BACHELORARBEIT

Ein Spektralsatz für beschränkte, definisierbare, normale, lineare Operatoren auf Kreinräumen

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.
Michael Kaltenbäck

durch

Moritz Albert Schöbi
Matrikelnummer: 11807488
Ratschkygasse 12/5
1120 Wien

Wien, am 5. Oktober 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Definitionen und Voraussetzungen **2**

3 Einbettungen **7**

4 Normale definisierbare Operatoren **13**

5 Die Funktionenklassen $\mathcal{M}_N$ und $\mathcal{F}_N$ **18**

6 Funktionalkalkül **29**

1 Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, eine Verallgemeinerung des Spektralsatzes für normale Operatoren auf Hilberträumen zu schaffen. Hierbei werden wir uns nicht mehr auf Hilberträume, sondern die allgemeineren Kreinräume, deren inneres Produkt nicht als positiv definit, sondern nur als definit vorausgesetzt wird, beschränken. Das Funktionalkalkül, das am Ende der Arbeit stehen wird, werden wir für normale, definisierbare Operatoren entwickeln. Normal zu sein bedeutet in diesem Kontext für einen beschränkten, linearen Operator T auf einem Kreinraum $\langle \mathcal{K}[.,.]\rangle$, dass T mit seiner Kreinraumadjungierten T^+ vertauscht. Für ein solches T heißt Definisierbarkeit, dass für seinen in Kapitel vier eingeführten Realteil A und Imaginärteil B Polynome $p, q \in \mathbb{R}[z] \setminus \{0\}$ derart existieren, dass $[p(A)x, x] \geq 0$ und $[q(B)x, x] \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{K}$.
Im Anschluss an die Einleitung werden wir im zweiten Kapitel zuerst den Begriff des Kreinraums einführen und einige Eigenschaften, beispielsweise die Existenz der bereits erwähnten Kreinraumadjungierten, zeigen. Darüber hinaus erinnern wir an einige benötigte Resultate aus der Funktionalanalysis. Das Gros dieses Kapitels orientiert sich an den ersten beiden Kapiteln des Vorlesungsskripts [Wor08] von Harald Woracek.
Im darauf folgenden dritten Abschnitt wird es darum gehen, Operatoren auf einem Kreinraum in Operatoren auf passend gewählten Hilberträumen zu transformieren, was es uns ermöglichen wird, die bekannte Spektraltheorie auf Hilberträumen anzuwenden. Dass solche passenden Hilberträume im Falle von beschränkten, normalen und definisierbaren Operatoren existieren, werden wir in Kapitel vier gemeinsam mit einigen Eigenschaften der erwähnten Transformationen sehen.
$\mathcal{F}_N$, jene Funktionenfamilie, für die das entwickelte Funktionalkalkül schlussendlich gelten wird, werden wir in Kapitel fünf als Teil einer Familie $\mathcal{M}_N$ einführen, die im Wesentlichen auf dem Spektrum eines auf den Hilbertraum transformierten Operators, ergänzt um Nullstellen der definisierenden Polynome p und q, definiert ist.

Im letzten Abschnitt werden wir schlussendlich das entwickelte Funktionalkalkül angeben und an einem Beispiel betrachten. Das vierte, fünfte und sechste Kapitel orientieren sich stark an [Kal16] von Michael Kaltenbäck.

2 Definitionen und Voraussetzungen

In diesem Kapitel machen wir einige notwendige Definitionen und zeigen ein paar grundlegende, Kreinräume betreffende Ergebnisse, die wir später benötigen werden.

Definition 2.1. Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Wir nennen eine Abbildung $[.,.]\colon X \times X \to \mathbb{C}$ *inneres Produkt*, wenn sie eine hermitesche Sesquilinearform ist, also wenn gilt

(i) $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x, y, z \in X$,

(ii) $[y, x] = \overline{[x, y]}$, $x, y \in X$.

Insbesondere ist für ein inneres Produkt der Ausdruck $[x, x]$ immer reell.

Definition 2.2. Sei $\langle X, [.,.]\rangle$ ein Vektorraum mit innerem Produkt. Ein $x \in X$ heißt *positiv*, wenn $[x, x] > 0$. Analog bezeichnen wir x als *negativ*, wenn $[x, x] < 0$, und als *neutral*, wenn $[x, x] = 0$.
Ein linearer Teilraum Y von X heißt *positiv* (*negativ*, *nichtnegativ*, *nichtpositiv*, *neutral*), wenn jedes Element von $Y \setminus \{0\}$ *positiv* (*negativ*, *nichtnegativ*, *nichtpositiv*, *neutral*) ist. Wir nennen den Teilraum Y *definit*, wenn er *positiv* oder *negativ* ist, und *semidefinit*, wenn er *nichtnegativ* oder *nichtpositiv* ist.
Darüber hinaus nennen wir das innere Produkt $[.,.]$ *positiv definit* (*negativ definit*, *positiv semidefinit*, *negativ semidefinit*, *neutral*, *definit*, *semidefinit*), wenn ganz X *positiv* (*negativ*, *nichtnegativ*, *nichtpositiv*, *neutral*, *definit*, *semidefinit*) ist.

Definition 2.3. Sei $\langle X, [.,.]\rangle$ ein Vektorraum mit innerem Produkt. Wir bezeichnen $x, y \in X$ als *orthogonal* und schreiben dafür $x \perp y$, wenn $[x, y] = 0$.
Für eine Teilmenge $M \subseteq X$ bezeichnen wir $M^{\perp} := \{y \in X \mid \forall x \in M\colon x \perp y\}$ als das *orthogonale Komplement* von M.
Ein Element $x \in X$ heißt *isotrop*, wenn $[x, y] = 0$ für alle $y \in X$, also wenn $x \perp X$. Wir bezeichnen die Menge aller isotropen Elemente von X mit X°.
Zuletzt nennen wir das innere Produkt $[.,.]$ *nicht entartet*, wenn $X^{\circ} = \{0\}$.

Bemerkung 2.4. In der Situation der vorangegangenen Definition 2.3 bildet X° einen linearen Teilraum von X, weil das innere Produkt linear in der ersten Komponente ist. Für $x, y \in X^{\circ}, z \in X$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ergibt sich nämlich $[\lambda x + y, z] = \lambda[x, z] + [y, z] = 0$. Da $z \in X$ beliebig war, erhalten wir $\lambda x + y \in X^{\circ}$.

Definition 2.5. Sei $\langle X, [.,.]\rangle$ ein Vektorraum mit innerem Produkt. Ein Paar $\mathcal{J} = (X_+, X_-)$ heißt *Fundamentalzerlegung* von X, wenn X_+ ein positiver und X_- ein negativer Teilraum ist und $X = X_+ \oplus X_- \oplus X^{\circ}$ gilt.
Hier bezeichnet $\oplus$ die *orthogonale direkte Summe* bezüglich $[.,.]$.

Definition 2.6. Sei $\mathcal{J} = (X_+, X_-)$ eine Fundamentalzerlegung von $\langle X, [.,.]\rangle$. Die orthogonalen Projektionen P_+ auf X_+ und P_- auf X_- heißen *Fundamentalprojektoren zu* $\mathcal{J}$. Weiters bezeichnen wir $J := P_+ - P_-$ als *Fundamentalsymmetrie zu* $\mathcal{J}$ und definieren $(x, y)_{\mathcal{J}} := [Jx, y]$, $x, y \in X$, sowie $\|x\|_{\mathcal{J}} := (x, x)_{\mathcal{J}}^{\frac{1}{2}}$, $x \in X$.

Lemma 2.7. *Für eine Fundamentalzerlegung* $\mathcal{J} = (X_+, X_-)$ *von* $\langle X, [.,.]\rangle$ *und* $x, y \in X$ *gelten folgende Aussagen.*

(i) $P_+P_- = P_-P_+ = 0$, $P_+J = JP_+ = P_+$, $P_-J = JP_- = -P_-$, $J^2 = P_+ + P_-$.

(ii) $(J|_{X_+\oplus X_-})^2 = I|_{X_+\oplus X_-}$, *insbesondere ist* $J|_{X_+\oplus X_-}$ *bijektiv.*

(iii)
$$[Jx, y] = [x, Jy], \qquad (Jx, y)_{\mathcal{J}} = (x, Jy)_{\mathcal{J}},$$
$$[Jx, Jy] = [x, y], \qquad (Jx, Jy)_{\mathcal{J}} = (x, y)_{\mathcal{J}}.$$

Beweis. Es gilt $\operatorname{ran} P_+ = X_+ \subseteq X_+ \oplus X^\circ = \ker P_-$ und somit $P_-P_+ = 0$, analog zeigt man $P_+P_- = 0$. Daraus folgt

$$\begin{gathered} P_+J = P_+(P_+ - P_-) = P_+P_+ = P_+ = P_+P_+ = (P_+ - P_-)P_+ = JP_+, \\ P_-J = P_-(P_+ - P_-) = P_-(-P_-) = -P_- = -P_-P_- = (P_+ - P_-)P_- = JP_-, \\ J^2 = (P_+ - P_-)(P_+ - P_-) = P_+ + P_-. \end{gathered}$$

Der zweite Unterpunkt ist damit ebenfalls gezeigt, da

$$(J|_{X_+\oplus X_-})^2 = (P_+ + P_-)|_{X_+\oplus X_-} = I|_{X_+\oplus X_-}.$$

Für den dritten Punkt rechnen wir zuerst nach, dass für alle $x, y \in X$

$$\begin{aligned} [P_+x, y] &= [P_+x, P_+y] + [\underbrace{P_+x}_{\in \operatorname{ran} P_+}, \underbrace{y - P_+y}_{\in \ker P_+}] = [P_+x, P_+y] \\ &= [P_+x, P_+y] + [\underbrace{x - P_+x}_{\in \ker P_+}, \underbrace{P_+y}_{\in \operatorname{ran} P_+}] = [x, P_+y]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ganz analog gilt

$$[P_-x, y] = [P_-x, P_-y] = [x, P_-y]. \tag{2.2}$$

Unter Verwendung des gerade Gezeigten erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} [Jx, y] &= [P_+x - P_-x, y] = [P_+x, y] - [P_-x, y] \\ &= [x, P_+y] - [x, P_-y] = [x, P_+y - P_-y] = [x, Jy], \\ (Jx, y)_{\mathcal{J}} &= [J^2x, y] = [P_+x + P_-x, y] = [P_+x + P_-x, P_+y + P_-y] \\ &= [x, P_+y + P_-y] = [x, J^2y] = \overline{[J^2y, x]} = \overline{(Jy, x)_{\mathcal{J}}} = (x, Jy)_{\mathcal{J}}, \\ [Jx, Jy] &= [P_+x - P_-x, P_+y - P_-y] = [P_+x, P_+y] + [P_-x, P_-y] = [x, y], \\ (Jx, Jy)_{\mathcal{J}} &= [J^2x, Jy] = [Jx, y] = (x, y)_{\mathcal{J}}. \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung 2.8. Aus der Definition von X_+ und X_- folgt sofort, dass $[.,.]|_{X_+\times X_+}$ sowie $(-[.,.])|_{X_-\times X_-}$ positiv definite hermitesche Sesquilinearformen, also Skalarprodukte, sind. Damit induzieren sie Normen $\|.\|_+$ und $\|.\|_-$ auf den Teilräumen X_+ und X_-, die sich, sofern X nicht entartet ist, wie im folgenden Lemma zu einer Norm auf dem ganzen Raum kombinieren lassen.

Lemma 2.9. *Sei $\langle X, [.,.]\rangle$ nicht entartet und $\mathcal{J} = (X_+, X_-)$ eine Fundamentalzerlegung davon. Dann ist die Abbildung $\|.\|_{\mathcal{J}}$ aus Definition 2.6 eine Norm.*

Beweis. Für $x \in X$ und $x_+ \in X_+$, $x_- \in X_-$ derart, dass $x = x_+ + x_-$, gilt

$$\begin{aligned}\|x\|_{\mathcal{J}}^2 &= (x,x)_{\mathcal{J}} = [Jx,x] = [x_+ - x_-, x_+ + x_-] = [x_+,x_+] - [x_-,x_-]\\ &= \|x_+\|_+^2 + \|x_-\|_-^2.\end{aligned}$$

Indem wir $X = X_+ \oplus X_-$ mit $X_+ \times X_-$ via $x_+ + x_- \mapsto (x_+, x_-)$ identifizieren, entspricht $\|x\|_{\mathcal{J}}$ also genau der 2-Norm $\|(x_+,x_-)\|_2 \coloneqq \sqrt{\|x_+\|^2 + \|x_-\|^2}$ auf dem Produktraum $X_+ \times X_-$. $\square$

Definition 2.10. Ein Vektorraum $\langle \mathcal{K}, [.,.]\rangle$ mit innerem Produkt heißt *Kreinraum*, wenn er nicht entartet ist und eine Fundamentalzerlegung $\mathcal{J}$ derart besitzt, dass $\langle \mathcal{K}, \|.\|_{\mathcal{J}}\rangle$ vollständig ist.

Bemerkung 2.11. Dass $\langle \mathcal{K}, [.,.]\rangle$ ein Kreinraum ist, ist aufgrund der Definition von $\|.\|_{\mathcal{J}}$ und der Tatsache, dass J ein Isomorphismus sowie $(.,.)_{\mathcal{J}}$ eine positiv definite Sesquilinearform ist, gleichbedeutend damit, dass $\langle \mathcal{K}, (.,.)_{\mathcal{J}}\rangle$ ein Hilbertraum ist.

Lemma 2.12. *Seien $\langle \mathcal{K}, [.,.]_{\mathcal{K}}\rangle$ und $\langle \mathcal{V}, [.,.]_{\mathcal{V}}\rangle$ Kreinräume und $T \in L_b(\mathcal{K},\mathcal{V})$. Dann existiert ein eindeutiger Operator $T^+ \in L_b(\mathcal{V},\mathcal{K})$ mit*

$$[Tx,y]_{\mathcal{V}} = [x, T^+y]_{\mathcal{K}},\ x,y \in \mathcal{K}. \tag{2.3}$$

Des Weiteren gilt für $S,T \in L_b(\mathcal{K},\mathcal{V})$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(S+T)^+ = S^+ + T^+,\ (\lambda T)^+ = \overline{\lambda} T^+,\ (ST)^+ = T^+S^+,\ T^{++} = T. \tag{2.4}$$

Darüber hinaus gilt

$$\ker(T^+) = ran\ (T)^\perp,\quad \overline{ran\ (T^+)} = \ker(T)^\perp. \tag{2.5}$$

Sind $\mathcal{J}_{\mathcal{K}}$ und $\mathcal{J}_{\mathcal{V}}$ Fundamentalzerlegungen von $\mathcal{K}$ beziehungsweise $\mathcal{V}$ und bezeichnen wir mit T^* die Adjungierte von T in $L_b(\langle \mathcal{K}, (.,.)_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}}}\rangle, \langle \mathcal{V}, (.,.)_{\mathcal{J}_{\mathcal{V}}}\rangle)$, dann gilt $T^+ = J_{\mathcal{K}} T^* J_{\mathcal{V}}$. Außerdem gilt $\|T^+\| = \|T\|$, wobei $\|.\|$ für die Operatornorm bezüglich $\|.\|_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}}}$ und $\|.\|_{\mathcal{J}_{\mathcal{V}}}$ steht.

Beweis. Dass es zu jedem T nur maximal ein T^+ mit der Eigenschaft (2.3) geben kann, folgt aus der Voraussetzung an die inneren Produkte, nicht entartet zu sein. Es ist also hinreichend zu zeigen, dass für Fundamentalzerlegungen $\mathcal{J}_\mathcal{K}$ und $\mathcal{J}_\mathcal{V}$ der Operator $J_\mathcal{K} T^* J_\mathcal{V}$ das Gewünschte erfüllt. Dazu berechnen wir für $x \in \mathcal{K}$, $y \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned}[Tx, y]_\mathcal{V} &= (J_\mathcal{V} Tx, y)_{\mathcal{J}_\mathcal{V}} = (Tx, J_\mathcal{V} y)_{\mathcal{J}_\mathcal{V}} = (x, T^* J_\mathcal{V} y)_{\mathcal{J}_\mathcal{K}} = (J_\mathcal{K} x, J_\mathcal{K} T^* J_\mathcal{V} y)_{\mathcal{J}_\mathcal{K}} \\ &= [x, J_\mathcal{K} T^* J_\mathcal{V} y]_\mathcal{K}.\end{aligned}$$

Wir können also $T^+ := J_\mathcal{K} T^* J_\mathcal{V}$ setzen. Alle bis auf die letzte Rechenregel in (2.4) folgen damit direkt aus jenen für Adjungierte in Hilberträumen[1] und der Eindeutigkeit von T^+. Die letzte Rechenregel folgt daraus, dass $(T^+)^+$ eindeutig ist und T die Gleichung (2.3) mit T^+ als Ausgangsoperator erfüllt. Zudem gilt für $x \in \mathcal{K}$

$$x \in \ker T^+ \Leftrightarrow \forall y \in \mathcal{V} \colon [y, T^+ x]_\mathcal{V} = 0 \Leftrightarrow \forall y \in \mathcal{V} \colon [Ty, x]_\mathcal{K} = 0 \Leftrightarrow x \in \text{ran } (T)^\perp.$$

Das liefert auch

$$\ker(T)^\perp = \ker(T^{++})^\perp = \text{ran } (T^+)^{\perp\perp} = \overline{\text{ran } (T^+)}.$$

Die letzten zu zeigenden Eigenschaften folgen wegen Lemma 2.7 aus

$$\begin{aligned}\|T^+\| = \|J_\mathcal{K} T^* J_\mathcal{V}\| &= \sup\{\|J_\mathcal{K} T^* J_\mathcal{V} y\|_{\mathcal{J}_\mathcal{K}} \colon \|y\|_{\mathcal{J}_\mathcal{V}} \le 1\} \\ &= \sup\{(J_\mathcal{K} T^* J_\mathcal{V} y, x)_{\mathcal{J}_\mathcal{K}} \colon \|x\|_{\mathcal{J}_\mathcal{K}}, \|y\|_{\mathcal{J}_\mathcal{V}} \le 1\} \\ &= \sup\{(T^* J_\mathcal{V} y, J_\mathcal{K} x)_{\mathcal{J}_\mathcal{K}} \colon \|x\|_{\mathcal{J}_\mathcal{K}}, \|y\|_{\mathcal{J}_\mathcal{V}} \le 1\} \\ &= \sup\{(T^* \hat{y}, \hat{x})_{\mathcal{J}_\mathcal{K}} \colon \|\hat{x}\|_{\mathcal{J}_\mathcal{K}}, \|\hat{y}\|_{\mathcal{J}_\mathcal{V}} \le 1\} \\ &= \|T^*\| = \|T\|.\end{aligned}$$

□

Definition 2.13. Sei $\mathcal{K}$ ein Kreinraum und $T \in L_b(\mathcal{K})$. Wir bezeichnen den nach Lemma 2.12 existierenden Operator $T^+ \in L_b(\mathcal{K})$ als *Kreinraumadjungierte* oder auch kurz *Adjungierte* von T.

Lemma 2.14. *Seien $\langle X, \|.\|_X \rangle$, $\langle Y, \|.\|_Y \rangle$ normierte Räume und sei $\Phi \subseteq X \times Y$ ein Teilraum von $X \times Y$ für den gilt, dass alle Paare $(x, y) \in \Phi$ die Gleichung $\|x\|_X = \|y\|_Y$ erfüllen. Dann sind sowohl* dom $\Phi := \pi_1(\Phi)$ *als auch* ran $\Phi := \pi_2(\Phi)$ *lineare Teilräume von X beziehungsweise Y und Φ ist der Graph einer linearen Isometrie $\phi \colon$ dom $\Phi \to$ ran Φ.*

Beweis. Weil Φ ein linearer Teilraum von $X \times Y$ ist und die Projektionen linear sind, gilt das auch für dom Φ und ran Φ. Sind $x \in$ dom Φ, $y_1, y_2 \in$ ran Φ derart, dass $(x, y_1), (x, y_2) \in \Phi$, so folgt aus der Teilraumeigenschaft $(0, y_1 - y_2) \in \Phi$ und aus der Isometrieeigenschaft $y_1 = y_2$. $\phi \colon$ dom $\Phi \to$ ran Φ mit $\phi(x) = y$, wenn $(x, y) \in \Phi$, ist also eine wohldefinierte Abbildung. Ihre Linearität und

[1] Siehe Kapitel 6.6. in [BKW20].

Isometrie folgt aus der Tatsache, dass Φ ein Teilraum ist, der $\|x\|_X = \|y\|_Y$ für alle $(x, y) \in \Phi$ erfüllt. $\square$

Unser Ziel, einen Spektralsatz für normale, definisierbare Operatoren auf Kreinräumen zu entwickeln, kann als Verallgemeinerung des Spektralsatzes für normale Operatoren auf Hilberträumen gesehen werden. Dieser wird auch in unserem weiteren Vorgehen ein wichtiges Werkzeug bilden.[2]

Satz 2.15. *(Spektralsatz für normale Operatoren). Sei H ein Hilbertraum und $T \in L_b(H)$ normal. Dann existiert ein eindeutiges Spektralmaß E für $\langle \mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}), H\rangle$ mit der Eigenschaft, dass für ein gewisses kompaktes $K \subseteq \mathbb{C}$ $E(\mathbb{C} \setminus K) = 0$ und*

$$T = \int_K z \, dE(z)$$

gilt. Dabei treffen folgende Aussagen zu.

(i) Man kann jedes kompakte $K \supseteq \sigma(T)$ wählen. Insbesondere lebt E nur auf $\sigma(T)$.

(ii) Für alle Polynome $p \in \mathbb{C}[z]$ gilt

$$p(T) = \int_K p(z) \, dE(z).$$

(iii) Liegt $B \in L_b(H)$, so gilt

$$BT = TB \wedge BT^* = T^*B \Leftrightarrow BE(\Delta) = E(\Delta)B, \ \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}).$$

Zum Abschluss des Kapitels wollen wir noch eine Notation einführen, die in den weiteren Kapiteln oft verwendet wird.

Bemerkung 2.16. Sind X, Y Vektorräume und $T\colon X \to Y$ linear, so ist der Operator $T \times T\colon X \times X \to Y \times Y$ mit $(T \times T)(u, v) := (Tu, Tv)$ wohldefiniert und linear. Für einen Teilraum C von $Y \times Y$ gilt

$$\begin{aligned}(T \times T)^{-1}(C) &= \{(u, v) \in X \times X \mid (Tu, Tv) \in C\} \\ &= \{(u, v) \in X \times X \mid CTu = Tv\} \\ &= T^{-1}CT,\end{aligned}$$

wobei $T^{-1} = \{(Tx, x) \mid x \in X\}$ $(\subseteq Y \times X)$ und wobei $T^{-1}CT$ als Relationenprodukt von T, C und T^{-1} zu sehen ist. Ist C der Graph eines Operators und T injektiv, so ist $T^{-1}CT$ auch der Graph eines linearen Operators; siehe [Kal20], lineare Relationen.

[2] Siehe Satz 2.2.1 in [Kal20].

3 Einbettungen

In diesem Abschnitt werden wir uns mit Einbettungen von Hilberträumen in einen Kreinraum auseinandersetzen. Dass Kreinräume als Hilberträume aufgefasst werden können, haben wir bereits in Bemerkung 2.11 gesehen. Umgekehrt können wir auch jeden Hilbertraum $\langle \mathcal{V}, (.,.)\rangle$ vermöge $[.,.] \coloneqq (.,.)$ als Kreinraum auffassen. So ist auch für beschränkte lineare Operatoren T von einem Krein- in einen Hilbertraum die Kreinraumadjungierte T^+ wohldefiniert.
In dem gesamten Abschnitt seien ein Kreinraum $\langle \mathcal{K}, [.,.]\rangle$ sowie Hilberträume $\langle \mathcal{V}, (.,.)\rangle$, $\langle \mathcal{V}_1, (.,.)_1\rangle$ und $\langle \mathcal{V}_2, (.,.)_2\rangle$ fest gewählt. Zudem seien $T\colon \mathcal{V} \to \mathcal{K}$, $T_1\colon \mathcal{V}_1 \to \mathcal{K}$ und $T_2\colon \mathcal{V}_2 \to \mathcal{K}$ beschränkte, lineare und injektive Operatoren mit

$$TT^+ = T_1T_1^+ + T_2T_2^+. \tag{3.1}$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt für $x \in \mathcal{K}$ immer

$$\begin{aligned}(T^+x, T^+x) &= [TT^+x, x] = [T_1T_1^+x, x] + [T_2T_2^+x, x]\\ &= (T_1^+x, T_1^+x)_1 + (T_2^+x, T_2^+x)_2.\end{aligned}$$

Lemma 3.1. *Unter den gegebenen Voraussetzungen existieren surjektive, lineare Kontraktionen $\phi_j\colon \operatorname{ran} T^+ \to \operatorname{ran} T_j^+$ derart, dass $\phi_j(T^+x) = T_j^+x$, $j \in \{1,2\}$.*

Beweis. Die Menge $\Phi \coloneqq \{(T^+x, (T_1^+x, T_2^+x)) \mid x \in \mathcal{K}\} \subseteq \mathcal{V} \times (\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)$ bildet offenbar einen linearen Teilraum von $\mathcal{V} \times (\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)$. Wenn wir den Produktraum $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ mit dem Summen-Skalarprodukt versehen, so gilt nach (3.1)

$$(T^+x, T^+x)^{\frac{1}{2}} = ((T_1^+x, T_1^+x)_1 + (T_2^+x, T_2^+x)_2)^{\frac{1}{2}}.$$

Gemäß Lemma 2.14 bildet damit Φ den Graphen einer linearen Isometrie von $\operatorname{ran} T^+$ auf $\{(T_1^+x, T_2^+x) \mid x \in \mathcal{K}\}$ und die Abbildungen $\phi_j \coloneqq \pi_j \circ \phi$, $j \in \{1,2\}$ liefern das Gewünschte. □

Lemma 3.2. *Unter den zu Beginn des Kapitels gemachten Annahmen existieren injektive Kontraktionen $R_1\colon \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}$ und $R_2\colon \mathcal{V}_2 \to \mathcal{V}$ für die $T_1 = TR_1$, $T_2 = TR_2$ sowie $R_1R_1^* + R_2R_2^* = I$ gilt.*
Vertauschen $T_1T_1^+$ und $T_2T_2^+$, so tun das auch die Operatoren T^+T und $R_jR_j^*$ auf $\mathcal{V}$ sowie die Operatoren $T_j^+T_j$ und $R_j^*R_j$ auf $\mathcal{V}_j$, $j \in \{1,2\}$.

Beweis. Zunächst beobachten wir, dass nach Lemma 2.12 $(\operatorname{ran} T^+)^\perp = \ker T = \{0\}$ sowie $(\operatorname{ran} T_j^+)^\perp = \ker T_j = \{0\}$, $j \in \{1,2\}$ gilt. Die Räume $\operatorname{ran} T^+$ und $\operatorname{ran} T_j^+$ liegen also dicht. Folglich gibt es eindeutige, beschränkte, lineare Fortsetzungen der Abbildungen ϕ_j aus Lemma 3.1 auf ganz $\mathcal{V}$, deren Bilder dicht in $\mathcal{V}_j$ liegen. Wir bezeichnen die Adjungierten[3] dieser Fortsetzungen mit $R_j\colon \mathcal{V}_j \to \mathcal{V}$.

[3]Da wir die Hilberträume mit dem Skalarprodukt in der Rolle der Sesquilinearform als Kreinräume auffassen, muss an dieser Stelle zwischen Hilbertraum- und Kreinraumadjungierter nicht unterschieden werden.

Aus

$$\begin{aligned}[T_j x, y] &= (x, T_j^+ y)_j = (x, \phi_j T^+ y)_j = (x, R_j^* T^+ y)_j \\ &= (R_j x, T^+ y) = [T R_j x, y]\end{aligned} \tag{3.2}$$

für alle $x \in \mathcal{V}_j$, $y \in \mathcal{K}$ können wir $T_j = TR_j$ ableiten. Wie im letzten Absatz beschrieben, liegen die Bilder von R_j^* dicht in V_j. Nach den Rechenregeln für Hilbertraumadjungierte[4] impliziert das $\ker R_j = (\operatorname{ran} R_j^*)^\perp = \{0\}$.
Ausgehend von (3.1) können wir mit (3.2) auf

$$TT^+ = T_1 T_1^+ + T_2 T_2^+ = TR_1 R_1^* T^+ + TR_2 R_2^* T^+ = T(R_1 R_1^* + R_2 R_2^*) T^+$$

schließen. Weil T injektiv ist, impliziert das $T^+ = (R_1 R_1^* + R_2 R_2^*) T^+$. Außerdem liegt $\operatorname{ran} T^+$ in $\mathcal{V}$ dicht. Die beiden beschränkten linearen Abbildungen I und $R_1 R_1^* + R_2 R_2^*$ stimmen also auf einem dichten Teilraum des Hilbertraums $\mathcal{V}$ überein. Nach dem Fortsetzungssatz für beschränkte lineare Operatoren muss daher $I = R_1 R_1^* + R_2 R_2^*$ auf ganz $\mathcal{V}$ gelten.[5]
Falls $T_1 T_1^+$ und $T_2 T_2^+$ vertauschen, so gilt wegen (3.1) auch $TT^+ T_j T_j^+ = T_j T_j^+ TT^+$, womit

$$\begin{aligned}T(T^+ TR_j R_j^*) T^+ &= TT^+ (TR_j R_j^* T^+) = TT^+ T_j T_j^+ = T_j T_j^+ TT^+ \\ &= (TR_j R_j^* T^+) TT^+ = T(R_j R_j^* T^+ T) T^+.\end{aligned}$$

Aufgrund der Injektivität von T und der Dichtheit von $\operatorname{ran} T^+$ folgt
$T^+ TR_j R_j^* = R_j R_j^* T^+ T$. Zudem erhalten wir aus $T_j = TR_j$

$$T_j^+ T_j R_j^* R_j = R_j^* (T^+ TR_j R_j^*) R_j = R_j^* (R_j R_j^* T^+ T) R_j = R_j^* R_j T_j^+ T_j.$$

□

Definition 3.3. Sei $\langle X, \|.\| \rangle$ ein normierter Raum und $A \subseteq L_b(X)$. Wir bezeichnen mit A' den *Kommutanten* von A, also die Menge aller $S \in L_b(X)$ die $ST = TS$ für alle $T \in A$ erfüllen. Im Spezialfall $A = \{T\}$ für ein $T \in L_b(X)$ schreiben wir auch T' anstelle von $\{T\}'$.

Bemerkung 3.4. In der Situation von Definition 3.3 bildet der Kommutant von A offenbar einen linearen Teilraum von $L_b(X)$.

Definition 3.5. Die Operatoren $\Theta\colon (TT^+)' \to (T^+T)'$ und $\Theta_j\colon (T_j T_j^+)' \to (T_j^+ T_j)'$, $j \in \{1, 2\}$ seien definiert durch

$$\begin{aligned}\Theta(C) &:= (T \times T)^{-1}(C) = T^{-1} C T, \\ \Theta_j(C) &:= (T_j \times T_j)^{-1}(C) = T_j^{-1} C T_j.\end{aligned} \tag{3.3}$$

[4]Siehe Kapitel 6.6. in [BKW20].
[5]Siehe Satz 2.5.2 in [BKW20].

Darüber hinaus definieren wir in analoger Weise für $j \in \{1,2\}$ die Operatoren $\Gamma_j : (R_j R_j^*)' \to (R_j^* R_j)'$ durch

$$\Gamma_j(D) := (R_j \times R_j)^{-1}(D) = R_j^{-1} D R_j. \tag{3.4}$$

Weil T, T_j und $R_j,\ j \in \{1,2\}$ allesamt lineare, beschränkte, injektive Operatoren von Hilberträumen in Kreinräume sind, können wir für jeden einzelnen Satz 5.8 in [KP15] anwenden. Dieser liefert uns das folgende Lemma.

Lemma 3.6. *Die Abbildungen Θ und $\Theta_j,\ j \in \{1,2\}$ sowie $\Gamma_j,\ j \in \{1,2\}$ sind wohldefinierte $*$-Homomorphismen, die den Identitätsoperator des Definitionsbereichs auf jenen des Zielraums abbilden.*

Wir wollen einige Eigenschaften der Abbildungen Θ, Θ_j und $\Gamma_j,\ j \in \{1,2\}$, zeigen.

Proposition 3.7. *Für $C \in (TT^+)'$ gilt $T^+C = \Theta(C)T^+$. Analog gilt für $C \in (T_jT_j^+)',\ j \in \{1,2\}$, auch $T_j^+C = \Theta_j(C)T_j^+$.*
Darüber hinaus gilt für $D \in (R_jR_j^*)'$, dass $\Gamma_j(D)R_j^* = R_j^*D$.

Beweis. Für $u, v \in \mathcal{K}$ und $C \in (TT^+)'$ gilt

$$\begin{aligned}[TT^+Cu, v] &= (T^+Cu, T^+v) = (T^{-1}TT^+Cu, T^+v) = (T^{-1}CTT^+u, T^+v) \\ &= (\Theta(C)T^+u, T^+v) = [T\Theta(C)T^+u, v].\end{aligned}$$

Weil T injektiv ist, folgt daraus $T^+C = \Theta(C)T^+$. Für $x, y \in \mathcal{V}$, $j \in \{1,2\}$ und $D \in (R_jR_j^*)'$ folgern wir

$$(\Gamma_j(D)R_j^*x, y)_j = (R_j^{-1}DR_jR_j^*x, y)_j = (R_j^{-1}R_jR_j^*Dx, y)_j = (R_j^*Dx, y)_j,$$

was die gewünschte Gleichheit $\Gamma_j(D)R_j^* = R_j^*D$ impliziert. $\square$

Mit Hilfe der soeben gezeigten Proposition und Lemma 3.6 lässt sich folgendes Resultat zeigen.

Proposition 3.8. *Es gilt*

$$(T_1T_1^+)' \cap (T_2T_2^+)' \subseteq (TT^+)' \tag{3.5}$$

und

$$\Theta((T_1T_1^+)' \cap (T_2T_2^+)') \subseteq (R_1R_1^*)' \cap (R_2R_2^*)' \cap (T^+T)'. \tag{3.6}$$

Des Weiteren gilt für $j \in 1,2$ und $C \in (T_1T_1^+)' \cap (T_2T_2^+)'$ auch

$$\Theta(C)R_jR_j^* = R_j\Theta_j(C)R_j^* = R_jR_j^*\Theta(C) \tag{3.7}$$

und

$$\Theta_j(C) = \Gamma_j \circ \Theta(C) \tag{3.8}$$

sowie

$$\sigma(\Theta(C)) \supseteq \sigma(\Theta_j(C)) \tag{3.9}$$

für alle $C \in (T_1T_1^+)' \cap (T_2T_2^+)'$.

Beweis. Die Inklusion $(T_1T_1^+)' \cap (T_2T_2^+)' \subseteq (TT^+)'$ folgt direkt aus der zu Beginn des Kapitels angenommenen Darstellung $TT^+ = T_1T_1^+ + T_2T_2^+$. Sei $C \in (T_1T_1^+)' \cap (T_2T_2^+)'$. Für $j \in \{1,2\}$ gilt wegen $T_j = TR_j$ und unter doppelter Verwendung von Proposition 3.7

$$\begin{aligned} T(R_j\Theta_j(C)R_j^*)T^+ =& T_j\Theta_j(C)T_j^+ = T_jT_j^+C = TR_jR_j^*T^+C \\ =& T(R_jR_j^*\Theta(C))T^+. \end{aligned}$$

T ist injektiv und ran T^+ liegt dicht in $\mathcal{V}$, wodurch $R_j\Theta_j(C)R_j^* = R_jR_j^*\Theta(C)$ gezeigt ist. Wie wir im Beweis von Lemma 3.6 gesehen haben, liegt mit C auch C^+ in $(T_1T_1^+)' \cap (T_2T_2^+)'$. Es gilt also auch $R_j\Theta_j(C^+)R_j^* = R_jR_j^*\Theta(C^+)$. Wenn wir auf beiden Seiten die Adjungierte bilden, erhalten wir, weil Θ ein $*$-Homomorphismus ist, $R_j\Theta_j(C)R_j^* = \Theta(C)R_jR_j^*$. (3.7) ist also gezeigt. Diese Gleichheit impliziert insbesondere $\Theta(C) \in (R_jR_j^*)'$, weshalb $\Gamma_j \circ \Theta(C)$ wohldefiniert ist, womit sich

$$\Gamma_j \circ \Theta(C) = R_j^{-1}\Theta(C)R_j = R_j^{-1}T^{-1}CTR_j = T_j^{-1}CT_j = \Theta_j(C)$$

und damit (3.8) ergibt. Zudem folgt aus $\Theta(C) \in (R_jR_j^*)'$ und $(T_1T_1^+)' \cap (T_2T_2^+)' \subseteq (TT^+)'$ auch direkt (3.6).
(3.9), die letzte zu zeigende Aussage, folgt schließlich aus der Darstellung (3.8) und der Tatsache, dass Γ_j ein $*$-Homomorphismus ist, der die Identität auf die Identität abbildet. Ist nämlich $(\Theta(C)-\lambda)$ beschränkt invertierbar, so ist es auch $\Gamma_j(\Theta(C)-\lambda) = (\Theta_j(C)-\lambda)$. □

Korollar 3.9. *Ist $N \in (T_1T_1^+)' \cap (T_2T_2^+)'$ normal, dann ist $\Theta(N)$ ($\Theta_1(N)$, $\Theta_2(N)$) ein normaler Operator im Hilbertraum $\mathcal{V}$ ($\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$). Wenn wir mit E (E_1, E_2) das zu $\Theta(N)$ ($\Theta(N_1)$, $\Theta(N_2)$) gehörende Spektralmaß bezeichnen, so gilt $E(\Delta) \in (R_1R_1^*)' \cap (R_2R_2^*)' \cap (T^+T)'$ sowie*

$$\Gamma_j(E(\Delta)) = E_j(\Delta),\ j \in \{1,2\},$$

für alle Borelmengen $\Delta \subseteq \mathbb{C}$, wobei $E_j(\Delta) \in (R_j^*R_j)' \cap (T_j^+T_j)'$. Darüber hinaus gilt $\int h\, dE \in (R_1R_1^*)' \cap (R_2R_2^*)' \cap (T^+T)'$ und

$$\Gamma_j\left(\int h\, dE\right) = \int h\, dE_j,\ j \in \{1,2\}$$

für jedes beschränkte und messbare $h : \sigma(\Theta(N)) \to \mathbb{C}$, wobei $\int h\, dE_j \in (R_j^*R_j)' \cap (T_j^+T_j)'$.

Beweis. Der Ausdruck $\Theta(N)$ ist wegen (3.5) wohldefiniert. Da die Operatoren Θ, Θ_1 und Θ_2 $*$-Homomorphismen sind, ist für normales N auch $\Theta(N)$, $\Theta_1(N)$ und $\Theta_2(N)$ normal. Zudem sind die Zielräume von Θ, Θ_1 und Θ_2 nach Lemma 3.6 Teilräume von $L_b(\mathcal{V})$, $L_b(\mathcal{V}_1)$ und $L_b(\mathcal{V}_2)$. Nach (3.6) gilt $\Theta(N) \in$

$(R_1R_1^*)' \cap (R_2R_2^*)' \cap (T^+T)'$. Da bekanntlich alle diese drei Räume unter der Bildung von Adjungierten abgeschlossen sind,[6] gilt auch $(\Theta(N))^* \in (R_1R_1^*)' \cap (R_2R_2^*)' \cap (T^+T)'$, weshalb nach dem dritten Unterpunkt des Spektralsatzes für normale Operatoren auf Hilberträumen 2.15 auch $E(\Delta) \in (R_1R_1^*)' \cap (R_2R_2^*)' \cap (T^+T)'$, $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ gilt. Nach Korollar 2.1.10 in [Kal20] ist letzteres äquivalent dazu, dass für jedes beschränkte und messbare $h : \sigma(\Theta(N)) \to \mathbb{C}$ sogar $\int h\, dE \in (R_1R_1^*)' \cap (R_2R_2^*)' \cap (T^+T)'$ gilt, weshalb wir Γ_j auf $E(\Delta)$ und $\int h\, dE$ anwenden dürfen. Auf analoge Weise lässt sich zeigen dass für messbares Δ und beschränktes und messbares h aus $\Theta_j(N) \in (T_j^+T_j)'$ auch $E_j(\Delta) \in (T_j^+T_j)'$ und $\int h\, dE_j \in (T_j^+T_j)'$ folgt.
Aus Proposition 3.7 wissen wir, dass für $D \in (R_jR_j^*)'$ auch $\Gamma_j(D)R_j^* = R_j^*D$ gilt. Für $x \in \mathcal{V}$ und $y \in \mathcal{V}_j$ ergibt sich damit

$$(\Gamma_j(E(\Delta))R_j^*x, y)_j = (R_j^*E(\Delta)x, y)_j = (E(\Delta)x, R_jy).$$

Ist $s(z, \overline{z}) \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]$ ein trigonometrisches Polynom, so folgt

$$\begin{aligned}\int s(z,\overline{z})\, d(\Gamma_j(E)R_j^*x, y)_j &= \int s(z,\overline{z})\, d(Ex, R_jy) = (s(\Theta(N), \Theta(N)^*)x, R_jy)\\ &= (R_j^*s(\Theta(N), \Theta(N)^*)x, y)_j = (\Gamma_j(s(\Theta(N), \Theta(N)^*)R_j^*x, y)_j.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Γ_j ist ein $*$-Homomorphismus und es gilt (3.8), woraus sich

$$\Gamma_j(s(\Theta(N), \Theta(N)^*) = s(\Theta_j(N), \Theta_j(N)^*)$$

und damit

$$\int s(z,\overline{z})\, d(\Gamma_j(E)R_j^*x, y)_j = \int s(z,\overline{z})\, d(E_jR_j^*x, y)_j \tag{3.11}$$

ergibt. Weil es nach dem Spektralsatz 2.15 ein kompaktes $K \subseteq \mathbb{C}$ gibt mit $E(\mathbb{C} \setminus K) = E_j(\mathbb{C} \setminus K) = 0$ und weil die trigonometrischen Polynome nach dem Satz von Stone-Weierstraß[7] dicht in $C(K)$ liegen, folgt aus der Eindeutigkeitsaussage im Rieszschen Darstellungssatz,[8] dass

$$(\Gamma_j(E(\Delta))R_j^*x, y)_j = (E_j(\Delta)R_j^*x, y)_j,\ x \in \mathcal{V},\ y \in \mathcal{V}_j, \tag{3.12}$$

für alle Borelmengen $\Delta \subseteq \mathbb{C}$. Das Bild von $\mathcal{V}$ unter R_j^* liegt dicht in $\mathcal{V}_j$. Deshalb gilt sogar

$$(\Gamma_j(E(\Delta))x, y)_j = (E_j(\Delta)x, y)_j,\ x, y \in \mathcal{V}_j,$$

und, da das Skalarprodukt nicht entartet ist, ist diese Gleichheit äquivalent zu

$$\Gamma_j(E(\Delta)) = E_j(\Delta).$$

[6] Siehe Beweis von Lemma 3.6.
[7] Siehe Satz 1.5.3 in [Blü19].
[8] Siehe Satz 7.1.12 in [BKW20].

Insbesondere liegt $E_j(\Delta)$ für jede messbare Menge Δ im Bildbereich von Γ_j und damit in $(R_j^* R_j)'$, woraus wiederum $\int h \; dE_j \in (R_j^* R_j)'$ für alle beschränkten und messbaren Funktionen h folgt. Ist $h : \sigma(\Theta(C)) \to \mathbb{C}$ beschränkt und messbar, dann ist es auch $h|_{\sigma(\Theta_j(C))} : \sigma(\Theta_j(C)) \to \mathbb{C}$. Zu beachten ist hierbei, dass wegen (3.9) die Einschränkung auch wohldefiniert ist. Sind $x \in \mathcal{V}$ und $y \in \mathcal{V}_j$ fest, so gilt wegen der Gleichheit[9] $R_j^* E(\Delta) = \Gamma_j(E(\Delta)) R_j^* = E_j(\Delta) R_j^*$

$$\begin{aligned}(\Gamma_j\left(\int h \; dE\right) R_j^* x, y)_j =& (R_j^* \left(\int h \; dE\right) x, y)_j = (\left(\int h \; dE\right) x, R_j y) \\ =& \int h \; d(Ex, R_j y) = \int h \; d(R_j^* E x, y)_j \\ =& \int h \; d(E_j R_j^* x, y)_j = (\left(\int h \; dE_j\right) R_j^* x, y)_j,\end{aligned}$$

woraus wir wiederum mittels der Tatsache, dass das Bild von $\mathcal{V}$ unter R_j^* dicht liegt, auf

$$\Gamma_j\left(\int h \; dE\right) = \left(\int h \; dE_j\right)$$

schließen können. □

Definition 3.10. Wir definieren die Operatoren

$$\Xi : (T^+ T)' \; (\subseteq L_b(\mathcal{V})) \to (TT^+)' \; (\subseteq L_b(\mathcal{K})), \; \Xi(D) := TDT^+ \tag{3.13}$$

sowie für $j \in \{1, 2\}$

$$\Xi_j : (T_j^+ T_j)' \; (\subseteq L_b(\mathcal{V}_j)) \to (T_j T_j^+)' \; (\subseteq L_b(\mathcal{K})), \; \Xi_j(D_j) := T_j D_j T_j^+ \tag{3.14}$$

und

$$\Lambda_j : (R_j^* R_j)' \; (\subseteq L_b(\mathcal{V}_j)) \to (R_j R_j^*)' \; (\subseteq L_b(\mathcal{K})), \; \Lambda_j(D_j) := R_j D_j R_j^*.$$

Bemerkung 3.11. Die Tatsache, dass diese Operatoren in die angegebenen Räume hinein abbilden, ist nicht schwierig zu zeigen. Wir werden dies exemplarisch für Ξ tun. Für $D \in (T^+ T)'$ gilt

$$\Xi(D) TT^+ = TDT^+ TT^+ = TT^+ TDT^+ = TT^+ \Xi(D).$$

Unter Verwendung von Lemma 3.2 erhalten wir für $D_j \in (T_j^+ T_j)' \cap (R_j^* R_j)'$

$$\Xi_j(D_j) = T_j D_j T_j^+ = T R_j D_j R_j^* T^+ = \Xi \circ \Lambda_j(D_j).$$

Des Weiteren folgt aus der Definition der Operatoren Γ_j und Λ_j direkt, dass für alle $D \in (R_j R_j^*)'$

$$\Lambda_j \circ \Gamma_j(D) = \Lambda_j(R_j^{-1} D R_j) = D R_j R_j^*.$$

[9]Die erste Gleichheit folgt aus Proposition 3.7, die Zweite aus (3.12).

Damit erhalten wir für beschränkte und messbare Funktionen $h : \sigma(\Theta(N)) \to \mathbb{C}$ die Gleichheit

$$\begin{aligned}\Xi_j\left(\int h\, dE_j\right) &= \Xi \circ \Lambda_j \circ \Gamma_j \left(\int h\, dE\right) = \Xi(\left(\int h\, dE\right) R_j R_j^*) \\ &= \Xi(R_j R_j^* \int h\, dE).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Außerdem beobachten wir noch, dass

$$T^{-1}T_jT_j^+T = T^{-1}TR_jR_j^*T^+T = R_jR_j^*T^+T,\ j \in \{1,2\}. \tag{3.16}$$

Kommutieren $T_1T_1^+$ und $T_2T_2^+$, so gilt wegen (3.5) auch $T_1T_1^+, T_2T_2^+ \in (TT^+)'$ und (3.16) lässt sich als

$$\Theta(T_jT_j^+) = R_jR_j^*T^+T,\ j \in \{1,2\} \tag{3.17}$$

darstellen.

Proposition 3.12. *Für $C \in (TT^+)'$ und $D, D_1, D_2 \in (T^+T)'$ gilt*

$$\begin{aligned}\Xi(D\Theta(C)) &= \Xi(D)C, \\ \Xi(\Theta(C)D) &= C\Xi(D)\end{aligned}$$

und

$$\Xi(D_1)\Xi(D_2) = \Xi(D_1D_2T^+T) = \Xi(T^+TD_1D_2).$$

Beweis. Wir setzen in die Definitionen der beiden Operatoren ein. Es folgt

$$\begin{aligned}\Xi(D\Theta(C)) &= T(DT^{-1}CT)T^+ = TD(T^{-1}T)T^+C = \Xi(D)C, \\ \Xi(\Theta(C)D) &= T(T^{-1}CTD)T^+ = (T(T^{-1})C(TDT^+) = C\Xi(D)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\Xi(D_1)\Xi(D_2) &= TD_1T^+TD_2T^+ = TD_1D_2T^+TT^+ \\ &= \Xi(D_1D_2T^+T) = \Xi(T^+TD_1D_2).\end{aligned}$$

□

4 Normale definisierbare Operatoren

Definition 4.1. Sei $\mathcal{K}$ ein Kreinraum. Wir bezeichnen für einen Operator $T \in L_b(\mathcal{K})$

(i) $\frac{T+T^+}{2}$ als den *Realteil* von T und

(ii) $\frac{T-T^+}{2i}$ als den *Imaginärteil* von T.

Des weiteren heißt $T \in L_b(\mathcal{K})$

(i) *selbstadjungiert*, wenn $T^+ = T$,

(ii) *normal*, wenn $T^+T = TT^+$,

(iii) *unitär*, wenn $T^+T = TT^+ = I$.

Bemerkung 4.2. Offenbar sind Real- und Imaginärteil eines Operators $T \in L_b(\mathcal{K})$ immer selbstadjungiert.

Definition 4.3. Sei $\langle \mathcal{K}, [.,.] \rangle$ ein Kreinraum. Ein selbstadjungierter Operator $A \in L_b(\mathcal{K})$ heißt *definisierbar*, wenn es ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$ gibt mit

$$[p(A)x, x] \geq 0, \quad x \in \mathcal{K}. \tag{4.1}$$

Jedes Polynom mit dieser Eigenschaft heißt *definisierendes Polynom* für A.
Wir nennen einen normalen Operator N *definisierbar*, wenn sowohl der Realteil A als auch der Imaginärteil B von N definisierbar sind. Ist p definisierend für A und q für B, so nennen wir p, q definisierend für N.

Bemerkung 4.4. Dass wir für definisierende Polynome reelle Koeffizienten fordern, ist keine Einschränkung. Gilt nämlich $[p(A)x, x] \geq 0$ für für $p \in \mathbb{C}[z]$, so erfüllt $p + \overline{p} =: q \in \mathbb{R}[z]$ offenbar $[q(A)x, x] = [p(A)x, x] + [x, p(A)x] \geq 0$.

Proposition 4.5. *Sei $(\mathcal{K}, [.,.])$ ein Kreinraum und seien $A, B \in L_b(\mathcal{K})$ selbstadjungiert, kommutierend und definisierbar mit definisierenden Polynomen $p \in \mathbb{R}[z] \setminus \{0\}$ für A und $q \in \mathbb{R}[z] \setminus \{0\}$ für B. Dann existieren Hilberträume $\langle \mathcal{V}_1, (.,.)_1 \rangle$, $\langle \mathcal{V}_2, (.,.)_2 \rangle$ und $\langle \mathcal{V}, (.,.) \rangle$ sowie beschränkte und injektive lineare Abbildungen $T_1 : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{K}$, $T_2 : \mathcal{V}_2 \to \mathcal{K}$ und $T : \mathcal{V} \to \mathcal{K}$ derart, dass*

$$T_1T_1^+ = p(A), \quad T_2T_2^+ = q(B), \quad TT^+ = T_1T_1^+ + T_2T_2^+ = p(A) + q(B),$$

wobei $T_1T_1^+$ und $T_2T_2^+$ kommutieren. Sind Θ wie in (3.3) und R_j, $j \in \{1, 2\}$ wie in Lemma 3.2 definiert, so gilt darüber hinaus

$$\begin{aligned} p(\Theta(A)) &= R_1R_1^*(p(\Theta(A)) + q(\Theta(B))), \\ q(\Theta(B)) &= R_2R_2^*(p(\Theta(A)) + q(\Theta(B))), \end{aligned} \tag{4.2}$$

wobei $R_1R_1^*$ und $R_2R_2^*$ mit $p(\Theta(A)) + q(\Theta(B))$ vertauschen.

Beweis. Betrachte zunächst den Raum $\mathcal{K}/\ker p(A)$ mit innerem Produkt $[p(A)/\ker p(A).,.]$. Da p definisierend für A und $p(A)/\ker p(A)$ auf $\mathcal{K}/\ker p(A)$ offenbar injektiv ist, ist $\langle \mathcal{K}/\ker p(A), [p(A)/\ker p(A).,.] \rangle$ ein Prähilbertraum und besitzt eine Hilbertraum-Vervollständigung, die wir mit $\langle \mathcal{V}_1, (.,.)_1 \rangle$ bezeichnen. Zudem sei $T_1 : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{K}$ definiert als die Adjungierte der Einbettung von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{V}_1$. Die Einbettung hat dichtes Bild in $\mathcal{V}_1$. Daher ist T_1 wegen (2.5) injektiv. Ganz analog bezeichnen wir mit $\mathcal{V}_2$ die Hilbertraum-Vervollständigung von $\langle \mathcal{K}/\ker q(B), [q(B)/\ker q(B).,.] \rangle$ und mit T_2 die injektive Adjungierte der

Einbettung von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{V}_2$, sowie mit $\mathcal{V}$ die Hilbertraum-Vervollständigung von $\langle \mathcal{K}/\ker(p(A)+q(B)), [(p(A)+q(B))\,/\ker(p(A)+q(B)).,.]\rangle$ und mit T die injektive Adjungierte der Einbettung von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{V}$.
Für $x, y \in \mathcal{K}$ gilt

$$\begin{aligned}[]
[TT^+x, y] &= (T^+x, T^+y) = (x, y) = [(p(A)+q(B))x, y], \\
[T_1T_1^+x, y] &= (T_1^+x, T_1^+y)_1 = (x, y)_1 = [p(A)x, y], \\
[T_2T_2^+x, y] &= [q(B)x, y],
\end{aligned}$$

woraus wir, da das innere Produkt in Kreinräumen nicht entartet ist,

$$TT^+ = p(A) + q(B),\ T_1T_1^+ = p(A),\ T_2T_2^+ = q(B)$$

und insbesondere $TT^+ = T_1T_1^+ + T_2T_2^+$ schließen können. Da A und B nach Voraussetzung kommutieren, tun es auch alle Polynome von A und B und somit auch $T_1T_1^+$ und $T_2T_2^+$. Dadurch greift die Darstellung (3.17). Mit Lemma 3.6, wonach Θ ein $*$-Homomorphismus ist, folgern wir

$$\begin{aligned}
p(\Theta(A)) =& \Theta(p(A)) = \Theta(T_1T_1^+) = R_1R_1^*T^+T = R_1R_1^*\Theta(TT^+) \\
=& R_1R_1^*\Theta(p(A)+q(B)) = R_1R_1^*(p(\Theta(A)) + q(\Theta(B))).
\end{aligned}$$

Analog folgt

$$q(\Theta(B)) = R_2R_2^*(p(\Theta(A)) + q(\Theta(B))).$$

Es verbleibt nur noch zu zeigen, dass $R_1R_1^*$ und $R_2R_2^*$ mit $p(\Theta(A)) + q(\Theta(B))$ vertauschen. Das folgt aber direkt aus der Darstellung

$$p(\Theta(A)) + q(\Theta(B)) = \Theta(p(A)+q(B)) = \Theta(TT^+) = T^+T$$

und Lemma 3.2. □

Lemma 4.6. *Sei $N \in L_b(\mathcal{K})$ normal und definisierbar mit Realteil A und Imaginärteil B. Unter Verwendung der Notation der vorangegangenen Proposition 4.5 gilt*

$$\{z \in \mathbb{C} : |p(\mathrm{Re}\ z)| > \|R_1R_1^*\| \cdot |p(\mathrm{Re}\ z) + q(\mathrm{Im}\ z)|\} \subseteq \rho(\Theta(N))$$

sowie

$$\{z \in \mathbb{C} : |q(\mathrm{Im}\ z)| > \|R_2R_2^*\| \cdot |p(\mathrm{Re}\ z) + q(\mathrm{Im}\ z)|\} \subseteq \rho(\Theta(N)),$$

wobei ρ die Resolventenmenge bezeichnet. Insbesondere sind die Nullstellen von $p(\mathrm{Re}\ z) + q(\mathrm{Im}\ z)$ in $\rho(\Theta(N)) \cup \{z \in \mathbb{C} : p(\mathrm{Re}\ z) = q(\mathrm{Im}\ z) = 0\}$ enthalten.

Beweis. Wir zeigen die erste Inklusion, die zweite kann auf die selbe Art und Weise gezeigt werden. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\Delta_n := \{z \in \mathbb{C} : |p(\mathrm{Re}\ z)|^2 > \frac{1}{n} + \|R_1R_1^*\|^2 \cdot |p(\mathrm{Re}\ z) + q(\mathrm{Im}\ z)|^2\}.$$

Ist E wieder das Spektralmaß von $\Theta(N)$ und $x \in E(\Delta_n)(\mathcal{V})$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\|p(\Theta(A))x\|^2 &= \|p(\Theta(\text{Re } N))x\|^2 = \|p(\text{Re } \Theta(N))x\|^2 \\
&= \big(p(\text{Re } \Theta(N))x, p(\text{Re } \Theta(N))x\big) \\
&= \big((p(\text{Re } \Theta(N)))^2 x, x\big) \\
&= \int_{\Delta_n} |p(\text{Re } \zeta)|^2 \, d[E(\zeta)x, x] \\
&\geq \int_{\Delta_n} \frac{1}{n} \, d[E(\zeta)x, x] \\
&\quad + \|R_1 R_1^*\|^2 \int_{\Delta_n} |p(\text{Re } \zeta) + q(\text{Im } \zeta)|^2 \, d[E(\zeta)x, x] \\
&\geq \frac{1}{n}\|x\|^2 + \|R_1 R_1^* \left(p(\Theta(A)) + q(\Theta(B))\right) x\|^2.
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung kann wegen der Darstellung (4.2) nur für $\|x\| = 0$, also $x = 0$ gelten. Δ_n ist also eine nichtleere offene Menge, auf der E verschwindet. Sie muss damit vollständig in der Resolvente $\rho(\Theta(N))$ liegen. Wäre dem nämlich nicht so, dann gäbe es $x \in \sigma(\Theta(N)) \cap \Delta_n$, einer in der Spurtopologie von $\sigma(\Theta(N))$ offenen Menge. Nach dem Lemma von Urysohn existierte $f \in C(\sigma(\Theta(N)))$ mit $f(x) = 1$ und $f(y) = 0,\ y \in \sigma(\Theta(N)) \setminus \Delta_n$. Wegen $E(\Delta_n) = 0$ müsste $\int f \, dE = 0$ gelten, was der Injektivität des Operators Φ_T aus dem Spektralsatz in seiner Version in [Kal20], Satz 2.2.1, widerspräche. Es gilt also $\Delta_n \subseteq \rho(\Theta(N))$.
Die zu zeigende Inklusion ergibt sich schließlich aus

$$\{z \in \mathbb{C} : |p(\text{Re } z)| > \|R_1 R_1^*\| \cdot |p(\text{Re } z) + q(\text{Im } z)|\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n.$$

□

Proposition 4.7. *Sei $\langle \mathcal{H}, (.,.) \rangle$ ein Hilbertraum und $L \in L_b(\mathcal{H})$ normal. Dann ist L genau dann injektiv, wenn* ran L *dicht liegt.*

Beweis. Wir beschränken uns im Beweis auf den relevanten Fall $\mathcal{H} \neq \{0\}, L \neq 0$. Wegen $(L^*Lx, x) = (Lx, Lx) = \|Lx\|^2$ für $x \in \mathcal{H}$ ist $L^*Lx = 0$ zu $Lx = 0$ äquivalent. Also gilt $\ker L = \ker L^*L$ und entsprechend $\ker L^* = \ker LL^*$. Daraus ergibt sich wegen der Normalität von L

$$\ker L = \ker L^*L = \ker LL^* = \ker L^* = (\text{ran } L)^\perp,$$

was die Behauptung zeigt. □

Korollar 4.8. *Gelten die selben Annahmen wie in Lemma 4.6 und definieren wir*

$$\widetilde{\Delta} := \{z \in \mathbb{C} \mid p(\text{Re z}) \neq 0 \vee q(\text{Im z}) \neq 0\},$$

so gilt

$$R_1R_1^*E(\widetilde{\Delta}) = \int_{\widetilde{\Delta}} \frac{p(\text{Re } z)}{p(\text{Re } z) + q(\text{Im} z)} \; dE(z) \tag{4.3}$$

und

$$R_2R_2^*E(\widetilde{\Delta}) = \int_{\widetilde{\Delta}} \frac{q(\text{Im } z)}{p(\text{Re } z) + q(\text{Im} z)} \; dE(z).$$

Beweis. Wir zeigen die erste Aussage. Die zweite kann auf die selbe Art und Weise bewiesen werden. Da der Integrand auf der rechten Seite nach Lemma 4.6 auf $\sigma(\Theta(N))$ betragsmäßig durch $\|R_1R_1^*\|$ beschränkt ist und das Spektralmaß auf $\rho(\Theta(N))$ verschwindet, existiert das Integral als beschränkter Operator. Darüber hinaus verschwinden beide Seiten von (4.3) auf ran $E\{z \in \mathbb{C} \mid p(\text{Re z}) = 0 \wedge q(\text{Im z}) = 0\}$. Tatsächlich ist $\mathcal{H} \coloneqq$ ran $E(\widetilde{\Delta})$ sogar das orthogonale Komplement von ran $E\{z \in \mathbb{C} \mid p(\text{Re z}) = 0 \wedge q(\text{Im z}) = 0\}$. Wegen

$$\begin{aligned}\left(\int (p(\text{Re } z) + q(\text{Im } z)) \; dE(z)\right) y &= \left(\int (p(\text{Re } z) + q(\text{Im } z)) \cdot \mathbb{1}_{\widetilde{\Delta}} \; dE(z)\right) y \\ &= \left(\int (p(\text{Re } z) + q(\text{Im } z)) \; dE(z)\right) E(\widetilde{\Delta}) y = 0, \; y \in \mathcal{H}^\perp\end{aligned}$$

zusammen mit der Selbstadjungiertheit ist $\mathcal{H}$ invariant unter $\int (p(\text{Re } z) + q(\text{Im } z)) \; dE(z) = p(\Theta(A)) + q(\Theta(B))$. Die Einschränkung dieses Operators auf $\mathcal{H}$ ist injektiv, da gemäß Lemma 4.6

$$\begin{aligned}\| \int (p(\text{Re } z) + q(\text{Im } z)) \; dE(z)x\|^2 &= \int_{\mathbb{C}} |p(\text{Re } z) + q(\text{Im } z)|^2 \; dE_{x,x}(z) \\ &= \int_{\widetilde{\Delta}} |p(\text{Re } z) + q(\text{Im } z)|^2 \; dE_{x,x}(z) > 0, \; x \in \mathcal{H} \setminus \{0\},\end{aligned}$$

der letzte Integrand strikt positiv ist und $E_{x,x}(\widetilde{\Delta}) = (E(\widetilde{\Delta})x, x) = (x, x) > 0$ gilt. Aufgrund ihrer Injektivität hat die Einschränkung der selbstadjungierten Abbildung $p(\Theta(N)) + q(\Theta(N))$ auf den abgeschlossenen Teilraum $\mathcal{H}$ auch dichtes Bild in $\mathcal{H}$. Sei $x \in$ ran $(p(\Theta(A)) + q(\Theta(B)))|_{\mathcal{H}}$, also $x = (p(\Theta(A)) + q(\Theta(B)))y$ für ein $y \in \mathcal{H}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}&\int_{\widetilde{\Delta}} \frac{p(\text{Re } z)}{p(\text{Re } z) + q(\text{Im} z)} \; dE(z)x \\ =&\int_{\widetilde{\Delta}} \frac{p(\text{Re } z)}{p(\text{Re } z) + q(\text{Im} z)} \; dE(z)(p(\Theta(N)) + q(\Theta(N)))y \\ =&\int_{\widetilde{\Delta}} p(\text{Re } z) \; dE(z)y = p(\Theta(A))y \\ =&R_1R_1^*(p(\Theta(A)) + q(\Theta(B)))y = R_1R_1^*x.\end{aligned}$$

Folglich gilt (4.3) auf einem dichten Teilraum von $\mathcal{H}$. Aufgrund der Beschränktheit der Operatoren gilt (4.3) auf ganz $\mathcal{H}$ und schließlich, weil beide Operatoren auf $\mathcal{H}^\perp$ verschwinden, auf ganz $\mathcal{V}$. □

5 Die Funktionenklassen $\mathcal{M}_N$ und $\mathcal{F}_N$

Für den Verlauf der restlichen Arbeit sei N immer ein beschränkter, linearer, normaler und definisierbarer Operator auf einem Kreinraum $\mathcal{K}$ mit Realteil A und Imaginärteil B sowie definisierenden Polynomen $p \in \mathbb{R}[z] \setminus \{0\}$ für A und $q \in \mathbb{R}[z] \setminus \{0\}$ für B.
Darüber hinaus definieren wir für $m, n \in \mathbb{N}$ die Räume $\mathcal{A}_{m,n} \coloneqq (\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{C}^{m \cdot n+2}$ und $\mathcal{B}_{m,n} \coloneqq \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C}^{m \cdot n}$. Wir werden in weiterer Folge auf diesen beiden Mengen eine Algebrastruktur definieren.

Definition 5.1. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest gewählt. Wir schreiben die Elemente $a \in \mathcal{A}_{m,n}$ als Tupel $a = (a_{k,l})_{(k,l) \in I_{m,n}}$ mit der Indexmenge $I_{m,n} \coloneqq (\{0, ..., m-1\} \times \{0, ..., n-1\}) \cup \{(m, 0), (0, n)\}$ und definieren $\overline{a} \coloneqq (\overline{a}_{k,l})_{(k,l) \in I_{m,n}}$. Wir versehen $\mathcal{A}_{m,n}$ mit Skalarmultiplikation sowie komponentenweiser Addition. Die Multiplikation zweier Elemente $a = (a_{k,l})_{(k,l) \in I_{m,n}}$ und $b = (b_{k,l})_{(k,l) \in I_{m,n}}$ definieren wir durch

$$a \cdot b \coloneqq \left(\sum_{c=0}^{k} \sum_{d=0}^{l} a_{c,d} b_{k-c,l-d} \right)_{(k,l) \in I_{m,n}}. \tag{5.1}$$

Auf $\mathcal{B}_{m,n}$ schreiben wir die Elemente als Tupel $b = (b_{k,l})_{(k,l) \in J_{m,n}}$ mit Indexmenge $J_{m,n} \coloneqq (\{0, ..., m-1\} \times \{0, ..., n-1\})$ und versehen Sie in analoger Art und Weise mit Konjugation, Skalarmultiplikation, Addition und Multiplikation. Zuletzt definieren wir noch die Projektion

$$\pi : \begin{cases} \mathcal{A}_{m,n} \to \mathcal{B}_{m,n} \\ (a_{k,l})_{(k,l) \in I_{m,n}} \mapsto (a_{k,l})_{(k,l) \in J_{m,n}} \end{cases}.$$

Wenn wir $\mathcal{B}_{m,n}$ in natürlicher Weise als Teilraum von $\mathcal{A}_{m,n}$ auffassen, so ist π eingeschränkt auf $\mathcal{B}_{m,n}$ die Identität.

Lemma 5.2. *Für $m, n \in \mathbb{N}$ sind $\mathcal{A}_{m,n}$ und $\mathcal{B}_{m,n}$ kommutative $*$-Algebren mit Einselement. Ein Element a ist genau dann invertierbar, wenn $a_{0,0} \neq 0$.*

Beweis. Wir werden uns im Beweis auf $\mathcal{A}_{m,n}$ beschränken, jener für $\mathcal{B}_{m,n}$ verläuft analog. Die Vektorraumstruktur von $\mathcal{A}_{m,n}$ ist ebenso wie die Abgeschlossenheit unter der Konjugation und der Multiplikation klar. An der Definition der Multiplikation (5.1) sieht man zudem direkt, dass jenes Element a mit $a_{0,0} = 1$ und $a_{k,l} = 0,\ (k,l) \neq (0,0)$ neutral bezüglich der Multiplikation von links ist. Wir werden dieses Element sowohl in $\mathcal{A}_{m,n}$ als auch in $\mathcal{B}_{m,n}$ mit e bezeichnen. Die Kommutativität der Multiplikation folgt schließlich daraus, dass für alle

$(k,l) \in I_{m,n}$ wegen $(c,d),(k-c,l-d) \in I_{m,n}$ für $0 \le c \le k$ und $0 \le d \le l$

$$(a \cdot b)_{k,l} = \sum_{c=0}^{k} \sum_{d=0}^{l} a_{c,d} b_{k-c,l-d} = \sum_{c=0}^{k} \sum_{d=0}^{l} a_{k-c,l-d} b_{c,d} = (b \cdot a)_{k,l}.$$

Für den Beweis der Aussage über Invertierbarkeit bemerken wir zunächst, dass für $a, b \in \mathcal{A}_{m,n}$

$$(a \cdot b)_{0,0} = a_{0,0} b_{0,0}$$

gilt. Dies zeigt uns einerseits, dass Elemente $a \in \mathcal{A}_{m,n}$ mit $a_{0,0} = 0$ nicht invertierbar sein können, andererseits, dass eine mögliche multiplikative Inverse b eines Elements a mit $a_{0,0} \neq 0$ sicher $b_{0,0} = a_{0,0}^{-1}$ erfüllen muss. Wir führen die Notation $(i,j) < (c,d) :\Leftrightarrow (i < c \wedge j \le d) \vee (i \le c \wedge j < d)$ ein und machen für a mit $a_{0,0} \neq 0$ die folgende, induktive Konstruktion. Wichtig zu bemerken ist hierbei, dass bei der Berechnung von $(a \cdot b)_{k,l}$ nur die Einträge von a und b mit Indizes $(i,j) \le (k,l)$ eingehen.

(i) Wir definieren $b_{0,0} = a_{0,0}^{-1}$. Wie wir gesehen haben, ist das äquivalent zu $(a \cdot b)_{0,0} = 1$.

(ii) Sei $(k,l) \in I_{m,n}$ und seien für alle $(i,j) \in I_{m,n},\ (i,j) < (k,l)$, die Einträge $b_{i,j}$ bereits derart gewählt, dass $(a \cdot b)_{0,0} = 1$ und $(a \cdot b)_{c,d} = 0$ für $(0,0) < (c,d) < (k,l)$ gilt. Umformen von

$$(a \cdot b)_{k,l} = \sum_{c=0}^{k} \sum_{d=0}^{l} a_{c,d} b_{k-c,l-d} = a_{0,0} b_{k,l} + a_{k,l} b_{0,0} + \sum_{c=0}^{k-1} \sum_{d=0}^{l-1} a_{c,d} b_{k-c,l-d}$$

ergibt wegen $a_{0,0} \neq 0$

$$b_{k,l} \coloneqq -\frac{1}{a_{0,0}} \left(a_{k,l} b_{0,0} + \sum_{c=0}^{k-1} \sum_{d=0}^{l-1} a_{c,d} b_{k-c,l-d} \right);$$

womit $(a \cdot b)_{k,l} = 0$.

Das so konstruierte $b \in \mathcal{A}_{m,n}$ erfüllt offenbar $a \cdot b = b \cdot a = e$.

□

Definition 5.3. Wir definieren die Funktionen $\mathfrak{d}_p, \mathfrak{d}_q : \mathbb{C} \to \mathbb{N}_0$ durch

$$\mathfrak{d}_p(z) \coloneqq \min\{j \in \mathbb{N}_0 : p^{(j)}(z) \neq 0\},$$
$$\mathfrak{d}_q(z) \coloneqq \min\{j \in \mathbb{N}_0 : q^{(j)}(z) \neq 0\}.$$

Zudem bezeichnen wir die Menge aller reeller Nullstellen von p und q als $Z_p^{\mathbb{R}}$ beziehungsweise $Z_q^{\mathbb{R}}$ und setzen $Z^i \coloneqq (p^{-1}\{0\} \times q^{-1}\{0\}) \setminus (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ $(\subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C})$.

Definition 5.4. Für $z = (\xi, \eta) \in Z^i$ setzen wir $\mathfrak{C}(z) := \mathcal{B}_{\mathfrak{d}_p(\xi),\mathfrak{d}_q(\eta)}$, für $z \in (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ setzen wir $\mathfrak{C}(z) := \mathcal{A}_{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z),\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ z)}$ und für $z \in \sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ setzen wir $\mathfrak{C}(z) := \mathbb{C}$. Damit definieren wir die folgende Klasse von Funktionen.

(i) $\mathcal{M}_N$ bezeichne die Menge aller Funktionen ϕ mit Definitionsbereich

$$\big(\sigma(\Theta(N)) \cup (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})\big) \dot{\cup} Z^i$$

und mit Werten $\phi(z) \in \mathfrak{C}(z)$.

(ii) Wir führen auf $\mathcal{M}_N$ punktweise Skalarmultiplikation, Addition und Multiplikation ein. Für die Multiplikation in $\mathfrak{C}(z)$ sei dabei auf Definition 5.1 verwiesen.

(iii) Ebenso führen wir auf $\mathcal{M}_N$ einen linearen, involutorischen Konjugationsoperator $.^{\#}$ durch

$$\begin{aligned} \phi^{\#}(z) &:= \overline{\phi(z)},\ z \in \sigma(\Theta(N)) \cup (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}}), \\ \phi^{\#}(\xi, \eta) &:= \overline{\phi(\overline{\xi}, \overline{\eta})},\ (\xi, \eta) \in Z^i, \end{aligned}$$

ein.

(iv) Weiters bezeichne $\mathcal{R}$ die Menge aller Elemente $\phi \in \mathcal{M}_N$ derart, dass $\pi(\phi(z)) = 0$ für alle $z \in (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}}) \dot{\cup} Z^i$.

Lemma 5.5. *Mit den soeben definierten Operatoren bildet $\mathcal{M}_N$ eine $*$-Algebra und $\mathcal{R}$ ist ein Ideal ebendieser.*

Beweis. Durch die punktweise Definition der Skalarmultiplikation, der Addition und der Multiplikation sowie der Tatsache, dass es sich bei allen drei Teilen der Zielmenge $\mathfrak{C}(z)$ um kommutative Algebren handelt, ist $\mathcal{M}_N$ offenbar auch eine solche. Darüber hinaus ist $.^{\#}$ per definitionem involutorisch und erfüllt in beiden der in Definition 5.4 unterschiedenen Fälle $(\lambda\phi)^{\#} = \overline{\lambda}\phi^{\#},\ \lambda \in \mathbb{C}$.
Die Idealeigenschaft von $\mathcal{R}$ ergibt sich daraus, dass alle Operationen punktweise definiert sind. Für ein $z \in (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ bedeutet $\pi(\phi(z)) = 0$ nämlich nichts anderes, als dass

$$(\phi(z))_{k,l} = 0 \text{ für alle } (k, l) \in J_{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z),\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ z)}, \tag{5.2}$$

und für ein $z \in Z^i$

$$(\phi(z)) = 0\ (\in \mathcal{B}_{\mathfrak{d}_p(\xi),\mathfrak{d}_q(\eta)}). \tag{5.3}$$

Liegen ϕ und ψ in $\mathcal{R}$, genügen also für alle $z \in (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ der Gleichung (5.2) und für alle $z \in Z^i$ der Gleichung (5.3), so gilt das offenbar auch für $\phi + \lambda\psi,\ \lambda \in \mathbb{C}$ und $\phi^{\#}$. Liegt ϕ in $\mathcal{R}$ und ψ in $\mathcal{M}_N$, dann gilt für alle $z \in (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$, dass

$\pi(\phi(z)\psi(z)) = 0$, weil das Produkt in $\mathcal{A}_{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z),\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ z)}$ gebildet wird und

$$\pi(\phi(z)\psi(z)) = \left(\sum_{c=0}^{k} \sum_{d=0}^{l} \underbrace{\phi(z)_{c,d}}_{=0} \psi(z)_{k-c,l-d} \right)_{(k,l)\in J_{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z),\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ z)}}$$

gilt. Im Falle von $z \in Z^i$ gilt $\phi(z)\psi(z) = 0 \cdot \psi(z) = 0$. Wir erhalten also $\phi\psi \in \mathcal{R}$. $\square$

Definition 5.6. Sei $f : \mathrm{dom}\, f \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathrm{dom}\, f \subseteq \mathbb{C}^2$ derart, dass $\tau\left(\sigma(\Theta(N)) \cup (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})\right) \subseteq \mathrm{dom}\, f$, wobei $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2,\ (x+iy) \mapsto (x,y)$, und dass $f \circ \tau$ auf einer offenen Obermenge von $Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}}$ mindestens $\max_{x,y\in\mathbb{R}} \left(\mathfrak{d}_p(x) + \mathfrak{d}_q(y)\right) - 1$ mal stetig differenzierbar sowie f auf einer offenen Obermenge von Z^i holomorph ist. Dann können wir f als ein Element f_N von $\mathcal{M}_N$ auffassen, indem wir

$$\begin{aligned} f_N(z) &:= f \circ \tau(z),\ z \in \sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}}), \\ f_N(z) &:= \left(\frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^k \partial y^l} f \circ \tau(z) \right)_{(k,l)\in J_{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z),\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ z)}},\ z \in Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}}, \\ f_N(\xi,\eta) &:= \left(\frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{k+1}}{\partial z^k \partial w^l} f(\xi,\eta) \right)_{\substack{0\le k\le \mathfrak{d}_p(\xi)-1, \\ 0\le l\le \mathfrak{d}_q(\eta)-1}},\ (\xi,\eta) \in Z^i. \end{aligned}$$

setzen.

Bemerkung 5.7. Die Zuordnung $f \mapsto f_N$ ist mit Addition und Skalarmultiplikation und wegen der Produktregel für partielle Ableitungen sowie der Definition der Multiplikation in $\mathcal{M}_N$ sogar mit der Multiplikation verträglich. Definiert man für Funktionen f wie in Definition 5.6 $f^{\#}$ als $\overline{f(\overline{z},\overline{w})}$, dann gilt auch $(f^{\#})_N = (f_N)^{\#}$.

Beispiel 5.8. Für die konstante Einsfunktion $\mathbb{1}$ auf $\mathbb{C}^2$ gilt $\mathbb{1}_N(z) = e_z$ für alle $z \in (\sigma(\Theta(N)) \cup (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})) \cup Z^i$, wobei e_z immer das multiplikative neutrale Element der $*$-Algebra $\mathfrak{C}(z)$ bezeichnet.

Beispiel 5.9. Fassen wir das definisierende Polynom $p(z) \in \mathbb{R}[z]$ als Element von $\mathbb{C}[z,w]$ auf, so ist p holomorph auf $\mathbb{C}^2$ und für p_N gilt

$$p_N(z)_{k,l} = 0,\ (k,l) \in I_{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z),\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ z)\setminus\{(\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z),0)\}}, \tag{5.4}$$

und

$$p_N(z)_{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z),0} = \frac{1}{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z)!} p^{(\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z))}(\mathrm{Re}\ z),$$

für alle $z \in (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$. Aufgrund der Definition von $\mathfrak{d}_p$ ist $\mathrm{Re}\ z$ immer eine Nullstelle von p vom Grad $\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z)$, weshalb die Einträge mit Index $(\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z), 0)$ nicht gleich 0 sind. Außerdem gilt für $z \in Z^i$, dass $p_N(z) = 0$, womit p_N ein nichttriviales Element von $\mathcal{R}$ ist. Auf dieselbe Art und Weise[10] lässt sich schließen, dass auch q_N ein nichttriviales Element von $\mathcal{R}$ ist.

Proposition 5.10. *Seien $s(z,w) \in \mathbb{C}[z,w]$ vom z-Grad k und w-Grad l sowie $a \in \mathbb{C}[z] \setminus \{0\}$ vom Grad m. Dann existieren Polynome $u(z,w) \in \mathbb{C}[z,w]$ und $t(z,w) \in \mathbb{C}[z,w]$, derart, dass der z- und w-Grad von t kleiner als m beziehungsweise kleiner gleich l ist und dass*

$$s(z,w) = a(z)u(z,w) + t(z,w).$$

Beweis. Die Polynome s und a haben eine Darstellung $s[z,w] = \sum_{\substack{i\leq k,\\ j\leq l}} s_{i,j} z^i w^j$ und $a(z) = \sum_{n\leq m} a_n z^n$. Im Fall $k < m$ können wir $u = 0$ und $t = s$ setzen, gilt $k = m$ erfüllen $u(z,w) = \frac{1}{a_m}\sum_{j\leq l} s_{k,j} w^j$ und $t(z,w) = s(z,w) - a(z)(u(z,w)$ das Gewünschte. Wir können uns also im restlichen Beweis auf den Fall $k > m$ beschränken. Wir fassen das Polynom $s[z,w]$ als Polynom $s_w(z) = \sum_{i\leq k} \beta_i(w) z^i$ über dem Ring $\mathbb{C}[w]$ und abhängig von $z \in \mathbb{C}$ auf. Die $\beta_i(w)$ haben dabei Grad $\leq l$. Nach Voraussetzung gilt $a_m \neq 0$ und wir erhalten

$$s_w(z) - \frac{\beta_k(w)}{a_m} z^{k-m} a(z) = \gamma_{k-1}(w) z^{k-1} + \cdots + \gamma_0(w)$$

mit Polynomen $\gamma_j(w) \in \mathbb{C}[w]$ vom Grad $\leq l$. Gehen wir induktiv vor, erhalten wir zunächst

$$s_w(z) - \frac{\beta_k(w)}{a_m} z^{k-m} a(z) - \frac{\gamma_{k-1}(w)}{a_m} z^{k-1-m} a(z) = \delta_{k-2}(w) z^{k-1} + \cdots + \delta_0(w),$$

wiederum mit Polynomen $\delta_j(w) \in \mathbb{C}[w]$ vom Grad $\leq l$, und schließlich nach insgesamt $k - m + 1$ Schritten

$$s_w(z) - u(z,w)a(z) = \underbrace{\omega_{m-1}(w) z^{m-1} + \cdots + \omega_0(w)}_{=t(z,w)}$$

mit Polynomen $\omega_j(w) \in \mathbb{C}[w]$ vom Grad $\leq l$. □

Lemma 5.11. *Seien $a(z), b(z) \in \mathbb{C}[z] \setminus \{0\}$ Polynome von echt positiven Graden m und n. Weiters bezeichne $a^{-1}\{0\}$ die Nullstellen von a und setze $\mathfrak{d}_a(z) := \min\{j \in \mathbb{N}_0 : a^{(j)}(z) \neq 0\}$. $b^{-1}\{0\}$ sowie $\mathfrak{d}_b(z)$ seien analog definiert. Dann lässt sich jedes Polynom $s \in \mathbb{C}[z,w]$ als*

$$s(z,w) = a(z)u(z,w) + b(w)v(z,w) + r(z,w)$$

mit $u, v, r \in \mathbb{C}[z,w]$ schreiben, wobei der z-Grad und der w-Grad von r kleiner als m beziehungsweise n ist. Liegen a und b in $\mathbb{R}[z]$ und s in $\mathbb{R}[z,w]$, können u, v und w in $\mathbb{R}[z,w]$ gewählt werden.

[10] Hier verschwinden die Einträge mit Index $(0, \mathfrak{d}_q(\operatorname{Im} z))$ nicht.

Definieren wir $\varpi : \mathbb{C}[z,w] \to \mathbb{C}^{m\cdot n}$ *durch*

$$\varpi(s) = \left(\left(\frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial w^l} s(z,w) \right)_{\substack{0\le k\le \mathfrak{d}_a(z)-1 \\ 0\le l\le \mathfrak{d}_b(w)-1}} \right)_{z\in a^{-1}\{0\}, w\in b^{-1}\{0\}},$$

gilt $s \in \ker \varpi$ *genau dann, wenn* $s(z,w) = a(z)u(z,w) + b(w)v(z,w)$ *mit Polynomen* $u, v \in \mathbb{C}[z,w]$.
Betrachten wir ϖ *eingeschränkt auf den Raum aller Polynome in* $\mathbb{C}[z,w]$, *deren Grad bezüglich* z *kleiner als* m *und deren Grad bezüglich* w *kleiner als* n *ist, so ist* ϖ *bijektiv.*

Beweis. Gemäß Proposition 5.10 gibt es eine Darstellung

$$s(z,w) = a(z)u(z,w) + t(z,w)$$

mit Polynomen $u, t \in \mathbb{C}[z,w]$, wobei der z-Grad von t kleiner ist als m. Wenden wir die Proposition ein zweites Mal auf $t(z,w)$ und $b(w)$ mit vertauschten Rollen von z und w an, erhalten wir

$$s(z,w) = a(z)u(z,w) + b(w)v(z,w) + r(z,w) \tag{5.5}$$

mit Polynomen $v, r \in \mathbb{C}[z,w]$, wobei der z-Grad von r kleiner ist als m und der w-Grad kleiner ist als n. Haben die Ausgangspolynome s, a und b allesamt reelle Koeffizienten, kann der Algorithmus im Beweis der Proposition 5.10 vollständig in $\mathbb{R}[z,w]$ durchgeführt werden und wir erhalten $u, v, r \in \mathbb{R}[z,w]$.
Weil wir uns in der Definition von ϖ auf $z \in a^{-1}\{0\}$ und $w \in b^{-1}\{0\}$ beschränken und immer nur partielle Ableitungen bis zum Grad $\mathfrak{d}_a(z) - 1$ beziehungsweise $\mathfrak{d}_b(w) - 1$ betrachten, ist mit der Darstellung (5.5) klar, dass $\varpi(s) = \varpi(r)$. Lässt sich also $s(z,w)$ in (5.5) mit $r = 0$ darstellen, gilt sicher $s \in \ker \varpi$. Gilt umgekehrt dass $s \in \ker \varpi$, so muss auch $r \in \ker \varpi$ gelten. Nach der Definition von ϖ bedeutet das, dass das Polynom $w \mapsto \frac{\partial^k}{\partial z^k} r(\zeta, w)$ für festes $\zeta \in a^{-1}\{0\}$ und $k \in \{0, \dots, \mathfrak{d}_a(\zeta) - 1\}$ in allen $w \in b^{-1}\{0\}$ Nullstellen von mindestens der Vielfachheit $\mathfrak{d}_a(w)$ hat. Gleichzeitig ist der Grad des Polynoms $w \mapsto \frac{\partial^k}{\partial z^k} r(\zeta, w)$ kleiner gleich dem w-Grad von r und damit kleiner n. Als Konsequenz muss $w \mapsto \frac{\partial^k}{\partial z^k} r(\zeta, w)$ das Nullpolynom sein.
Daraus lässt sich direkt ableiten, dass das Polynom $z \mapsto r(z, \eta)$ für jedes feste $\eta \in \mathbb{C}$ in allen $\zeta \in a^{-1}\{0\}$ Nullstellen der Vielfachheit größer gleich $\mathfrak{d}_a(\zeta)$ hat. Gleichzeitig muss der Grad des Polynoms aber kleiner als m sein, folglich gilt $z \mapsto r(z, \eta) \equiv 0$. Weil $\eta \in \mathbb{C}$ beliebig war, folgt daraus $r(z,w) \equiv 0$.
Für den Beweis der Bijektivität der Einschränkung von ϖ sei $s(z,w) \in \mathbb{C}[z,w]$ mit z-Grad kleiner m und w-Grad kleiner n derart, dass $s \in \ker \varpi$. Wie wir weiter oben im Beweis gezeigt haben, gibt es dann Polynome $u, v \in \mathbb{C}[z,w]$ mit $s(z,w) = a(z)u(z,w) + b(w)v(z,w)$. Weil sowohl der z- als auch der w-Grad von s kleiner sind als jene von a beziehungsweise b, muss $u = v = 0$ und somit $s = 0$ gelten. Also ist die Einschränkung von ϖ injektiv, was aufgrund der

$(m \cdot n)$-Dimensionalität des Bildraums bereits die Bijektivität impliziert. $\square$

Korollar 5.12. *Ist $\phi \in \mathcal{M}_N$ fest, dann gibt es ein $s \in \mathbb{C}[z,w]$ mit $\phi - s_N \in \mathcal{R}$.*

Beweis. Aufgrund der in Lemma 5.11 gezeigten Surjektivität von ϖ auf $\mathbb{C}^{m \cdot n}$ gibt es $s \in \mathbb{C}[z,w]$ derart, dass

$$(\varpi(s))_{\text{Re } z, \text{Im } z} = \pi(\phi(z)),\ z \in Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}}$$

und

$$(\varpi(s))_{\xi,\eta} = \phi(\xi,\eta),\ (\xi,\eta) \in Z^i.$$

Folglich gilt $\pi(\phi(z) - s_N(z)) = 0$ für alle $z \in (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})\dot{\cup} Z^i$, womit $\phi - s_N$ in $\mathcal{R}$ liegt. $\square$

Bemerkung 5.13. Wie wir in Lemma 4.6 gesehen haben, sind die Nullstellen von $p(\text{Re } z) + q(\text{Im } z)$ in $\rho(\Theta(N)) \cup \{z \in \mathbb{C} : p(\text{Re } z) = q(\text{Im } z) = 0\}$ enthalten. Somit folgt aus $p(\text{Re } z) + q(\text{Im } z) = 0$ und $z \notin \rho(\Theta(N))$ die Gleichheit $p(\text{Re } z) = q(\text{Im } z) = 0$, also $z \in Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}}$. Dadurch wird folgende Konstruktion möglich. Zu $\phi \in \mathcal{R}$ definieren wir auf $\sigma(\Theta(N))$ die Funktion g wie folgt. Für $z \in \sigma(\Theta(N)) \setminus Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}}$ setzen wir

$$g(z) := \frac{\phi(z)}{p(\text{Re } z) + q(\text{Im } z)},$$

und für $z \in \sigma(\Theta(N)) \cap (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$

$$g_1(z) := \frac{\mathfrak{d}_p(\text{Re } z)!\phi(z)_{\mathfrak{d}_p(\text{Re } z),0}}{p^{(\mathfrak{d}_p(\text{Re } z))}(\text{Re } z)}, \quad g_2(z) := \frac{\mathfrak{d}_q(\text{Im } z)!\phi(z)_{0,\mathfrak{d}_q(\text{Im } z)}}{q^{(\mathfrak{d}_q(\text{Im } z))}(\text{Im } z)}.$$

Für $z \in \sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ gilt also[11]

$$\begin{aligned}(p_N + q_N)(z) \cdot g(z) &= (p+q) \circ \tau(z) \cdot g(z) \\ &= (p(\text{Re } z, \text{Im } z) + q(\text{Re } z, \text{Im } z)) \cdot \frac{\phi(z)}{p(\text{Re } z) + q(\text{Im } z)} = \phi(z),\end{aligned}$$

wobei hier die Multiplikation punktweise im Körper $\mathbb{C}$ ausgeführt wird.
Im Fall $z \in \sigma(\Theta(N)) \cap (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ berechnen wir $(p_N + q_N)(z) \cdot g(z)$ punktweise in $\mathcal{A}_{\mathfrak{d}_p(\text{Re } z), \mathfrak{d}_q(\text{Im } z)}$ und damit gemäß Definition 5.1 komponentenweise. Für $k = 0, \dots, \mathfrak{d}_p(\text{Re } z) - 1$ und $l = 0, \dots, \mathfrak{d}_q(\text{Im } z) - 1$ ergibt sich wegen (5.4)

$$((p_n + q_n)(z) \cdot g(z))_{k,l} = \sum_{c=0}^{k} \sum_{d=0}^{l} (p_N(z) + q_N(z))_{c,d} g(z)_{k-c,l-d} = 0.$$

[11] Zu beachten ist hier, dass p in zwei Formen auftritt. Einmal als Polynom $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ und einmal als $p(z,w) \in \mathbb{C}[z,w]$, das aber nur von der ersten Variable abhängt. Ähnliches gilt für $q(z)$, welches aufgefasst als $q(z,w) \in \mathbb{C}[z,w]$ nur von der zweiten Variable abhängt.

Bei den beiden verbleibenden Indizes hingegen erhalten wir

$$((p_n + q_n)(z) \cdot g(z))_{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z),0} = (p_n + q_n)(z)_{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z),0} \cdot g_1(z) = \phi(z)_{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z),0},$$

und

$$((p_n + q_n)(z) \cdot g(z))_{0,\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ z)} = (p_n + q_n)(z)_{0,\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ z)} \cdot g_2(z) = \phi(z)_{0,\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ z)}.$$

Für $\phi \in \mathcal{R}$ gibt es also eine auf $\sigma(\Theta(N))$ definierte Funktion g, die für $z \in \sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ Werte in $\mathbb{C}$ und für $z \in \sigma(\Theta(N)) \cap (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ Werte in $\mathbb{C}^2$ annimmt, sodass

$$\phi(z) = (p_N + q_N)(z) \cdot g(z),\ z \in \sigma(\Theta(N)).$$

Definition 5.14. Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}_N$ die Menge aller $\phi \in \mathcal{M}_N$, für die die Abbildung $z \mapsto \phi(z)$ auf $\sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ Borel-messbar und beschränkt ist und für die für alle $w \in \sigma(\Theta(N)) \cap (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ die Abbildung

$$z \mapsto \frac{\phi(z) - \sum_{k=0}^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)-1} \sum_{l=0}^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)-1} \phi(w)_{k,l} \mathrm{Re}(z-w)^k \mathrm{Im}(z-w)^l}{\max(|\mathrm{Re}(z-w)|^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)}, |\mathrm{Im}(z-w)|^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)})} \tag{5.6}$$

mit $z \in \sigma(\Theta(N)) \cap U(w) \setminus \{w\}$ beschränkt ist, wobei $U(w)$ eine hinreichend kleine Umgebung von w ist.

Bemerkung 5.15. In der Situation der vorangegangenen Definition 5.14 ist die Beschränktheit von (5.6) für in $\sigma(\Theta(N))$ isolierte Punkte $w \in \sigma(\Theta(N)) \cap (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ auf triviale Art und Weise erfüllt.

Beispiel 5.16. Betrachte für festes $\zeta \in (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}}) \dot\cup Z^i$ und festes $a \in \mathfrak{C}(\zeta)$ die Funktion $a\delta_\zeta \in \mathcal{M}_N$, die an der Stelle ζ dem Wert a und überall sonst auf $\big(\sigma(\Theta(N)) \cup (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})\big) \dot\cup Z^i$ den Wert 0 annimmt. Liegt ζ in Z^i oder ist ein isolierter Punkt von $\sigma(\Theta(N)) \cup (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$, dann gilt $a\delta_\zeta \in \mathcal{F}_N$.

Bemerkung 5.17. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{C}$ offen sowie $h : D \to \mathbb{C}$ auf D mindestens $m+n-1$ mal stetig differenzierbar. Zudem sei $w \in D$ fest gewählt. Nach dem mehrdimensionalen Taylorschen Approximationssatz gilt

$$h(z) = \sum_{j=0}^{m+n-2} \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{N}_0 \\ k+l=j}} \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^j h}{\partial x^k \partial y^l}(w) \mathrm{Re}(z-w)^k \mathrm{Im}(z-w)^l + O(|z-w|^{m+n-1})$$

für z hinreichend nah bei w. Mit den Abschätzungen

$$\begin{aligned} |z-w|^{n+m-1} \leq& 2^{m+n-1} \max(|\mathrm{Re}(z-w)|^{m+n-1}, |\mathrm{Im}(z-w)|^{m+n-1}) \\ =& O(\max(|\mathrm{Re}(z-w)|^m, |\mathrm{Im}(z-w)|^n) \end{aligned} \tag{5.7}$$

und

$$\operatorname{Re}(z-w)^k \operatorname{Im}(z-w)^l = O(\max(|\operatorname{Re}(z-w)|^m, |\operatorname{Im}(z-w)|^n),\ k \geq m \vee l \geq n,$$

können wir daraus auch

$$h(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{k+l} h}{\partial x^k \partial y^l}(w) \operatorname{Re}(z-w)^k \operatorname{Im}(z-w)^l \\ + O(\max(|\operatorname{Re}(z-w)|^m, |\operatorname{Im}(z-w)|^n)$$

folgern.

Lemma 5.18. *Für eine Funktion* $f\colon \operatorname{dom} f \to \mathbb{C}$ *wie in Definition 5.6 beschrieben gilt* $f_N \in \mathcal{F}_N$.

Beweis. Für $w \in \sigma(\Theta(N)) \cap (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ und $z \in \sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ gilt nach Bemerkung 5.17, dass

$$\begin{aligned} & f_N(z) - \sum_{k=0}^{\mathfrak{d}_p(\operatorname{Re} w)-1} \sum_{l=0}^{\mathfrak{d}_q(\operatorname{Im} w)-1} f_N(w)_{k,l} \operatorname{Re}(z-w)^k \operatorname{Im}(z-w)^l \\ =& f \circ \tau(z) - \sum_{k=0}^{\mathfrak{d}_p(\operatorname{Re} w)-1} \sum_{l=0}^{\mathfrak{d}_q(\operatorname{Im} w)-1} \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{k+l} f \circ \tau}{\partial x^k \partial y^l}(w) \operatorname{Re}(z-w)^k \operatorname{Im}(z-w)^l \end{aligned} \tag{5.8}$$

für $z \to w$ asymptotisch durch $\max(|\operatorname{Re}(z-w)|^{\mathfrak{d}_p(\operatorname{Re} w)}, |\operatorname{Im}(z-w)|^{\mathfrak{d}_q(\operatorname{Im} w)})$ beschränkt ist, womit die zweite Bedingung in Definition 5.14 erfüllt ist. Weil $f \circ \tau$ nach Voraussetzung auf einer Umgebung von $Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}}$ hinreichend glatt ist, liefert uns (5.8) gemeinsam mit Bemerkung 5.17 aber auch die Beschränktheit von f_N auf $\sigma(\Theta(N)) \setminus Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}}$ und wir erhalten $f_N \in \mathcal{F}_N$. □

Lemma 5.19. *Sei* $\phi \in \mathcal{F}_N$ *derart, dass für alle* $z \in \left(\sigma(\Theta(N)) \cup (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})\right) \dot\cup Z^i$ *der Ausdruck* $\phi(z)$ *in* $\mathfrak{C}(z)$ *invertierbar ist und zudem* 0 *nicht im Abschluss von* $\phi\left(\sigma(\Theta(N)) \setminus Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}}\right)$ *liegt. Definieren wir die Funktion* ϕ^{-1} *durch* $\phi^{-1}(z) := (\phi(z))^{-1}$, $z \in \left(\sigma(\Theta(N)) \cup (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})\right) \dot\cup Z^i$, *dann gilt auch* $\phi^{-1} \in \mathcal{F}_N$.

Beweis. Wegen der angenommenen Invertierbarkeit von $\phi(z)$ für alle $z \in \left(\sigma(\Theta(N)) \cup (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})\right) \dot\cup Z^i$ ist die Funktion ϕ^{-1} wohldefiniert und liegt in $\mathcal{M}_N$. Auch die Messbarkeit von $z \mapsto \frac{1}{\phi(z)}$ auf $\sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ ist durch jene von ϕ sichergestellt. Die Annahme $z \notin \overline{\phi\left(\sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})\right)}$ ist gleichbedeutend mit $\operatorname{dist}(0, \phi\left(\sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})\right) > 0$, wodurch ϕ^{-1} auf $\sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ wie in Definition 5.14 gefordert beschränkt ist. Die Beschränktheit von (5.6) nachzuweisen erfordert etwas mehr Aufwand. Seien also

$w \in \sigma(\Theta(N)) \cap (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ und $z \in \sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$. Zunächst gilt

$$\phi^{-1}(z) - \sum_{k=0}^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)-1} \sum_{l=0}^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)-1} \phi^{-1}(w)_{k,l} \mathrm{Re}(z-w)^k \mathrm{Im}(z-w)^l \tag{5.9}$$

$$= \frac{1}{\phi(z)} - \frac{1}{\sum_{k=0}^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)-1} \sum_{l=0}^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)-1} \phi(w)_{k,l} \mathrm{Re}(z-w)^k \mathrm{Im}(z-w)^l} \tag{5.10}$$

$$+ \frac{1}{\sum_{k=0}^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)-1} \sum_{l=0}^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)-1} \phi(w)_{k,l} \mathrm{Re}(z-w)^k \mathrm{Im}(z-w)^l} \tag{5.11}$$

$$- \sum_{k=0}^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)-1} \sum_{l=0}^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)-1} \phi^{-1}(w)_{k,l} \mathrm{Re}(z-w)^k \mathrm{Im}(z-w)^l. \tag{5.12}$$

Der Ausdruck in Zeile (5.10) lässt sich auch als

$$\frac{1}{\phi(z)} \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)-1} \sum_{l=0}^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)-1} \phi(w)_{k,l} \mathrm{Re}(z-w)^k \mathrm{Im}(z-w)^l} \tag{5.13}$$

$$\cdot \left(\sum_{k=0}^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)-1} \sum_{l=0}^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)-1} \phi(w)_{k,l} \mathrm{Re}(z-w)^k \mathrm{Im}(z-w)^l - \phi(z) \right) \tag{5.14}$$

schreiben. Hier ist $\phi(z)$ nach Voraussetzung beschränkt und da die Invertierbarkeit von $\phi(w)$, wie in Lemma 5.2 beschrieben, $\phi(w)_{0,0} \neq 0$ impliziert, gilt für den Nenner für $z \to w$

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)-1} \sum_{l=0}^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)-1} \phi(w)_{k,l} \mathrm{Re}(z-w)^k \mathrm{Im}(z-w)^l} = O(1).$$

Weil wir $\phi \in \mathcal{F}_N$ angenommen haben, ist der Ausdruck in Zeile (5.14) sicher $O\left(\max(|\mathrm{Re}(z-w)|^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)}, |\mathrm{Im}(z-w)|^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)})\right)$, $z \to w$ und wir erhalten, dass der ganze Ausdruck (5.10) ein $O\left(\max(|\mathrm{Re}(z-w)|^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)}, |\mathrm{Im}(z-w)|^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)})\right)$, $z \to w$ ist.

Um die Ausdrücke in den Zeilen (5.11) und (5.12) umzuschreiben, bemerken wir zuerst, dass für das Produkt des Nenners von (5.11) und (5.12)

$$\left(\sum_{k=0}^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)-1} \sum_{l=0}^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)-1} \phi(w)_{k,l} \mathrm{Re}(z-w)^k \mathrm{Im}(z-w)^l \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)-1} \sum_{j=0}^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)-1} \phi^{-1}(w)_{i,j} \mathrm{Re}(z-w)^i \mathrm{Im}(z-w)^j \right) =$$

$$\sum_{k=0}^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)-1}\sum_{l=0}^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)-1}\sum_{i=0}^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)-1}\sum_{j=0}^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)-1}\big(\phi(w)_{k,l}\phi^{-1}(w)_{i,j}\cdot \mathrm{Re}(z-w)^{k+i}\mathrm{Im}(z-w)^{l+j}\big) =$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)-1}\sum_{l=0}^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)-1}\mathrm{Re}(z-w)^k\mathrm{Im}(z-w)^l\cdot \left(\sum_{c=0}^{k}\sum_{d=0}^{l}\phi(w)_{c,d}\cdot\phi^{-1}(w)_{k-c,l-d}\right)\right)$$

$$+\sum_{\substack{k,i\leq\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)-1,\\ l,j\leq\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)-1,\\ (k+i\geq\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w))\vee(l+j\geq\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w))}}\phi(w)_{k,l}\phi^{-1}(w)_{i,j}\cdot\mathrm{Re}(z-w)^{k+i}\mathrm{Im}(z-w)^{l+j}. \tag{5.15}$$

Die letzte Zeile von (5.15) ist mit einer ähnlichen Abschätzung wie in (5.7) ein $O\left(\max(|\mathrm{Re}(z-w)|^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)}, |\mathrm{Im}(z-w)|^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)})\right)$. Das erlaubt unter der Verwendung von $\phi(w)\cdot\phi^{-1}(w)=e$ die Umformung

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)-1}\sum_{l=0}^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)-1}\phi(w)_{k,l}\mathrm{Re}(z-w)^k\mathrm{Im}(z-w)^l} - \sum_{k=0}^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)-1}\sum_{l=0}^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)-1}\phi^{-1}(w)_{k,l}\mathrm{Re}(z-w)^k\mathrm{Im}(z-w)^l =$$

$$-\frac{1}{\sum_{k=0}^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)-1}\sum_{l=0}^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)-1}\phi(w)_{k,l}\mathrm{Re}(z-w)^k\mathrm{Im}(z-w)^l}$$

$$\cdot\left(\sum_{k=0}^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)-1}\sum_{l=0}^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)-1}\mathrm{Re}(z-w)^k\mathrm{Im}(z-w)^l \cdot\left(\sum_{c=0}^{k}\sum_{d=0}^{l}\phi(w)_{c,d}\cdot\phi^{-1}(w)_{k-c,l-d}\right) + O\left(\max(|\mathrm{Re}(z-w)|^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ w)}, |\mathrm{Im}(z-w)|^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ w)})\right) - 1\right) =$$

$$O(1) \cdot O\left(\max(|\mathrm{Re}(z-w)|^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\, w)}, |\mathrm{Im}(z-w)|^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\, w)})\right) = \\ O\left(\max(|\mathrm{Re}(z-w)|^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\, w)}, |\mathrm{Im}(z-w)|^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\, w)})\right)$$

für $z \to w$. Also ist der gesamte Ausdruck (5.9) ein $O\big(\max(|\mathrm{Re}(z-w)|^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\, w)}, |\mathrm{Im}(z-w)|^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\, w)})\big)$ für $z \to w$, womit wir $\phi^{-1} \in \mathcal{F}_N$ gezeigt haben. □

6 Funktionalkalkül

Lemma 6.1. *Für alle $\phi \in \mathcal{F}_N$ existiert ein $s \in \mathbb{C}[z,w]$ und eine Funktion g auf $\sigma(\Theta(N))$, die auf $\sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ Werte in $\mathbb{C}$ und auf $\sigma(\Theta(N)) \cap (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ Werte in $\mathbb{C}^2$ annimmt und zusätzlich auf $\sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ messbar und beschränkt ist, sodass $\phi - s_N \in \mathcal{R}$ und*

$$\phi(z) = s_N(z) + (p_N + q_N)(z) \cdot g(z), \quad z \in \sigma(\Theta(N)). \tag{6.1}$$

Die Multiplikation ist dabei wie in Bemerkung 5.13 zu verstehen.

Beweis. Nach Korollar 5.12 gibt es ein $s \in \mathbb{C}[z,w]$ mit $\phi - s_N \in \mathcal{R}$ und nach Bemerkung 5.13 gibt es g derart, dass (6.1) gilt.[12] Weil nach Voraussetzung ϕ ein Element von $\mathcal{F}_N$ und damit auf $\sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ messbar ist, ist es auch

$$g(z) = \frac{\phi(z) - s_N(z)}{p(\mathrm{Re}\, z) + q(\mathrm{Im}\, z)} = \frac{\phi(z) - s(\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z)}{p(\mathrm{Re}\, z) + q(\mathrm{Im}\, z)}, \ z \in \sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}}).$$

Um die Beschränktheit von g auf $\sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ zu zeigen, sei daran erinnert, dass nach Lemma 4.6 auf ganz $\sigma(\Theta(N))$

$$\max(|p(\mathrm{Re}\, z)|, |q(\mathrm{Im}\, z)|) \leq (\max(\|R_1 R_1^*\|, \|R_2 R_2^*\|) \cdot |p(\mathrm{Re}\, z) + q(\mathrm{Im}\, z)|),$$

gilt, was sich auf $\sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ zu

$$\frac{\max(|p(\mathrm{Re}\, z)|, |q(\mathrm{Im}\, z)|)}{|p(\mathrm{Re}\, z) + q(\mathrm{Im}\, z)|)} \leq \max(\|R_1 R_1^*\|, \|R_2 R_2^*\|) \tag{6.2}$$

umschreiben lässt. Darüber hinaus finden wir wegen $\phi \in \mathcal{F}_N$ für alle $w \in \sigma(\Theta(N)) \cap (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ eine Umgebung $U(w)$ derart, dass (5.6) auf $\sigma(\Theta(N)) \cap U(w) \setminus \{w\}$ beschränkt ist. Weil eine Verkleinerung dieser Umgebungen nichts an der Beschränktheit ändert und $\sigma(\Theta(N)) \cap (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ eine endliche Menge ist, können diese Umgebungen auch paarweise disjunkt gewählt werden.
Für $w \in \sigma(\Theta(N)) \cap (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ ist $\mathrm{Re}\, w$ ($\mathrm{Im}\, w$) eine Nullstelle von $p(\mathrm{Re}\, z)$ ($q(\mathrm{Im}\, z)$) mit Vielfachheit $\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\, w)$ ($\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\, w)$). Daher gibt es Konstanten $c, d > 0$, mit denen für $z \in U(w)$

$$c|\mathrm{Re}\,(z-w)|^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\, w)} \leq |p(\mathrm{Re}\, z)| \ \text{ und } \ d|\mathrm{Im}\,(z-w)|^{\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\, w)} \leq |q(\mathrm{Im}\, z)|$$

[12] Hier wenden wir die Bemerkung mit $\phi - s_N$ an der Stellen von ϕ an.

gilt, woraus die Existenz einer Konstante $C_w > 0$ mit

$$\frac{\max(|\text{Re }(z-w)|^{\mathfrak{d}_p(\text{Re }w)}, |\text{Im }(z-w)|^{\mathfrak{d}_q(\text{Im }w)})}{\max(|p(\text{Re }z)|, |q(\text{Im }z)|)} \leq C_w \tag{6.3}$$

für $z \in \sigma(\Theta(N)) \cap U(w) \setminus \{w\}$ folgt.
Dass $\phi - s_N$ in $\mathcal{R}$ enthalten ist, impliziert $\pi(\phi(w) - s_N(w)) = 0$, also dass

$$\phi(w)_{k,l} = \frac{1}{k!l!}\frac{\partial^{k+l}s}{\partial x^k y^l}(\text{Re }w, \text{Im }w), \ {}_{\substack{0\leq k\leq \mathfrak{d}_p(\text{Re }w)-1,\\ 0\leq l\leq \mathfrak{d}_q(\text{Im }w)-1}}.$$

Setzen wir das in die in Bemerkung 5.17 ausgeführte Approximation von s(Re z, Im z) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} s(\text{Re }z, \text{Im }z) = &\sum_{k=0}^{\mathfrak{d}_p(\text{Re }w)-1}\sum_{l=0}^{\mathfrak{d}_q(\text{Im }w)-1} \phi(w)_{k,l}\text{Re}(z-w)^k\text{Im}(z-w)^l \\ &+ O\left(\max(|\text{Re}(z-w)|^{\mathfrak{d}_p(\text{Re }w)}, |\text{Im}(z-w)|^{\mathfrak{d}_q(\text{Im }w)})\right). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Aus (6.2), (6.3), (6.4) und der Beschränktheit von (5.6) folgt damit schließlich jene von

$$g(z) = \frac{\phi(z) - s(\text{Re }z, \text{Im }z)}{p(\text{Re }z) + q(\text{Im }z)} = \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\max(|p(\text{Re }z)|, |q(\text{Im }z)|)}{p(\text{Re }z) + q(\text{Im }z)} \\ &\quad\cdot \frac{\max(|\text{Re }(z-w)|^{\mathfrak{d}_p(\text{Re }w)}, |\text{Im }(z-w)|^{\mathfrak{d}_q(\text{Im }w)})}{\max(|p(\text{Re }z)|, |q(\text{Im }z)|)} \\ &\qquad\cdot \frac{\phi(z) - s(\text{Re }z, \text{Im }z)}{\max(|\text{Re }(z-w)|^{\mathfrak{d}_p(\text{Re }w)}, |\text{Im }(z-w)|^{\mathfrak{d}_q(\text{Im }w)})} \end{aligned}$$

für $z \in \sigma(\Theta(N)) \cap U(w) \setminus \{w\}$. Weil darüber hinaus nach Lemma 4.6 die Funktion $\frac{1}{p(\text{Re }z)+q(\text{Im }z)}$ stetig und damit beschränkt auf $\sigma(\Theta(N)) \setminus \bigcup_{w \in \sigma(\Theta(N)) \cap (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})} U(w)$ ist, ist (6.5) beschränkt auf ganz $\sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$. □

Definition 6.2. Für $\phi \in \mathcal{F}_N$ definieren wir

$$\phi(N) := s(A, B) + \Xi\left(\int_{\sigma(\Theta(N))}^{R_1, R_2} g\, dE\right),$$

wobei $s \in \mathbb{C}[z,w]$ und die Funktion g wie in Lemma 6.1 gewählt sind und wobei

$$\int_{\sigma(\Theta(N))}^{R_1,R_2} g\,dE := \int_{\sigma(\Theta(N))\setminus(Z_p^{\mathbb{R}}+iZ_q^{\mathbb{R}})} g\,dE + \sum_{w\in\sigma(\Theta(N))\cap(Z_p^{\mathbb{R}}+iZ_q^{\mathbb{R}})} \left(g(w)_1 R_1 R_1^* E\{w\} + g(w)_2 R_2 R_2^* E\{w\}\right).$$

Dass $\phi(N)$ wohldefiniert ist, zeigt der folgende Satz.

Satz 6.3. *Seien $\phi \in \mathcal{F}_N, s, \tilde{s} \in \mathbb{C}[z,w]$ und Funktionen $g, \tilde{g}$ auf $\sigma(\Theta(N))$ derart, dass sowohl s und g als auch $\tilde{s}$ und $\tilde{g}$ die in Lemma 6.1 geforderten Eigenschaften haben. Dann gilt*

$$s(A,B) + \Xi\left(\int_{\sigma(\Theta(N))}^{R_1,R_2} g\,dE\right) = \tilde{s}(A,B) + \Xi\left(\int_{\sigma(\Theta(N))}^{R_1,R_2} \tilde{g}\,dE\right).$$

Beweis. Weil nach Voraussetzung $\phi - s_N, \phi - \tilde{s}_N \in \mathcal{R}$ gilt, erhalten wir durch Subtraktion auch $\tilde{s}_N - s_N \in \mathcal{R}$. Mit der Notation von Lemma 5.11 heißt das, dass für $(\xi,\eta) \in (p^{-1}\{0\} \times q^{-1}\{0\}$ immer $\varpi(\tilde{s}-s) = 0$ gilt, was nach ebenjenem Lemma äquivalent zu

$$\tilde{s}(z,w) - s(z,w) = p(z)u(z,w) + q(w)v(z,w) \tag{6.6}$$

mit zwei Polynomen $u(z,w), v(z,w) \in \mathbb{C}[z,w]$ ist. $\Theta_j,\ j \in \{1,2\}$, sind $*$-Homomorphismen und die Abbildungen $T_j,\ j \in \{1,2\}$, haben die in Proposition 4.5 beschriebenen Eigenschaften, weshalb

$$\begin{aligned}\Xi_1(u(\Theta_1(A),\Theta_1(B))) &= \Xi_1(\Theta_1(u(A,B))) = T_1 T_1^{-1} u(A,B) T_1 T_1^+ \\ &= u(A,B) T_1 T_1^+ = T_1 T_1^+ u(A,B) = p(A)u(A,B)\end{aligned}$$

und

$$\Xi_2(v(\Theta_2(A),\Theta_2(B))) = \Xi_2(\Theta_2(v(A,B))) = q(B)v(A,B)$$

gelten. Auch die Integration nach dem Spektralmaß E_1 ist ein $*$-Homomorphismus,[13] weshalb

$$u(\Theta_1(A),\Theta_1(B)) = \int u(\mathrm{Re}\ z, \mathrm{Im}\ z)\,dE_1(z).$$

Daraus folgern wir mit (3.15)

$$\Xi_1(u(\Theta_1(A),\Theta_1(B))) = \Xi(R_1 R_1^* \int u(\mathrm{Re}\ z, \mathrm{Im}\ z)\,dE(z)).$$

[13] Von den beschränkten messbaren Funktionen auf der kompakten Menge $\sigma(\Theta(N))$ in die beschränkten linearen Operatoren auf $\mathcal{V}_1$.

Auf die selbe Art und Weise erhalten wir auch

$$\Xi_2(v(\Theta_2(A),\Theta_2(B))) = \Xi(R_2R_2^*\int v(\mathrm{Re}\ z,\mathrm{Im}\ z)\ dE(z))$$

und können mit Korollar 4.8 auf

$$\begin{aligned}
&\tilde{s}(A,B) - s(A,B) = p(A)u(A,B) + q(B)v(A,B) \\
&= \Xi\left(R_1R_1^*\int u(\mathrm{Re}\ z,\mathrm{Im}\ z)\ dE(z) + R_2R_2^*\int v(\mathrm{Re}\ z,\mathrm{Im}\ z)\ dE(z)\right) \qquad (6.7) \\
&= \Xi\left(\int_{\sigma(\Theta(N))\setminus(Z_p^{\mathbb{R}}+iZ_q^{\mathbb{R}})} \frac{p(\mathrm{Re}\ z)u(\mathrm{Re}\ z,\mathrm{Im}\ z) + q(\mathrm{Im}\ z)v(\mathrm{Re}\ z,\mathrm{Im}\ z)}{p(\mathrm{Re}\ z)+q(\mathrm{Im}\ z)}\ dE(z) + \right. \\
&\left. \sum_{w\in\sigma(\Theta(N))\cap(Z_p^{\mathbb{R}}+iZ_q^{\mathbb{R}})} (u(\mathrm{Re}\ w,\mathrm{Im}\ w)R_1R_1^*E\{w\} + v(\mathrm{Re}\ w,\mathrm{Im}\ w)R_2R_2^*E\{w\})\right)
\end{aligned}$$

schließen. Da sowohl s und g als auch $\tilde{s}$ und $\tilde{g}$ der Gleichung (6.1) genügen, gilt

$$(\tilde{s}_N - s_N)(z) = (p_N + q_N)(z)\cdot(g(z)-\tilde{g}(z))\,,\ z\in\sigma(\Theta(N)), \qquad (6.8)$$

was für $z\in\sigma(\Theta(N))\setminus(Z_p^{\mathbb{R}}+iZ_q^{\mathbb{R}})$ mithilfe von (6.6) auf

$$\begin{aligned}
&p(\mathrm{Re}\ z)u(\mathrm{Re}\ z,\mathrm{Im}\ z) + q(\mathrm{Im}\ z)v(\mathrm{Re}\ z,\mathrm{Im}\ z) \\
&\quad = \tilde{s}(\mathrm{Re}\ z,\mathrm{Im}\ z) - s((\mathrm{Re}\ z,\mathrm{Im}\ z)) = (p(\mathrm{Re}\ z)+q(\mathrm{Im}\ z))\cdot(g(z)-\tilde{g}(z))
\end{aligned}$$

und damit auf

$$g(z)-\tilde{g}(z) = \frac{p(\mathrm{Re}\ z)u(\mathrm{Re}\ z,\mathrm{Im}\ z) + q(\mathrm{Im}\ z)v(\mathrm{Re}\ z,\mathrm{Im}\ z)}{p(\mathrm{Re}\ z)+q(\mathrm{Im}\ z)}$$

schließen lässt. Betrachten wir in Gleichung (6.8) und für $z\in\sigma(\Theta(N))\cap(Z_p^{\mathbb{R}}+iZ_q^{\mathbb{R}})$ den Eintrag mit Index $(\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z),0)$, ergibt sich wieder mit (6.6)

$$\begin{aligned}
&((p(z)u(z,w)+q(w)v(z,w))_N)_{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z),0} \overset{(i)}{=} \\
&\qquad \frac{1}{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z)!}p^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z))}(\mathrm{Re}\ z)u(\mathrm{Re}\ z,\mathrm{Im}\ z) = \\
&\qquad \frac{1}{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z)!}\frac{\partial^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z)}}{\partial x^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z)}}(\tilde{s}(\mathrm{Re}\ z,\mathrm{Im}\ z) - s(\mathrm{Re}\ z,\mathrm{Im}\ z)) \overset{(ii)}{=} \\
&\qquad\qquad \frac{1}{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z)!}p^{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\ z)}(\mathrm{Re}\ z)(g(z)_1 - \tilde{g}(z)_1).
\end{aligned}$$

Dabei geht bei (i) Definition 5.6, die Produktregel sowie der Umstand ein, dass $q^{(l)}(\mathrm{Im}\ z)=0,\ 0\le l<\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\ z)$. Bei (ii) gilt es die Definition der Multiplikation aus Bemerkung 5.13 zu beachten. Mit den selben Argumenten, aber vertauschten

Rollen von p und q, gilt zudem für $z \in \sigma(\Theta(N)) \cap (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ und den Eintrag mit Index $(0, \mathfrak{d}_q(\text{Im } z))$

$$((p(z)u(z,w) + q(w)v(z,w))_N)_{0,\mathfrak{d}_q(\text{Im } z)} \overset{(i)}{=}$$
$$\frac{1}{\mathfrak{d}_q(\text{Im } z)!} q^{\mathfrak{d}_q(\text{Im } z))}(\text{Im } z) v(\text{Re } z, \text{Im } z) =$$
$$\frac{1}{\mathfrak{d}_q(\text{Im } z)!} \frac{\partial^{\mathfrak{d}_q(\text{Im } z)}}{\partial x^{\mathfrak{d}_q(\text{Im } z)}} (\tilde{s}(\text{Re } z, \text{Im } z) - s(\text{Re } z, \text{Im } z)) \overset{(ii)}{=}$$
$$\frac{1}{\mathfrak{d}_q(\text{Im } z)!} q^{\mathfrak{d}_q(\text{Im } z)}(\text{Im } z)(g(z)_2 - \tilde{g}(z)_2).$$

Weil für $z \in \sigma(\Theta(N)) \cap (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ nach Definition von $\mathfrak{d}_p$ und $\mathfrak{d}_q$ die Ausdrücke $p^{\mathfrak{d}_p(\text{Re } z)}$ und $q^{\mathfrak{d}_q(\text{Im } z)}$ nicht verschwinden, können wir aus diesen Gleichungen ablesen, dass $u(\text{Re } z, \text{Im } z) = g(z)_1 - \tilde{g}(z)_1$ und $v(\text{Re } z, \text{Im } z) = g(z)_2 - \tilde{g}(z)_2$. Hiermit können wir schlussendlich (6.7) zu

$$\tilde{s}(A,B) - s(A,B) = \Xi \left(\int_{\sigma(\Theta(N))}^{R_1,R_2} (g - \tilde{g}) \, dE \right)$$

umschreiben, womit der Satz bewiesen ist. □

Bemerkung 6.4. Im folgenden Satz bezeichnen wir mit $\{N, N^+\}''$ den Kommutanten von $\{N, N^+\}'$, den man auch als *Bikommutanten* von $\{N, N^+\}$ bezeichnet. Wegen $CN = NC \Leftrightarrow C^+N^+ = N^+C^+$ ist $\{N, N^+\}'$ unter der Bildung von Adjungierten abgeschlossen. Wir können dasselbe Argument noch einmal anwenden und erhalten, weil für $C \in \{N, N^+\}'$ immer $DC = CD \Leftrightarrow D^+C^+ = C^+D^+$ gilt, dass auch $\{N, N^+\}''$ unter Adjunktion abgeschlossen sein muss. Tatsächlich bildet $\{N, N^+\}''$ sogar eine kommutative $*$-Algebra. Als Kommutant ist die Menge ein linearer Teilraum von $L_b(\mathcal{K})$ und offenbar abgeschlossen unter der Multiplikation. Darüber hinaus enthält sie das Multiplikative neutrale Element I und ist unter der Adjunktion abgeschlossen. Die Kommutativität rührt daher, dass $\{N, N^+\}'' \subseteq \{N, N^+\}'$ und somit

$$C, D \in \{N, N^+\}'' \Rightarrow C \in \{N, N^+\}'', D \in \{N, N^+\}' \Rightarrow CD = DC$$

gilt.

Satz 6.5. *Die Abbildung $\phi \mapsto \phi(N)$ ist ein $*$-Homomorphismus von $\mathcal{F}_N$ nach $\{N, N^+\}''$ $(\subseteq L_b(\mathcal{K}))$, der $s_N(N) = s(A,B)$ für alle $s \in \mathbb{C}[z,w]$ erfüllt.*

Beweis. Weil wir für alle $s \in \mathbb{C}[z,w]$ in (6.1) $s_N(z) = s_N(z) + (p_N + q_N)(z) \cdot 0,\ z \in \sigma(\Theta(N))$ schreiben können, lässt sich aus Satz 6.3 folgern dass $s_N(N) = s(A,B),\ s \in \mathbb{C}[z,w]$.
Bezüglich der Linearität der Abbildung seien $\phi, \psi \in \mathcal{F}_N,\ s, r \in \mathbb{C}[z,w]$ und g, h Funktionen auf $\sigma(\Theta(N))$ die auf $\sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$ beschränkt und messbar

sind, sodass (6.1) und analog

$$\psi(z) = r_N(z) + (p_N + q_N)(z) \cdot h(z),\ z \in \sigma(\Theta(N))$$

gilt. Nach Bemerkung (5.7) gilt dann für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$(\lambda\phi+\mu\psi)(z) = (\lambda s+\mu r)_N(z)+(p_N+q_N)(z)\cdot(\lambda g+\mu h)(z),\ z \in \sigma(\Theta(N)), \quad (6.9)$$

wobei $\lambda g+\mu h$ auf $\sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}}+iZ_q^{\mathbb{R}})$ beschränkt und messbar ist. Zusätzlich gilt, da $\mathcal{R}$ ein Ideal und somit unter Vektorraumoperationen abgeschlossen ist, auch $(\lambda\phi+\mu\psi)-(\lambda s+\mu r)_N = \lambda(\phi-s_N)+\mu(\psi-r_N) \in \mathcal{R}$. $(\lambda\phi+\mu\psi)$ und $(\lambda s+\mu r)$ erfüllen also alle in Lemma 6.1 geforderten Eigenschaften.[14] Da Definition 6.2 linear von s und g abhängt, können wir auf

$$(\lambda\phi + \mu\psi)(N) = \lambda\phi(N) + \mu\psi(N)$$

schließen.
Was wir aus Bemerkung 5.7 ebenfalls ableiten können, ist $\phi^{\#}(z) = (s^{\#})_N(z) + (p_N + q_N)(z) \cdot \overline{g}(z),\ z \in \sigma(\Theta(N))$. Weil auch $\mathfrak{d}_p(\xi) = \mathfrak{d}_p(\overline{\xi})$, $\mathfrak{d}_q(\eta) = \mathfrak{d}_q(\overline{\eta})$ und folglich $\mathfrak{C}(\xi,\eta) = \mathfrak{C}(\overline{\xi},\overline{\eta})$ für alle $(\xi,\eta) \in Z^i$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\phi^{\#}(z) - (s^{\#})_N(z) &= \overline{\phi(z)} - (\overline{s})_N(z) = \overline{(\phi - s_N)(z)} \\
&= (\phi - s_N)^{\#}(z),\ z \in \sigma(\Theta(N)) \cup (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}}), \\
\phi^{\#}(\xi,\eta) - (s^{\#})_N(\xi,\eta) &= \overline{\phi(\overline{\xi},\overline{\eta})} - \overline{s}_N(\overline{\xi},\overline{\eta}) = \overline{\phi(\overline{\xi},\overline{\eta})} - \overline{s_N(\overline{\xi},\overline{\eta})} \\
&= \overline{(\phi - s_N)(\overline{\xi},\overline{\eta})} = (\phi - s_N)^{\#}(\xi,\eta),\ (\xi,\eta) \in Z^i,
\end{aligned}$$

woraus direkt

$$\phi^{\#} - (s^{\#})_N = (\phi - s_N)^{\#} \in \mathcal{R}.$$

folgt. Mit g ist auch $\overline{g}$ beschränkt und messbar auf $\sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$, und wie wir durch

$$[x, s(A,B)y] = [\overline{s}(A^+,B^+)x, y] = [\overline{s}(A,B)x, y] = [s^{\#}(A,B)x, y],$$

$$\begin{aligned}
&[x, \Xi\left(\int_{\sigma(\Theta(N))\setminus(Z_p^{\mathbb{R}}+iZ_q^{\mathbb{R}})} g\, dE\right) y] = [x, \Xi\left(\left[\int_{\sigma(\Theta(N))\setminus(Z_p^{\mathbb{R}}+iZ_q^{\mathbb{R}})} \overline{g}\, dE\right]^*\right) y] = \\
&\quad [x, \Xi\left(\int_{\sigma(\Theta(N))\setminus(Z_p^{\mathbb{R}}+iZ_q^{\mathbb{R}})} \overline{g}\, dE\right)^+ y] = [\Xi\left(\int_{\sigma(\Theta(N))\setminus(Z_p^{\mathbb{R}}+iZ_q^{\mathbb{R}})} \overline{g}\, dE\right) x, y]
\end{aligned}$$

[14] Mit $\lambda\phi + \mu\psi$ an der Stelle von ϕ.

und

$$
\begin{aligned}
&[x, \sum_{w\in\sigma(\Theta(N))\cap(Z_p^{\mathbb{R}}+iZ_q^{\mathbb{R}})} (g(w)_1 R_1R_1^* E\{w\} + g(w)_2 R_2 R_2^* E\{w\})\, y] = \\
&\sum_{w\in\sigma(\Theta(N))\cap(Z_p^{\mathbb{R}}+iZ_q^{\mathbb{R}})} [x, (g(w)_1 R_1R_1^* E\{w\} + g(w)_2 R_2 R_2^* E\{w\})\, y] = \\
&\sum_{w\in\sigma(\Theta(N))\cap(Z_p^{\mathbb{R}}+iZ_q^{\mathbb{R}})} [(\overline{g}(w)_1 R_1R_1^* E\{w\} + (\overline{g}(w)_2 R_2 R_2^* E\{w\})\, x, y] = \\
&[\sum_{w\in\sigma(\Theta(N))\cap(Z_p^{\mathbb{R}}+iZ_q^{\mathbb{R}})} (\overline{g}(w)_1 R_1R_1^* E\{w\} + (\overline{g}(w)_2 R_2 R_2^* E\{w\})\, x, y] =
\end{aligned}
$$

für $x, y \in \mathcal{K}$ erkennen, gilt

$$
\phi(N)^+ = s^\#(A,B) + \Xi\left(\int_{\sigma(\Theta(N))}^{R_1,R_2} \overline{g}\; dE\right).
$$

Satz 6.3 leistet dann wiederum $\phi^\#(N) = \phi(N)^+$.
Die letzte verbleibende Eigenschaft, die wir für den Nachweis, dass es sich um einen $*$-Homomorphismus handelt, brauchen, ist die Multiplikativität. Wählen wir $\phi, \psi \in \mathcal{F}_N$, $s, r \in \mathbb{C}[z,w]$ und Funktionen g und h wie für den Nachweis von (6.9), so gilt nach Bemerkung 5.7

$$
\begin{aligned}
\phi(z)\cdot\psi(z) &= (s_N(z) + (p_N+q_N)(z)\cdot g(z))\cdot(r_N(z) + (p_N+q_N)(z)\cdot h(z)) \\
&= (s\cdot r)_N(z) + (p_N+q_N)(z)\cdot\omega(z),\; z\in\sigma(\Theta(N)),
\end{aligned}
$$

wobei für $z \in \sigma(\Theta(N)) \setminus (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$

$$
\omega(z) = s(z)h(z) + r(z)g(z) + g(z)h(z)(p(\mathrm{Re}\; z) + q(\mathrm{Im}\; z))
$$

und für $z \in \sigma(\Theta(N)) \cap (Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}})$

$$
\omega(z)_j = s(z)h(z)_j + r(z)g(z)_j,\; j \in \{1,2\}.
$$

Die erste Gleichung ergibt sich durch Ausmultiplizieren, die zweite durch den zusätzlichen Umstand, dass durch die Definition den Multiplikation in $\mathcal{A}_{\mathfrak{d}_p(\mathrm{Re}\; z),\mathfrak{d}_q(\mathrm{Im}\; z)}$ aus $a, b \in \ker\pi$ direkt $a\cdot b = 0$ und damit $(p_N+q_N)(z)\cdot(p_N+q_N)(z) = 0,\; z\in\sigma(\Theta(N))\cap(Z_p^{\mathbb{R}}+iZ_q^{\mathbb{R}})$ folgt.
Gleichzeitig wissen wir aus Proposition 3.12, dass für $C \in (TT^+)'$ und D, D_1, $D_2 \in (T^+T)'$ die Gleichungen $\Xi(D\Theta(C)) = \Xi(D)C$, $\Xi(\Theta(C)D) = C\Xi(D)$ und $\Xi(D_1)\Xi(D_2) = \Xi(D_1D_2T^+T)$ gelten. Nach Proposition 4.5 gilt darüber hinaus $T^+T = p(A) + q(B)$. Ebenfalls sei daran erinnert, dass wir am Beginn des Beweises bereits $s_N(N) = s(A,B),\; s \in \mathbb{C}[z,w]$, nachgewiesen haben. Durch Ausmultiplizieren ergibt sich schließlich unter Anwendung dieser Rechenregeln

und der Tatsache, dass $p(\mathrm{Re}\ z)+q(\mathrm{Im}\ z)$ auf $\sigma(\Theta(N))\cap(Z_p^{\mathbb{R}}+iZ_q^{\mathbb{R}})$ verschwindet,

$$\phi(N)\psi(N) =$$

$$\begin{aligned}
s(A,B)r(A,B) &+ \Xi\left(\int_{\sigma(\Theta(N))}^{R_1,R_2} g\ dE\right) r(A,B) + s(A,B)\Xi\left(\int_{\sigma(\Theta(N))}^{R_1,R_2} h\ dE\right)\\
&+ \Xi\left(\int_{\sigma(\Theta(N))}^{R_1,R_2} g\ dE\right)\Xi\left(\int_{\sigma(\Theta(N))}^{R_1,R_2} h\ dE\right)\\
= (s\cdot r)(A,B) &+ \Xi\left(\int_{\sigma(\Theta(N))}^{R_1,R_2} g\ dE\ \Theta(r(A,B))\right)\\
&+ \Xi\left(\Theta(s(A,B)\int_{\sigma(\Theta(N))}^{R_1,R_2} h\ dE\right)\\
&+ \Xi\left(\int_{\sigma(\Theta(N))}^{R_1,R_2} g\ dE \int_{\sigma(\Theta(N))}^{R_1,R_2} h\ dE\ (p(\Theta(A))+q(\Theta(B)))\right)\\
= (s\cdot r)(A,B) &+ \Xi\left(\int_{\sigma(\Theta(N))}^{R_1,R_2} (g\cdot r + s\cdot h)\ dE\right.\\
&+ \left.\int_{\sigma(\Theta(N))\setminus(Z_p^{\mathbb{R}}+iZ_q^{\mathbb{R}})} (p(\mathrm{Re}\ (.))+q(\mathrm{Im}\ (.)))\cdot g\cdot h\ dE\right)\\
&= (s\cdot r)(A,B) + \Xi\left(\int_{\sigma(\Theta(N))}^{R_1,R_2} \omega\ dE\right).
\end{aligned}$$

Dabei ist ω auf $\sigma(\Theta(N))\setminus(Z_p^{\mathbb{R}}+iZ_q^{\mathbb{R}})$ messbar und beschränkt und es gilt

$$\phi\cdot\psi-(s\cdot r)_N = (\phi-s_N)\cdot\psi+(\psi-r_N)\cdot s_N \in \mathcal{R},$$

weil $(\phi-s_N),(\psi-r_N)\in\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}$ ein Ideal ist. Mit Satz 6.3 erhalten wir $\phi(N)\cdot\psi(N)=(\phi\cdot\psi)(N)$.
Es verbleibt noch zu zeigen, dass auch wirklich $\phi(N)\in\{N,N^+\}''$. Offenbar gilt $s(A,B)\in\{A,B\}''=\{N,N^+\}''$. Ist darüber hinaus $C\in\{A,B\}'\subseteq(p(A)+q(B))'=(TT^+)'$, dann gilt, weil Θ ein $*$-Homomorphismus ist, auch $\Theta(C)\in\{\Theta(A),\Theta(B)\}'$. Damit vertauscht $\Theta(C)$ nach dem Spektralsatz für normale Operatoren auf Hilberträumen, Satz 2.15, mit

$$D := \int_{\sigma(\Theta(N))}^{R_1,R_2} g\ dE.$$

Aus Proposition 3.12 ergibt sich

$$\Xi(D)C = \Xi(D\Theta(C)) = \Xi(\Theta(C)D) = C\Xi(D),$$

also kommutiert $\Xi(D)$ mit C, woraus wir, da $C \in \{A, B\}'$ beliebig war, auf $\Xi(D) \in \{A, B\}'' = \{N, N^+\}''$ schließen. In Summe erhalten wir

$$\phi(N) \in \{A, B\}'' = \{N, N^+\}''.$$

□

Beispiel 6.6. Sei $\mathcal{K}$ ein Kreinraum und $N \in L_b(K)$ normal mit der Eigenschaft, dass sowohl sein Realteil A als auch sein Imaginärteil B positive Operatoren sind, also $[Ax, x] \geq 0$ und $[Bx, x] \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{K}$. Unter dieser Annahme sind die Polynome $p(t) = q(t) := t$ definisierend für A beziehungsweise B. Insbesondere ist N definisierbar. Da p und q nur die Nullstelle 0 haben, ergibt sich $Z_p^{\mathbb{R}} + iZ_q^{\mathbb{R}} = \{0\}$, $Z^i = \emptyset$ und $\mathfrak{d}_p = \mathfrak{d}_q = \delta_0$. In Konsequenz dessen ist $\mathcal{M}_N$ die Menge aller auf $\sigma(\Theta(N)) \cup \{0\}$ definierten Funktionen mit Funktionswerten in $\mathbb{C}$ für $z \in \sigma(\Theta(N)) \setminus \{0\}$ und Funktionswerten in $\mathcal{A}_{1,1} \simeq \mathbb{C}^3$ für $z = 0$ und $\mathcal{F}_N$ ist die Menge aller $\phi \in \mathcal{M}_N$, die auf $\sigma(\Theta(N)) \setminus \{0\}$ beschränkt und messbar sind und für die es eine Umgebung $U(0)$ der Null derart gibt, dass der Ausdruck

$$z \mapsto \frac{\phi(z) - \phi(0)_{0,0}}{\max(|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|)}$$

auf $U(0) \setminus \{0\}$ beschränkt ist. Wie wir schon in Definition 5.14 bemerkt haben, ist letzteres nur eine Einschränkung, wenn 0 ein Häufungspunkt des Spektrums von $\Theta(N)$ ist. Ein gegebenes $\phi \in \mathcal{F}_N$ lässt sich als $\phi = \phi_1 + \phi_2$ schreiben, indem wir $\phi_1|_{\sigma(\Theta(N))\setminus\{0\}} = \phi|_{\sigma(\Theta(N))\setminus\{0\}}$, $\phi_2|_{\sigma(\Theta(N))\setminus\{0\}} = 0$ sowie $\phi_1(0)_{0,0} = \phi(0)_{0,0}$, $\phi_2(0)_{0,0} = \phi_1(0)_{0,1} = \phi_1(0)_{1,0} = 0$, $\phi_2(0)_{0,1} = \phi(0)_{0,1}$ und $\phi_2(0)_{1,0} = \phi(0)_{1,0}$ setzen. Offenbar gilt auch $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{F}_N$ und $\phi_2^2 = 0$. Weil die Zuordnung $\psi \mapsto \psi(N)$ nach Satz 6.5 ein $*$-Homomorphismus ist, erhalten wir

$$\phi(N) = \phi_1(N) + \phi_2(N)$$

und $\phi_2(N)^2 = 0$. Betrachten wir den Ausdruck (6.1), kann das dort vorkommende Polynom s_2 für ϕ_2 als $s_2 = 0$ gewählt werden. Zudem können wir s_1 für ϕ_1 und s für ϕ identisch wählen. Für die analog indizierten Funktionen g_1 und g_2 gilt, falls $0 \in \sigma(\Theta(N))$, $g_1(0) = 0$ und $g_2(0) = (\phi_{1,0}(0), \phi_{0,1})$, weil wie in Beispiel 5.9 beschrieben gilt, dass $p_N(0)_{0,0} = 0, p_N(0)_{1,0} = 1$ und $p_N(0)_{0,1} = 0$ sowie $q_N(0)_{0,0} = 0, q_N(0)_{1,0} = 0$ und $q_N(0)_{0,1} = 1$. Bilden wir schließlich $\phi_1(N)$ und $\phi_2(N)$, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\phi_1(N) &= s_1(A, B) + \Xi\left(\int_{\sigma(\Theta(N))}^{R_1, R_2} g_1 \, dE\right) \\
&= s(A, B) + \Xi\left(\int_{\sigma(\Theta(N))\setminus\{0\}} g \, dE + 0\right) \\
&= s(A, B) + T \int_{\sigma(\Theta(N))\setminus\{0\}} g \, dET^+
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\phi_2(N) &= s_2(A,B) + \Xi\left(\int_{\sigma(\Theta(N))}^{R_1,R_2} g_2\, dE\right)\\ &= \Xi\left(0 + g_2(0)_1 R_1 R_1^* E\{0\} + g_2(0)_2 R_2 R_2^* E\{0\}\right)\\ &= T\left(g_2(0)_1 R_1 R_1^* E\{0\} + g_2(0)_2 R_2 R_2^* E\{0\}\right) T^+.\end{aligned}$$

Literatur

[BKW20] Blümlinger, Martin, Kaltenbäck, Michael und Woracek, Harald. *Funktionalanalysis*. TU Verlag, Februar 2020.

[Blü19] Blümlinger, Martin. *Analysis 3*. TU Verlag, September 2019.

[Kal16] Kaltenbäck, Michael. “Functional Calculus for definitizable normal linear operators on Krein spaces”. In: *Integral Equations and Operator Theory* 85(2) (2016), S. 221–243.

[Kal20] Kaltenbäck, Michael. *Funktionalanalysis 2*. TU Verlag, WS 2019-2020.

[KP15] Kaltenbäck, Michael und Pruckner, Raphael. “Functional Calculus for definitizable self-adjoint linear relations on Krein spaces”. In: *Integral Equations and Operator Theory* 83(4) (2015), S. 451–482.

[Wor08] Woracek, Harald. *Operatoren im Krein Raum*. TU Verlag, WS 2007-2008.