert für eine feste Funktion $f \in \mathcal{H}$ eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $span\{k_\omega : \omega \in \Omega\}$, die in der Norm gegen

f konvergiert. Stellt man die Folgenglieder in der Form $f_n = \sum_{l=1}^{k(n)} \lambda_{l,n} k_{\omega_{l,n}}$ dar, so erkennt man wegen der vorausgesetzten Analytizität von $z \mapsto k_\omega(z)$ die Holomorphie der Folgenglieder f_n. Nach dem Satz von Cauchy-Schwarz gilt

$$|f_n(\omega) - f(\omega)| = |(f_n - f, k_\omega)| \leq \|f_n - f\| \cdot \sqrt{K(\omega, \omega)},$$

wobei $K(\omega, \omega)$ auf jeder kompakten Menge A beschränkt ist. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n|_A - f|_A\|_\infty = 0$$

auf A, also die gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Kompakta (vergleiche Korollar 2.1.6). Nach dem Konvergenzsatz von Weierstrass 1.1.1 ist der lokal gleichmäßige Grenzwert einer Folge analytischer Funktionen wieder analytisch. Daher ist f holomorph.

□

2.2 Hardyräume

Wir werden uns in diesem Abschnitt mit Hardyräumen auf der Einheitskreisscheibe beschäftigen. Wie sich herausstellen wird (siehe Bemerkung 2.2.3), kann man Hardyräume als RKHS betrachten. Somit können wir die Theorie des vorigen Abschnitts direkt für die Betrachtung der Hardyräume verwenden.

2.2.1 Bemerkung. Es gelte $\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 < +\infty$. Man erkennt leicht, dass für den Konvergenzradius R von $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ dann $R \geq 1$ gilt.

2.2.2 Definition (Hardyraum). Der Raum $H^2(\mathbb{D})$, definiert durch

$$H^2(\mathbb{D}) := \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n, \sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 < \infty \right\},$$

heißt *Hardyraum* (auf der Einheitskreisscheibe).
Seien a_n die Koeffizienten der Potenzreihendarstellung von f und b_n die Koeffizienten der Potenzreihe von g. Dann ist durch

$$(f, g)_{H^2(\mathbb{D})} := \sum_{n=0}^\infty a_n \overline{b_n}$$

ein Skalarprodukt auf $H^2(\mathbb{D})$ definiert.

2.2.3 Bemerkung.

(i) Der Hardyraum $H^2(\mathbb{D})$ ist isomorph zum Raum $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ mit dem Isomorphismus

$$\phi : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{N}_0) & \to & H^2(\mathbb{D}) \\ (a_n) & \mapsto & \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \end{cases}.$$

(ii) Sei $w \in \mathbb{D}$ fest und definiere $k_w(z) := \frac{1}{1 - z\overline{w}} = \sum_{n=0}^\infty \overline{w}^n z^n$. Offensichtlich ist k_w ein Element von $H^2(\mathbb{D})$. Daher kann man k_w als Argument des Skalarprodukts betrachten und erhält $(f, k_w)_{H^2(\mathbb{D})} = \sum_{n=0}^\infty a_n w^n = f(w)$.
Somit ist $H^2(\mathbb{D})$ ein RKHS mit der Kernfunktion $K(y, x) = (k_x, k_y)_{H^2(\mathbb{D})} = \frac{1}{1 - y\overline{x}}$.

Mit folgender Proposition kann man feststellen, ob eine analytische Funktion ein Element des Hardyraums $H^2(\mathbb{D})$ ist.

2.2.4 Proposition. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine analytische Funktion mit Konvergenzradius $R \geq 1$. Dann gilt $f \in H^2(\mathbb{D})$ genau dann, wenn

$$\lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt < \infty. \tag{2}$$

Dabei hängt das Integral monoton wachsend von r ab. Weiters gilt für $f, g \in H^2(\mathbb{D})$

$$(f, g)_{H^2(\mathbb{D})} = \lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it})\overline{g(re^{it})} \, dt,$$

insbesondere

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt.$$

Beweis. Nach Definition des Skalarprodukts gilt $\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 = (f, f)_{H^2(\mathbb{D})} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt für alle Funktionen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius $R \geq 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \lim_{r \nearrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n},$$

wobei die rechte Seite von r monoton wachsend abhängt. Für ein festes $r \in [0, 1)$ folgt jetzt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=0}^{N} a_n r^n e^{itn} \right) \left(\sum_{m=0}^{N} a_m r^m e^{itm} \right) dt \\
&= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n,m=0}^{N} a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{it(n-m)} \, dt \\
&= \lim_{N \to \infty} \sum_{n,m=0}^{N} a_n \overline{a_m} r^{n+m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it(n-m)} \, dt \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n \overline{a_n} r^{2n} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n},
\end{aligned}$$

wobei die Vertauschung von Limes und Integral wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktion $\sum_{n=0}^{N} a_n r^n e^{itn}$ gegen $f(re^{it})$ möglich ist, und die Gleichheit $(*)$ gilt, da $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it(n-m)} \, dt = \delta_{nm}$. Diese Gleichungskette gilt für jedes feste $r \in [0, 1)$. Somit folgt

$$\lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt = \lim_{r \nearrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2,$$

wobei die Limiten in $[0, +\infty]$ wegen der Monotonie existieren. Daher gilt $f \in H^2(\mathbb{D})$ genau dann, wenn (2) gilt.
Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus der Polarformel.

$\square$

2.2.5 Bemerkung. Proposition 2.2.4 besagt, dass man Hardyraumnorm und -Skalarprodukt direkt aus den Funktionswerten einer Funktion auf der Kreisscheibe berechnen kann und dafür nicht die Potenzreihendarstellung notwendig ist.

2.2.6 Lemma. Der Raum der Polynome $\mathbb{C}[z]$ ist dicht in $H^2(\mathbb{D})$ bezüglich $\|.\|_{H^2(\mathbb{D})}$.

Beweis. Eine Funktion $f \in H^2(\mathbb{D})$ habe die Potenzreihendarstellung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Damit folgt

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \right\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 = \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n \right\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|^2 = 0.$$

□

2.2.7 Proposition. Alle Funktionen $f \in H^2(\mathbb{D})$ sind holomorph.

Beweis. Dies folgt aus der Analytizität der Kernfunktion $K(z,w) = \frac{1}{1-z\overline{w}}$, der Tatsache, dass $K(z,z) = \frac{1}{1-|z|^2} \leq \frac{1}{1-r^2}$ für alle $z \in K_r(0)$ und alle $r \in (0,1)$, und Proposition 2.1.7.

□

2.3 Multipliererabbildungen

Unter einem Multiplikationsoperator des Maßraumes $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ versteht man für ein festes $h \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ den Operator, der durch $M_h : f \mapsto f \cdot h$ gegeben ist, im Raum $\mathcal{B}(L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ lebt und $\|M_h\| = \|h\|_\infty$ erfüllt. Genaueres zu Multiplikationsoperatoren des $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ findet man beispielsweise in [K, Abschnitt 2.3], vgl. auch Abschnitt 1.3.
In Analogie dazu wollen wir jetzt Multipliererabbildungen auf kernreproduzierenden Hilberträumen einführen.

In diesem Abschnitt sei Folgendes vorausgesetzt: Es sei Ω offen, $\mathcal{H}$ ein RKHS und $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ eine feste Funktion. Betrachte jetzt die lineare Relation

$$T_\phi := \{(f;g) \in \mathcal{H}^2 : g = f \cdot \phi\} \leq \mathcal{H} \times \mathcal{H}.$$

Wir wollen nun einige Eigenschaften von T_ϕ angeben.

2.3.1 Lemma. Die lineare Relation T_ϕ ist abgeschlossen. Für den Multi-Valued-Part von T_ϕ gilt $\mathrm{mul}(T_\phi) = \{0\}$.

Beweis. Betrachte eine Folge (f_n, g_n) in T_ϕ, die gegen ein Element $(f;g) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ konvergiert. Nach der Definition der linearen Relation gilt $g_n = f_n \cdot \phi$. Für beliebige Punkte $x \in \Omega$ folgt wegen der Stetigkeit des Punktauswertens als Folgerung der Konvergenz von $(f_n; g_n)$ gegen $(f;g)$

$$\begin{array}{ccccc} g_n(x) & = & f_n(x) & \cdot & \phi(x) \\ \downarrow & & \downarrow & & = \\ g(x) & = & f(x) & \cdot & \phi(x) \end{array}$$

und somit $g = f \cdot \phi$. Also ist $(f;g)$ ein Element der linearen Relation und T_ϕ daher abgeschlossen. Die Behauptung $\mathrm{mul}(T_\phi) = \{0\}$ ist klar.

□

2.3.2 Bemerkung. Wegen $\operatorname{mul}(T_\phi) = \{0\}$ ist nach Bemerkung 1.2.3 die lineare Relation T_ϕ auch ein Operator.

2.3.3 Lemma. Für die lineare Relation $R := \operatorname{span}\{(k_x; \overline{\phi(x)} \cdot k_x) : x \in \Omega\}$ gilt $R^* = T_\phi$ und $T_\phi^* = \overline{R}$.

Beweis. Wegen der Linearität ist ein Paar $(f; g)$ genau dann ein Element von R^*, wenn $(f, \overline{\phi(x)} \cdot k_x) = (g, k_x)$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Nach der Definition der k_x ist das zu

$$\phi(x) \cdot f(x) = \phi(x)(f, k_x) = (f, \overline{\phi(x)} \cdot k_x) = (g, k_x) = g(x), \quad x \in \Omega$$

bzw. zu $(f; g) \in T_\phi$ äquivalent.
Der zweite Punkt ist eine bekannte Tatsache über lineare Relationen.

□

2.3.4 Korollar.

(i) Es gilt $(\operatorname{dom}(T_\phi))^\perp = \operatorname{mul}(\overline{R})$.

(ii) Es gilt $(\operatorname{dom}(R))^\perp = \operatorname{mul}(T_\phi) = \{0\}$.

2.3.5 Bemerkung. Nach Punkt (i) von Korollar 2.3.4 ist $\operatorname{mul}(\overline{R})$ in der Regel nicht der Nullraum. Wegen Punkt (ii) liegt $\operatorname{dom}(R)$ dicht in $\mathcal{H}$.

Wir folgern noch weitere Zusammenhänge zwischen den linearen Relationen R und T_ϕ:

2.3.6 Korollar. Folgende drei Punkte sind äquivalent:

(i) Die lineare Relation T_ϕ ist ein beschränkter Operator auf $\mathcal{H}$.

(i) Die lineare Relation $\overline{R}$ ist ein beschränkter Operator auf $\mathcal{H}$.

(iii) Es gilt $\operatorname{dom}(T_\phi) = \mathcal{H}$.

Beweis. (i) ⇔ (ii): Die lineare Relation $\overline{R}$ ist als Adjungierte zu T_ϕ beschränkt, wenn T_ϕ beschränkt ist. Andererseits ist T_ϕ die Adjungierte zu $\overline{R}$ und es gilt die Umkehrung.
(i) ⇔ (iii): Die Äquivalenz folgt aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (Satz 1.1.2).

□

Wir können das vorige Korollar nochmals verschärfen:

2.3.7 Korollar. Folgende drei Punkte sind äquivalent:

(i) Die lineare Relation T_ϕ ist ein beschränkter Operator auf $\mathcal{H}$ und es gilt $\|T_\phi\| \leq 1$.

(i) Die lineare Relation $\overline{R}$ ist ein beschränkter Operator auf $\mathcal{H}$ und es gilt $\|\overline{R}\| \leq 1$.

(iii) Es gilt $\operatorname{mul}(R) = \{0\}$ und als Abbildung $R : \operatorname{dom}(R) \to \mathcal{H}$ gilt $\|R\| \leq 1$.

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Die Äquivalenz folgt aus Korollar 2.3.6 und der Tatsache, dass die Norm der Adjungierten gleich der Norm des Operators ist.
(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Die Äquivalenz folgt, da die stetige Fortsetzung von R auf $\mathcal{H}$ mit R übereinstimmt, vgl. Lemma 1.2.8.

□

2.3.8 Bemerkung. Sei $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion, sodass $T_\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und daher $T_\phi^* = \overline{R} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt. Dann folgt für $x \in \Omega$, dass $Rk_x = \overline{\phi(x)}k_x$, woraus sich $\|Rk_x\| = |\overline{\phi(x)}| \cdot \|k_x\|$ ergibt. Also muss

$$|\phi(x)| = \frac{\|Rk_x\|}{\|k_x\|} \leq \|R\| = \|T_\phi\|, \tag{3}$$

wobei wir fordern müssen, dass $k_x \neq 0$ für alle $x \in \Omega$, damit der Ausdruck in (3) wohldefiniert ist. Aus (3) folgt daher

$$\|\phi\|_\infty \leq \|T_\phi\|.$$

2.3.9 Definition. Ist $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion, sodass $T_\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, dann nennen wir ϕ einen *Multiplierer* und T_ϕ *Multipliererabbildung.* Wir bezeichnen die Menge der Multiplierer eines RKHS $\mathcal{H}$ mit $\mathfrak{Mul}(\mathcal{H})$.

2.3.10 Bemerkung. Offenbar gilt $T_{\phi_1 \cdot \phi_2} = T_{\phi_1} \circ T_{\phi_2}$ für alle $\phi_1, \phi_2 \in \mathfrak{Mul}(\mathcal{H})$.

Wir wollen uns die Theorie der Multiplierer und Multipliererabbildungen genauer im Fall $\mathcal{H} = H^2(\mathbb{D})$ anschauen. Dazu benötigen wir noch folgende Definition.

2.3.11 Definition. Der Raum $H^\infty(\mathbb{D}) := \{h : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : h \,\text{holomorph}, \sup_{z\in\mathbb{D}} |h(z)| < \infty\}$ heißt *Hardyraum der beschränkten Funktionen* (am Einheitskreis).

2.3.12 Lemma. Der Raum $H^\infty(\mathbb{D})$ liegt dicht in $H^2(\mathbb{D})$ bezüglich der Hardyraumnorm $\|.\|_{H^2(\mathbb{D})}$.

Beweis. Die Inklusion $H^\infty(\mathbb{D}) \subseteq H^2(\mathbb{D})$ folgt aus Proposition 2.2.4. Die Dichtheit folgt aus der Tatsache, dass der Raum $\mathbb{C}[z]$ im Raum $H^\infty(\mathbb{D})$ enthalten ist, die Polynome nach Lemma 2.2.6 aber selbst schon dicht in $H^2(\mathbb{D})$ liegen.

□

Einen weiteren Zusammenhang zwischen den Räumen $H^2(\mathbb{D})$ und $H^\infty(\mathbb{D})$ erkennen wir mit Hilfe der Multiplierer. Die Funktionen aus $H^\infty(\mathbb{D})$ sind nämlich genau die Multiplierer von $H^2(\mathbb{D})$, wie der folgende Satz zeigt.

2.3.13 Satz. Es gilt $\mathfrak{Mul}(H^2(\mathbb{D})) = H^\infty(\mathbb{D})$ und $\|T_h\| = \|h\|_\infty$. Die Abbildung $h \mapsto T_h$ ist eine isometrische und mit der Multiplikation verträgliche Abbildung von $H^\infty(\mathbb{D})$ nach $\mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}))$.

Beweis. Seien Funktionen $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ und $f \in H^2(\mathbb{D})$ gegeben. Wegen $|h(re^{it})| \leq \|h\|_\infty$ und mit Proposition 2.2.4 folgt

$$\|fh\|_{H^2(\mathbb{D})} = \lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(re^{it})|^2 \cdot |f(re^{it})|^2 \, dt \leq \|h\|_\infty^2 \cdot \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 < \infty.$$

Daher gilt $T_h \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}))$, wobei $\|T_h\| \leq \|h\|_\infty$.
Sei umgekehrt ein Multiplierer $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit $T_h \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}))$ gegeben. Da die konstante Einsfunktion 1 in $H^2(\mathbb{D})$ liegt, folgt $h = T_h(1) \in H^2(\mathbb{D})$, woraus die Analytizität der Funktion h folgt. Aus Gleichung (3) in Bemerkung 2.3.8 wissen wir, dass die Ungleichung $\|h\|_\infty \leq \|T_h\|$ allgemein gilt, womit die behauptete Gleichheit gezeigt ist. Nach Voraussetzung gilt $T_h \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}))$, was gleichbedeutend mit $\|T_h\| < \infty$ ist und $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ zeigt.
Für die Verträglichkeit mit der Multiplikation siehe Bemerkung 2.3.10.

□

2.3.14 Bemerkung.

(i) Sei $\mathcal{H} = H^2(\mathbb{D})$ gegeben und $h \in H^\infty(\mathbb{D})$. Es bezeichne T_z die Multipliererabbildung zur identischen Funktion. Dann folgt $T_h \circ T_z = T_z \circ T_h$.

(ii) Betrachte die Abbildungen

$$T_z : \begin{cases} H^2(\mathbb{D}) & \to & H^2(\mathbb{D}) \\ f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n & \mapsto & z \cdot f(z) = z \cdot \sum_{n=0}^\infty a_n z^n = \sum_{n=0}^\infty a_n z^{n+1} \end{cases}$$

und

$$S : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{N}_0) & \to & \ell^2(\mathbb{N}_0) \\ (a_0, a_1, \ldots) & \mapsto & (0, a_0, a_1, \ldots) \end{cases}.$$

Dann gilt $S = \phi^{-1} \circ T_z \circ \phi$ mit dem Isomorphismus $\phi : \ell^2(\mathbb{N}_0) \to H^2(\mathbb{D})$ aus Bemerkung 2.2.3.

Es gilt auch eine Umkehrung des in (i) von Bemerkung 2.3.14 erwähnten Sachverhalts.

2.3.15 Satz. Sei $T : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ eine beschränkte lineare Abbildung. Dann gilt $T \circ T_z = T_z \circ T$ genau dann, wenn ein $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ existiert, sodass $T = T_h$. In dem Fall ist h eindeutig.

Beweis. Die Richtung $\Leftarrow$ wurde bereits in Bemerkung 2.3.14 behandelt.
Für den Beweis der Richtung $\Rightarrow$ definiere $h := T(1) \in H^2(\mathbb{D})$ und betrachte das Polynom $p(z) := \sum_{n=0}^N b_n z^n$. Nach Proposition 2.2.4 liegt das Polynom ebenfalls in $H^2(\mathbb{D})$. Es folgt

$$\begin{aligned} Tp &= \sum_{n=0}^N b_n T(z \mapsto z^n) = \sum_{n=0}^N b_n T((T_z)^n(1)) = \sum_{n=0}^N b_n T \circ (T_z)^n(1) = \\ &= \sum_{n=0}^N b_n (T_z)^n \circ T(1) = \sum_{n=0}^N b_n T_z^n(h) = \sum_{n=0}^N b_n (z \mapsto z^n h(z)) = \\ &= \left(z \mapsto \left(\sum_{n=0}^N b_n z^n \right) h(z) \right) = p \cdot h, \end{aligned}$$

wobei das vierte Gleichheitszeichen wegen der vorausgesetzten Vertauschbarkeit der Multipliererabbildungen gilt. Nach Lemma 2.2.6 gibt es zu $f \in H^2(\mathbb{D})$ eine Folge von Polynomen $(p_N)_{N \in \mathbb{N}}$, die in der Hardyraumnorm gegen die Funktion f konvergiert. Sei jetzt $\omega \in \mathbb{D}$ gegeben. Dann folgt

$$\begin{aligned} T(f)(\omega) &= \left(T(\lim_{N\to\infty} p_N) \right)(\omega) \overset{(1)}{=} \left(\lim_{N\to\infty} T(p_N) \right)(\omega) \overset{(2)}{=} \lim_{N\to\infty} (T(p_N)(\omega)) = \\ &= \lim_{N\to\infty} (z \mapsto h(z) p_N(z))(\omega) = \lim_{N\to\infty} (h(\omega) p_N(\omega)) \overset{(2)}{=} h(\omega) f(\omega), \end{aligned}$$

wobei bei der Gleichheit (1) die Stetigkeit der Funktion T und bei den Gleichheiten (2) die Stetigkeit des Punktauswertens für ein festes $\omega \in \mathbb{D}$ eingeht. Somit gilt $T = T_h$, und weil dies $h \in \mathfrak{Mul}(H^2(\mathbb{D}))$ impliziert, folgt $h \in H^\infty(\mathbb{D})$.
Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Angenommen es existiert eine weitere Funktion $\tilde{h} \in H^\infty(\mathbb{D})$, sodass $T = T_{\tilde{h}}$. Wegen $T = T_h$ folgt $T_h = T_{\tilde{h}}$. Anwenden auf die Einsfunktion ergibt

$$h = T_h(1) = T_{\tilde{h}}(1) = \tilde{h}.$$

$\square$

3 Das Nevanlinna-Pick-Problem

3.1 Motivation

Seien für $n \in \mathbb{N}$ Werte $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ und $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{D}$ fest vorgegeben, wobei $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$. Das Nevanlinna-Pick-Problem behandelt die Fragestellung, ob es zu diesen Bedingungen eine holomorphe Funktion $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ gibt, die $\|h\|_\infty \leq 1$ und $h(z_j) = w_j$ für $j \in \{1, \dots, n\}$ erfüllt. Für beliebig vorgegebene Punkte wird solch eine Funktion nicht existieren.

3.1.1 Beispiel. Zu beliebig vorgegebenen Punkten wird es im Allgemeinen keine solche Funktion geben. Seien $z_1 = w_1 = 0$ gegeben. Dann folgt aus $h(0) = 0$ mit dem Lemma von Schwarz $|h(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$, was gleichbedeutend ist mit $|w_j| \leq |z_j|$ für $j \in \{1, \dots, n\}$. Man kann also leicht Punkte vorgeben, sodass diese Bedingung nicht erfüllt ist und es somit keine Funktion mit den Voraussetzungen des Nevanlinna-Pick-Problems geben kann.

Folgender Satz wird die Grundlage für das Finden einer geeigneten Lösung sein.

3.1.2 Satz (Commutant Lifting Theorem). Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Hilberträume und $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ und $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ Isometrien. Es seien außerdem $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{H}_1$ und $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{H}_2$ abgeschlossene Teilräume, wobei $\mathcal{M}_2$ S^*-invariant sei, d.h. $S^*\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_2$. Weiters sei $X \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ ein Operator, der $\|X\| \leq 1$ und $XP_1R = P_2SXP_1$ erfüllt, wobei hier $P_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{M}_1$ und $P_2 : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{M}_2$ die orthogonalen Projektionen auf die Teilräume bezeichnen.
Dann folgt die Existenz eines Operators $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, der die Eigenschaften $\|Y\| \leq 1$, $P_2Y = XP_1$ und $SY = YR$ erfüllt.

3.1.3 Bemerkung. Zerlegt man den Raum $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_1^\perp$, und analog den Raum $\mathcal{H}_2$ in $\mathcal{M}_2$ und $\mathcal{M}_2^\perp$, so besagt die Eigenschaft $P_2Y = XP_1$, dass der Operator Y in Blockmatrixform die Gestalt

$$Y = \begin{pmatrix} X & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

hat.

3.1.4 Bemerkung. Seien $\iota_1 : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{H}_1$ und $\iota_2 : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{H}_2$ die Einbettungsabbildungen. Dann können wir die Vertauschungseigenschaft der Operatoren X, S und R als

$$XP_1R = P_2S\iota_2XP_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{M}_2$$

schreiben, wobei wir die Einbettungsabbildung brauchen, damit Definitions- und Zielbereiche der Operatoren zusammenpassen. Die Adjungierte hat dann als Operator von $\mathcal{M}_2$ nach $\mathcal{H}_1$ die Eigenschaft

$$R^*\iota_1X^* = \iota_1X^*P_2S^*\iota_2 = \iota_1X^*S^*\iota_2 = \iota_1X^*(S^*|_{\mathcal{M}_2}),$$

wobei die zweite Gleichheit gilt, da wir uns wegen der S^*-Invarianz von $\mathcal{M}_2$ schon im entsprechenden Raum befinden und daher die Projektion nicht mehr notwendig ist. Wir haben also gezeigt, dass unter der Bedingung $XP_1R = P_2SXP_1$ für die Adjungierte die Vertauschungseigenschaft $R^*X^* = X^*(S^*|_{\mathcal{M}_2})$ gilt.
Da es sich bei obigen Umformungen um Äquivalenzumformungen handelt, gilt auch die Umkehrung.

Beweis (von Satz 3.1.2). Wir werden den Beweis in mehreren Schritten führen.

<u>1. Schritt:</u>
Definiere

$$\mathcal{U} := \operatorname{cls}\{S^j y : j \geq 0, y \in \mathcal{M}_2\}.$$

Dann gilt $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}_2$. Da $\mathcal{M}_2$ S^*-invariant ist und da wegen der Isometrie des Operators S klarerweise $S^*S = I$ gilt (I bezeichnet hierbei die identische Abbildung), folgt unmittelbar $S\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$ und $S^*\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$, was $\mathcal{U}$ als kleinsten S- und S^*-invarianten Teilraum von $\mathcal{H}_2$, der $\mathcal{M}_2$ enthält, ausweist. Definieren wir

$$\mathcal{N}_2 := \mathcal{H}_2 \ominus \mathcal{U} = \mathcal{U}^\perp,$$

so folgt aus $(Sx, y) = (x, S^*y) = 0$ und $(S^*x, y) = (x, Sy) = 0$ für $x \in \mathcal{N}_2$ und $y \in \mathcal{U}$ die S- und S^*-Invarianz von $\mathcal{N}_2$. Dies impliziert

$$P_{\mathcal{N}_2} S|_{\mathcal{M}_2} = 0 \tag{4}$$

und die S^*-Invarianz von $\widetilde{\mathcal{M}_2} := \mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{N}_2$. Wir können also

$$\widetilde{\mathcal{U}} := \operatorname{cls}\{S^j y : j \geq 0, y \in \widetilde{\mathcal{M}_2}\}$$

betrachten und stellen fest, dass $\widetilde{\mathcal{U}}$ nicht nur eine Obermenge von $\mathcal{M}_2$, sondern nach Definition von $\widetilde{\mathcal{M}_2}$ sogar eine Obermenge von $\mathcal{U} \oplus \mathcal{N}_2 = \mathcal{H}_2$ ist. Deshalb gilt

$$\mathcal{H}_2 = \operatorname{cls}\{S^j y : j \geq 0, y \in \widetilde{\mathcal{M}_2}\}.$$

Wir können also im Weiteren ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathcal{H}_2 = \operatorname{cls}\{S^j y : j \geq 0, y \in \mathcal{M}_2\}$ annehmen. Ansonsten können wir zu einem größeren Raum $\widetilde{\mathcal{M}_2}$ übergehen, für den wir einen gesuchten Operator Y finden, der also $\widetilde{P_2} Y = XP_1$ für die Projektion $\widetilde{P_2} : \mathcal{H}_2 \to \widetilde{\mathcal{M}_2}$ erfüllt. Die entsprechende Voraussetzung $XP_1R = P_2SXP_1$ ist wegen (4) erfüllt. Durch Projektion auf $\mathcal{M}_2$ ist die Behauptung dann auch für den kleineren Raum $\mathcal{M}_2$ erfüllt.

<u>2. Schritt:</u>
Wir betrachten jetzt den Vektorraum $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{M}_2$ als Hilbertraum versehen mit dem Summenskalarprodukt und definieren darauf den Operator B, der in Blockoperatorform die Gestalt

$$B := \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & (XP_1)^* \\ XP_1 & I_{\mathcal{M}_2} \end{pmatrix} : \begin{matrix} \mathcal{H}_1 \\ \times \\ \mathcal{M}_2 \end{matrix} \to \begin{matrix} \mathcal{H}_1 \\ \times \\ \mathcal{M}_2 \end{matrix}$$

hat, wobei XP_1 eine Abbildung von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{M}_2$ (über $\mathcal{M}_1$) ist und $(XP_1)^*$ ihre Adjungierte darstellt. Der Operator B ist wohldefiniert. Weiters gilt $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{M}_2)$, da alle Einträge im Blockoperator diese Eigenschaft erfüllen.
Wir wählen jetzt $x \in \mathcal{H}_1$ und $y \in \mathcal{M}_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left(B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= (x, x) + (XP_1x, y) + ((XP_1)^*y, x) + (y, y) = \\ &= (x, x) + (XP_1x, y) + (y, XP_1x) + (y, y) = \\ &= ((I - (XP_1)^* XP_1)\, x, x) + (XP_1x + y, XP_1x + y) \geq 0, \end{aligned}$$

da der erste Summand einen Wert größer gleich Null annimmt, was mit Lemma 1.1.3 aus der Tatsache folgt, dass XP_1 als Zusammensetzung von Kontraktionen selber eine Kontraktion ist, und der zweite Summand gleich $\|XP_1x + y\|^2$ und daher auch nichtnegativ ist.
Wir können also mittels

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right] := \left(B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$$

ein positiv semidefinites Skalarprodukt $[.,.]$ auf $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{M}_2$ definieren.

<u>3. Schritt:</u>
Bezeichne mit $I := (\mathcal{H}_1 \times \mathcal{M}_2)^\circ$ den isotropen Teil von $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{M}_2$, das heißt die Vektoren aus $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{M}_2$, die im Skalarprodukt mit sich selbst Null ergeben. Wir können dann den Faktorraum $(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{M}_2)/_I$ bilden, mit

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + I, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + I\right] := \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right]$$

versehen und diesen vervollständigen. Durch die Vervollständigung ergibt sich der Hilbertraum

$$\mathcal{K} := [(\mathcal{H}_1 \widehat{\times \mathcal{M}_2})\,/_I],$$

auf dem das Skalarprodukt $[.,.]$ gegeben ist.
Wir definieren die Einbettungsabbildungen ρ_1 und $\widetilde{\rho_2}$ durch

$$\rho_1 : \begin{cases} \mathcal{H}_1 & \rightarrow & \mathcal{K} \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + I \end{cases} \quad \text{und} \quad \widetilde{\rho_2} : \begin{cases} \mathcal{M}_2 & \rightarrow & \mathcal{K} \\ y & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + I \end{cases},$$

wobei wir zur Vereinfachung der Schreibweise ab sofort den isotropen Teil für die Elemente des Faktorraums nicht mehr angeben. Die Isometrie der Abbildung ρ_1 folgt aus

$$[\rho_1 x, \rho_1 x] = \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \left(B\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}_1 \times \mathcal{M}_2} = (x,x)_{\mathcal{H}_1},$$

da beim Operator B in der linken oberen Ecke die Identität auf $\mathcal{H}_1$ steht. Da in der rechten unteren Ecke die Identität auf $\mathcal{M}_2$ steht, zeigt ein analoges Argument die Isometrie von ρ_2.

<u>4. Schritt:</u>
Der Operator $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ ist nach den Voraussetzungen isometrisch. Somit ist $Q := I - SS^*$ eine orthogonale Projektion von $\mathcal{H}_2$ nach $ran(S)^\perp$, da wegen $S^*S = I$

$$QQ = I - SS^* - SS^* + SS^*SS^* = Q$$

folgt. Weiters definiere $\mathcal{Q} := Q\mathcal{H}_2$ als Teilraum von $\mathcal{H}_2$ und definiere disjunkte Kopien von $\mathcal{Q}$ durch $\mathcal{Q}_j$ für $j \in \mathbb{N}$. Außerdem seien $\iota_{\mathcal{Q}_j} : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}_j$ die zugehörigen kanonischen unitären Einbettungen. Definiere den Raum $\mathcal{P}$ durch

$$\mathcal{P} := \mathcal{K} \oplus \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathcal{Q}_j = \left\{ (k, q_1, q_2, \dots)^T \in \mathcal{K} \oplus \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathcal{Q}_j : \|k\|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \|q_j\|^2 < \infty \right\}.$$

Auf $\mathcal{P}$ ist ein Skalarprodukt durch

$$\left((k, q_1, q_2, \dots)^T, (l, p_1, p_2, \dots)^T\right)_{\mathcal{P}} = [k,l] + \sum_{j=1}^{\infty} (q_j, p_j)_{\mathcal{Q}_j}$$

gegeben. $\mathcal{K}$ lässt sich offensichtlich als Teilraum von $\mathcal{P}$ identifizieren.

Definiere nun den Operator V durch

$$V : \begin{cases} \begin{matrix} (\mathcal{K} \supseteq) ran(R) \times \mathcal{M}_2 \\ \oplus \\ \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathcal{Q}_j \end{matrix} & \longrightarrow & \begin{matrix} \mathcal{H}_1 \times \mathcal{M}_2 (\subseteq \mathcal{K}) \\ \oplus \\ \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathcal{Q}_j \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} Rx \\ y \end{pmatrix} \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ S^* y \end{pmatrix} \\ \iota_{\mathcal{Q}_1} Q y \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Bemerke, dass der Operator V ab der 3. Koordinate wie ein Shift-Operator arbeitet. Sei $\xi = ((Rx, y)^T, z_1, z_2, \ldots)^T$ gegeben. Wir zeigen, dass es sich beim Operator V um eine Isometrie handelt. Es gilt

$$\begin{aligned} \|\xi\|^2 &= \left[\begin{pmatrix} Rx \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Rx \\ y \end{pmatrix} \right] + \sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\|^2 \\ &= \left(B \begin{pmatrix} Rx \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Rx \\ y \end{pmatrix} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\|^2 \\ &= (Rx, Rx)_{\mathcal{H}_1} + (XP_1 Rx, y)_{\mathcal{H}_2} + (y, XP_1 Rx)_{\mathcal{H}_2} + (y, y)_{\mathcal{H}_2} + \sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\|^2 \\ &= (x, x)_{\mathcal{H}_1} + (P_2 SXP_1 x, y)_{\mathcal{H}_2} + (y, P_2 SXP_1 x)_{\mathcal{H}_2} + (y, y)_{\mathcal{H}_2} + \sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\|^2 \end{aligned}$$

wegen der Isometrie des Operators R und der Vertauschungseigenschaft von R und S. Durch Übergang zu den Adjungierten, Einschubs eines Termes und wegen $P_2 Y = Y$ folgt

$$\begin{aligned} \|\xi\|^2 &= (x, x)_{\mathcal{H}_1} + (XP_1 x, S^* y)_{\mathcal{H}_2} + (S^* y, XP_1 x)_{\mathcal{H}_2} + \\ &+ (y, y)_{\mathcal{H}_2} + (S^* y, S^* y)_{\mathcal{H}_2} - (S^* y, S^* y)_{\mathcal{H}_2} + \sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\|^2 \\ &= \left(B \begin{pmatrix} x \\ S^* y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ S^* y \end{pmatrix} \right) + (y, y)_{\mathcal{H}_2} - (S^* y, S^* y)_{\mathcal{H}_2} + \sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\|^2 \\ &= \left[\begin{pmatrix} x \\ S^* y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ S^* y \end{pmatrix} \right] + (Qy, y)_{\mathcal{H}_2} + \sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\|^2 \\ &= \left[\begin{pmatrix} x \\ S^* y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ S^* y \end{pmatrix} \right] + \|Qy\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\|^2 \\ &= \left[\begin{pmatrix} x \\ S^* y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ S^* y \end{pmatrix} \right] + \|\iota_{\mathcal{Q}_1} Qy\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\|^2. \end{aligned}$$

Daher ist V eine Isometrie. Somit existiert ein Raum $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{P}$, sodass es in $\mathcal{R}$ eine unitäre Fortsetzung

$W : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ von V gibt, vgl. Lemma 1.1.5. Der Operator W arbeitet so, dass

$$W^m \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (S^*)^m y \end{pmatrix} \\ Q(S^*)^{m-1} y \\ Q(S^*)^{m-2} y \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

wobei die Bildfolge für alle Koordinaten $i > m$ den Eintrag Null hat.

5. Schritt:
Wir wollen die Abbildung $\widetilde{\rho_2}$ zu einer Abbildung $\rho_2 : \operatorname{span}\{S^j v : j \geq 0, v \in \mathcal{M}_2\} \to \mathcal{R}$ fortsetzen. Definiere dafür die lineare Relation

$$\rho_2 := \operatorname{span}\{(S^j v; W^{-j}\widetilde{\rho_2} v) : v \in \mathcal{M}_2, j \in \mathbb{N}_0\}.$$

Man bemerke, dass an dieser Stelle sehr wichtig eingeht, dass W als die Fortsetzung von V unitär gewählt werden muss, da sonst die Invertierbarkeit von W nicht sichergestellt ist. Für ein Element $(\sum_{j=0}^m S^j v_j; \sum_{j=0}^m W^{-j}\widetilde{\rho_2} v_j) \in \rho_2$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=0}^{m} (W^{-j}\widetilde{\rho_2} v_j, W^{-k}\widetilde{\rho_2} v_k) &= \sum_{k>j} (W^{k-j}\widetilde{\rho_2} v_j, \widetilde{\rho_2} v_k) + \sum_{k \leq j} (\widetilde{\rho_2} v_j, W^{j-k}\widetilde{\rho_2} v_k) \\
&= \sum_{k>j} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ (S^*)^{k-j} v_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_k \end{pmatrix} \right] + \sum_{k \leq j} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ v_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ (S^*)^{j-k} v_k \end{pmatrix} \right] \\
&= \sum_{k>j} ((S^*)^{k-j} v_j, v_k) + \sum_{k \leq j} (v_j, (S^*)^{j-k} v_k) \qquad (5) \\
&= \sum_{k>j} (v_j, S^{k-j} v_k) + \sum_{k \leq j} (S^{j-k} v_j, v_k) \\
&= \sum_{k>j} (S^j v_j, S^k v_k) + \sum_{k \leq j} (S^j v_j, S^k v_k) = (\sum_{j=0}^m S^j v_j, \sum_{j=0}^m S^j v_j)
\end{aligned}$$

wobei die Isometrie des Operators S ausgenützt wird und speziell die zweite Gleichheit wegen der Gestalt der Operatoren W und $\widetilde{\rho_2}$ gilt. Wegen (5) ist die lineare Relation ρ_2 isometrisch und ρ_2 der Graph eines Operators (vgl. Lemma 1.2.4). Wir fassen daher ρ_2 als Operator auf, der ebenfalls isometrisch ist.
Sei nun $y := \sum_{j=0}^m S^j v_j$. Wegen

$$S^* y = S^* v_0 + \sum_{j=1}^{m} S^{j-1} v_j$$

gilt $S^* y \in \operatorname{span}\{S^j v : j \geq 0, v \in \mathcal{M}_2\}$. Daher können wir den Operator ρ_2 auf $S^* y$ anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}
\rho_2(S^*y) &= \rho_2(S^*v_0) + \rho_2\left(\sum_{j=1}^{m} S^{j-1}v_j\right) \\
&= \left(\widetilde{\rho_2}(S^*v_0) + \sum_{j=1}^{m} W^{-j+1}\widetilde{\rho_2}v_j + \iota_{\mathcal{Q}_1}(Qv_0)\right) - \iota_{\mathcal{Q}_1}(Qv_0) \\
&= \left(W\widetilde{\rho_2}v_0 + \sum_{j=1}^{m} W^{-j+1}\widetilde{\rho_2}v_j\right) - \iota_{\mathcal{Q}_1}(Qv_0) \\
&= W\sum_{j=0}^{m} W^{-j}\widetilde{\rho_2}v_j - \iota_{\mathcal{Q}_1}(Qv_0) \\
&= W\rho_2 y - \iota_{\mathcal{Q}_1}(Qv_0)
\end{aligned}$$

weil

$$W\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (S^*)v_0 \end{pmatrix} \\ Qv_0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Weiters folgt aus $SS^*S^jv_j = SS^{j-1}v_j = S^jv_j$

$$Qy = Qv_0 - (I - SS^*)\sum_{j=1}^{m} S^jv_j = Qv_0$$

und somit

$$\rho_2(S^*y) = W\rho_2 y - \iota_{\mathcal{Q}_1}(Qy).$$

Wegen (5) können wir ρ_2 und $\widetilde{\rho_2}$ zu einer isometrischen Abbildung

$$\rho_2 : \overline{\operatorname{span}\{S^jv : j \geq 0, v \in \mathcal{M}_2\}} \to \mathcal{R}$$

fortsetzen, die zur einfacheren Notation denselben Namen bekommt. Wegen Schritt 1 gilt aber $\overline{\operatorname{span}\{S^jv : j \geq 0, v \in \mathcal{M}_2\}} = \mathcal{H}_2$. Die Abbildung ρ_2 erfüllt die Funktionalgleichung

$$\rho_2 S^* = W\rho_2 - \iota_{\mathcal{Q}_1}Q.$$

6. Schritt:
Wir definieren nun den im Satz gesuchten Operator Y durch

$$Y := \rho_2^*\rho_1.$$

Als Hintereinanderausführung zweier Kontraktionen bleibt sie selber eine Kontraktion und erfüllt somit $\|Y\| \leq 1$. Nach Definition der Abbildungen $\rho_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{R}$ und $\rho_2^* : \mathcal{R} \to \mathcal{H}_2$ ist die Abbildung Y wohldefiniert. Zu zeigen bleiben also nur noch die beiden behaupteten Eigenschaften $SY = YR$

und $P_2Y = XP_1$. Für die erste sei $x \in \mathcal{H}_1$ fest. Dann folgt

$$\begin{aligned}
SYx &= S\rho_2^*\rho_1 x = S\rho_2^* \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = (\rho_2 S^*)^* \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \\
&= \rho_2^* W^* \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} - Q^* \iota_{\mathcal{Q}_1}^{-1} P_{\mathcal{Q}_1} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \\
&= \rho_2^* W^{-1} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \rho_2^* \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} Rx \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \rho_2^*\rho_1 Rx = YRx,
\end{aligned}$$

also die gewünschte Gleichheit.
Für die zweite Gleichheit seien $a \in \mathcal{H}_1$ und $b \in \mathcal{H}_2$ fest. Dann gilt $P_2 b \in \mathcal{M}_2$, und es folgt

$$\begin{aligned}
(P_2Ya, b) &= (\rho_2^*\rho_1 a, P_2 b) = (\rho_1 a, \rho_2 P_2 b) \\
&= \left(\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ P_2 b \end{pmatrix} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) = \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ P_2 b \end{pmatrix} \right] = \\
&= \left(B \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ P_2 b \end{pmatrix} \right) = (XP_1 a, b),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit gilt, da beim Hinüberziehen der Projektion P_2 ins linke Argument nichts geschieht, da X schon nach $\mathcal{M}_2$ hinein abbildet. Somit ist $P_2Y = XP_1$ gezeigt, und wir haben einen Operator Y als Fortsetzung von X mit den gewünschten Eigenschaften gefunden.

$\square$

3.2 Die Lösung des Problems

Mit Hilfe des Commutant Lifting Theorem können wir nun das im vorigen Abschnitt eingeführte Nevanlinna-Pick-Problem lösen.

3.2.1 Satz (Nevanlinna-Pick-Problem). Es seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ paarweise verschieden und $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{D}$ gegeben. Dann existiert eine Funktion $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ mit $\|h\|_\infty \leq 1$, die $h(z_j) = w_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ erfüllt, genau dann, wenn die Pick-Matrix $\left(\frac{1-\overline{w_j}w_k}{1-\overline{z_j}z_k}\right)_{j,k=1,\dots,n}$ positiv semidefinit ist.

Beweis. Aus Satz 2.3.13 ist $H^\infty(\mathbb{D}) = \mathfrak{Mul}(H^2(\mathbb{D}))$ bekannt. Sei eine Funktion $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ mit $\|h\|_\infty \leq 1$ und $h(z_j) = w_j$ und seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ gegeben. Für die Multipliererabbildung T_h gilt $\|T_h\| = \|h\|_\infty \leq 1$ und wegen der Tatsache, dass die Adjungierte dieselbe Norm besitzt, folgt

$$\left\| T_h^* \sum_{j=1}^n \alpha_j k_{z_j} \right\|^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j k_{z_j} \right\|^2.$$

Es gilt daher die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \overline{\alpha_k} \frac{1}{1 - z_k \overline{z_j}} &= \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \overline{\alpha_k} K(z_k, z_j) \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j k_{z_j} \right\|^2 \geq \left\| T_h^* \sum_{j=1}^{n} \alpha_j k_{z_j} \right\|^2 \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{h(z_j)} k_{z_j} \right\|^2 \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \overline{\alpha_k} \overline{h(z_j)} h(z_k) (k_{z_j}, k_{z_k}) = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \overline{\alpha_k} \overline{h(z_j)} h(z_k) \frac{1}{1 - z_k \overline{z_j}}.
\end{aligned}$$

Durch Umformung ergibt sich

$$0 \leq \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \overline{\alpha_k} \left(\frac{1 - \overline{h(z_j)} h(z_k)}{1 - z_k \overline{z_j}} \right) = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \overline{\alpha_k} \left(\frac{1 - \overline{w_j} w_k}{1 - z_k \overline{z_j}} \right),$$

also die positive Semidefinitheit der Pick-Matrix.
Für den Beweis der anderen Implikation betrachten wir den endlichdimensionalen Teilraum

$$\mathcal{M} := \operatorname{span}\{k_{z_j} : j = 1, \ldots, n\}$$

von $H^2(\mathbb{D})$ und definieren die lineare Relation

$$B := \operatorname{span}\{(k_{z_j}; \overline{w_j} \cdot k_{z_j}) : j = 1, \ldots, n\} \leq \mathcal{M} \times \mathcal{M}.$$

Für ein Element $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (k_{z_j}; \overline{w_j} \cdot k_{z_j})$ von B gilt

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j k_{z_j} \right\|^2 - \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{w_j} k_{z_j} \right\|^2 &= \\
= \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \overline{\alpha_k} K(z_k, z_j) - \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \overline{\alpha_k} \overline{w_j} w_k K(z_k, z_j) &= \qquad (6) \\
= \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \overline{\alpha_k} \frac{1 - \overline{w_j} w_k}{1 - \overline{z_j} z_k} &\geq 0,
\end{aligned}$$

somit folgt nach Lemma 1.2.4, dass B ein Operator ist. Wegen (6) ist B außerdem eine Kontraktion.
Betrachte nun

$$S := T_z : \left\{ \begin{array}{ccc} H^2(\mathbb{D}) & \to & H^2(\mathbb{D}) \\ f(z) & \mapsto & z f(z) \end{array} \right. .$$

Die Beziehung $S^* k_{z_j} = \overline{z_j} k_{z_j}$ zeigt $S^* \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$, und

$$B S^* k_{z_j} = B \overline{z_j} k_{z_j} = \overline{z_j w_j} k_{z_j} = \overline{w_j z_j} k_{z_j} = S^* B k_{z_j}$$

impliziert $BS^* = S^*B$, da die k_{z_j} $\mathcal{M}$ aufspannen. Wir setzen jetzt in der Notation des vorigen Satzes $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 := H^2(\mathbb{D})$, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 := \mathcal{M}$, $X := B^*$ und $R = S$. Dann sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Es folgt die Existenz eines Operators $Y \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}))$ mit $YS = SY$ und $PY = XP$, wobei P die orthogonale Projektion von $H^2(\mathbb{D})$ auf $\mathcal{M}$ bezeichnet. Wegen Satz 2.3.15 gilt $Y = T_h$ für ein $h \in H^\infty(\mathbb{D})$. Dabei gilt $h = Y(1)$, woraus $\|h\|_\infty = \|Y\| \leq 1$ folgt, vgl. Satz 2.3.13. Adjungieren der Beziehung $PY = XP$ führt zu $Y^*\iota_\mathcal{M} = \iota_\mathcal{M} X^* = \iota_\mathcal{M} B : \mathcal{M} \to H^2(\mathbb{D})$, wobei $\iota_\mathcal{M}$ die Einbettungsabbildung in den Raum $H^2(\mathbb{D})$ bezeichnet. Daraus folgt

$$\overline{w_j} k_{z_j} = B k_{z_j} = Y^* k_{z_j} = T_h^* k_{z_j} = \overline{h(z_j)} k_{z_j},$$

was wegen $k_{z_j} \neq 0$ die Beziehung $h(z_j) = w_j$ impliziert.

□

Man kann das Commutant Lifting Theorem 3.1.2 noch für eine andere Fragestellung geschickt nutzen. Wir stellen uns die Frage, ob man eine Funktion, deren Anfang der Taylorreihe fest vorgegeben ist, zu einer $H^\infty(\mathbb{D})$-Funktion fortsetzen kann. Die Antwort darauf, unter welchen Bedingungen dies möglich ist, behandelt das *Carathéodory-Fejér-Problem*, in dessen Beweis wiederum stark das Commutant Lifting Theorem eingehen wird.

3.2.2 Satz (Carathéodory-Fejér-Problem). Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ fest. Dann existiert eine Funktion $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ mit $\|h\|_\infty \leq 1$ und $h(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j + \sum_{j=n+1}^\infty \widehat{h}(j) z^j$ genau dann, wenn für die Abbildung T, die durch die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_{n-1} & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird, $\|T\| \leq 1$ gilt. Der Ausdruck $\widehat{h}(j)$ bezeichnet hierbei den j-ten Taylorkoeffizienten.

Beweis. Definiere den Raum $\mathcal{M} := \operatorname{span}\{1, z, \ldots, z^n\}$ und betrachte ihn als Unterraum des Raumes $H^2(\mathbb{D})$. Der Raum $\mathcal{M}$ ist isomorph zum Raum $\mathbb{C}^{n+1}$ via $p(z) = \sum_{j=0}^n b_j z^j \cong (b_0, \ldots, b_n)^T$. Zu $h \in H^\infty(\mathbb{D}) = \mathfrak{Mul}(H^2(\mathbb{D}))$ betrachten wir $T_h \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}))$ und vereinbaren zur Vereinfachung der Notation $a_k := \widehat{h}(k)$ für $k > n$. Es folgt

$$\begin{aligned} T_h p(z) &= \sum_{j=0}^n b_j z^j h(z) = \sum_{j=0}^n b_j z^j \sum_{k=0}^\infty a_k z^k = \sum_{j=0}^n b_j \sum_{k=0}^\infty a_k z^{k+j} = \\ &= \sum_{l=0}^n \left(\sum_{\substack{k+j=l \\ 0 \leq k,j}} b_j a_k \right) z^l + \sum_{l=n+1}^\infty \left(\sum_{\substack{k+j=l \\ 0 \leq k,j}} b_j a_k \right) z^l. \end{aligned}$$

Da die zweite Summe bei der Projektion auf $\mathcal{M}$ klarerweise verschwindet, folgt

$$P_\mathcal{M} T_h p(z) = \sum_{l=0}^n \left(\sum_{\substack{k+j=l \\ 0 \leq k,j}} b_j a_k \right) z^l \cong T \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

also muss T eine Kontraktion sein, die somit klarerweise eine Norm kleiner oder gleich Eins hat.
Für den Beweis der anderen Implikation betrachten wir $S : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ und verwenden die Beziehung $H^2(\mathbb{D}) \cong \ell^2(\mathbb{N}_0)$, indem wir für $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ die Anwendung $Sf(z) = zf(z)$ als den Rechtsshift $S(b_0, b_1, \ldots) = (0, b_0, b_1, \ldots)$ auffassen. Somit interpretieren wir die Anwendung der Adjungierten S^* als Linksshift durch $S^*(b_0, b_1, \ldots) = (b_1, b_2, \ldots)$, das heißt auf f angewendet ergibt sich

$$S^* f(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}.$$

Auf $H^2(\mathbb{D})$ wirkt S^* also wie $S^* z^j = z^{j-1}$ für $j > 0$ und $S^* z^0 = S^* 1 = 0$. Damit gilt klarerweise $S^* \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$.
Die Adjungierte T^* der Abbildung T hat die Gestalt

$$T^* = \begin{pmatrix} \overline{a_0} & \overline{a_1} & \cdots & \overline{a_{n-1}} & \overline{a_n} \\ 0 & \overline{a_0} & \ddots & & \overline{a_{n-1}} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \overline{a_1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \overline{a_0} \end{pmatrix},$$

was $T^* z^k = \sum_{j=0}^{k} \overline{a_{k-j}} z^j$ und $T^* z^0 = T^* 1 = \overline{a_0}$ zeigt. Damit bekommt man sofort

$$S^* T^* z^k = S^* \sum_{j=0}^{k} \overline{a_{k-j}} z^j = \sum_{j=0}^{k-1} \overline{a_{k-1-j}} z^j = T^* z^{k-1} = T^* S^* z^k$$

für $k > 0$ und

$$S^* T^* z^0 = S^* \overline{a_0} = 0 = T^* 0 = T^* S^* z^0$$

für $k = 0$, wodurch man $S^* T^* = T^* S^* : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ erhält. Setze nun in der Notation von Satz 3.1.2 $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 := H^2(\mathbb{D})$, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 := \mathcal{M}$, $X := T \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ und $R := S$. Nach Voraussetzung gilt dann auch $\|X\| \leq 1$.
Aus dem Commutant Lifting Theorem 3.1.2 folgt dann die Existenz eines Operators $Y : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ mit $\|Y\| \leq 1$ und den Eigenschaften $SY = YR$ und $P_{\mathcal{M}} Y = X P_{\mathcal{M}}$ mit den entsprechenden Projektionen auf $\mathcal{M}$. Aus $SY = YR = YS$ folgert man die Darstellung $Y = T_h$ mit $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ und $\|h\|_\infty = \|T_h\| \leq 1$. Schließlich ergibt sich $h = Y(1)$. Die Funktion h hat auch den entsprechenden Anfang der Taylorreihe, da diese Tatsache aus

$$P_{\mathcal{M}} Y(1) = X P_{\mathcal{M}}(1) = X(1) = T(1) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$$

folgt.

□

4 Der Hardyraum am Einheitskreis

4.1 Zusammenhänge zwischen $H^2(\mathbb{D})$ und $H^2(\mathbb{T})$

Wir wissen schon aus Kapitel 2, dass der Raum $H^2(\mathbb{D})$ isomorph ist zum Raum $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ der quadratisch summierbaren Folgen. Ähnlich kann man feststellen, dass der Raum $L^2(\mathbb{T})$, der aus Elementen der Gestalt $f(\zeta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\zeta^n$ besteht, isomorph ist zum Raum $\ell^2(\mathbb{Z})$, in dem die trigonometrischen Polynome $(\zeta^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis für die Fourierentwicklung bilden. Dabei ist ein Isomorphismus durch die Zuordnung, die die Koeffizienten a_n einer Funktion zu einer Doppelfolge anordnen, gegeben.
Vom Raum $L^2(\mathbb{T})$ können wir noch einen interessanten Teilraum angeben.

4.1.1 Definition. Der Raum $H^2(\mathbb{T})$, definiert durch

$$H^2(\mathbb{T}) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) : f = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n\zeta^n \right\} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) : (f, (\zeta \mapsto \zeta^n)) = 0 \quad \forall n < 0 \right\}$$

heißt *Hardyraum am Einheitskreis.* Die Schreibweise $(f, (\zeta \mapsto \zeta^n))$ bezeichnet dabei den n-ten Koeffizienten der Fourierentwicklung.
$H^2(\mathbb{T})$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $L^2(\mathbb{T})$ und als solcher versehen mit $\|.\|_{L^2(\mathbb{T})}$ ein Banachraum.

Wir geben auch eine Abbildung zwischen dem Hardyraum auf der Einheitskreisscheibe und jenem auf der Einheitskreislinie an.

4.1.2 Definition. Die Abbildung

$$\Psi : \begin{cases} H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{T}) \\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n & \longmapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n = \tilde{f}(\zeta) \end{cases}$$

bildet den Raum $H^2(\mathbb{D})$ auf den Raum $H^2(\mathbb{T})$ ab. Die Fourierreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n$ konvergiert dabei im Sinne des $L^2(\mathbb{T})$.

4.1.3 Bemerkung. Wegen $H^2(\mathbb{D}) \cong \ell^2(\mathbb{N}_0) \cong H^2(\mathbb{T})$ ist durch Ψ ein isometrischer Isomorphismus gegeben.

Mit Hilfe der Abbildung Ψ werden wir weitere Tatsachen aus den vorigen Kapiteln verallgemeinern.

4.1.4 Satz. Sei $h \in \mathfrak{Mul}(H^2(\mathbb{D})) = H^\infty(\mathbb{D})$. Dann gilt $\Psi(h) =: \tilde{h} \in L^\infty(\mathbb{T})$ und $\|\tilde{h}\|_\infty = \|h\|_\infty$. Weiters ist Ψ mit der Multiplikation verträglich, d.h. es gilt $\Psi(h_1 \cdot h_2) = \Psi(h_1) \cdot \Psi(h_2)$ für $h_1, h_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$. Zudem gilt die Beziehung

$$M_{\tilde{h}}|_{H^2(\mathbb{T})} = \Psi \circ T_h \circ \Psi^{-1}|_{H^2(\mathbb{T})}. \tag{7}$$

Beweis. Sei $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^\infty(\mathbb{D})(\subseteq H^2(\mathbb{D}))$ ein Multiplierer des Raumes $H^2(\mathbb{D})$ mit zugehöriger Multipliererabbildung T_h. Wenden wir darauf die Funktion aus Definition 4.1.2 an, so bekommen wir mit $\Psi(h)(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n$ ein Element des Raumes $H^2(\mathbb{T}) \subseteq L^2(\mathbb{T})$. Insbesondere ist $\tilde{h} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ messbar und quadratisch integrierbar. Nach Lemma 1.3.1 ist dann der Multiplikationsoperator $M_{\tilde{h}} : \mathrm{dom}(M_{\tilde{h}}) \to L^2(\mathbb{T})$ ein dicht definierter und abgeschlossener Operator mit Definitionsbereich

$$\mathrm{dom}(M_{\tilde{h}}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) : \tilde{h} \cdot f \in L^2(\mathbb{T}) \right\}. \tag{8}$$

Wir bezeichnen die trigonometrischen Polynome mit

$$\mathcal{T} := \left\{ \sum_{n=-N}^{N} a_n \zeta^n : N \in \mathbb{N}, a_{-N}, \dots, a_N \in \mathbb{C} \right\}.$$

Wegen Lemma 1.2.8 reicht es nun zu zeigen, dass $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{dom}(M_{\tilde{h}})$ und dass $M_{\tilde{h}}|_{\mathcal{T}}$ beschränkt ist. Weil

$$\tilde{h}(\zeta) \sum_{n=-N}^{N} a_n \zeta^n = \sum_{n=-N}^{N} a_n \zeta^n \tilde{h}(\zeta),$$

wobei $\zeta^n \tilde{h}(\zeta) \in L^2(\mathbb{T})$ wegen $\tilde{h}(\zeta) \in L^2(\mathbb{T})$, gilt

$$\mathcal{T} \subseteq \mathrm{dom}(M_{\tilde{h}}).$$

Klarerweise können wir ein Element $\tilde{p} \in \mathcal{T}$ zu

$$\tilde{p}(\zeta) = \sum_{n=-N}^{N} b_n \zeta^n = \zeta^{-N} \sum_{n=0}^{2N} b_{n-N} \zeta^n = \zeta^{-N} \tilde{q}(\zeta) \tag{9}$$

mit $\tilde{q}(\zeta) := \sum_{n=0}^{2N} b_{n-N} \zeta^n$ umformen.
Sei jetzt q ein Monom, das heißt $q(z) = z^j$ für ein $j \geq 0$, dann gilt wegen $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$$h(z) \cdot q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+j} = \sum_{n=j}^{\infty} a_{n-j} z^n.$$

Wenden wir auf diese Gleichung die Funktion Ψ an, erhalten wir

$$\Psi(h(z) \cdot q(z)) = \Psi\left(\sum_{n=j}^{\infty} a_{n-j} z^n \right) = \sum_{n=j}^{\infty} a_{n-j} \zeta^n = \tilde{h}(\zeta) \cdot \zeta^j = M_{\tilde{h}} \tilde{q}(\zeta), \tag{10}$$

wobei wegen der Linearität die Gleichheit erfüllt bleibt, wenn wir bei der Funktion q von einem Monom zu einem Polynom aus $\mathbb{C}[z]$ übergehen. Somit gilt für $\tilde{p} \in \mathcal{T}$ und $\tilde{q}$ wie in (9)

$$M_{\tilde{h}} \tilde{p}(\zeta) = M_{\tilde{h}} \zeta^{-N} \tilde{q}(\zeta) = \zeta^{-N} M_{\tilde{h}} \tilde{q}(\zeta) = \zeta^{-N} \Psi(h(z) \cdot q(z)) = \zeta^{-N} \Psi(T_h q(z))$$

und damit

$$\begin{aligned} \|M_{\tilde{h}} \tilde{p}\|_{L^2(\mathbb{T})} &= \|\zeta^{-N} \Psi(T_h q)\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|\Psi(T_h q)\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|T_h q\|_{H^2(\mathbb{D})} \leq \\ &\leq \|h\|_\infty \cdot \|q\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|h\|_\infty \cdot \|\zeta^{-N} \Psi(q)\|_{L^2(\mathbb{T})} = \\ &= \|h\|_\infty \cdot \|\zeta^{-N} \tilde{q}\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|h\|_\infty \cdot \|\tilde{p}\|_{L^2(\mathbb{T})}, \end{aligned}$$

wobei das zweite, dritte und vierte Gleichheitszeichen wegen der Isometrie von Ψ und wegen $|\zeta^{-N}| = 1$ gelten. Da der Ausdruck $\|h\|_\infty \cdot \|\tilde{p}\|_{L^2(\mathbb{T})}$ endlich ist, folgt auf $\mathcal{T}$ die Beschränktheit des Multiplizierens und somit des Anwendens von $M_{\tilde{h}}$. Wegen Lemma 1.2.8 folgt die Beschränktheit von $M_{\tilde{h}}$ als Funktion vom Raum $L^2(\mathbb{T})$ in den Raum $L^2(\mathbb{T})$ und wegen Lemma 1.3.1

$$\|\tilde{h}\|_\infty = \|M_{\tilde{h}}\| \leq \|h\|_\infty.$$

Für den Beweis der anderen Inklusion bemerken wir, dass wir in (10) bereits die Gleichung

$$(\Psi \circ T_h)(p) = (M_{\tilde{h}} \circ \Psi)(p)$$

für Polynome $p \in \mathbb{C}[z]$ gezeigt haben. Nach Lemma 2.2.6 sind Polynome dicht in $H^2(\mathbb{D})$, woraus die Gültigkeit der obigen Gleichung für Funktionen $p \in H^2(\mathbb{D})$ folgt. Es gilt also

$$M_{\tilde{h}}|_{H^2(\mathbb{T})} = \Psi \circ T_h \circ \Psi^{-1}|_{H^2(\mathbb{T})}.$$

Aus

$$\Psi^{-1} \circ M_{\tilde{h}} \circ \Psi = T_h,$$

folgt die Ungleichungskette

$$\|h\|_\infty = \|T_h\| = \|\Psi^{-1} \circ M_{\tilde{h}} \circ \Psi\| \leq \|M_{\tilde{h}}\| = \|\tilde{h}\|_\infty.$$

Somit haben wir

$$\|h\|_\infty = \|\tilde{h}\|_\infty$$

und $\Psi(h) = \tilde{h} \in L^\infty(\mathbb{T})$ bewiesen.
Zu zeigen bleibt noch die Verträglichkeit bezüglich der Multiplikation. Dafür wenden wir die Gleichung

$$M_{\Psi(h)} \circ \Psi = \Psi \circ T_h,$$

die wir für $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ bereits bewiesen haben, an. Es folgt

$$\Psi(h_1) \cdot \Psi(h_2) = M_{\Psi(h_1)}(\Psi(h_2)) = \Psi(T_{h_1}(h_2)) = \Psi(h_1 \cdot h_2).$$

□

4.1.5 Bemerkung. Aus Satz 2.3.13 und Lemma 4.1.4 folgt die Inklusion

$$\Psi(\mathfrak{Mul}(H^2(\mathbb{D}))) = \Psi(H^\infty(\mathbb{D})) \subseteq L^\infty(\mathbb{T}) \cap H^2(\mathbb{T}).$$

Einem in der Folge öfters vorkommenden Raum werden wir in Definition 4.1.6 einen eigenen Namen geben.

4.1.6 Definition. Mit $H^\infty(\mathbb{T})$ bezeichnen wir den Raum

$$H^\infty(\mathbb{T}) := L^\infty(\mathbb{T}) \cap H^2(\mathbb{T}).$$

4.1.7 Lemma. Zu einer Funktion $\tilde{h} \in H^\infty(\mathbb{T})$ gibt es genau eine Funktion $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ mit der Eigenschaft $\Psi(h) = \tilde{h}$.

Beweis. Sei $\tilde{h} \in L^\infty(\mathbb{T}) \cap H^2(\mathbb{T})$. Wegen Lemma 1.3.1 gilt $M_{\tilde{h}} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ mit $\|M_{\tilde{h}}\| = \|\tilde{h}\|_\infty$.
Sei nun $\phi(\zeta) = \sum_{n=0}^\infty a_n \zeta^n \in H^2(\mathbb{T})$. Wir können dann $\phi(\zeta)$ als Grenzwert $\lim_{N\to\infty} \phi_N(\zeta) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^N a_n \zeta^n$ bezüglich der Norm $\|.\|_{L^2(\mathbb{T})}$ darstellen. Die Stetigkeit von $M_{\tilde{h}}$ impliziert $M_{\tilde{h}}\phi = \lim_{N\to\infty} M_{\tilde{h}}\phi_N$. Mit der Darstellung

$$\tilde{h}(\zeta) = \sum_{n=0}^\infty b_n \zeta^n$$

folgt

$$\zeta^k \tilde{h}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{n+k},$$

was für $k \geq 0$ bekanntlich in $H^2(\mathbb{T})$ liegt. Mit der Linearität von $M_{\tilde{h}}$ erhalten wir $M_{\tilde{h}}\phi_N \in H^2(\mathbb{T})$, und auf Grund der Tatsache, dass der Raum $H^2(\mathbb{T})$ ein abgeschlossener Teilraum des $L^2(\mathbb{T})$ ist, folgt $\lim_{N\to\infty} M_{\tilde{h}}\phi_N \in H^2(\mathbb{T})$. Wir haben somit $M_{\tilde{h}}(H^2(\mathbb{T})) \subseteq H^2(\mathbb{T})$ und daher

$$M_{\tilde{h}}|_{H^2(\mathbb{T})} : H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$$

bewiesen. Da auch $M_\zeta(H^2(\mathbb{T})) \subseteq H^2(\mathbb{T})$, gilt

$$M_{\tilde{h}}|_{H^2(\mathbb{T})} \circ M_\zeta|_{H^2(\mathbb{T})} = M_{\tilde{h}(\zeta)\cdot\zeta}|_{H^2(\mathbb{T})} = M_\zeta|_{H^2(\mathbb{T})} \circ M_{\tilde{h}}|_{H^2(\mathbb{T})} : H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T}).$$

Wir definieren jetzt

$$T := \Psi^{-1} \circ M_{\tilde{h}}|_{H^2(\mathbb{T})} \circ \Psi$$

als Abbildung vom $H^2(\mathbb{D})$ in den $H^2(\mathbb{D})$ und zeigen, dass dieser Operator mit T_z kommutiert, wobei T_z als zugehörigen Multiplierer die Funktion $id(z) = z$ besitzt. Wegen Satz 4.1.4 folgen die Tatsachen $\Psi \circ T_z = M_\zeta \circ \Psi$ und $\Psi^{-1} \circ M_\zeta = T_z \circ \Psi^{-1}$. Diese beiden Gleichungen implizieren sofort

$$\begin{aligned} T \circ T_z &= \Psi^{-1} \circ M_{\tilde{h}}|_{H^2(\mathbb{T})} \circ \Psi \circ T_z = \Psi^{-1} \circ M_{\tilde{h}}|_{H^2(\mathbb{T})} \circ M_\zeta|_{H^2(\mathbb{T})} \circ \Psi = \\ &= \Psi^{-1} \circ M_\zeta|_{H^2(\mathbb{T})} \circ M_{\tilde{h}}|_{H^2(\mathbb{T})} \circ \Psi = T_z \circ \Psi^{-1} \circ M_{\tilde{h}}|_{H^2(\mathbb{T})} \circ \Psi = T_z \circ T. \end{aligned}$$

Da T mit T_z kommutiert, ist T nach Satz 2.3.15 bereits selbst eine Multipliererabbildung T_h mit zugehörigem Multiplierer $h \in H^\infty(\mathbb{D})$, den man explizit durch $h := T(1)$ angeben kann. Somit gilt

$$\Psi(h) = \Psi(T(1)) = (\Psi \circ \Psi^{-1} \circ M_{\tilde{h}}|_{H^2(\mathbb{T})} \circ \Psi)(1) = M_{\tilde{h}}|_{H^2(\mathbb{T})}(\Psi(1)) = M_{\tilde{h}}|_{H^2(\mathbb{T})}(\tilde{1}) = \tilde{h},$$

womit die Surjektivität der Abbildung Ψ auf den Raum $H^\infty(\mathbb{T})$ gezeigt ist.
Zu zeigen bleibt nur noch die Eindeutigkeit des Multiplierers h. Seien zwei Funktionen $h_1, h_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$ mit $\Psi(h_1) = \Psi(h_2) = \tilde{h}$ gegeben. Wegen der Linearität von Ψ und der Tatsache $h_1 - h_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$ folgt $\Psi(h_1 - h_2) = 0$. Auf Grund von Lemma 4.1.4 folgt

$$\|\Psi(h_1 - h_2)\|_\infty = \|h_1 - h_2\|_\infty = 0$$

und somit $h_1 = h_2$ und die Eindeutigkeit der Funktion h.

□

Wir fassen die Ergebnisse der letzten Lemmata zusammen.

4.1.8 Satz. Die Abbildung $\Psi|_{H^\infty(\mathbb{D})} : H^\infty(\mathbb{D}) \to H^\infty(\mathbb{T})$ ist linear, bijektiv, verträglich mit der Multiplikation und isometrisch bzgl. $\|.\|_\infty$, das heißt $\|\Psi(h)\|_\infty = \|h\|_\infty$, wobei $\|.\|_\infty$ links die ∞-Norm auf $\mathbb{T}$ ist.

Beweis. Die Linearität der Abbildung Ψ ist klar. Die Bijektivität wurde in Lemma 4.1.7 gezeigt und die Isometrie folgt aus Lemma 4.1.4.

□

Folgendes Resultat erinnert an das Maximumprinzip für holomorphe Funktionen.

4.1.9 Korollar. Sei $g \in H^2(\mathbb{D})$ so, dass $|\Psi(g)| \leq c$ fast überall auf $\mathbb{T}$ gilt mit einer Konstante $c \geq 0$. Dann folgt $|g(z)| \leq c$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

Beweis. Die Bedingung $|\Psi(g)| \leq c$, die an die Funktion g gestellt wird, impliziert $\|\Psi(g)\|_\infty \leq c$. Daher gilt $\Psi(g) \in L^\infty(\mathbb{T})$ und somit $\Psi(g) \in H^\infty(\mathbb{T})$. Nach Satz 4.1.8 bildet Ψ den Raum $H^\infty(\mathbb{D})$ bijektiv und isometrisch auf den Raum $H^\infty(\mathbb{T})$ ab. Dies impliziert $g \in H^\infty(\mathbb{D})$ und $\|g\|_\infty = \|\Psi(g)\|_\infty \leq c$.

□

4.2 Die Inner-Outer-Faktorisierung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem eingangs angesprochenen Faktorisierungsproblem. Wir werden feststellen, dass wir eine holomorphe Funktion in ein Produkt zweier Funktionen zerlegen können, die bestimmte Eigenschaften erfüllen. Zusätzlich werden wir zeigen, dass eine solche Zerlegung bis auf Multiplikation mit unimodularen, konstanten Faktoren eindeutig bestimmt ist. Die Zerlegung erfolgt in Funktionen des Typs inner und outer. Der zentrale Satz, auf den der Beweis des Faktorisierungssatzes aufbaut, ist der im folgenden vorgestellte Satz von Beurling, der die Existenz von inner Funktionen unter bestimmten Voraussetzungen sicherstellt.

4.2.1 Definition. Eine Funktion $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ heißt *inner*, falls $|\Psi(h)| = 1$ fast überall auf $\mathbb{T}$ gilt. Eine Funktion $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ heißt *outer*, falls der Raum $T_h(H^2(\mathbb{D}))$ dicht ist in $H^2(\mathbb{D})$.

4.2.2 Lemma. Die Abbildung $T_h : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ ist genau dann isometrisch, wenn die Funktion h inner ist.

Beweis. Für den Beweis der Richtung $\Leftarrow$ bemerken wir, dass die Eigenschaft inner die Isometrie des Operators $M_{\Psi(h)}$ auf $L^2(\mathbb{T})$ impliziert. Für Funktionen $f, g \in H^2(\mathbb{D})$ folgt

$$(T_h f, T_h g)_{H^2(\mathbb{D})} = (M_{\Psi(h)}\Psi(f), M_{\Psi(h)}\Psi(g))_{L^2(\mathbb{T})} = (\Psi(f), \Psi(g))_{L^2(\mathbb{T})} = (f, g)_{H^2(\mathbb{D})}, \tag{11}$$

wobei bei der ersten und letzten Gleichheit die Isometrie von Ψ eingeht. Damit ist auch T_h eine Isometrie.
Für den Beweis der Richtung $\Rightarrow$ beachten wir, dass die Isometrie von T_h die Isometrie von $M_{\tilde{h}}|_{H^2(\mathbb{T})} = \Psi \circ T_h \circ \Psi^{-1}|_{H^2(\mathbb{T})}$ impliziert. Sei nun eine Funktion $f \in \mathcal{F} := \{\phi \in L^2(\mathbb{T}) : \exists N \in \mathbb{N} : \zeta^N \phi(\zeta) \in H^2(\mathbb{T})\}$ gegeben. Dann folgt

$$M_{\tilde{h}} f(\zeta) = M_{\tilde{h}}(\zeta^{-N}\zeta^N f(\zeta)) = M_{\tilde{h}} \circ M_{\zeta^{-N}}(\zeta^N f(\zeta)) = \zeta^{-N} M_{\tilde{h}} \zeta^N f(\zeta),$$

wobei die dritte Gleichheit gilt, da Multiplikationsoperatoren vertauschen. Wegen $\zeta^N f(\zeta) \in H^2(\mathbb{T})$ und der Isometrie von $M_{\tilde{h}}|_{H^2(\mathbb{T})}$ folgt

$$\|M_{\tilde{h}} f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|\zeta^{-N} M_{\tilde{h}} \zeta^N f(\zeta)\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|\zeta^N f(\zeta)\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f(\zeta)\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

und somit die Isometrie von $M_{\tilde{h}} = M_{\Psi(h)}$ auf $\mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ dicht in $L^2(\mathbb{T})$ liegt, ist $M_{\tilde{h}}$ isometrisch auf $L^2(\mathbb{T})$. Wegen

$$M_{|\Psi(h)|^2} = M_{\overline{\Psi(h)}} M_{\Psi(h)} = M^*_{\Psi(h)} M_{\Psi(h)} = I = M_1$$

folgt $|\Psi(h)|^2 = 1$ fast überall auf $\mathbb{T}$ und somit $|\Psi(h)| = 1$ fast überall auf $\mathbb{T}$. Somit ist h inner.

□

4.2.3 Satz (von Beurling). Sei $\mathcal{M} \neq \{0\}$ ein abgeschlossener Teilraum von $H^2(\mathbb{D})$, der bezüglich Multiplikation mit z invariant bleibt, das heißt es gilt $T_z(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. Dann existiert eine inner Funktion $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ mit $\mathcal{M} = T_h(H^2(\mathbb{D})) = \{h \cdot f : f \in H^2(\mathbb{D})\}$.

Beweis. Für $\mathcal{M} = H^2(\mathbb{D})$ gilt $\mathcal{M} = 1 \cdot H^2(\mathbb{D})$.
Sei also $\mathcal{M} \subsetneqq H^2(\mathbb{D})$. Sei n_0 die minimale Vielfachheit der Nullstelle $z = 0$, die Funktionen aus $\mathcal{M}\backslash\{0\}$ haben können. Sei $f \in \mathcal{M}\backslash\{0\}$ mit Nullstelle $z = 0$ der Vielfachheit n_0. Für eine beliebige Funktion $g \in \mathcal{M}$ ist dann $z = 0$ auch eine Nullstelle mit Vielfachheit mindestens n_0, was $T_z(g) \neq f$ impliziert, da Anwenden von T_z die Vielfachheit der Nullstelle um Eins erhöht. Daraus folgt $T_z(\mathcal{M}) \neq \mathcal{M}$ und somit $T_z(\mathcal{M}) \subsetneqq \mathcal{M}$. Die Abbildung $T_z : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ist also isometrisch und nicht surjektiv. Als Bild eines abgeschlossenen Teilraumes unter einer Isometrie ist dann $T_z(\mathcal{M})$ abgeschlossen. Wir betrachten nun $\mathcal{M} \ominus T_z(\mathcal{M})$. Die Tatsache $\mathcal{M} \ominus T_z(\mathcal{M}) \neq \{0\}$ impliziert die Existenz von Funktionen $h \in \mathcal{M} \ominus T_z(\mathcal{M})$ mit $\|h\|_{H^2(\mathbb{D})} = 1$. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass h inner ist.
Wegen der Isometrieeigenschaften der Funktionen T_z und Ψ folgt für $n \geq 0$

$$(T_z^n h, h)_{H^2(\mathbb{D})} = (M_\zeta^n \Psi(h), \Psi(h))_{L^2(\mathbb{T})} = \int_\mathbb{T} \zeta^n \Psi(h)(\zeta)\overline{\Psi(h)(\zeta)}\, d\sigma(\zeta) = \int_\mathbb{T} \zeta^n |\Psi(h)(\zeta)|^2\, d\sigma(\zeta).$$

Aus $T_z^n(h) \in T_z(\mathcal{M})$ für $n > 0$ und $h \perp T_z(\mathcal{M})$ folgt $\int_\mathbb{T} \zeta^n |\Psi(h)(\zeta)|^2\, d\sigma(\zeta) = (T_z^n(h), h)_{H^2(\mathbb{D})} = 0$. Konjugieren ergibt $\int_\mathbb{T} \zeta^n |\Psi(h)(\zeta)|^2\, d\sigma(\zeta) = 0$ für $n < 0$ und somit

$$\int_\mathbb{T} \zeta^n |\Psi(h)(\zeta)|^2\, d\sigma(\zeta) = 0$$

für $n \neq 0$. Die Abbildung $\zeta \mapsto |\Psi(h)(\zeta)|^2$ liegt in $L^1(\mathbb{T})$. Da die Fourier-Koeffizienten einer $L^1(\mathbb{T})$-Funktion diese eindeutig bestimmen, folgt $|\Psi(h)(\zeta)|^2 = c_0$ (konstant) fast überall. Auf Grund von $1 = \|h\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|\Psi(h)\|_{L^2(\mathbb{T})}$ folgt $c_0 = 1$ und $h \in H^\infty(\mathbb{D})$. Somit ist h inner.
Wegen $z^n h(z) = (T_z^n(h))(z) \in \mathcal{M}$ folgt mittels Linearität $p(z)h(z) \in \mathcal{M}$ für alle komplexen Polynome $p \in \mathbb{C}[z]$. Wegen der Dichtheit von $\mathbb{C}[z]$ in $H^2(\mathbb{D})$ folgt auch $f(z)h(z) \in \mathcal{M}$ für alle Funktionen $f \in H^2(\mathbb{D})$, was $T_h(H^2(\mathbb{D})) \subseteq \mathcal{M}$ impliziert. Die Eigenschaft inner impliziert nach Lemma 11 die Isometrie des Operators T_h. Somit ist $T_h(H^2(\mathbb{D}))$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{M}$.
Zu zeigen bleibt nur noch die Gleichheit $T_h(H^2(\mathbb{D})) = \mathcal{M}$. Dazu sei $g \in \mathcal{M} \ominus T_h(H^2(\mathbb{D}))$. Die Funktion $T_z^n(h) = (z \mapsto z^n h(z))$ liegt klarerweise im Raum $T_h(H^2(\mathbb{D}))$, womit für $n \geq 0$ $(g, T_z^n(h)) = 0$. Es gilt aber auch $T_z^n(g) \in T_z(\mathcal{M})$, und wegen $h \perp T_z(\mathcal{M})$ folgt $(T_z^n(g), h) = 0$ für $n > 0$. Aus

$$\begin{aligned}
0 = (g, T_z^n(h)) &= \big(\Psi(g), M_\zeta^n \Psi(h)\big) = \int_\mathbb{T} \Psi(g)(\zeta)\overline{\Psi(h)(\zeta)\zeta^n}\, d\sigma(\zeta) = \\
&= \int_\mathbb{T} \zeta^{-n} \Psi(g)(\zeta)\overline{\Psi(h)(\zeta)}\, d\sigma(\zeta) = \Big(M_\zeta^{-n}\Psi(g), \Psi(h)\Big) = \\
&= (T_z^{-n}(g), h)
\end{aligned}$$

folgt nun $(T_z^n(g), h) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $\int_\mathbb{T} \zeta^{-n}\Psi(g)(\zeta)\overline{\Psi(h)(\zeta)}\, d\sigma(\zeta) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Dies impliziert $\Psi(g)\overline{\Psi(h)} = 0$ fast überall auf $\mathbb{T}$. Weil h inner ist, folgt $\Psi(g) = 0$ fast überall auf $\mathbb{T}$. Nach Korollar 4.1.9 folgt $g \equiv 0$. Daher gilt $\mathcal{M} \ominus T_h(H^2(\mathbb{D})) = \{0\}$ und $T_h(H^2(\mathbb{D})) = \mathcal{M}$.

$\square$

Folgende zwei Korollare, die sich mit der Dimension der Menge $\mathcal{M}$ und den Nullstellen einer $H^2(\mathbb{D})$-Funktion am Kreisrand beschäftigen, ergeben sich leicht aus dem Satz von Beurling.

4.2.4 Korollar. Sei $\mathcal{M}$ ein nichttrivialer, abgeschlossener Teilraum von $H^2(\mathbb{D})$, der bezüglich Multiplikation mit z invariant bleibt, das heißt es gilt $T_z(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. Dann folgt $\dim(\mathcal{M}) = \infty$.

Beweis. Da der Raum $H^2(\mathbb{D})$ unendlichdimensional ist, muss $\mathcal{M}$ als isometrisches Bild auch unendlichdimensional sein.

$\square$

4.2.5 Korollar. Sei $g \in H^2(\mathbb{D})$ und es gelte $g \neq 0$. Dann gilt

$$\sigma\left(\{t \in \mathbb{T} : \Psi(g)(t) = 0\}\right) = 0.$$

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an, das heißt es gelte $A := \sigma\left(\{t \in \mathbb{T} : \Psi(g)(t) = 0\}\right) > 0$. Definiere

$$\mathcal{M} := \left\{f \in H^2(\mathbb{D}) : \Psi(f) \cdot \chi_A = 0 \text{ fast überall}\right\},$$

wobei wir mit χ_A die charakteristische Funktion von A bezeichnen, d.h.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{falls } x \notin A \end{cases}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Voraussetzungen des Satzes von Beurling (Satz 4.2.3) erfüllt sind. Wegen $g \in \mathcal{M}$ gilt $\mathcal{M} \neq \{0\}$. Für eine Funktion $f \in \mathcal{M}$ gilt $T_z(f)(z) = z \cdot f(z)$, somit folgt $\Psi(T_z(f))(\zeta) = \zeta \cdot \Psi(f)(\zeta)$. Die Multiplikation mit $\chi_A(\zeta)$ ergibt

$$\Psi(T_z(f))(\zeta) \cdot \chi_A(\zeta) = \zeta \cdot \Psi(f)(\zeta) \cdot \chi_A(\zeta) = 0$$

fast überall auf $\mathbb{T}$. Daher liegt für ein $f \in \mathcal{M}$ auch die Funktion $T_z(f)$ in $\mathcal{M}$, womit wir $T_z(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ gezeigt haben. Weil wir den Raum $\mathcal{M}$ auch durch

$$\mathcal{M} = \Psi^{-1}\left(H^2(\mathbb{T}) \cap \ker M_{\chi_A}\right)$$

darstellen können, ist $\mathcal{M}$ abgeschlossen, da Multiplizieren mit χ_A auf $L^2(\mathbb{T})$ stetig ist. Die Bedingungen des Satzes von Beurling sind somit erfüllt, und wir erhalten $\mathcal{M} = T_h(H^2(\mathbb{D}))$ mit einer inner Funktion $h \in H^\infty(\mathbb{D})$. Wegen $1 \in H^2(\mathbb{D})$ folgt $h \in \mathcal{M}$. Als inner Funktion muss aber $|\Psi(h)| = 1$ fast überall auf $\mathbb{T}$ gelten, womit für das Maß von A nicht mehr $\sigma(A) > 0$ gelten kann. Wir haben also einen Widerspruch gefunden, was die Behauptung beweist.

$\square$

4.2.6 Bemerkung. Wie wollen uns die Frage stellen, ob für die inner Funktion h im Satz von Beurling sogar eine Eindeutigkeitsaussage gilt. Klarerweise ist für eine inner Funktion h auch die Funktion $\hat{h} := c \cdot h$ mit $|c| = 1$ inner und es gilt

$$T_{\hat{h}}(H^2(\mathbb{D})) = \{c \cdot h \cdot f : f \in H^2(\mathbb{D}), |c| = 1\} = \{h \cdot f : f \in H^2(\mathbb{D})\} = T_h(H^2(\mathbb{D})).$$

Das impliziert, dass die Funktion, die sich aus dem Satz von Beurling ergibt, nicht eindeutig sein kann. Wie die nächste Proposition zeigt, ist die Multiplikation mit unimodularen, konstanten Faktoren aber die einzige Möglichkeit, um zu anderen inner Funktionen überzugehen.

4.2.7 Proposition. Seien g und h inner Funktionen, die $T_g(H^2(\mathbb{D})) = T_h(H^2(\mathbb{D}))$ erfüllen. Dann existiert eine Konstante $c \in \mathbb{T}$, sodass $h = c \cdot g$.

Beweis. Nach der Definition von inner Funktionen liegen die Funktionen g und h in $H^\infty(\mathbb{D}) \subseteq H^2(\mathbb{D})$ und wegen der Voraussetzung der Proposition in $T_g(H^2(\mathbb{D})) = T_h(H^2(\mathbb{D}))$. Somit existiert eine Funktion $f \in H^2(\mathbb{D})$ mit $g = h \cdot f$. Wir betrachten nun die Funktion $\frac{g}{h}$. Da wegen der vorliegenden Faktorisierung die Ordnung der Nullstellen der Funktion g mindestens gleich der Ordnung der Nullstellen der Funktion h ist, werden die Singularitäten, die sich aus den Nullstellen im Nenner ergeben, aufgehoben, womit die Funktion $\frac{g}{h}$ wohldefiniert und holomorph ist. Die Anwendung der Funktion Ψ auf die Funktion $\frac{g}{h}$ ergibt

$$\Psi(\frac{g}{h}) \in H^2(\mathbb{T}) \subseteq L^2(\mathbb{T}),$$

somit fallen die Koeffizienten mit negativem Index in der Fourierentwicklung der Funktion $\frac{g}{h}$ weg. Wendet man die selbe Argumentation auf die Funktion $\frac{h}{g} \in H^2(\mathbb{D})$ an, so ist diese Funktion ebenfalls wohldefiniert. Es gilt außerdem im Raum $L^2(\mathbb{T})$

$$0 = \left(\Psi\left(\frac{g}{h}\right) + \Psi\left(\frac{h}{g}\right), (\zeta \mapsto \zeta^n) \right) = \int_{\mathbb{T}} \overline{\zeta^n} \left(\Psi\left(\frac{g}{h}\right) + \Psi\left(\frac{h}{g}\right) \right)(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \tag{12}$$

für $n < 0$.
Weil die Abbildung Ψ mit der Multiplikation verträglich ist (vgl. Satz 4.1.4) und wegen der Eigenschaft h inner $|\Psi(h)| = 1$ fast überall auf $\mathbb{T}$ gilt, folgt mit Korollar 4.2.5

$$\Psi\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{\Psi(g)}{\Psi(h)}$$

fast überall auf $\mathbb{T}$. Somit folgt auch

$$\Psi\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{1}{\Psi\left(\frac{h}{g}\right)}.$$

Für $z := \Psi\left(\frac{g}{h}\right)(\zeta) \in \mathbb{T}$ gilt $z + \frac{1}{z} = z + \overline{z} \in \mathbb{R}$. Somit ist $\Psi\left(\frac{g}{h}\right) + \Psi\left(\frac{h}{g}\right)$ fast überall auf $\mathbb{T}$ reellwertig. Daher können wir die Gleichung (12) konjugieren und erhalten dieselbe Gleichung für alle $n \neq 0$. Also gilt

$$\Psi\left(\frac{g}{h}\right) + \Psi\left(\frac{h}{g}\right) \equiv \tilde{c}$$

fast überall auf $\mathbb{T}$, woraus

$$\frac{g}{h} + \frac{h}{g} \equiv \tilde{c} \tag{13}$$

folgt.
Mit $H := \frac{h}{g}$ können wir die Gleichung (13) in der Form $H + \frac{1}{H} = \tilde{c}$ für alle $z \in \mathbb{D}$ schreiben. Dies führt auf die quadratische Gleichung $H^2 - \tilde{c}H + 1 = 0$ mit der Lösung nach H in der Form

$$H(z) = \frac{\tilde{c}}{2} \pm \sqrt{\frac{\tilde{c}^2}{4} - 1}.$$

Wegen der Stetigkeit ist hier dasselbe Vorzeichen zu wählen. Somit ist die Funktion $H \equiv c$ konstant und es gilt $c \cdot g = h$. Wegen

$$|c| = |\Psi(c)| = |\Psi(H)| = \left| \frac{\Psi(h)}{\Psi(g)} \right| = 1$$

fast überall auf $\mathbb{T}$ gilt $|c| = 1$.

□

Wir haben jetzt alle nötigen Hilfsmittel zusammengetragen, um die Inner-Outer-Faktorisierung in Angriff nehmen zu können.

4.2.8 Korollar (Inner-Outer-Faktorisierung). Zu $h \in H^\infty(\mathbb{D})\backslash\{0\}$ existieren Funktionen $h_1, h_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$ mit den Eigenschaften h_1 inner und h_2 outer, sodass $h = h_1 \cdot h_2$ gilt. Die Funktionen h_1 und h_2 sind bis auf unimodulare, konstante Faktoren eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei T_h die Multipliererabbildung zur Funktion $h \in H^\infty(\mathbb{D})$. Setze $\mathcal{M} := \overline{T_h(H^2(\mathbb{D}))}$. Wegen der Stetigkeit des Operators T_z folgt

$$T_z(\mathcal{M}) = T_z\left(\overline{T_h(H^2(\mathbb{D}))}\right) \subseteq \overline{T_z(T_h(H^2(\mathbb{D})))} = \overline{T_h(T_z(H^2(\mathbb{D})))} \subseteq \overline{T_h(H^2(\mathbb{D}))} = \mathcal{M},$$

somit ist $\mathcal{M}$ ein unter T_z invarianter, abgeschlossener Teilraum von $H^2(\mathbb{D})$, der die Funktion h enthält und somit sicher nichtleer ist. Nach dem Satz von Beurling 4.2.3 existiert eine Funktion $h_1 \in H^\infty(\mathbb{D})$ inner, sodass $T_{h_1}(H^2(\mathbb{D})) = \mathcal{M} = \overline{T_h(H^2(\mathbb{D}))}$.
Die Multipliererabbildung T_{h_1} ist als Abbildung

$$T_{h_1} : H^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{M}$$

bijektiv, stetig und isometrisch, vgl. Lemma 4.2.2. Somit ist ist die Abbildung

$$T_{h_1}^{-1} \circ T_h : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$$

wohldefiniert und als Zusammensetzung stetiger Abbildungen selbst stetig. Da T_{h_1} klarerweise mit T_z kommutiert, gilt für beliebiges $f \in H^2(\mathbb{D})$ und $g := T_{h_1} f \in \mathcal{M}$

$$T_z f = T_{h_1}^{-1} \circ T_{h_1} \circ T_z f = T_{h_1}^{-1} \circ T_z \circ T_{h_1} f = T_{h_1}^{-1} \circ T_z g,$$

und weiters mit der Beziehung $f = T_{h_1}^{-1} g$

$$T_z \circ T_{h_1}^{-1} g = T_{h_1}^{-1} \circ T_z g.$$

Da auch T_z und T_h kommutieren, folgt wegen

$$T_z \circ T_{h_1}^{-1} \circ T_h f = T_{h_1}^{-1} \circ T_z \circ T_h f = T_{h_1}^{-1} \circ T_h \circ T_z f$$

die Tatsache, dass auch die Zusammensetzung $T_{h_1}^{-1} \circ T_h$ mit T_z vertauscht. Wegen $T_{h_1}^{-1} \circ T_h \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}))$ existiert nach Satz 2.3.15 ein eindeutiges $h_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$ mit $T_{h_2} = T_{h_1}^{-1} \circ T_h$. Dies ist aber äquivalent zu

$$T_{h_1 \cdot h_2} = T_{h_1} \circ T_{h_2} = T_h,$$

was nach Anwendung auf die Einsfunktion $1 \in H^2(\mathbb{D})$ die Beziehung $h = h_1 \cdot h_2$ impliziert.
Wir müssen nur noch zeigen, dass h_2 outer ist. Dies folgt aber sofort aus

$$\overline{T_{h_2}(H^2(\mathbb{D}))} = \overline{T_{h_1}^{-1}(\underbrace{T_h(H^2(\mathbb{D}))}_{=\mathcal{M}})} = H^2(\mathbb{D}).$$

Falls $h = \widetilde{h_1} \cdot \widetilde{h_2}$ eine zweite Zerlegung mit den gewünschten Eigenschaften ist, so folgt

$$\begin{aligned} T_{h_1}(H^2(\mathbb{D})) &\overset{(1)}{=} T_{h_1}\left(\overline{T_{h_2}(H^2(\mathbb{D}))}\right) \overset{(2)}{=} \overline{T_{h_1}(T_{h_2}(H^2(\mathbb{D})))} = \\ &= \overline{T_h(H^2(\mathbb{D}))} = \overline{T_{\widetilde{h_1}}\left(T_{\widetilde{h_2}}(H^2(\mathbb{D}))\right)} \overset{(2)}{=} T_{\widetilde{h_1}}\left(\overline{T_{\widetilde{h_2}}(H^2(\mathbb{D}))}\right) \overset{(1)}{=} T_{\widetilde{h_1}}(H^2(\mathbb{D})), \end{aligned}$$

wobei die Gleichheiten (1) wegen der Eigenschaft $h_2, \widetilde{h_2}$ outer und die Gleichheiten (2) wegen der Isometrie der Abbildungen T_{h_1} und $T_{\widetilde{h_1}}$ gelten. Proposition 4.2.7 impliziert die Existenz einer Konstanten $c \in \mathbb{T}$ mit $h_1 = c \cdot \widetilde{h_1}$, und wegen $h_1 \neq 0$ gilt auch $h_2 = \frac{1}{c} \cdot \widetilde{h_2}$. Somit ist die Eindeutigkeit der Funktionen bis auf einen unimodularen, konstanten Faktor gezeigt.

$\square$

Literatur

[K] Michael Kaltenbäck: *Funktionalanalysis II*, TU Wien, 2010.

[M] Gabriel Maresch: *Komplexe Analysis*, TU Wien, 2010.

[N] Christoph Neuner: *Operatortheorie und Analysis*, TU Wien, 2010.

[R] Marvin Rosenblum, James Rovnyak: *Hardy Classes and Operator Theory*, Oxford University Press, New York, 1985.

[W] Harald Woracek, Michael Kaltenbäck, Martin Blümlinger: *Funktionalanalysis*, TU Wien, 5. Auflage 2009.