BACHELORARBEIT

Frames und Riesz-Basen

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Kaltenbäck

durch

Lukas Sauer
Matrikelnummer: 12002158

Wien, am 19. Oktober 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ist $(H, (.,.))$ ein Hilbertraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus H so heißt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Frame, wenn es $A, B > 0$ derart gibt, dass

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty}|(x, x_n)|^2 \leq B\|x\|^2 \text{ für alle } x \in H.$$

Wir nennen eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus H Riesz-Basis von H, falls es eine beschränkte lineare Bijektion T von H nach H derart gibt, dass $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H ist.
Ziel dieser Arbeit ist eine kurze Einführung in Frames und Riesz-Basen. Dazu werden zunächst im ersten Abschnitt der Arbeit einige Grundbegriffe und wichtige Resultate aus der Funktionalanalysis wiederholt.
Im zweiten Abschnitt werden für eine Folge $\mathfrak{X}$ aus H der Interpolationsoperator $J_{\mathfrak{X}}$, der Syntheseoperator $V_{\mathfrak{X}}$ sowie die Gram-Matrix $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ eingeführt. Diese treten bei der Untersuchung von Frames und Riesz-Basen in natürlicher Art und Weise auf. Weiters lassen sich Frames und Riesz-Basen gut über die Eigenschaften dieser Operatoren charakterisieren. Außerdem wird der Begriff der Schauderbasis eingeführt. Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind im Wesentlichen in [FM16, p.399 ff.] zu finden.
Im dritten Abschnitt diskutieren wir Riesz-Basen. Wie der Name vermuten lässt, haben Riesz-Basen eine Basiseigenschaft. Das bedeutet, dass sich jedes $x \in H$ als unendliche Summe der Basiselemente schreiben lässt. Weiters bringen wir ein Resultat, das Riesz-Basen mit unbedingten Basen in Verbindung bringt. Zu guter Letzt geben wir ein Beispiel für eine Riesz-Basis des Hilbertraums $L^2[-\pi, \pi]$. Im ersten und zweiten Unterabschnitt bringen wir hier im Wesentlichen Resultate aus [FM16, p.422 ff.].
Im vierten und letzten Abschnitt der Arbeit werden Frames behandelt. Analog zu Riesz-Basen haben Frames eine Basiseigenschaft. Weiters gehen wir der Frage nach, welche Operatoren Frames erhalten. Zum Schluss diskutieren wir einige Charakterisierungen von Frames.

2 Resultate aus der Funktionalanalysis

Wir betrachten in der gesamten Arbeit ausschließlich Vektorräume über dem Skalarkörper $\mathbb{C}$. Den Hilbertraum der komplexwertigen quadratsummierbaren Funktionen auf einer Menge I nennen wir $\ell^2(I, \mathbb{C})$. Für eine Teilmenge $M \subseteq H$ bezeichnet $M^\perp$ das orthogonale Komplement von M.

Definition 2.0.1. Sei H ein Hilbertraum und $(x_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem in H. Wir nennen $(x_i)_{i \in I}$ eine *Orthonormalbasis von* H, falls $\overline{\operatorname{span}\{x_i \colon i \in I\}} = H$. Weiters heißt H *separabel*, falls es eine höchstens abzählbare Orthonormalbasis gibt.

Satz 2.0.2. *Sei H ein Hilbertraum und $(x_i)_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis von H. Dann ist H vermöge der Abbildung*

$$\begin{aligned} \Phi \colon H &\to \ell^2(I, \mathbb{C}) \\ x &\mapsto ((x, x_i))_{i \in I} \end{aligned} \tag{2.1}$$

isometrisch isomorph zu $\ell^2(I, \mathbb{C})$. Insbesondere gilt $\Phi^{-1}((c_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} c_i x_i$ im Sinne der unbedingten Konvergenz.

Satz 2.0.3. *Ist H ein Hilbertraum und $(x_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem aus H, so sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- *(i)* *$(x_i)_{i \in I}$ ist eine Orthonormalbasis von H.*
- *(ii)* *Für alle $x \in H$ gilt $x = \sum_{i \in I} (x, x_i) x_i$, wobei die Reihe auf der rechten Seite unbedingt konvergiert.*
- *(iii)* *Für alle $x \in H$ gilt*

$$\sum_{i \in I} |(x, x_i)|^2 = \|x\|^2, \tag{2.2}$$

wobei die Reihe auf der linken Seite unbedingt konvergiert.

Bemerkung 2.0.4. Die Reihe in Satz 2.0.3(*ii*) nennt man auch *Fourierreihe* und die Koeffizienten (x, x_i) heißen *Fourier-Koeffizienten.* Aus Satz 2.0.2 folgt, dass die Darstellung eines Elements $x \in H$ als $x = \sum_{i \in I} c_i x_i$ mit $(c_i)_{i \in I} \in \ell^2(I, \mathbb{C})$ eindeutig ist. Also muss $c_i = (x, x_i)$ für alle $i \in I$ gelten.

Für Beweise dieser Sätze verweisen wir auf [Kal21, p.317].
Sind X, Y normierte Räume, so wollen wir mit $L_b(X, Y)$ den Raum aller linearen und beschränkten Operatoren von X nach Y bezeichnen. Bildet ein linearer und beschränkter Operator T von X nach X ab, so schreiben wir kurz $T \in L_b(X)$.
Wir rufen noch das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit sowie den Satz von der offenen Abbildung bzw. eine Folgerung dessen in Erinnerung.

Satz 2.0.5. *Für einen Banachraum X und einen normierten Raum Y sowie eine Familie $(T_i)_{i\in I}$ aus $L_b(X,Y)$ folgt aus der punktweisen Beschränktheit von $(T_i)_{i\in I}$ die gleichmäßige Beschränktheit dieser Familie. Also folgt aus*

$$\sup_{i\in I}\|T_i x\| < +\infty$$

für alle $x \in X$, dass

$$\sup_{i\in I}\|T_i\| < +\infty.$$

Satz 2.0.6. *Sind X, Y Banachräume und $T \in L_b(X,Y)$ bijektiv, so gilt $T^{-1} \in L_b(Y,X)$.*

Beweise dieser Aussagen sind in [BKW22, p.60] zu finden.
Wir brauchen noch eine Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach. Für einen normierten Raum X bezeichnen wir mit X' den Raum aller stetigen und linearen Funktionale von X nach $\mathbb{C}$. Der Beweis des folgenden Satzes ist in [FM16, p.15] zu finden, wir wollen ihn hier der Vollständigkeit halber aber ausführen. Im Beweis benutzen wir die Tatsache, dass ein lineares Funktional $f\colon X \to \mathbb{C}$ genau dann beschränkt ist, wenn $\ker f$ abgeschlossen ist. Wir verweisen hierfür auf [BKW22, p.23].

Satz 2.0.7. *Sei X ein normierter Raum und M ein abgeschlossener Unterraum von X. Für ein $x_0 \in X$ gilt genau dann $x_0 \notin M$, wenn es ein $f \in X'$ mit $f(x_0) = 1$ und $f\restriction_M = 0$ gibt.*

Beweis. Existiert ein lineares und beschränktes Funktional mit den oben genannten Eigenschaften, so folgt aus Wohldefiniertheitsgründen $x_0 \notin M$. Sei also umgekehrt $x_0 \notin M$. Wir definieren auf dem Unterraum

$$N := \mathbb{C}x_0 + M = \{\alpha x_0 + x \colon \alpha \in \mathbb{C}, x \in M\}$$

ein Funktional $f\colon N \to \mathbb{C}$ durch $f(\alpha x_0 + x) = \alpha$. Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $x, y \in M$ so, dass $\alpha x_0 + x = \beta x_0 + y$, dann folgt

$$(\alpha - \beta)x_0 + (x - y) = 0.$$

Wegen $x_0 \notin M, x - y \in M$ und weil M ein linearer Unterraum ist, muss $\alpha - \beta = 0$ und $x - y = 0$ gelten, womit sich f als wohldefiniert herausstellt. Für $\alpha, \beta, t \in \mathbb{C}$ und $x, y \in M$ folgt aus

$$\begin{aligned} f(\alpha x_0 + x + t(\beta x_0 + y)) &= f((\alpha + t\beta)x_0 + (x + ty)) = \alpha + t\beta \\ &= f(\alpha x_0 + x) + tf(\beta x_0 + y) \end{aligned}$$

die Linearität von f. Da $f(\alpha x_0 + x) = 0$ zu $\alpha = 0$ äquivalent ist, haben wir $\ker f = M$. Also ist $\ker f$ abgeschlossen, woraus wir auf die Stetigkeit von f schließen. Nach dem Satz von Hahn-Banach lässt sich f zu einem linearen und beschränkten Funktional $F\colon X \to \mathbb{C}$ fortsetzen. Nach Konstruktion gilt $F\restriction_M = f\restriction_M = 0$ und $F(x_0) = f(x_0) = 1$. □

Das folgende Resultat ist ebenfalls eine Konsequenz aus dem Satz von Hahn-Banach. Für einen Beweis verweisen wir auf [BKW22, p.77].

Korollar 2.0.8. *Ist $X \neq \{0\}$ ein normierter Raum und $x_0 \in X$, so gilt*

$$\|x_0\| = \sup_{\substack{f \in X' \\ \|f\|=1}} |f(x_0)|.$$

3 Vorbereitendes

3.1 Minimalität und biorthogonale Folgen

Es sei daran erinnert, dass eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ von Vektoren eines Vektorraums X *linear unabhängig* heißt, falls für $J \subseteq I, |J| < \infty$ und $c_j \in \mathbb{C}, j \in J$, aus $\sum_{j\in J} c_j x_j = 0$ stets $c_j = 0$ für $j \in J$ folgt. Wir wollen diese Begriffsbildung in Banachräumen verallgemeinern.

Definition 3.1.1. Sei X ein Banachraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus X. Wir nennen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *w-topologisch linear unabhängig*, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = 0 \tag{3.1}$$

für eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}$ immer $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zur Folge hat.
Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *minimal*, falls $x_n \notin \overline{\operatorname{span}\{x_k \colon k \in \mathbb{N}, k \neq n\}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 3.1.2. *Für einen Banachraum X und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X gelten die folgenden Aussagen.*

(i) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minimal, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w-topologisch linear unabhängig.

(ii) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w-topologisch linear unabhängig, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig.

Beweis. Angenommen, es gibt eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = 0$$

und $c_k \neq 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Zu $\epsilon > 0$ wählen wir $N \in \mathbb{N}, k \leq N$, so, dass $\left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\| < \epsilon$, wodurch

$$\left\| - \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq k}}^{N} c_n x_n - c_k x_k \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\| < \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $c_k x_k \in \overline{\operatorname{span}\{x_n \colon n \in \mathbb{N}, n \neq k\}}$, was wegen $c_k \neq 0$ auch $x_k \in \overline{\operatorname{span}\{x_n \colon n \in \mathbb{N}, n \neq k\}}$ impliziert. Damit kann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht minimal sein, also gilt die erste Aussage.
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w-topologisch linear unabhängig und gelte $\sum_{n=1}^{N} c_n x_n = 0$ mit $c_k \in \mathbb{C}, k = 1, \ldots N$. Setzt man $c_k = 0$ für $k > N$, so gilt $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = 0$, woraus wir auf $c_k = 0$ für alle $k = 1, \ldots N$ schließen.

$\square$

Die Umkehrung der Aussagen in Lemma 3.1.2 gilt im Allgemeinen nicht. Das nachfolgende Beispiel zeigt, dass eine w-topologisch linear unabhängige Folge nicht minimal sein muss.

Beispiel 3.1.3. Wir betrachten die Folge $((t \mapsto t^n))_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ aus $C[0,1]$. Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ eine Folge aus $\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft (3.1). Dann konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen $f \equiv 0$. Also ist ihr Konvergenzradius größer gleich 1, woraus wir auf $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ schließen, womit sich $((t \mapsto t^n))_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ als w-topologisch linear unabhängig herausstellt.
Der Unterraum $E := \operatorname{span}\{(t \mapsto t^n) \colon n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, n \neq 1\}$ ist unter punktweiser Multiplikation abgeschlossen. Wegen $1 \in E$ und $(t \mapsto t^2) \in E$ ist E eine nirgends verschwindende und punktetrennende Menge von stetigen Funktionen. Klarerweise ist E unter Konjugation abgeschlossen. Nach dem Satz von Stone-Weierstrass folgt

$$(t \mapsto t) \in C[0,1] = \overline{E},$$

weshalb $((t \mapsto t^n))_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ nicht minimal ist.

Definition 3.1.4. Sei X ein Banachraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X. Eine Folge $(x'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ aus X' heißt *zu* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *biorthogonal*, falls

$$x'_m(x_n) = \delta_{mn} \tag{3.2}$$

für alle $m,n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 3.1.5. Ist H ein Hilbertraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus H, so folgt aus dem Satz von Riesz-Fischer, dass eine Folge $(x'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ aus H' genau dann zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonal ist, wenn es eine Folge $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ aus H mit

$$(x_n, y_m) = \delta_{mn}$$

für alle $m,n \in \mathbb{N}$ gibt. In diesem Sinne fassen wir in Hilberträumen biorthogonale Folgen $(x'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ als Folgen aus H auf und identifizieren sie mit der Folge $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

Definition 3.1.6. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus einem Banachraum X heißt *vollständig*, wenn $\operatorname{span}\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X ist.

Lemma 3.1.7. *Für einen Banachraum X und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X gelten die folgenden Aussagen.*

(*i*) *Es existiert genau dann eine zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonale Folge, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minimal ist.*

(*ii*) *Existiert eine zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonale Folge, so ist diese genau dann eindeutig, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vollständig ist.*

Beweis. Definitionsgemäß bedeutet die Minimalität einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X, dass $x_n \notin \overline{\operatorname{span}\{x_k : k \in \mathbb{N}, k \neq n\}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.0.7 ist das wiederum äquivalent dazu, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x'_n \in X'$ mit $x'_n(x_n) = 1$ und $x'_n(x) = 0$ für alle $x \in \overline{\operatorname{span}\{x_k : k \in \mathbb{N}, k \neq n\}}$ gibt. Damit folgt die erste Aussage.
Für den Beweis der zweiten Aussage seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vollständig und $(x'_m)_{m\in\mathbb{N}}, (\tilde{x}'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonale Folgen. Nach Definition gilt $x'_m(x_n) = \delta_{mn}$ sowie $\tilde{x}'_m(x_n) = \delta_{mn}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Daraus schließen wir für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ auf $(x'_n - \tilde{x}'_n)(x_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Stetigkeit der linearen Funktionale $x'_n, \tilde{x}'_n$ und die Vollständigkeit von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ haben $x'_n = \tilde{x}'_n$ zur Folge.
Existiert umgekehrt eine biorthogonale Folge $(x'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht vollständig, so können wir wegen Satz 2.0.7 zu $x_0 \notin \overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ ein $f \in X'$ mit $f(x_0) = 1$ und $f(x) = 0$ für alle $x \in \overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ finden. Die Folge $(x'_m + f)_{m\in\mathbb{N}}$ ist dann zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonal und ungleich $(x'_m)_{m\in\mathbb{N}}$. □

3.2 Die Operatoren $J_{\mathfrak{X}}, V_{\mathfrak{X}}, \Gamma_{\mathfrak{X}}$

Im Folgenden steht $\ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ für den Raum aller komplexwertigen Folgen mit endlichem Träger versehen mit der ℓ^2-Norm. Ferner bezeichnen wir für den Rest der Arbeit mit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch $e_n(m) = \delta_{nm}$ definierten Elemente von $\ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Man beachte, dass $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine algebraische Basis von $\ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ und eine Orthonormalbasis von $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ abgibt.

Bemerkung 3.2.1. Für einen Hilbertraum H und eine Folge $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus H ist durch

$$(\Gamma_{\mathfrak{X}} e_n, e_m)_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \ell^2} = (x_n, x_m) \tag{3.3}$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ein linearer Operator $\Gamma_{\mathfrak{X}} : \ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ definiert. Um dies einzusehen setzen wir $\Gamma_{\mathfrak{X}} e_n := ((x_n, x_m))_{m\in\mathbb{N}}$ zu einer linearen Abbildung von $\ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ nach $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ fort. Mit $(.,.)_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \ell^2} : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \times \ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definiert durch $((a_j)_{j\in\mathbb{N}}, (b_j)_{j\in\mathbb{N}}) := \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \bar{b}_j$ gilt dann (3.3).

Definition 3.2.2. Sei H ein Hilbertraum und $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus H. Wir nennen die lineare Abbildung $J_{\mathfrak{X}} : H \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ mit $J_{\mathfrak{X}} x = ((x, x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ für $x \in H$ den *Interpolationsoperator*.
Die lineare Abbildung $V_{\mathfrak{X}} : \ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to H$ definiert durch $V_{\mathfrak{X}} a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ für $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ heißt *Syntheseoperator*.
Der durch $(\Gamma_{\mathfrak{X}} e_n, e_m)_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \ell^2} = (x_n, x_m)$ gemäß Bemerkung 3.2.1 wohldefinierte lineare Operator $\Gamma_{\mathfrak{X}} : \ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ heißt *Gram-Matrix*.

Lemma 3.2.3. *Für einen Hilbertraum H und eine Folge $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus H gelten die folgenden Aussagen.*

(i) *Der Interpolationsoperator $J_{\mathfrak{X}}$ ist genau dann injektiv, wenn $\mathfrak{X}$ vollständig ist.*

(ii) *Die Folge $\mathfrak{X}$ ist genau dann minimal, wenn $e_n \in \operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Die Injektivität von $J_{\mathfrak{X}}$ ist äquivalent zu $\{0\} = \ker J_{\mathfrak{X}} = \operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\perp}$, was wiederum gleichbedeutend mit $\overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = H$ ist. Also gilt die erste Aussage.

Aus Lemma 3.1.7 erhalten wir, dass die Minimalität von $\mathfrak{X}$ zur Existenz einer zu $\mathfrak{X}$ biorthogonalen Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Sinne von Bemerkung 3.1.5 äquivalent ist. Letzteres bedeutet aber genau die Existenz einer Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus H derart, dass

$$J_{\mathfrak{X}} x'_m = ((x'_m, x_n))_{n\in\mathbb{N}} = e_m$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, womit die zweite Aussage bewiesen ist.

□

Lemma 3.2.4. *Sei H ein Hilbertraum und $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus H. Gilt* $\operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}} \subseteq \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$*, so ist $J_{\mathfrak{X}}$ ein beschränkter linearer Operator von H nach $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.*

Beweis. Wir definieren für $N \in \mathbb{N}$ einen linearen Operator $J_{\mathfrak{X}}^N \colon H \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ durch $(J_{\mathfrak{X}}^N x)_n = (x, x_n)$ für $n = 1, \dots, N$ und $(J_{\mathfrak{X}}^N x)_n = 0$ für $n > N$. Für $x \in H$ gilt nach Voraussetzung $J_{\mathfrak{X}} x \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Also existiert der Grenzwert $\lim_{N\to\infty} J_{\mathfrak{X}}^N x$ in $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ und stimmt mit $J_{\mathfrak{X}} x$ überein. Wegen

$$\|J_{\mathfrak{X}}^N x\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |(x, x_n)|^2 \leq \|x\|^2 \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2$$

ist $J_{\mathfrak{X}}^N$ beschränkt. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt, dass auch $J_{\mathfrak{X}}$ beschränkt ist. □

Proposition 3.2.5. *Sei H ein Hilbertraum und $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine vollständige und minimale Folge aus H. Des Weiteren bezeichne $\mathfrak{X}' = (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die nach Lemma 3.1.7 eindeutig existierende zu $\mathfrak{X}$ biorthogonale Folge. Dann gelten für $x = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \in \operatorname{span}\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ und $a = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \in \ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$*

$$V_{\mathfrak{X}} J_{\mathfrak{X}'} x = x \tag{3.4}$$

und

$$J_{\mathfrak{X}'} V_{\mathfrak{X}} a = a. \tag{3.5}$$

Beweis. Wir fassen $\mathfrak{X}'$ im Sinne von Bemerkung 3.1.5 als Folge aus H auf. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} V_{\mathfrak{X}} J_{\mathfrak{X}'} x = V_{\mathfrak{X}} \left(((\sum_{n=1}^{N} c_n x_n, x'_m))_{m\in\mathbb{N}} \right) &= \sum_{n=1}^{N} c_n V_{\mathfrak{X}} \left(((x_n, x'_m))_{m\in\mathbb{N}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} c_n V_{\mathfrak{X}} e_n = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit folgt aus

$$J_{\mathfrak{X}'} V_{\mathfrak{X}} a = J_{\mathfrak{X}'} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n x_n \right) = \sum_{n=1}^{N} a_n J_{\mathfrak{X}'} x_n = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n = a.$$

□

Der folgende Satz ist das zentrale Ergebnis dieses Unterabschnitts und stellt eine nützliche Verbindung zwischen den zu Beginn des Abschnitts eingeführten Operatoren her.

Satz 3.2.6. *Für einen Hilbertraum H und eine Folge $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus H sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) *$J_{\mathfrak{X}}$ ist beschränkt als Abbildung von H nach $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.*

(ii) *$V_{\mathfrak{X}}$ lässt sich auf eindeutige Weise zu einem linearen und beschränkten Operator von $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ nach H fortsetzen.*

(iii) *Die Gram-Matrix $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ lässt sich auf eindeutige Weise zu einem linearen und beschränkten Operator von $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ nach $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ fortsetzen.*

Im Fall, dass eine der obigen Aussagen gilt, haben wir

$$J_{\mathfrak{X}}^* = V_{\mathfrak{X}} \tag{3.6}$$

und

$$V_{\mathfrak{X}}^* V_{\mathfrak{X}} = \Gamma_{\mathfrak{X}}. \tag{3.7}$$

Beweis. Zur besseren Lesbarkeit wollen wir die Fortsetzungen von $V_{\mathfrak{X}}$ bzw. $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ ebenfalls mit $V_{\mathfrak{X}}$ bzw. $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ bezeichnen.
„(ii) $\Longrightarrow$ (i)“: Sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ und $x \in H$ beliebig. Da $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ ist, gilt $a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n$. Die Beschränktheit von $V_{\mathfrak{X}} \colon \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to H$ hat die Existenz von $V_{\mathfrak{X}}^* \in L_b(H, \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}))$ und damit

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \overline{(V_{\mathfrak{X}}^* x)_n} &= (a, V_{\mathfrak{X}}^* x)_{\ell^2} = (V_{\mathfrak{X}} a, x) = (V_{\mathfrak{X}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n \right), x) \\ &= (\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n, x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \overline{(x, x_n)}\end{aligned}$$

zur Folge. Wir schließen auf

$$V_{\mathfrak{X}}^* x = ((x, x_n))_{n\in\mathbb{N}} \tag{3.8}$$

für alle $x \in H$, womit $J_{\mathfrak{X}} = V_{\mathfrak{X}}^* \in L_b(H, \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}))$.
„(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: Zunächst gilt für alle $a = \sum_{n=1}^N a_n e_n \in \ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ und $x \in H$

$$(V_{\mathfrak{X}} a, x) = (\sum_{n=1}^N a_n x_n, x) = \sum_{n=1}^N a_n \overline{(x, x_n)} = (a, J_{\mathfrak{X}} x)_{\ell^2}. \tag{3.9}$$

Somit folgt für $a \in \ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Beschränktheit von $J_{\mathfrak{X}}$

$$\|V_{\mathfrak{X}} a\|^2 = (V_{\mathfrak{X}} a, V_{\mathfrak{X}} a) = (a, J_{\mathfrak{X}} V_{\mathfrak{X}} a)_{\ell^2} \le \|a\|_{\ell^2} \|J_{\mathfrak{X}}\| \|V_{\mathfrak{X}} a\|.$$

Also ist $V_{\mathfrak{X}}$ ein beschränkter linearer Operator auf dem dichten Unterraum $\ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ und folglich in eindeutiger Weise auf ganz $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ linear und beschränkt fortsetzbar.
„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“: Nach Bemerkung 3.2.1 gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma_{\mathfrak{X}} e_n = ((x_n, x_m))_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

Da wir „(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)“ bereits gezeigt haben, sind die Operatoren $J_{\mathfrak{X}}$ und $V_{\mathfrak{X}}$ beschränkt auf H bzw. $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$. Also folgt für $a = \sum_{n=1}^N a_n e_n \in \ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N},\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\|\Gamma_{\mathfrak{X}} a\|_{\ell^2} = \left\|\sum_{n=1}^N a_n \Gamma_{\mathfrak{X}} e_n\right\|_{\ell^2} &= \left\|\sum_{n=1}^N a_n ((x_n, x_m))_{m\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^2} \\ &= \left\|((\sum_{n=1}^N a_n x_n, x_m))_{m\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^2} \\ &= \|J_{\mathfrak{X}} V_{\mathfrak{X}} a\|_{\ell^2} \le \|J_{\mathfrak{X}}\|\|V_{\mathfrak{X}}\|\|a\|_{\ell^2},\end{aligned}$$

womit sich $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ als beschränkt von $\ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ nach $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ herausstellt. Da $\ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ ein dichter Unterraum ist, lässt sich $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ eindeutig zu einer beschränkten linearen Abbildung von $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ nach $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ fortsetzen.
„(iii) $\Longrightarrow$ (ii)“: Für $a = \sum_{n=1}^N a_n e_n \in \ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ gilt

$$\begin{aligned}\|V_{\mathfrak{X}} a\|^2 = (V_{\mathfrak{X}} a, V_{\mathfrak{X}} a) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n \bar{a}_m (x_n, x_m) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n \bar{a}_m (\Gamma_{\mathfrak{X}} e_n, e_m)_{\ell^2} = (\Gamma_{\mathfrak{X}} a, a)_{\ell^2}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Zusammen mit der Beschränktheit von $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung schließen wir auf

$$\sup_{\substack{a\in\ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N},\mathbb{C})\\ \|a\|=1}} \|V_{\mathfrak{X}} a\|^2 = \sup_{\substack{a\in\ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N},\mathbb{C})\\ \|a\|=1}} (\Gamma_{\mathfrak{X}} a, a) \le \sup_{\substack{a\in\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})\\ \|a\|=1}} \|\Gamma_{\mathfrak{X}} a\| < +\infty.$$

Also ist $V_{\mathfrak{X}}$ ein beschränkter linearer Operator auf dem dichten Unterraum $\ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ und damit in eindeutiger Weise auf ganz $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ linear und beschränkt fortsetzbar.
Gleichung (3.6) folgt unmittelbar aus (3.8). Von (3.10) schließt man sofort auf (3.7). □

3.3 Schauderbasen

Eine in Zusammenhang mit Riesz-Basen natürlich auftretende Begriffsbildung ist die der Schauderbasis. Es wird sich herausstellen, dass jede Riesz-Basis auch eine Schauderbasis ist. Wir wollen in diesem Abschnitt kurz die für unsere Untersuchungen wichtigen Resultate bezüglich Schauderbasen bringen.

Definition 3.3.1. Sei X ein Banachraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus X. Existiert für jedes $x \in X$ eine eindeutige Folge von Skalaren $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, \tag{3.11}$$

dann heißt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Schauderbasis von X*.

Bemerkung 3.3.2. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Schauderbasis eines Banachraums X und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}$ derart, dass $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = 0$ gilt, so muss aufgrund der Eindeutigkeit der Darstellung (3.11) schon $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Also sind Schauderbasen stets w-topologisch linear unabhängig und infolge auch linear unabhängig.

Satz 3.3.3. *Für einen Banachraum X und eine Schauderbasis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X sind die Funktionale $\lambda_n\colon X \to \mathbb{C}$ definiert durch $\lambda_n(x) = c_n$ für $x \in X$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ wohldefiniert, linear und beschränkt. Hier ist c_n der n-te Summand in der Reihendarstellung* (3.11) *von x.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass der Raum aller bezüglich der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$ konvergenten X-wertigen Folgen $c(\mathbb{N}, X)$ ein abgeschlossener Unterraum von $\ell^\infty(\mathbb{N}, X)$ ist. Dazu schreiben wir die Elemente aus $c(\mathbb{N}, X)$ als Funktionen. Sei also $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus $c(\mathbb{N}, X)$ und $f \in \ell^\infty(\mathbb{N}, X)$ mit $f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $f_k \in c(\mathbb{N}, X)$, womit der Grenzwert

$$A_k := \lim_{n\to\infty} f_k(n)$$

existiert. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existiert auch $\lim_{k\to\infty} A_k$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} f_k(n) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_k(n) = \lim_{k\to\infty} A_k \in X,$$

woraus wir auf die Abgeschlossenheit von $c(\mathbb{N}, X)$ schließen. Der Operator $L\colon c(\mathbb{N}, X) \to X$ definiert durch $Lf = \lim_{n\to\infty} f(n)$ ist wohldefiniert und linear. Wegen

$$\|Lf\| = \|\lim_{n\to\infty} f(n)\| \leq \|f\|_\infty$$

ist L beschränkt mit $\|L\| \leq 1$.
Für $n, m \in \mathbb{N}, m > n$ definieren wir $X_n = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ sowie die Projektionen $P_{mn}\colon X_m \to X_n$ mit $\operatorname{ran} P_{mn} = X_n$ und $\ker P_{mn} = \operatorname{span}\{x_{n+1}, \dots, x_m\}$. Wir wollen zeigen, dass

$$Y := \{f \in c(\mathbb{N}, X)\colon f(n) \in X_n, n \in \mathbb{N} \text{ und } P_{mn}(f(m)) = f(n), m > n\} \tag{3.12}$$

ein abgeschlossener Unterraum von $c(\mathbb{N}, X)$ ist. Für $f, g \in Y$ und $c \in \mathbb{C}$ ist $f + cg \in c(\mathbb{N}, X)$, da $c(\mathbb{N}, X)$ ein Unterraum ist. Weil auch die $X_n, n \in \mathbb{N}$, Unterräume sind, folgt $f(n) + cg(n) \in X_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Zusammen mit der Linearität der Projektionen P_{mn} erhalten wir $f + cg \in Y$. Um die Abgeschlossenheit zu zeigen, seien $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus Y und $f \in c(\mathbb{N}, X)$ mit

$f_k \xrightarrow{\|.\|_\infty} f$. Die Abgeschlossenheit von $c(\mathbb{N}, X)$ hat $f \in c(\mathbb{N}, X)$ zur Folge. Die Konvergenz der $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen f bezüglich $\|.\|_\infty$ impliziert

$$\lim_{k\to\infty} f_k(n) = f(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ ist $(f_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus X_n. Da X_n als endlichdimensionaler Unterraum abgeschlossen ist, folgt $\lim_{k\to\infty} f_k(n) = f(n) \in X_n$. Die Projektionen P_{mn} sind als lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Räumen beschränkt, womit wir auf

$$P_{mn}(f(m)) = P_{mn}(\lim_{k\to\infty} f_k(m)) = \lim_{k\to\infty} P_{mn}(f_k(m)) = \lim_{k\to\infty} f_k(n) = f(n)$$

für $m > n$ schließen. Also ist Y ein abgeschlossener Unterraum.
Jedes $f \in Y$ lässt sich als $f(n) = \sum_{j=1}^{n} d_{n,j} x_j$ mit Koeffizienten $d_{n,j} \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, n$, darstellen. Für $m > n$ haben wir

$$\sum_{j=1}^{n} d_{n,j} x_j = f(n) = P_{mn}(f(m)) = P_{mn}(\sum_{j=1}^{m} d_{m,j} x_j) = \sum_{j=1}^{n} d_{m,j} x_j,$$

was wegen Bemerkung 3.3.2 $d_{n,j} = d_{m,j}, j = 1, \ldots, n$, zur Folge hat. Insbesondere sind die Koeffizienten in der obigen Darstellung unabhängig von n, weswegen sich jedes $f \in Y$ als

$$f(n) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \tag{3.13}$$

mit einer Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}$ schreiben lässt. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis ist, lässt sich jedes $x \in X$ eindeutig als $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ schreiben. Definieren wir eine Folge g durch $g(n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, so ist g nach Konstruktion ein Element von Y mit

$$Lg = \lim_{n\to\infty} g(n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k = x,$$

womit $L \restriction_Y$ surjektiv ist. Jedes weitere $f \in Y$ mit $Lf = x$ muss dann wegen (3.13) und der Eindeutigkeit der Koeffizienten in der Schauderbasis mit g übereinstimmen. Folglich ist $L \restriction_Y$ bijektiv, wobei $(L \restriction_Y)^{-1} x = (\sum_{j=1}^{n} c_j x_j)_{n\in\mathbb{N}}$.
Die auf $\ell^\infty(\mathbb{N}, X)$ durch $P_n f = f(n)$ definierte lineare Abbildung ist kontraktiv. Somit ist $S_n := P_n(L \restriction_Y)^{-1}$ ein linearer und beschränkter Operator von X nach X_n mit

$$\|S_n\| \leq \|(L \restriction_Y)^{-1}\| =: C \tag{3.14}$$

und

$$S_n x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \tag{3.15}$$

Die Funktionale $\lambda_n(x) = c_n, n \in \mathbb{N}$, sind aufgrund der Eindeutigkeit der Darstellung (3.11) wohldefiniert. Sind $\alpha \in \mathbb{C}$ und $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, y = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x_n \in X$ mit eindeutigen Skalaren $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so gilt

$$x + \alpha y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} d_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + \alpha d_n) x_n.$$

Es folgt

$$\lambda_n(x + \alpha y) = c_n + \alpha d_n = \lambda_n(x) + \alpha \lambda_n(y),$$

womit sich λ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ als linear herausstellt. Wegen Bemerkung 3.3.2 gilt $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zusammen mit (3.14) schließen wir für $x \in X$ auf

$$|\lambda_n(x)| = \frac{\|\lambda_n(x) x_n\|}{\|x_n\|} = \frac{\|S_n x - S_{n-1} x\|}{\|x_n\|} \leq \frac{2C\|x\|}{\|x_n\|}, \tag{3.16}$$

was genau die Beschränktheit von λ_n bedeutet. □

Korollar 3.3.4. *Für einen Banachraum X und eine Schauderbasis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X bilden die in Satz 3.3.3 eingeführten Funktionale $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonale Folge. Insbesondere ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minimal. Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$1 \leq \|\lambda_n\| \|x_n\| \leq 2C, \tag{3.17}$$

wobei C die Konstante aus (3.14) *ist.*

Beweis. Definitionsgemäß gilt

$$\lambda_n(x_m) = \delta_{mn}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Damit ist $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonale Folge. Wegen Lemma 3.1.7 ist das zur Minimalität von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ äquivalent. Weiters folgt aus (3.16)

$$1 = \lambda_n(x_n) \leq \|\lambda_n\| \|x_n\| \leq \frac{2C}{\|x_n\|} \|x_n\| = 2C$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, womit wir (3.17) erhalten. □

Lemma 3.3.5. *Sei X ein Banachraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine minimale und vollständige Folge aus X. Bezeichnen wir mit $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die eindeutige zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonale Folge gemäß Lemma 3.1.7, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine Schauderbasis von X, wenn*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x) x_n \tag{3.18}$$

für alle $x \in X$.

Beweis. Sei zunächst $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis. Da die Funktionale $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Satz 3.3.3 eine zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonale Folge bilden, müssen sie aufgrund der Eindeutigkeit mit den $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ übereinstimmen. Also folgt (3.18) für alle $x \in X$.
Gilt umgekehrt (3.18) für ein $x \in X$, so ist lediglich die Eindeutigkeit einer solchen Darstellung zu zeigen. Sei dazu $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x) x_n$. Infolge haben wir $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - x'_n(x))x_n = 0$. Die Minimalität von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat nach Lemma 3.1.2 zur Folge, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w-topologisch linear unabhängig ist. Das bedeutet genau $c_n = x'_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

4 Riesz-Basen

4.1 Definition und Eigenschaften

Definition 4.1.1. Sei H ein Hilbertraum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus H heißt *Riesz-Basis von H*, falls es eine Bijektion $T \in L_b(H)$ derart gibt, dass $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H ist. In Hinblick auf Abschnitt 4.3 wollen wir auch Riesz-Basen mit Indexmenge $\mathbb{Z}$ zulassen.

Dieser Definition entnimmt man unmittelbar, dass Orthonormalbasen stets Riesz-Basen sind. Wie wir in Abschnitt 4.3 sehen werden, gilt die Umkehrung im Allgemeinen nicht, da die Elemente einer Riesz-Basis nicht notwendigerweise orthogonal aufeinander stehen müssen.

Lemma 4.1.2. *Sei H ein separabler Hilbertraum. Eine Folge $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus H ist genau dann eine Riesz-Basis von H, wenn es eine lineare und beschränkte Bijektion $U_{\mathfrak{X}} \colon H \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ mit*

$$U_{\mathfrak{X}} x_m = e_m \tag{4.1}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt.

Beweis. Sei $\mathfrak{X}$ eine Riesz-Basis von H und $T \in L_b(H)$ bijektiv mit der Eigenschaft, dass $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H ist. Gemäß Satz 2.0.2 ist die Abbildung $\Phi \colon H \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ definiert durch $\Phi(x) = ((x, Tx_n))_{n\in\mathbb{N}}$ unitär. Folglich ist ΦT eine lineare und beschränkte Bijektion mit $\Phi T x_m = ((Tx_m, Tx_n))_{n\in\mathbb{N}} = e_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$.
Existiere umgekehrt eine bijektive Abbildung $U_{\mathfrak{X}} \in L_b(H, \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}))$ mit der Eigenschaft (4.1). Da H separabel ist, gibt es eine abzählbare Orthonormalbasis $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von H. Bezeichnen wir mit Φ wieder den zu dieser Orthonormalbasis gehörigen Operator aus Satz 2.0.2, so ist durch $T := \Phi^{-1} U_{\mathfrak{X}}$ eine lineare und beschränke Bijektion von H nach H definiert. Diese leistet nach Konstruktion $Tx_n = y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $\mathfrak{X}$ eine Riesz-Basis von H. $\square$

Bemerkung 4.1.3. Ist $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Riesz-Basis eines Hilbertraums H, so ist $\mathfrak{X}$ vollständig. Um dies einzusehen, sei $T \in L_b(H)$ der zur Riesz-Basis $\mathfrak{X}$ gehörige bijektive Operator aus Defintion 4.1.1. Da $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H ist, folgt zusammen mit der Stetigkeit von T und T^{-1}

$$\begin{aligned}
\overline{\operatorname{span}\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}} &= \overline{T^{-1} \operatorname{span}\{Tx_n \colon n \in \mathbb{N}\}} \\
&= T^{-1}(\overline{\operatorname{span}\{Tx_n \colon n \in \mathbb{N}\}}) = \operatorname{ran} T^{-1} = H.
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir auch, dass der Operator $U_{\mathfrak{X}}$ aus Lemma 4.1.2 im Falle seiner Existenz stets eindeutig mit der Eigenschaft (4.1) ist.

Für eine Riesz-Basis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eines Hilbertraums H wollen wir im Folgenden der Frage nachgehen, welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen an ein $V \in L_b(H)$ gestellt werden müssen, damit auch $(Vx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Riesz-Basis von H ist. Dazu diskutieren wir zuerst, welche linearen und beschränkten Operatoren Orthonormalbasen erhalten.

Lemma 4.1.4. *Sei H ein separabler Hilbertraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H und $V \in L_b(H)$. Genau dann ist $(Vx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H, wenn V unitär ist. Außerdem gibt es für jede weitere Orthonormalbasis $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von H einen unitären Operator $W \in L_b(H)$ mit $Wx_n = y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Ist V unitär, so bildet $(Vx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem. Aus der Stetigkeit von V folgt

$$H \supseteq \overline{\operatorname{span}\{Vx_n \colon n \in \mathbb{N}\}} \supseteq V(\overline{\operatorname{span}\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}}) = \operatorname{ran} V = H,$$

womit sich $(Vx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Orthonormalbasis herausstellt.
Seien umgekehrt $(Vx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H und Φ_1, Φ_2 die zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beziehungsweise $(Vx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörigen unitären Operatoren aus Satz 2.0.2. Dann gilt

$$\Phi_2^{-1}\Phi_1 x_n = \Phi_2^{-1} e_n = Vx_n \tag{4.2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit stimmen V und $\Phi_2^{-1}\Phi_1$ auf dem dichten Unterraum $\operatorname{span}\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ überein. Aus Stetigkeitsgründen gilt $V = \Phi_2^{-1}\Phi_1$, womit V unitär ist.
Die zweite Aussage folgt sofort aus (4.2), wenn man Φ_2 als den zur Orthonormalbasis $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörigen unitären Operator aus Satz 2.0.2 wählt. □

Aus Lemma 4.1.4 leiten wir ein analoges Resultat für Riesz-Basen ab.

Korollar 4.1.5. *Sei H ein separabler Hilbertraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Riesz-Basis von H und $V \in L_b(H)$. $(Vx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann eine Riesz-Basis von H, wenn V bijektiv ist.*

Beweis. Sind V bijektiv und $T \in L_b(H)$ wie in Definition 4.1.1, so ist $TV^{-1} \in L_b(H)$ bijektiv mit $TV^{-1}Vx_n = Tx_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Orthonormalbasis von H, woraus wir schließen, dass $(Vx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Riesz-Basis von H ist.
Seien umgekehrt $(Vx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Riesz-Basis von H und $T_1, T_2 \in L_b(H)$ die zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beziehungsweise $(Vx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörigen bijektiven Operatoren aus Definition 4.1.1. Definitionsgemäß sind $(T_1x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(T_2Vx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Orthonormalbasen von H. Nach Lemma 4.1.4 gibt es einen unitären Operator $W \in L_b(H)$ mit $WT_1x_n = T_2Vx_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da T_2 bijektiv ist, haben wir $T_2^{-1}WT_1x_n = Vx_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Also stimmt V auf dem wegen Bemerkung 4.1.3 dichten Unterraum $\operatorname{span}\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ mit dem linearen und bijektiven Operator $T_2^{-1}WT_1$ überein. Aus Stetigkeitsgründen gilt $T_2^{-1}WT_1 = V$, womit V bijektiv ist. □

Sowohl Orthonormalbasen als auch Schauderbasen erlauben es, jedes Element eines Hilbertraums mithilfe einer Reihendarstellung zu schreiben. Der folgende Satz zeigt, dass auch Riesz-Basen diese Eigenschaft haben.

Satz 4.1.6. *Für eine Riesz-Basis $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eines separablen Hilbertraums H und den dazugehörigen Operator $U_{\mathfrak{X}}$ aus Lemma 4.1.2 gelten folgende Aussagen.*

(i) $\mathfrak{X}' = (x'_n)_{n\in\mathbb{N}} := (U_{\mathfrak{X}}^* U_{\mathfrak{X}} x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist eine zu* $\mathfrak{X}$ *biorthogonale Folge. Insbesondere ist* $\mathfrak{X}$ *minimal.*

(ii) $\mathfrak{X}'$ *ist eine Riesz-Basis von* H*.*

(iii) *Für jedes* $x \in H$ *gilt*

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, U_{\mathfrak{X}}^* U_{\mathfrak{X}} x_n) x_n,$$

wobei die Reihe unbedingt konvergiert.

Beweis.

(i): Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt nach Definition von $U_{\mathfrak{X}}$

$$(x'_n, x_m) = (U_{\mathfrak{X}}^* U_{\mathfrak{X}} x_n, x_m) = (U_{\mathfrak{X}} x_n, U_{\mathfrak{X}} x_m) = (e_n, e_m) = \delta_{mn}.$$

Also ist $\mathfrak{X}'$ eine zu $\mathfrak{X}$ biorthogonale Folge. Wegen Lemma 3.1.7 ist das zur Minimalität von $\mathfrak{X}$ äquivalent.

(ii): Die lineare Abbildung $U_{\mathfrak{X}}^{*-1}$ ist beschränkt und bijektiv mit der Eigenschaft

$$U_{\mathfrak{X}}^{*-1} x'_n = U_{\mathfrak{X}}^{*-1} U_{\mathfrak{X}}^* U_{\mathfrak{X}} x_n = e_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit folgt aus Lemma 4.1.2, dass $\mathfrak{X}'$ eine Riesz-Basis von H ist.

(iii): Es gilt $U_{\mathfrak{X}} x_n = e_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zusammen mit dem Fakt, dass $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ ist, erhalten wir

$$U_{\mathfrak{X}} x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (U_{\mathfrak{X}} x, e_n) e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (U_{\mathfrak{X}} x, U_{\mathfrak{X}} x_n) U_{\mathfrak{X}} x_n \tag{4.3}$$

für jedes $x \in H$. Aus der Beschränktheit von $U_{\mathfrak{X}}^{-1}$ und (4.3) schließen wir auf

$$x = U_{\mathfrak{X}}^{-1} U_{\mathfrak{X}} x = U_{\mathfrak{X}}^{-1} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (U_{\mathfrak{X}} x, U_{\mathfrak{X}} x_n) U_{\mathfrak{X}} x_n \right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, U_{\mathfrak{X}}^* U_{\mathfrak{X}} x_n) x_n$$

für alle $x \in H$. Die hierbei auftretenden Reihen sind wegen Satz 2.0.3 unbedingt konvergent.

□

Riesz-Basen lassen sich über die in Abschnitt 3.2 eingeführten Operatoren charakterisieren. Der folgende Satz stellt eine Verbindung zwischen Riesz-Basen und dem Syntheseoperator her.

Satz 4.1.7. *Sei H ein separabler Hilbertraum und $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus H minimal und vollständig. $\mathfrak{X}$ ist genau dann eine Riesz-Basis von H, wenn es $A, B > 0$ derart gibt, dass*

$$A\|a\|^2 \leq \|V_{\mathfrak{X}} a\|^2 \leq B\|a\|^2 \tag{4.4}$$

für alle $a \in \ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Beweis. Für eine Riesz-Basis $\mathfrak{X}$ ist der lineare Operator $U_{\mathfrak{X}}$ aus Lemma 4.1.2 beschränkt und bijektiv. Infolge ist auch $U_{\mathfrak{X}}^{-1}$ eine beschränkte Bijektion und damit nach unten beschränkt. Also gibt es $\tilde{A}, \tilde{B} > 0$ derart, dass

$$\tilde{A}\|a\| \leq \|U_{\mathfrak{X}}^{-1} a\| \leq \tilde{B}\|a\|$$

für alle $a \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Für $a = \sum_{n=1}^N a_n e_n \in \ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ erhalten wir

$$\|V_{\mathfrak{X}} a\|^2 = \left\|\sum_{n=1}^N a_n x_n\right\|^2 = \left\|U_{\mathfrak{X}}^{-1}\left(\sum_{n=1}^N a_n e_n\right)\right\|^2 \geq \tilde{A}^2\|a\|^2.$$

Die Abschätzung nach oben folgt analog.
Gelte umgekehrt (4.4) für alle $a \in \ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Definitionsgemäß ist $V_{\mathfrak{X}}$ surjektiv als Abbildung von $\ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ nach $\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Aus (4.4) folgt die Injektivität des Syntheseoperators. Nochmals wegen (4.4) ist $V_{\mathfrak{X}}$ beschränkt. Also ist $V_{\mathfrak{X}}$ eine lineare und beschränkte Bijektion von $\ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ nach $\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Voraussetzungsgemäß ist $\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht, womit sich $V_{\mathfrak{X}}$ zu einer linearen und beschränkten Abbildung mit dichtem Bild von $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ nach H fortsetzen lässt. Wieder wegen (4.4) ist der Bildbereich der Fortsetzung abgeschlossen, wodurch diese Fortsetzung bijektiv ist. Zudem leistet sie $V_{\mathfrak{X}}^{-1} x_n = e_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus Lemma 4.1.2 folgt damit, dass $\mathfrak{X}$ eine Riesz-Basis ist. □

Für den nächsten Satz benötigen wir ein Resultat über positive und invertierbare lineare Operatoren. Dabei verwenden wir das folgende Lemma, dessen Beweis etwa in [FM16, p.70] zu finden ist.

Lemma 4.1.8. *Sei H ein Hilbertraum und $A \in L_b(H)$ positiv, also $(Ax, x) \geq 0$ für alle $x \in H$. Dann gilt*

$$|(Ax, y)|^2 \leq (Ax, x)(Ay, y) \leq \|A\|(Ax, x)\|y\|^2 \tag{4.5}$$

für alle $x, y \in H$.

Korollar 4.1.9. *Ist H ein Hilbertraum und $A \in L_b(H)$ ein positiver Operator, dann ist die Invertierbarkeit von A zur Existenz eines $C > 0$ mit*

$$C\|x\|^2 \leq (Ax, x) \tag{4.6}$$

für alle $x \in H$ äquivalent.

Beweis. Sei zunächst A invertierbar. Setzen wir in (4.5) $Ax = y$, so erhalten wir

$$\|Ax\|^4 \leq \|A\|(Ax, x)\|Ax\|^2,$$

woraus sofort $\|Ax\|^2 \leq \|A\|(Ax, x)$ folgt. Damit schließen wir auf

$$\|x\|^2 = \|A^{-1}Ax\|^2 \leq \|A^{-1}\|^2\|Ax\|^2 \leq \|A^{-1}\|^2\|A\|(Ax, x)$$

für alle $x \in H$.
Existiert umgekehrt ein $C > 0$ mit (4.6), so folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$C\|x\|^2 \leq (Ax, x) \leq \|Ax\|\|x\|$$

für alle $x \in H$. Daraus schließen wir auf die Injektivität von A und die Abgeschlossenheit von $\operatorname{ran} A$. Als positiver Operator ist A selbstadjungiert, was

$$\{0\} = \ker A = (\operatorname{ran} A)^{\perp}$$

zur Folge hat. Da $\operatorname{ran} A$ abgeschlossen ist, folgt die Bijektivität von A. □

Satz 4.1.10. *Sei H ein separabler Hilbertraum und $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine minimale und vollständige Folge aus H. Sei weiters $\mathfrak{X}'$ die zu $\mathfrak{X}$ biorthogonale Folge gemäß Lemma 3.1.7. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(*i*) *$\mathfrak{X}$ ist eine Riesz-Basis von H.*

(*ii*) *Es existieren $A, B > 0$ mit $\|V_{\mathfrak{X}}a\|^2 \leq A\|a\|^2$ und $\|V_{\mathfrak{X}'}a\|^2 \leq B\|a\|^2$ für alle $a \in \ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.*

(*iii*) $\operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}} \subseteq \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ *und* $\operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}'} \subseteq \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

(*iv*) $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ *und* $\Gamma_{\mathfrak{X}'}$ *sind beschränkte lineare Abbildungen von $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ nach $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.*

(*v*) $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ *ist eine lineare und beschränkte Bijektion auf $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.*

Beweis. „(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: Ist $\mathfrak{X}$ Riesz-Basis, so folgt die erste Ungleichung unmittelbar aus Satz 4.1.7. Wegen Satz 4.1.6 ist auch $\mathfrak{X}'$ eine Riesz-Basis. Somit folgt die zweite Ungleichung auch aus Satz 4.1.7, diesmal angewandt auf $\mathfrak{X}'$.
„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“: Die erste Ungleichung in (*ii*) bedeutet, dass $V_{\mathfrak{X}}$ ein beschränkter linearer Operator auf $\ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ ist. Da $\ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ dicht ist, lässt sich $V_{\mathfrak{X}}$ zu einem linearen und beschränkten Operator auf $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ fortsetzen. Aus Satz 3.2.6 folgt, dass dann $J_{\mathfrak{X}} \colon H \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ beschränkt ist, also $\operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}} \subseteq \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Analog schließt man von der zweiten Ungleichung auf $\operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}'} \subseteq \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.
„(iii) $\Longrightarrow$ (iv)“: Nach Lemma 3.2.4 folgt aus $\operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}} \subseteq \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, dass $J_{\mathfrak{X}} \colon H \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ beschränkt ist. Daraus schließen wir mit Satz 3.2.6, dass sich $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ zu einem linearen und beschränkten Operator auf $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ fortsetzen lässt. Analog hat die zweite Inklusion die lineare und beschränkte Fortsetzbarkeit von $\Gamma_{\mathfrak{X}'}$ zur Folge.
„(iv) $\Longrightarrow$ (v)“: Gemäß Satz 3.2.6 impliziert die Beschränktheit von $\Gamma_{\mathfrak{X}'}$ die Beschränktheit von $J_{\mathfrak{X}'} \colon H \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Andererseits folgt aus der Beschränktheit von $\Gamma_{\mathfrak{X}}$, dass sich $V_{\mathfrak{X}}$ zu

einem stetigen linearen Operator von $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ nach H fortsetzen lässt. Wegen Proposition 3.2.5 gilt $V_{\mathfrak{X}} J_{\mathfrak{X}'} x = x$ und $J_{\mathfrak{X}'} V_{\mathfrak{X}} a = a$ für alle $x \in \operatorname{span}\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ und $a \in \ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N},\mathbb{C})$. Da diese Unterräume dicht sind, schließen wir aus der Stetigkeit von $J_{\mathfrak{X}'}$ und $V_{\mathfrak{X}}$ auf $J_{\mathfrak{X}'} V_{\mathfrak{X}} = I$ und $V_{\mathfrak{X}} J_{\mathfrak{X}'} = I$, womit $V_{\mathfrak{X}}$ bijektiv ist. Schließlich folgt aus (3.7), dass auch $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ invertierbar ist.
„(v) $\Longrightarrow$ (i)“: Wegen der Beschränktheit von $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ und (3.10) können wir Korollar 4.1.9 anwenden, was zusammen mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung die Existenz von $A, B > 0$ mit

$$A\|a\|^2 \leq (\Gamma_{\mathfrak{X}} a, a) \leq B\|a\|^2 \tag{4.7}$$

für alle $a \in \ell^2_{\mathfrak{F}}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ liefert. Gleichung (3.10) hat

$$A\|a\|^2 \leq \|V_{\mathfrak{X}} a\|^2 \leq B\|a\|^2 \tag{4.8}$$

zur Folge, womit sich $\mathfrak{X}$ wegen Satz 4.1.7 als Riesz-Basis herausstellt. □

4.2 Riesz-Basen und unbedingte Basen

Definition 4.2.1. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus einem Banachraum X heißt *unbedingte Basis von X*, falls es für jedes $x \in X$ eine eindeutige Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}$ mit

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x_n$$

gibt, wobei die hierbei auftretende Reihe unbedingt konvergiert. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}(\mathbb{N})$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, so ist das gleichbedeutend mit folgender Tatsache. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $A_0 \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ derart, dass für alle $A \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ mit $A_0 \subseteq A$

$$\left\| x - \sum_{n\in A} c_n x_n \right\| < \epsilon.$$

Da aus der unbedingten Konvergenz die übliche Konvergenz einer Reihe folgt, sind unbedingte Basen auch Schauderbasen.

Korollar 4.2.2. *Ist H ein separabler Hilbertraum und $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Riesz-Basis, dann ist $\mathfrak{X}$ eine unbedingte Basis von H.*

Beweis. Dem Satz 4.1.6 entnehmen wir, dass sich jedes $x \in H$ als

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, U^*_{\mathfrak{X}} U_{\mathfrak{X}} x_n) x_n \tag{4.9}$$

schreiben lässt, wobei die Reihe auf der rechten Seite unbedingt konvergiert. Wegen Bemerkung 4.1.3 ist $\mathfrak{X}$ vollständig. Satz 4.1.6 besagt, dass $(U^*_{\mathfrak{X}} U_{\mathfrak{X}} x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die eindeutige zu $\mathfrak{X}$ biorthogonale Folge ist. Somit folgt aus Lemma 3.3.5, dass $\mathfrak{X}$ eine Schauderbasis von H ist. $\mathfrak{X}$ ist sogar eine unbedingte Basis, da (4.9) unbedingt konvergiert. □

Den Rest dieses Abschnitts wollen wir der Umkehrung von Korollar 4.2.2 widmen. Wir bereiten den Weg hierzu mit dem folgenden Resultat.

Satz 4.2.3. *Sei X ein Banachraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine minimale und vollständige Folge aus X. Ist $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonale Folge, so definieren wir für $A \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ und $x \in X$ den linearen Operator $S_A \colon X \to X$ durch*

$$S_A x = \sum_{n\in A} x'_n(x) x_n.$$

Unter diesen Voraussetzungen ist S_A für jedes $A \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ beschränkt und die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist eine unbedingte Basis von X.*

(ii) *Für alle $x \in X$ gilt* $\sup_{A\in\mathfrak{F}(\mathbb{N})}\|S_A x\| < +\infty$.

(iii) $\sup_{A\in\mathfrak{F}(\mathbb{N})}\|S_A\| < +\infty$.

Beweis. Für festes $A \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ und jedes $x \in X$ gilt

$$\|S_A x\| = \left\|\sum_{n\in A} x'_n(x)x_n\right\| \leq \|x\| \sum_{n\in A} \|x'_n\|\|x_n\|,$$

woraus die Beschränktheit von S_A folgt. Wir zeigen als Nächstes die behaupteten Äquivalenzen. „(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbedingte Basis von X und infolge auch eine Schauderbasis, so gibt es wegen Lemma 3.3.5 zu $x \in X$ ein $A_0 \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ derart, dass

$$\left\|x - \sum_{n\in A} x'_n(x)x_n\right\| < 1$$

für alle $A \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ mit $A_0 \subseteq A$. Für beliebiges $A \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ hat man

$$\|S_A x\| = \left\|\sum_{n\in A} x'_n(x)x_n\right\| = \left\|\sum_{n\in A\cup A_0} x'_n(x)x_n - \sum_{n\in A_0\setminus(A\cap A_0)} x'_n(x)x_n\right\|,$$

weshalb

$$\begin{aligned}
\|S_A x\| &\leq \left\|\sum_{n\in A\cup A_0} x'_n(x)x_n\right\| + \left\|\sum_{n\in A_0\setminus(A\cap A_0)} x'_n(x)x_n\right\| \\
&\leq \left\|x - \sum_{n\in A\cup A_0} x'_n(x)x_n\right\| + \|x\| + \sum_{n\in A_0\setminus(A\cap A_0)} |x'_n(x)|\|x_n\| \\
&< 1 + \|x\| + \sum_{n\in A_0} |x'_n(x)|\|x_n\|.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite in dieser Ungleichungskette ist unabhängig von A, woraus wir auf $\sup_{A\in\mathfrak{F}(\mathbb{N})}\|S_A x\| < +\infty$ schließen.
„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“: Da die Operatoren S_A für $A \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ beschränkt sind, folgt die zu zeigende Aussage unmittelbar aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.
„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“: Wir definieren $C = 1 + \sup_{A\in\mathfrak{F}(\mathbb{N})}\|S_A\|$. Zu $x \in X$ und $\epsilon > 0$ gibt es wegen der Vollständigkeit von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $A_0 \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ und $a_n \in \mathbb{C}, n \in A_0$, derart, dass für $x_0 = \sum_{n\in A_0} a_n x_n \in \operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

$$\|x - x_0\| \leq \frac{\epsilon}{2C}.$$

Aus $x'_n(x_m) = \delta_{nm}$ folgt

$$x'_n(x_0) = x'_n\left(\sum_{m\in A_0} a_m x_m\right) = \sum_{m\in A_0} a_m x'_n(x_m) = \begin{cases} 0, & \text{für } n \notin A_0, \\ a_n, & \text{für } n \in A_0, \end{cases}$$

woraus wir für $A \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ mit $A_0 \subseteq A$ auf

$$S_A x_0 = \sum_{n\in A} x'_n(x_0) x_n = \sum_{n\in A_0} a_n x_n = x_0$$

schließen. Dies hat wegen $C \geq 1$ wiederum

$$\begin{aligned} \|x - S_A x\| &\leq \|x - x_0\| + \|x_0 - S_A x\| \\ &= \|x - x_0\| + \|S_A x_0 - S_A x\| \leq \frac{\epsilon}{2} + C\frac{\epsilon}{2C} = \epsilon \end{aligned}$$

zur Folge, womit $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x'_n(x) x_n$. Insbesondere konvergiert diese Reihe im üblichen Sinn, woraus wir mit Lemma 3.3.5 die Eindeutigkeit der Darstellung erhalten. Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbedingte Basis. □

Korollar 4.2.4. *Sei H ein Hilbertraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine minimale und vollständige Folge aus H sowie $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonale Folge. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann eine unbedingte Basis von H, wenn $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine solche ist. Des Weiteren gilt*

$$0 < \inf_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\| < +\infty \tag{4.10}$$

genau dann, wenn

$$0 < \inf_{n\in\mathbb{N}}\|x'_n\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\|x'_n\| < +\infty. \tag{4.11}$$

Beweis. Für $A \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, dass der durch

$$V_A x = \sum_{n\in A} (x, x_n) x'_n$$

für $x \in H$ definierte lineare Operator beschränkt ist. Sind $x, y \in H$, so haben wir für S_A wie in Satz 4.2.3

$$\begin{aligned}(S_A x, y) &= (\sum_{n\in A}(x, x_n')x_n, y) = \sum_{n\in A}(x, x_n')(x_n, y) \\ &= \sum_{n\in A}\overline{(y, x_n)}(x, x_n') = (x, \sum_{n\in A}(y, x_n)x_n') = (x, V_A y),\end{aligned}$$

woraus wir $S_A^* = V_A$ ableiten.
Sei zunächst $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbedingte Basis von H. Da unbedingte Basen stets Schauderbasen sind, ist $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ minimal und vollständig, weshalb wir Satz 4.2.3 auf die Folge $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ anwenden können. Weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zu $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonale Folge ist, entspricht in diesem Fall der Operator aus Satz 4.2.3 genau V_A. Folglich gilt $\sup_{A\in\mathfrak{F}(\mathbb{N})}\|V_A\| < +\infty$, womit wir wegen

$$\sup_{A\in\mathfrak{F}(\mathbb{N})}\|S_A\| = \sup_{A\in\mathfrak{F}(\mathbb{N})}\|S_A^*\| = \sup_{A\in\mathfrak{F}(\mathbb{N})}\|V_A\| \tag{4.12}$$

auf $\sup_{A\in\mathfrak{F}(\mathbb{N})}\|S_A\| < +\infty$ schließen. Voraussetzungsgemäß ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minimal und vollständig. Nochmalige Anwendung von Satz 4.2.3 impliziert, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbedingte Basis ist.
Ist umgekehrt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbedingte Basis, so schließen wir aus Satz 4.2.3 und (4.12) auf $\sup_{A\in\mathfrak{F}(\mathbb{N})}\|V_A\| < +\infty$. Nach Lemma 3.1.7 ist $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ minimal. Um die Vollständigkeit von $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ einzusehen, sei $x \in H$ mit $(x, x_n') = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Infolge gilt

$$S_A x = \sum_{n\in A}(x, x_n')x_n = 0$$

für alle $A \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$. Nach Voraussetzung ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbedingte Basis, womit wir auf

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}}(x, x_n')x_n = \lim_{A\in\mathfrak{F}(\mathbb{N})}\sum_{n\in A}(x, x_n')x_n = 0$$

und damit auf $\operatorname{span}\{x_n' : n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$ schließen. Also ist $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ vollständig. Eine Anwendung von Satz 4.2.3 auf $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ weist diese als unbedingte Basis aus.
Nach Korollar 3.3.4 existiert ein $C > 0$ mit

$$1 \le \|x_n'\|\|x_n\| \le 2C.$$

Trifft (4.10) zu, so schließen wir auf

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|x_n'\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{2C}{\|x_n\|} = \frac{2C}{\inf_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|} < +\infty$$

und

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\|x_n'\| \ge \inf_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{\|x_n\|} = \frac{1}{\sup_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|} > 0.$$

Der Schluss von (4.11) auf (4.10) verläuft analog. $\square$

Wir benötigen noch das folgende Resultat, welches in [Hei11] zu finden ist.

Lemma 4.2.5. *Ist X ein Banachraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X derart, dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ unbedingt konvergiert, so gilt*

$$\sup\left\{\left\|\sum_{n\in A} c_n x_n\right\| : A \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}) \text{ und } c_n \in \mathbb{C}, |c_n| \le 1, n \in A\right\} < +\infty. \tag{4.13}$$

Beweis. Für $A \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ und $c := (c_n)_{n\in A}, c_n \in \mathbb{C}, |c_n| \le 1$, definieren wir ein lineares Funktional $R_{c,A}\colon X' \to \mathbb{C}$ durch

$$R_{c,A}(x') = x'(\sum_{n\in A} c_n x_n).$$

Aus der Stetigkeit eines beliebigen $x' \in X'$ folgt die unbedingte Konvergenz von $\sum_{n\in\mathbb{N}} x'(x_n)$. Da für komplexwertige Reihen aus der unbedingten die absolute Konvergenz folgt, erhalten wir $\sum_{n=1}^{\infty}|x'(x_n)| < +\infty$ und schließen auf

$$|R_{c,A}(x')| = \left|x'(\sum_{n\in A} c_n x_n)\right| = \left|\sum_{n\in A} c_n x'(x_n)\right| \le \sum_{n\in A}|x'(x_n)| \le \sum_{n=1}^{\infty}|x'(x_n)| < +\infty. \tag{4.14}$$

Die Ungleichung

$$|R_{c,A}(x')| = \left|x'(\sum_{n\in A} c_n x_n)\right| \le \left\|\sum_{n\in A} c_n x_n\right\| \|x'\|$$

hat die Beschränktheit der Funktionale $R_{c,A}$ zur Folge. Die rechte Seite in (4.14) ist unabhängig von A und c, weshalb

$$\sup\{\|R_{c,A}(x')\|\colon A \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}) \text{ und } c_n \in \mathbb{C}, |c_n| \le 1, n \in A\} < +\infty.$$

Also erhalten wir aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

$$\sup\{\|R_{c,A}\|\colon A \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}) \text{ und } c_n \in \mathbb{C}, |c_n| \le 1, n \in A\} < +\infty. \tag{4.15}$$

Für $A \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ und $c_n \in \mathbb{C}, |c_n| \le 1, n \in A$, impliziert Korollar 2.0.8

$$\|R_{c,A}\| = \sup_{\substack{x'\in X'\\ \|x'\|=1}} |R_{c,A}(x')| = \sup_{\substack{x'\in X'\\ \|x'\|=1}} \left|x'(\sum_{n\in A} c_n x_n)\right| = \left\|\sum_{n\in A} c_n x_n\right\|,$$

woraus zusammen mit (4.15) die behauptete Aussage folgt. □

Satz 4.2.6. *Ist H ein Hilbertraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus H derart, dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ unbedingt konvergiert, so gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2 < +\infty.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst mittels Induktion, dass es für jedes $N \in \mathbb{N}$ Skalare $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ mit $|c_n| \le 1$ für $n = 1, \dots, N$ derart gibt, dass

$$\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2 \le \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\|^2 . \tag{4.16}$$

Für $N = 1$ folgt die Aussage unmittelbar mit der Wahl $c_1 = 1$.
Gibt es (4.16) erfüllende $c_1, \dots, c_N$ mit $|c_n| \le 1$ für $n = 1, \dots, N$, so erhalten wir mit der Wahl $c_{N+1} := e^{i \arg\{(\sum_{n=1}^{N} c_n x_n, x_{N+1})\}}$

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{N+1} c_n x_n \right\|^2 &= \left\| c_{N+1} x_{N+1} + \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\|^2 \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\|^2 + \underbrace{2\mathfrak{Re}\{\bar{c}_{N+1}(\sum_{n=1}^{N} c_n x_n, x_{N+1})\}}_{\ge 0} + \|x_{N+1}\|^2 \\
&\ge \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2 + \|x_{N+1}\|^2 = \sum_{n=1}^{N+1} \|x_n\|^2 .
\end{aligned}$$

Definieren wir C als den Ausdruck (4.13), so existieren für alle $N \in \mathbb{N}$ Skalare $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$, $|c_n| \le 1$ für $n = 1, \dots, N$ derart, dass

$$\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2 \le \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\|^2 \le C.$$

Infolge gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$. □

Satz 4.2.7. *Jede unbedingte Basis in einem Hilbertraum, die der Bedingung* (4.10) *genügt, ist eine Riesz-Basis. Umgekehrt ist jede Riesz-Basis eine unbedingte Basis, welche* (4.10) *erfüllt.*

Beweis. Dass jede Riesz-Basis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eines Hilbertraums H eine unbedingte Basis abgibt, haben wir bereits in Korollar 4.2.2 gezeigt. Ist $T \in L_b(H)$ bijektiv mit der Eigenschaft, dass $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H ist, so folgt

$$1 = \|Tx_n\| \le \|T\|\|x_n\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aus Stetigkeit von T^{-1} schließen wir auf

$$\|x_n\| \le \|T^{-1}Tx_n\| \le \|T^{-1}\|\|Tx_n\| = \|T^{-1}\|, \quad n \in \mathbb{N},$$

womit (4.10) gilt.
Sei umgekehrt $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine (4.10) erfüllende unbedingte Basis eines Hilbertraums H. Dann ist $\mathfrak{X}$ minimal und vollständig, womit die nach Lemma 3.1.7 in eindeutiger Weise

existierende zu $\mathfrak{X}$ biorthogonale Folge $\mathfrak{X}' = (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen Korollar 4.2.4 eine unbedingte Basis von H abgibt. Infolge lässt sich jedes $x \in H$ als

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, x_n) x'_n$$

schreiben, wobei die Reihe auf der rechten Seite unbedingt konvergiert. Satz 4.2.6 hat dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, x_n)|^2 \|x'_n\|^2 < +\infty \tag{4.17}$$

zur Folge. $\mathfrak{X}'$ erfüllt nach Korollar 4.2.4 die Bedingung (4.11), womit

$$\|J_{\mathfrak{X}} x\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, x_n)|^2 < +\infty$$

gilt. Also haben wir $\operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}} \subseteq \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Analog zeigt man $\operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}'} \subseteq \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Mit Satz 4.1.10 folgt letztendlich, dass $\mathfrak{X}$ eine Riesz-Basis von H ist. $\square$

4.3 Riesz-Basen von $L^2[-\pi, \pi]$

Wir bezeichnen mit $L^2[-\pi, \pi]$ den Raum der bezüglich dem Lebesguemaß quadratintegrierbaren komplexwertigen Funktionen auf $[-\pi, \pi]$. Bekanntermaßen bilden die Funktionen $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-int}$ für $n \in \mathbb{Z}$ eine Orthonormalbasis von $L^2[-\pi, \pi]$. Betrachtet man allgemeiner Funktionen der Bauart $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda_n t}$ mit einer Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ aus $\mathbb{C}$, so stellt sich die Frage, ob bestimmte Eigenschaften der Orthonormalbasis erhalten bleiben, wenn die Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von $(n)_{n\in\mathbb{Z}}$ nur "leicht" abweicht. Wir werden im Folgenden zeigen, dass die Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda_n t}$ eine Riesz-Basis von $L^2[-\pi, \pi]$ bilden, falls es eine Konstante $L > 0$ mit

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n - n| \le L < \frac{1}{\pi^2} \tag{4.18}$$

gibt. Der Schlüssel zum Beweis dieser Aussage liegt in Satz 4.3.5, welcher in [PW34, p. 108] zu finden ist.

Lemma 4.3.1. *Sei H ein separabler Hilbertraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von H. Ist $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Folge aus H und gibt es ein $\lambda \in [0, 1)$ derart, dass*

$$\left\| \sum_{n=-N}^{N} c_n (x_n - y_n) \right\| \le \lambda \left\| \sum_{n=-N}^{N} c_n x_n \right\| \tag{4.19}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $c_{-N}, \dots, c_N \in \mathbb{C}$, so ist $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Riesz-Basis von H.

Beweis. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis ist, lässt sich jedes $x \in H$ auf eindeutige Weise als $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n x_n$ darstellen. Dabei sind $c_n, n \in \mathbb{Z}$, die Fourier-Koeffizienten von x. Da diese Reihe nach Satz 2.0.3 unbedingt konvergiert, konvergieren auch

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x_n \text{ und } \sum_{n\in-\mathbb{N}} c_n x_n$$

unbedingt. Folglich sind diese Reihen auch im üblichen Sinn der Konvergenz einer Reihe konvergent und damit die Folgen ihrer Partialsummen Cauchy-Folgen. Also gibt es zu $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl N_0 mit

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{M} c_n x_n \right\| < \epsilon \text{ und } \left\| \sum_{n=-M}^{-(N+1)} c_n x_n \right\| < \epsilon$$

für alle $M > N \geq N_0$. Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir zusammen mit (4.19)

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{n=-M}^{M} c_n(x_n - y_n) - \sum_{n=-N}^{N} c_n(x_n - y_n) \right\| \\
&\qquad = \left\| \sum_{n=N+1}^{M} c_n(x_n - y_n) + \sum_{n=-M}^{-(N+1)} c_n(x_n - y_n) \right\| \\
&\qquad \leq \left\| \sum_{n=N+1}^{M} c_n(x_n - y_n) \right\| + \left\| \sum_{n=-M}^{-(N+1)} c_n(x_n - y_n) \right\| \\
&\qquad \leq \lambda \left\| \sum_{n=N+1}^{M} c_n x_n \right\| + \lambda \left\| \sum_{n=-M}^{-(N+1)} c_n x_n \right\| < 2\epsilon
\end{aligned}$$

für alle $M > N \geq N_0$. Also ist $(\sum_{n=-N}^{N} c_n(x_n - y_n))_{N\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Für $x \in H$ folgt zusammen mit der Eindeutigkeit der Darstellung von x als Fourierreihe, dass durch

$$Sx := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(x_n - y_n)$$

eine lineare Abbildung von H nach H definiert ist. Da aus der unbedingten Konvergenz von $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n x_n$ die Existenz von $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n x_n$ gegen denselben Grenzwert folgt, haben wir wegen (4.19)

$$\begin{aligned}
\|Sx\| &= \left\| \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(x_n - y_n) \right\| = \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=-N}^{N} c_n(x_n - y_n) \right\| \\
&\leq \lim_{N\to\infty} \lambda \left\| \sum_{n=-N}^{N} c_n x_n \right\| = \lambda \|x\|.
\end{aligned}$$

Also ist S beschränkt mit $\|S\| < 1$, weshalb $T := I - S \in L_b(H)$ invertierbar ist. Wegen

$$Tx_n = (I - S)x_n = x_n - (x_n - y_n) = y_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

ist $(T^{-1}y_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von H. Definitionsgemäß ist daher $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Riesz-Basis von H. □

Wir wollen noch die Definition der Fouriertransformation sowie den Satz von Plancherel in Erinnerung rufen.

Definition 4.3.2. Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}$ ist die *Fouriertransformierte von f* definiert als

$$\mathcal{F}(f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iut}\, du.$$

Die dadurch auf $L^1(\mathbb{R})$ definierte lineare Abbildung $\mathcal{F}$ heißt *Fouriertransformation.*

Definition 4.3.3. Die Menge $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} |u^n f^{(m)}(u)| < +\infty$$

für alle $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ heißt *Schwartz-Klasse.*

Es lässt sich zeigen, dass die Schwartz-Klasse ein dichter Unterraum von $L^1(\mathbb{R})$ und $L^2(\mathbb{R})$ ist. Weiters ist die Einschränkung $\mathcal{F} \restriction_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ eine lineare und bezüglich $\|.\|_{L^2(\mathbb{R})}$ isometrische Bijektion von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Für Beweise dieser Aussagen verweisen wir auf [Kal21, p.310]. Als Konsequenz hieraus erhalten wir

Satz 4.3.4. *Die Einschränkung $\mathcal{F} \restriction_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ lässt sich auf eindeutige Weise zu einem unitären linearen Operator von $L^2(\mathbb{R})$ nach $L^2(\mathbb{R})$ fortsetzen. Wir bezeichnen diese Fortsetzung ebenfalls mit $\mathcal{F}$. Insbesondere gilt*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} \tag{4.20}$$

für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Satz 4.3.5. *Ist $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ aus $\mathbb{C}$ und $L > 0$ mit der Eigenschaft* (4.18)*, so bilden die Funktionen $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Riesz-Basis von $L^2[-\pi, \pi]$.*

Beweis. Wir wollen Lemma 4.3.1 auf den Hilbertraum $L^2[-\pi, \pi]$ und die Funktionen $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-int}, y_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda_n t}, n \in \mathbb{Z}$ anwenden. Dazu sei zunächst $N \in \mathbb{N}$ fixiert. Für $n \in \mathbb{Z}, -N \leq n \leq N$ und $c_{-N}, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$s_n = \begin{cases} 1, & n < \lambda_n, \\ 0, & n \geq \lambda_n, \end{cases}$$

und für $u \in (\min\{\lambda_n, n\}, \max\{\lambda_n, n\})$

$$\psi_n(u) = (-1)^{s_n} c_n.$$

Wir bemerken, dass ψ_n im Fall $\lambda_n = n$ nirgends definiert ist. Wegen (4.18) und $\frac{1}{\pi^2} < \frac{1}{3}$ sind die Definitionsbereiche der Funktionen ψ_n in $[n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3}]$ enthalten und infolge disjunkt. Damit stellt sich $\tilde{\psi} = \bigcup_{n=-N}^{N} \psi_n$ als wohldefinierte Funktion auf $\bigcup_{n=-N}^{N} (\min\{\lambda_n, n\}, \max\{\lambda_n, n\})$

heraus. Setzt man $\tilde{\psi}$ durch 0 auf ganz $\mathbb{R}$ fort, so ist diese Fortsetzung ψ ein Element von $L^2(\mathbb{R})$. Für $t \in \mathbb{R}$ haben wir

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} c_n(x_n(t) - y_n(t)) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-int} - e^{-i\lambda_n t}) \\
&= -\frac{it}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^{N} c_n \int_{\lambda_n}^{n} e^{-iut}\, du \\
&= -it\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u)e^{-iut}\, du = -it\mathcal{F}(\psi)(t).
\end{aligned}$$

Aus (4.20) und der eben bewiesenen Gleichheit folgt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2} \left| \sum_{n=-N}^{N} c_n(x_n(t) - y_n(t)) \right|^2 dt &= \|\mathcal{F}(\psi)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \sum_{n=-N}^{N} |n - \lambda_n||c_n|^2 \leq L \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \\
&= L \left\| \sum_{n=-N}^{N} c_n x_n \right\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} .
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Zusammen mit (4.21) schließen wir von der Ungleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2} \left| \sum_{n=-N}^{N} c_n(x_n(t) - y_n(t)) \right|^2 dt \geq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi^2} \left| \sum_{n=-N}^{N} c_n(x_n(t) - y_n(t)) \right|^2 dt$$

auf

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=-N}^{N} c_n(x_n - y_n) \right\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} &\leq \pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2} \left| \sum_{n=-N}^{N} c_n(x_n(t) - y_n(t)) \right|^2 dt \\
&\leq \pi^2 L \left\| \sum_{n=-N}^{N} c_n x_n \right\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} .
\end{aligned}$$

Voraussetzungsgemäß gilt $\pi^2 L < 1$, womit wir (4.19) nachgewiesen haben. Nach Lemma 4.3.1 bildet $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Riesz-Basis von H. □

5 Frames

5.1 Definition und Eigenschaften

In diesem Abschnitt seien alle Hilberträume als separabel vorausgesetzt. Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind in [Chr16, p.119 ff.] zu finden.

Definition 5.1.1. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus einem Hilbertraum H heißt *Frame*, falls es $A, B > 0$ derart gibt, dass

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(x, x_n)|^2 \leq B\|x\|^2 \tag{5.1}$$

für alle $x \in H$.

Bedingung (5.1) lässt sich auch über den Interpolationsoperator gemäß Definition 3.2.2 ausdrücken. In der Tat ist (5.1) für $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus einem Hilbertraum H zu

$$A\|x\|^2 \leq \|J_{\mathfrak{X}} x\|_{\ell^2}^2 \leq B\|x\|^2 \tag{5.2}$$

für alle $x \in H$ äquivalent. Insbesondere ist für einen Frame $\mathfrak{X}$ der Interpolationsoperator $J_{\mathfrak{X}} \colon H \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ beschränkt.

Bemerkung 5.1.2. Ist H ein Hilbertraum und $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Frame aus H, so hat (5.2) die Injektivität von $J_{\mathfrak{X}}$ zur Folge. Außerdem erhalten wir, dass $J_{\mathfrak{X}}$ als Abbildung von H auf $\operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}}$ bijektiv und die Inverse davon auch beschränkt ist. Insbesondere ist $\mathfrak{X}$ gemäß Lemma 3.2.3 vollständig.

Da für eine Orthonormalbasis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eines Hilbertraums H stets (2.2) gilt, ist jede Orthonormalbasis auch ein Frame. Durch Abändern einer Orthonormalbasis lassen sich daher leicht Beispiele für Frames konstruieren.

Beispiel 5.1.3. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis eines Hilbertraums H. Wir definieren eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $y_1 = x_1$ und $y_n = x_{n-1}$ für $n > 1$. Für $x \in H$ folgt aus (2.2)

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, x_n)|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(x, y_n)|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} |(x, x_n)|^2 = 2\|x\|^2,$$

womit sich $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Frame herausstellt. Dieser Frame ist linear abhängig, womit er sicher keine Orthonormalbasis ist.

Beispiel 5.1.3 zeigt einen fundamentalen Unterschied zu den bisher behandelten Basisbegriffen. Während Orthonormalbasen und Riesz-Basen stets minimal sind, müssen Frames nicht einmal linear unabhängig sein.
In Zusammenhang mit Frames tritt neben den in Abschnitt 3.1 eingeführten Operatoren noch ein weiterer in Erscheinung. Wir bemerken zunächst, dass für einen Frame $\mathfrak{X}$ aus der Beschränktheit von $J_{\mathfrak{X}}$ mit Satz 3.2.6 die beschränkte Fortsetzbarkeit von $V_{\mathfrak{X}}$ auf $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ folgt. Demnach ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition 5.1.4. Sei H ein Hilbertraum und $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Frame. Wir nennen den linearen und beschränkten Operator $S_{\mathfrak{X}}\colon H \to H$ definiert durch $S_{\mathfrak{X}}x = V_{\mathfrak{X}}J_{\mathfrak{X}}x$ den *Frame-Operator*.

Lemma 5.1.5. *Ist H ein Hilbertraum und $\mathfrak{X}$ ein Frame aus H, so ist der Frame-Operator $S_{\mathfrak{X}}$ selbstadjungiert, positiv und invertierbar.*

Beweis. Gemäß Satz 3.2.6 gilt $V_{\mathfrak{X}}^* = J_{\mathfrak{X}}$, womit wir auf

$$(S_{\mathfrak{X}}x, x) = (V_{\mathfrak{X}}J_{\mathfrak{X}}x, x) = \|J_{\mathfrak{X}}x\|^2 \tag{5.3}$$

für alle $x \in H$ schließen. Folglich ist $S_{\mathfrak{X}}$ positiv. Die Selbstadjungiertheit von $S_{\mathfrak{X}}$ erhalten wir unmittelbar aus (3.6).
Aus (5.2) und (5.3) folgt die Existenz eines $A > 0$ mit

$$A\|x\|^2 \leq \|J_{\mathfrak{X}}x\|^2 = (S_{\mathfrak{X}}x, x).$$

Korollar 4.1.9 hat dann die Invertierbarkeit von $S_{\mathfrak{X}}$ zur Folge. □

Ähnlich wie bei Riesz-Basen lässt sich auch für einen Frame aus einem Hilbertraum H jedes $x \in H$ als unendliche Summe der Frame-Elemente schreiben.

Satz 5.1.6. *Sei H ein Hilbertraum und $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Frame aus H. Für jedes $x \in H$ gilt*

$$S_{\mathfrak{X}}x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, x_n)x_n \tag{5.4}$$

und

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, S_{\mathfrak{X}}^{-1}x_n)x_n, \tag{5.5}$$

wobei die hierbei auftretenden Reihen unbedingt konvergieren.

Beweis. Da $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ abgibt, können wir jedes $J_{\mathfrak{X}}x = (x, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x \in H$ als $J_{\mathfrak{X}}x = \sum_{n\in\mathbb{N}}(x, x_n)e_n$ schreiben. Aus der Stetigkeit von $V_{\mathfrak{X}}$ erhalten wir

$$S_{\mathfrak{X}}x = V_{\mathfrak{X}}J_{\mathfrak{X}}x = V_{\mathfrak{X}}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}(x, x_n)e_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(x, x_n)V_{\mathfrak{X}}e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}}(x, x_n)x_n.$$

Wegen Lemma 5.1.5 ist $S_{\mathfrak{X}}$ selbstadjungiert und invertierbar, was zusammen mit (5.4)

$$x = S_{\mathfrak{X}} S_{\mathfrak{X}}^{-1} x = \sum_{n \in \mathbb{N}} (S_{\mathfrak{X}}^{-1} x, x_n) x_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (x, S_{\mathfrak{X}}^{-1} x_n) x_n$$

zur Folge hat. □

Lemma 5.1.7. *Jede Riesz-Basis eines Hilbertraums H ist auch ein Frame.*

Beweis. Ist $\mathfrak{X} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Riesz-Basis von H, so ist die zu $\mathfrak{X}$ biorthogonale Folge $\mathfrak{X}' = (x_n')_{n \in \mathbb{N}}$ gemäß Satz 4.1.6 ebenfalls eine Riesz-Basis von H. Folglich existiert nach Lemma 4.1.2 eine wegen Bemerkung 4.1.3 eindeutige lineare und beschränkte Bijektion $U_{\mathfrak{X}'} \colon H \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ mit $U_{\mathfrak{X}'} x_n' = e_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für den nach Satz 4.1.10 linearen und beschränkten Operator $J_{\mathfrak{X}} \colon H \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ gilt

$$J_{\mathfrak{X}} x_n' = ((x_n', x_m))_{m \in \mathbb{N}} = e_n.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit von $U_{\mathfrak{X}'}$ muss $U_{\mathfrak{X}'} = J_{\mathfrak{X}}$ gelten. Also ist $J_{\mathfrak{X}}$ bijektiv, was die Existenz eines $C > 0$ mit $C\|x\| \leq \|J_{\mathfrak{X}} x\|$ für alle $x \in H$ und damit (5.2) zur Folge hat. □

Wir wollen als Nächstes ein zu Korollar 4.1.5 analoges Resultat für Frames bringen. Dazu benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 5.1.8. *Für einen Hilbertraum H und $T \in L_b(H)$ ist T genau dann surjektiv, wenn T^* nach unten beschränkt ist, was die Existenz eines $C > 0$ mit*

$$C\|x\| \leq \|T^* x\|, \quad x \in H, \tag{5.6}$$

bedeutet.

Beweis. Sei zunächst T surjektiv. Bezeichnen wir für $M \subseteq H$ mit $\iota_M \colon M \to H$, $\iota(x) = x$ die Einbettungsabbildung, so folgt aus

$$T((\ker T)^\perp) = T(\ker T + (\ker T)^\perp) = T(H) = H$$

die Surjektivität von $T\iota_{(\ker T)^\perp}$. Gilt $Tx = 0$ mit $x \in (\ker T)^\perp$, so folgt $x \in \ker T$ und damit $x = 0$. Also stellt sich $T\iota_{(\ker T)^\perp}$ als bijektiv heraus. Infolge ist auch $(T\iota_{(\ker T)^\perp})^* = P_{(\ker T)^\perp} T^*$ bijektiv. Dabei ist $P_{(\ker T)^\perp} \colon H \to (\ker T)^\perp$ die Orthogonalprojektion auf $(\ker T)^\perp$. Da $(\ker T)^\perp$ abgeschlossen und damit vollständig ist, stellt $P_{(\ker T)^\perp} T^*$ eine beschränkte Bijektion mit beschränkter Inversen dar. Folglich ist $P_{(\ker T)^\perp} T^*$ nach unten beschränkt, also existiert ein $C > 0$ mit

$$C\|x\| \leq \|P_{(\ker T)^\perp} T^* x\|, \quad x \in H.$$

Zusammen mit $\operatorname{ran} T^* \subseteq \overline{\operatorname{ran} T^*} = (\ker T)^\perp$ erhalten wir (5.6).
Gilt umgekehrt (5.6), so ist T^* injektiv und $\operatorname{ran} T^*$ abgeschlossen. Also ist $P_{\operatorname{ran} T^*} T^* \colon H \to \operatorname{ran} T^*$ eine beschränkte Bijektion. Infolge ist auch $T\iota_{\operatorname{ran} T^*} = (P_{\operatorname{ran} T^*} T^*)^* \colon \operatorname{ran} T^* \to H$ beschränkt und bijektiv. Daraus schließen wir unmittelbar auf die Surjektivität von T. □

Satz 5.1.9. *Sei H ein Hilbertraum, $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Frame und $U \in L_b(H)$. $\mathfrak{U} = (Ux_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann ein Frame, wenn U surjektiv ist.*

Beweis. Zunächst haben wir

$$J_{\mathfrak{U}}x = ((x, Ux_n))_{n\in\mathbb{N}} = ((U^*x, x_n))_{n\in\mathbb{N}} = J_{\mathfrak{X}}U^*x, \quad x \in H. \tag{5.7}$$

Da $\mathfrak{X}$ ein Frame ist, gibt es $A, B > 0$ derart, dass (5.2) für alle $x \in H$ gilt. Im Fall, dass $\mathfrak{U}$ ein Frame ist, existieren definitionsgemäß $\tilde{A}, \tilde{B} > 0$ mit

$$\tilde{A}\|x\|^2 \leq \|J_{\mathfrak{U}}x\|^2 \leq \tilde{B}\|x\|^2 \tag{5.8}$$

für alle $x \in H$. Weiters gilt für beliebiges $x \in H$ (5.7), woraus wir zusammen mit (5.2) und (5.8) auf

$$\|U^*x\|^2 \geq \frac{1}{B}\|J_{\mathfrak{X}}U^*x\|^2 = \frac{1}{B}\|J_{\mathfrak{U}}x\|^2 \geq \frac{\tilde{A}}{B}\|x\|^2$$

schließen. Also ist U^* nach unten beschränkt, was nach Lemma 5.1.8 die Surjektivität von U zur Folge hat.
Ist umgekehrt U surjektiv, so folgt aus Lemma 5.1.8 die Existenz eines $C > 0$ mit $C\|x\| \leq \|U^*x\|$ für alle $x \in H$. Zusammen mit (5.7) schließen wir auf

$$\|J_{\mathfrak{U}}x\|^2 = \|J_{\mathfrak{X}}U^*x\|^2 \geq A\|U^*x\|^2 \geq AC^2\|x\|^2.$$

Wegen der Beschränktheit von U^* folgt

$$\|J_{\mathfrak{U}}x\|^2 = \|J_{\mathfrak{X}}U^*x\|^2 \leq B\|U^*\|^2\|x\|^2$$

für alle $x \in H$, womit $\mathfrak{U}$ ein Frame ist. □

5.2 Charakterisierung von Frames

Frames sind nach Definition über den Interpolationsoperator charakterisiert. Der folgende Satz liefert Charakterisierungen über die Gram-Matrix und den Syntheseoperator.

Satz 5.2.1. *Für eine Folge $\mathfrak{X}$ aus einem Hilbertraum H sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) *$\mathfrak{X}$ ist ein Frame.*

(ii) *$V_{\mathfrak{X}}$ lässt sich auf eindeutige Weise zu einer linearen und beschränkten Abbildung auf $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ fortsetzen und die entsprechende Fortsetzung ist surjektiv.*

(iii) *$V_{\mathfrak{X}}$ lässt sich auf eindeutige Weise zu einer linearen und beschränkten Abbildung auf $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ fortsetzen. Weiters ist $\mathfrak{X}$ vollständig und es gibt $A, B > 0$ mit*

$$A\|a\|^2 \leq \|V_{\mathfrak{X}}a\|^2 \leq B\|a\|^2 \tag{5.9}$$

für alle $a \in (\ker V_{\mathfrak{X}})^{\perp}$.

(iv) *Die Gram-Matrix $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ lässt sich eindeutig zu einer beschränkten linearen Abbildung von $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ nach $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ fortsetzen. Außerdem ist $\mathfrak{X}$ vollständig und $\Gamma_{\mathfrak{X}}\restriction_{\operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}}}\colon \operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}} \to \operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}}$ invertierbar mit beschränkter Inversen.*

Beweis. „(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)": Gemäß Satz 3.2.6 ist die Beschränktheit von $J_{\mathfrak{X}}\colon H \to \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ zur beschränkten linearen Fortsetzbarkeit von $V_{\mathfrak{X}}$ gleichbedeutend. In diesem Fall gilt $V_{\mathfrak{X}} = J_{\mathfrak{X}}^*$, woraus wir zusammen mit Lemma 5.1.8 und (5.2) auf „(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)" schließen.
„(i) $\Longrightarrow$ (iv)": Nach Voraussetzung ist $J_{\mathfrak{X}}\colon H \to \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ beschränkt. Wegen Satz 3.2.6 lässt sich demnach $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ zu einer linearen und beschränkten Abbildung von $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ nach $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ fortsetzen. Als Frame ist $\mathfrak{X}$ nach Bemerkung 5.1.2 vollständig. Wegen (5.2) ist $\operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}}$ abgeschlossen. Weiters hat

$$J_{\mathfrak{X}}V_{\mathfrak{X}} = V_{\mathfrak{X}}^*V_{\mathfrak{X}} = \Gamma_{\mathfrak{X}}$$

$\operatorname{ran}\Gamma_{\mathfrak{X}} \subseteq \operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}}$ zur Folge. Wir müssen also die Bijektivität von $\Gamma_{\mathfrak{X}}\restriction_{\operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}}}$ nachweisen. Da wir „(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)" bereits gezeigt haben, ist $V_{\mathfrak{X}}$ beschränkt fortsetzbar und die entsprechende Fortsetzung $V_{\mathfrak{X}}\colon \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to H$ surjektiv. Infolge ist $V_{\mathfrak{X}}\colon (\ker V_{\mathfrak{X}})^\perp \to H$ bijektiv. Um dies einzusehen sei $V_{\mathfrak{X}}a = 0$ mit $a \in (\ker V_{\mathfrak{X}})^\perp$. Daraus erhalten wir $a \in \ker V_{\mathfrak{X}} \cap (\ker V_{\mathfrak{X}})^\perp$ und damit $a = 0$. Des Weiteren haben wir

$$V_{\mathfrak{X}}((\ker V_{\mathfrak{X}})^\perp) = V_{\mathfrak{X}}(\ker V_{\mathfrak{X}} + (\ker V_{\mathfrak{X}})^\perp) = V_{\mathfrak{X}}(\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})) = H.$$

Folglich ist $V_{\mathfrak{X}}\colon (\ker V_{\mathfrak{X}})^\perp \to H$ bijektiv und beschränkt. Da $(\ker V_{\mathfrak{X}})^\perp$ abgeschlossen ist, hat $V_{\mathfrak{X}}\colon (\ker V_{\mathfrak{X}})^\perp \to H$ eine beschränkte Inverse. Es folgt die Existenz eines $C > 0$ mit

$$C\|a\|^2 \leq \|V_{\mathfrak{X}}a\|^2 = (\Gamma_{\mathfrak{X}}a, a) \tag{5.10}$$

für alle $a \in (\ker V_{\mathfrak{X}})^\perp = \overline{\operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}}} = \operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}}$. Die rechte Gleichheit in (5.10) folgt aus (3.10). Da die Gram-Matrix positiv ist, hat (5.10) wegen Korollar 4.1.9 die Invertierbarkeit von $\Gamma_{\mathfrak{X}}\restriction_{\operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}}}$ zur Folge.
„(iv) $\Longrightarrow$ (iii)": Lässt sich $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ eindeutig zu einem beschränkten Operator von $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ nach $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ fortsetzen, so hat gemäß Satz 3.2.6 auch $V_{\mathfrak{X}}$ eine eindeutige lineare und beschränkte Fortsetzung $V_{\mathfrak{X}}\colon \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to H$. Voraussetzungsgemäß ist $\Gamma_{\mathfrak{X}}\restriction_{\operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}}}\colon \operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}} \to \operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}}$ bijektiv mit beschränkter Inversen. Infolge gibt es ein $C > 0$ mit

$$C\|a\| \leq \|\Gamma_{\mathfrak{X}}a\| = \|V_{\mathfrak{X}}^*V_{\mathfrak{X}}a\| \leq \|V_{\mathfrak{X}}^*\|\|V_{\mathfrak{X}}a\| \tag{5.11}$$

für alle $a \in \operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}}$. Wegen $\overline{\operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}}} = (\ker V_{\mathfrak{X}})^\perp$ gilt (5.11) auf dem in $(\ker V_{\mathfrak{X}})^\perp$ dichten Unterraum $\operatorname{ran} J_{\mathfrak{X}}$ und somit aufgrund der Stetigkeit von $V_{\mathfrak{X}}\colon \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to H$ für alle $a \in (\ker V_{\mathfrak{X}})^\perp$.
„(iii) $\Longrightarrow$ (ii)": Nach Lemma 3.2.3 impliziert die Vollständigkeit von $\mathfrak{X}$ die Injektivität von $J_{\mathfrak{X}}$. Entsprechend gilt

$$\{0\} = \ker J_{\mathfrak{X}} = (\operatorname{ran} V_{\mathfrak{X}})^\perp,$$

woraus wir $\overline{\operatorname{ran} V_{\mathfrak{X}}} = H$ folgern. Um die Surjektivität von $V_{\mathfrak{X}}\colon \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to H$ nachzuweisen, genügt es also die Abgeschlossenheit von $\operatorname{ran} V_{\mathfrak{X}}$ zu zeigen. Sei dazu $(V_{\mathfrak{X}}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge aus $\operatorname{ran} V_{\mathfrak{X}}$. Für $n \in \mathbb{N}$ können wir $x_n = y_n + z_n$ mit $y_n \in \ker V_{\mathfrak{X}}$ und $z_n \in (\ker V_{\mathfrak{X}})^\perp$ schreiben. Aus (5.9) folgt

$$\|V_{\mathfrak{X}}x_n\|^2 = \|V_{\mathfrak{X}}z_n\|^2 \geq A\|z_n\|^2,$$

womit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in H ist und infolge gegen ein $z \in H$ konvergiert. Die Stetigkeit von $V_{\mathfrak{X}}$ hat dann

$$V_{\mathfrak{X}} x_n = V_{\mathfrak{X}} y_n + V_{\mathfrak{X}} z_n = V_{\mathfrak{X}} z_n \to V_{\mathfrak{X}} z \in \operatorname{ran} V_{\mathfrak{X}} \tag{5.12}$$

zur Folge. Demnach ist $\operatorname{ran} V_{\mathfrak{X}}$ abgeschlossen und schlussendlich $V_{\mathfrak{X}}$ surjektiv. □

Wir haben bereits bemerkt, dass man durch Abändern einer Orthonormalbasis leicht Beispiele für Frames konstruieren kann. Tatsächlich ist jeder Frame sogar ein Vielfaches einer Summe von Orthonormalbasen, wie der folgende Satz zeigt. Davor brauchen wir noch

Lemma 5.2.2. *Ist H ein Hilbertraum, $A \in L_b(H)$ invertierbar und $P \in L_b(H)$ positiv mit $\|P\| \leq 1$, so gelten die folgenden Aussagen.*

(i) Es gibt einen unitären Operator $U \in L_b(H)$ und einen positiven Operator $R \in L_b(H)$ derart, dass $A = UR$.

(ii) Es existiert ein unitärer Operator $W \in L_b(H)$ mit $P = \frac{1}{2}(W + W^*)$.

Die Beweise dieser Aussagen gehen über den Umfang dieser Arbeit hinaus. Wir verweisen dafür auf [Chr16, p.56] und [FM16, p.279].

Satz 5.2.3. *Sei H ein Hilbertraum und $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Frame. Dann gibt es zu $0 < \epsilon < 1$ Orthonormalbasen $(x_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}, (x_{n,2})_{n\in\mathbb{N}}, (x_{n,3})_{n\in\mathbb{N}}$ von H mit*

$$x_n = \frac{C}{1-\epsilon}(x_{n,1} + x_{n,2} + x_{n,3})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit einer von ϵ unabhängigen Konstante $C > 0$.

Beweis. Nach Satz 5.2.1 ist $V_{\mathfrak{X}} \colon \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to H$ linear, beschränkt und surjektiv. Bezeichnen wir für eine Orthonormalbasis $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von H mit Φ den zu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörigen unitären Operator aus Satz 2.0.2, so ist $T := V_{\mathfrak{X}}\Phi \in L_b(H)$ surjektiv mit $Ty_n = x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $0 < \epsilon < 1$ definieren wir

$$A = \frac{1}{2}I + \frac{1-\epsilon}{2}\frac{T}{\|T\|}.$$

Wegen

$$\|I - A\| = \left\| \frac{1}{2}I - \frac{1-\epsilon}{2}\frac{T}{\|T\|} \right\| \leq \frac{1}{2} + \frac{1-\epsilon}{2} < 1$$

erhalten wir die Invertierbarkeit von A. Gemäß Lemma 5.2.2 können wir A als Produkt eines unitären Operators $U \in L_b(H)$ und eines positiven Operators $R \in L_b(H)$ schreiben. Da U unitär ist, haben wir

$$\|R\| = \|U^{-1}A\| \leq \|A\| < 1.$$

Aus Lemma 5.2.2 folgt auch die Existenz eines unitären $W \in L_b(H)$ mit $R = \frac{1}{2}(W + W^*)$, woraus wir

$$T = \frac{2\|T\|}{1-\epsilon}(A - \frac{1}{2}I) = \frac{2\|T\|}{1-\epsilon}(UR - \frac{1}{2}I) = \frac{\|T\|}{1-\epsilon}(UW + UW^* - I)$$

ableiten. Da UW und UW^* unitär sind, erhalten wir mit Lemma 4.1.4, dass auch $(UWy_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(UW^*y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Orthonormalbasen von H sind. Die Behauptung folgt schließlich aus

$$x_n = Ty_n = \frac{\|T\|}{1-\epsilon}(UWy_n + UW^*y_n - y_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Literaturverzeichnis

[BKW22] M. Blümlinger, M. Kaltenbäck, and H. Woracek. Funktionalanalysis, 2022.

[Chr16] O. Christensen. *An Introduction to Frames and Riesz-Bases*. Birkhäuser, 2016.

[FM16] E. Fricain and J. Mashreghi. *The Theory of H(b) Spaces*, volume 1. Cambridge University Press, 2016.

[Hei11] C. Heil. *A Basis Theory Primer*. 2011.

[Kal21] M. Kaltenbäck. *Aufbau Analysis*. Heldermann Verlag, 2021.

[PW34] R. Paley and N. Wiener. Fourier transforms in the complex domain. *American Mathematical Society Colloquium Publications*, XIX, 1934.