Bachelorarbeit: Normale Abbildungen auf Räumen mit indefinitem Skalarprodukt

Sebastian Schön
betreut von Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Kaltenbäck,
ausgeführt am Institut für Analysis und Scientific Computing
an der Technischen Universität Wien

05.04.2021

Zusammenfassung

In der vorliegenden Seminararbeit wird zunächst das bekannte Konzept eines positiv definiten Skalarprodukts auf einem komplexen Vektorraum zu dem eines indefiniten verallgemeinert und die Geometrie der so entstehenden Räume, insbesondere deren Unterräume, untersucht. Dabei und auch sonst überall beschränkt sich die Diskussion auf den endlichdimensionalen Fall.

Im nächsten Schritt werden lineare Abbildungen und deren Adjungierte betrachtet, der Begriff der normalen Abbildung definiert und das Konzept der unitären Ähnlichkeit eingeführt.

Schließlich werden normale Abbildungen im Hinblick auf eine Klassifikation modulo unitärer Ähnlichkeit untersucht. Es wird eine untere Schranke für die Schwierigkeit dieses Problems hergeleitet und dadurch begründet, dass die Komplexität einer solchen Klassifikation mit der Indefinitheit des infragestehenden Skalarprodukts rasch anwächst. Schließlich wird die Klassifikation für den minimal indefiniten Fall durchgeführt und in diesem Fall die Eindeutigkeit der Zerlegung in eine orthogonale Summe unzerlegbarer Abbildungen bewiesen.

Der gesamten Arbeit liegt primär [1] zugrunde. Für Beweise von bloß zitierten Resultaten aus der (positiv definiten) Linearen Algebra wird vereinzelt auch auf [2] verwiesen, Unterabschnitt 3.5 basiert auf [3, Abschnitt 7]. Die Korrektur der Inhalte aus [1, Abschnitt 8.2] in Unterabschnitt 3.3, [1, Theorem 8.4.1] in Satz 3.4.2 und des Beweises von [3, Theorem 2] im Beweis von Satz 3.5.1 stammen vom Autor.

Inhaltsverzeichnis

1 Indefinite Skalarprodukte

Wir beschränken uns auf den Fall eines endlichdimensionalen komplexen Vektorraumes und werden daher durchgehend den Vektorraum $\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}$, zugrunde legen. Weiters identifizieren wir gelegentlich lineare Abbildungen auf $\mathbb{C}^n$ mit ihren Matrixdarstellungen bezüglich diverser Basen. Zumeist liegt diesen Darstellungen die kanonische Basis, bestehend aus den Vektoren $e_i = (\delta_{ij})^T_{j=1,\dots,n}, i = 1, \dots, n$, zugrunde.

1.1 Definition und Darstellung bezüglich des Standardskalarprodukts

Definition 1.1.1 Eine Abbildung $[.,.] : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto [x, y]$ heißt *indefinites Skalarprodukt auf* $\mathbb{C}^n$, falls sie folgende Eigenschaften hat:

(i) Linearität im 1. Argument: $\forall x, y, z \in \mathbb{C}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{C} : [\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$

(ii) Antisymmetrie: $\forall x, y \in \mathbb{C}^n : [y, x] = \overline{[x, y]}$

(iii) Nichtdegeneriertheit: $\forall x \in \mathbb{C}^n : (\forall y \in \mathbb{C}^n : [x, y] = 0) \implies x = 0$

Dabei bezeichnet $\overline{\alpha}$ die komplex konjugierte Zahl von $\alpha \in \mathbb{C}$.

Bemerkung 1.1.2 Die Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 1.1.1 implizieren, dass $[.,.]$ konjugiert linear im 2. Argument ist, also

$$[x, \alpha y + \beta z] = \overline{\alpha}[x, y] + \overline{\beta}[x, z] \text{ für alle } x, y, z \in \mathbb{C}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Beispiel 1.1.3 Das wichtigste Beispiel ist das aus der positiv definiten Linearen Algebra bekannte *Standardskalarprodukt* $(.,.)$, definiert durch $(x, y) := \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$, mit $x = (x_1, \dots, x_n)^T, y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{C}^n$.

Indefinite Skalarprodukte lassen sich in eindeutiger Weise bezüglich des Standardskalarprodukts darstellen. Um das zu zeigen, brauchen wir das folgende, wohlbekannte Resultat.

Lemma 1.1.4 Die Abbildung $\Phi : \mathbb{C}^n \to (\mathbb{C}^n)^*, x \mapsto (., x)$ ist eine konjugiert-lineare Bijektion zwischen $\mathbb{C}^n$ und seinem Dualraum $(\mathbb{C}^n)^*$.

Beweis: Siehe [2, 11.2.1] und [2, Satz 11.2.2].

∎

Proposition 1.1.5 Ist $[.,.]$ ein indefinites Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$, so existiert eine reguläre hermitesche Abbildung $H_{[.,.]} \in L(\mathbb{C}^n)$ derart, dass für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ die Gleichung $[x, y] = (H_{[.,.]}x, y)$ gilt. Ist umgekehrt $H \in L(\mathbb{C}^n)$ regulär und hermitesch, so ist $[.,.]_H$, definiert durch $[x, y]_H := (Hx, y)$ für $x, y \in \mathbb{C}^n$, ein indefinites Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$. Die Abbildungen $[.,.] \mapsto H_{[.,.]}$ und $H \mapsto [.,.]_H$ sind invers zueinander und etablieren einen bijektiven Zusammenhang zwischen den indefiniten Skalarprodukten auf $\mathbb{C}^n$ und den regulären hermiteschen Abbildungen aus $L(\mathbb{C}^n)$.

Beweis: Sei zunächst $[.,.]$ ein indefinites Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$. Für festes $y \in \mathbb{C}^n$ ist die Abbildung $x \mapsto [x, y]$ ein lineares Funktional auf $\mathbb{C}^n$. Nach Lemma 1.1.4 existiert genau ein $z \in \mathbb{C}^n$ mit $[.,y] = (.,z)$, nämlich $z = \Phi^{-1}([.,y])$. Durch $H_{[.,.]}y := z$ wird eine Abbildung $H_{[.,.]} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ defniert, die wegen der Eigenschaften (i), (ii) und (iii) von $[.,.]$ und $(.,.)$ aus Definition 1.1.1 und der von Φ aus Lemma 1.1.4 linear, hermitesch und regulär ist. Umgekehrt folgen für $[.,.]_H$ die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) von Definition 1.1.1 aus der Linearität, Hermitezität und Regularität von H und den entsprechenden Eigenschaften von $(.,.)$. Dass sich die beiden Abbildungen umkehren und daher den behaupteten bijektiven Zusammenhang herstellen, ist dann offensichtlich.

■

In weiterer Folge werden wir - zur Abkürzung von Formulierungen und wenn nichts anderes gesagt wird - $\mathbb{C}^n$ immer als mit einem mit $[.,.]$ bezeichneten indefiniten Skalarprodukt ausgestattet verstehen, die dazu gehörige reguläre hermitesche Abbildung mit H bezeichnen und die beiden Objekte stellvertretend füreinander verwenden.

1.2 Orthogonalität

Definition 1.2.1 Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{C}^n$ heißen *orthogonal bezüglich* $[.,.]$, i.Z. $x\,[\perp]\,y$, falls $[x,y] = 0$. Für eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{C}^n$ heißt

$$M^{[\perp]} := \{x \in \mathbb{C}^n : x\,[\perp]\,y \text{ für alle } y \in M\}$$

das *orthogonale Komplement von* M *bezüglich* $[.,.]$. Orthogonalität bezüglich $(.,.)$ wird mit dem Zeichen $\perp$ notiert.

Für einen Unterraum M von $\mathbb{C}^n$ ist bekannt, dass die Zerlegung $\mathbb{C}^n = M \dot{+} M^\perp$ gilt, wobei $\dot{+}$ die direkte Summe von Unterräumen bezeichnet. Dies ist für indefinite Skalarprodukte nicht mehr richtig, es gilt aber folgende schwächere Aussage.

Lemma 1.2.2 Für jeden Unterraum M von $\mathbb{C}^n$ gilt

(i) $\dim(M) + \dim(M^{[\perp]}) = n$,

(ii) $(M^{[\perp]})^{[\perp]} = M$.

Beweis: Wegen

$$x \in M^{[\perp]} \iff 0 = [x,y] = (Hx,y), \forall y \in M \iff Hx \in M^\perp \iff x \in H^{-1}M^\perp$$

gilt $M^{[\perp]} = H^{-1}M^\perp$ und infolge $\dim(M^{[\perp]}) = \dim(M^\perp) = n - \dim(M)$, also (i). Per definitionem hat man $M \subseteq (M^{[\perp]})^{[\perp]}$. Wegen (i) gilt zudem $\dim(M) = n - \dim(M^{[\perp]}) = \dim((M^{[\perp]})^{[\perp]})$, und infolge (ii).

■

Definition 1.2.3 Sei M ein Unterraum von $\mathbb{C}^n$. Wir nennen M *nichtdegeneriert*, falls $[.,.]|_{M\times M}$ ein indefinites Skalarprodukt auf M ist, falls also für $x \in M$ aus $[x,y] = 0$ für alle $y \in M$ bereits $x = 0$ folgt. Andernfalls heißt M *degeneriert*.

Lemma 1.2.4 Für einen Unterraum M von $\mathbb{C}^n$ gilt $\mathbb{C}^n = M \dot{+} M^{[\perp]}$ genau dann, wenn M nichtdegeneriert ist.

Beweis: Die Aussage folgt aus Lemma 1.2.2, (i) und der Tatsache, dass die Nichtdegeneriertheit von M äquivalent ist zu $M \cap M^{[\perp]} = \{0\}$.

■

1.3 Unterräume

Definition 1.3.1 Ist M ein Unterraum von $\mathbb{C}^n$, so heißt M

(i) positiv, wenn $[x,x] > 0$ für alle $x \in M$ gilt,

(ii) nichtnegativ, wenn $[x,x] \geq 0$ für alle $x \in M$ gilt,

(iii) negativ, wenn $[x,x] < 0$ für alle $x \in M$ gilt,

(iv) nichtpositiv, wenn $[x,x] \leq 0$ für alle $x \in M$ gilt,

(v) neutral, wenn $[x,x] = 0$ für alle $x \in M$ gilt.

Das Ziel dieses Unterabschnittes ist es, die maximale Dimension der Typen von Unterräumen aus Definition 1.3.1 zu ermitteln. Dazu bringen wir zunächst das folgende

Lemma 1.3.2 Seien $[.,.]_1, [.,.]_2$ zwei indefinite Skalarprodukte auf $\mathbb{C}^n$ mit zugehörigen regulären hermiteschen Abbildungen $H_1, H_2 \in L(\mathbb{C}^n)$, und seien letztere kongruent, also existiere ein reguläres $S \in L(\mathbb{C}^n)$ mit $H_1 = S^* H_2 S$, wobei $.^*$ das gewöhnliche Adjungieren bezüglich $(.,.)$ bezeichnet. Dann hat ein Unterraum M von $\mathbb{C}^n$ genau dann eine der Eigenschaften (i)-(v) aus Definition 1.3.1 bezüglich $[.,.]_1$, wenn sie der Unterraum SM bezüglich $[.,.]_2$ hat.

Beweis: Die Aussage folgt direkt daraus, dass $[Sx,Sx]_2 = (H_2Sx,Sx) = (S^*H_2Sx,x) = (H_1x,x) = [x,x]_1$ für alle $x \in M$ gilt.

■

Definition 1.3.3 Sei $H \in L(\mathbb{C}^n)$ hermitesch. Dann bezeichnet $i_+(H), i_-(H)$ und $i_0(H)$ die Anzahl der positiven, negativen und verschwindenden Eigenwerte von H, wobei die einzelnen Eigenwerte gemäß ihrer Vielfachheit gezählt werden.

Für ein reguläres H gilt natürlich $i_0(H) = 0$.

Lemma 1.3.4 Sei $H \in L(\mathbb{C}^n)$ hermitesch. Dann gilt $i_+(H) + i_-(H) + i_0(H) = n$ und die Matrixdarstellung von H ist kongruent zu

$$\begin{pmatrix} I_{i_+(H)} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{i_-(H)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hierin bezeichnet $I_m \in \mathbb{C}^{m\times m}$ die Einheitsmatrix.

Beweis: Siehe [1, Theorem A.1.1].

■

Lemma 1.3.5 Sei $H \in L(\mathbb{C}^n)$ hermitesch und bezeichne $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ die absteigend angeordneten, nicht notwendigerweise verschiedenen Eigenwerte von H. Dann gilt

$$\forall p \in \{1,\ldots,n\} : \lambda_p = \max_{\substack{N\subseteq\mathbb{C}^n \text{ Unterraum,}\\ \dim(N)=p}} \min_{\substack{x\in N,\\ (x,x)=1}} (Hx,x)$$

Beweis: Siehe [1, Theorem A.1.6].

■

Jetzt können wir das Hauptresultat dieses Unterabschnittes formulieren, welches sich in Abschnitt 3, und dort insbesondere in Unterabschnitt 3.4, als entscheidend herausstellen wird:

Proposition 1.3.6 Sei $[.,.]$ ein indefinites Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ und $H \in L(\mathbb{C}^n)$ die zugehörige reguläre hermitesche Abbildung. Dann gilt:

(i) Die maximale Dimension eines positiven bzw. eines nichtnegativen Unterraumes von $\mathbb{C}^n$ ist $i_+(H)$.

(ii) Die maximale Dimension eines negativem bzw. eines nichtpositiven Unterraumes von $\mathbb{C}^n$ ist $i_-(H)$.

(iii) Die maximale Dimension eines neutralen Unterraumes von $\mathbb{C}^n$ ist $\min(i_+(H), i_-(H))$.

Beweis: Zunächst zu (i): Sei $M \subseteq \mathbb{C}^n$ ein positiver bzw. nichtnegativer Unterraum. Angenommen $p := \dim(M) > i_+(H)$, dann existiert wegen Lemma 1.3.5 ein $y \in M$ mit $[y, y] = (Hy, y) = \min_{x \in M, (x,x)=1}(Hx, x) \leq \lambda_p$. Da H regulär ist, gilt $\lambda_i > 0$ für $i = 1, \ldots, i_+(H)$ und $\lambda_i < 0$ für $i = i_+(H) + 1, \ldots, n$, was auf den Widerspruch $0 \leq [y, y] \leq \lambda_p < 0$ führt. Also gilt $\dim(M) \leq i_+(H)$ für einen jeden solchen Unterraum. Um zu zeigen, dass es einen derartigen Unterraum mit Dimension $i_+(H)$ gibt, verwenden wir, dass nach Lemma 1.3.4 ein reguläres $S \in L(\mathbb{C}^n)$ derart existiert, dass

$$\begin{pmatrix} I_{i_+(H)} & 0 \\ 0 & -I_{i_-(H)} \end{pmatrix} =: H_0 = S^* H S.$$

Bezüglich $[.,.]_{H_0}$ ist der $i_+(H)$-dimensionale Unterraum $\text{span}\{e_1, \ldots, e_{i_+(H)}\}$ positiv bzw. nichtnegativ, und daher gilt selbiges nach Lemma 1.3.2 für den gleichdimensionalen Raum $M := S\left(\text{span}\{e_1, \ldots, e_{i_+(H)}\}\right)$ bezüglich $[.,.]$. (ii) zeigt man analog.

Für (iii) beachte man zunächst, dass jeder neutrale Unterraum sowohl nichtnegativ als auch nichtpositiv ist, und daher nach Obigem seine Dimension durch $\min(i_+(H), i_-(H))$ nach oben beschränkt ist. Ein neutraler Unterraum, der diese maximale Dimension hat, ist nach analogen Überlegungen zu oben gegeben durch

$$M := S\left(\text{span}\{e_1 + e_n, \ldots, e_{\min(i_+(H), i_-(H))} + e_{n+1-\min(i_+(H), i_-(H))}\}\right).$$

■

2 Lineare Abbildungen

Wir wenden uns jetzt der Untersuchung von linearen Abbildungen auf $\mathbb{C}^n$ im Lichte eines indefiniten Skalarproduktes $[.,.]$ auf diesem Raum mit zugehöriger regulärer hermitescher Abbildung H zu.

2.1 Adjungierte Abbildungen

Wir verallgemeinern zunächst den Begriff der adjungierten Abbildung auf indefinite Skalarprodukte.

Lemma 2.1.1 Für $A \in L(\mathbb{C}^n)$ gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $A^{[*]} \in L(\mathbb{C}^n)$ mit der Eigenschaft

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n : [Ax, y] = [x, A^{[*]}y].$$

Wir nennen diese die *Adjungierte von A bezüglich* [.,.] oder auch die *H-Adjungierte von A*. Dabei gilt

$$A^{[*]} = H^{-1}A^*H. \tag{2.1}$$

Beweis: Die Existenz und Eindeutigkeit der Adjungierten bezüglich des Standardskalarprodukts liefert gemeinsam mit

$$[Ax, y] = (HAx, y) = (x, A^*Hy) = (Hx, H^{-1}A^*Hy) = [x, H^{-1}A^*Hy]$$

für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ die Existenz und Eindeutigkeit von $A^{[*]}$ sowie die behauptete Gleichheit. ∎

Folgende Eigenschaften der Adjungierten bezüglich $[.,.]$ ergeben sich direkt aus den entsprechenden Eigenschaften der Adjungierten bezüglich $(.,.)$ und (2.1).

Lemma 2.1.2 Für $A, B \in L(\mathbb{C}^n)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

(i) $(A^{[*]})^{[*]} = A$,

(ii) $(\alpha A + \beta B)^{[*]} = \overline{\alpha}A^{[*]} + \overline{\beta}B^{[*]}$,

(iii) $(AB)^{[*]} = B^{[*]}A^{[*]}$.

Lemma 2.1.3 Sei $A \in L(\mathbb{C}^n)$. Dann gilt:

(i) $\ker(A^{[*]}) = (\operatorname{ran}(A))^{[\perp]}$, $\operatorname{ran}(A^{[*]}) = (\ker(A))^{[\perp]}$,

(ii) $\dim(\ker(A^{[*]})) = \dim(\ker(A))$, $\dim(\operatorname{ran}(A^{[*]})) = \dim(\operatorname{ran}(A))$.

Insbesondere ist A genau dann regulär, wenn das für $A^{[*]}$ der Fall ist.
Beweis: Für $x \in \mathbb{C}^n$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} A^{[*]}x = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall y \in \mathbb{C}^n : [A^{[*]}x, y] = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall y \in \mathbb{C}^n : [x, Ay] = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in (\operatorname{ran}(A))^{[\perp]} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die erste Gleichheit in (i). Infolge haben wir aber auch $\ker((A^{[*]})^{[*]}) = (\operatorname{ran}(A^{[*]}))^{[\perp]}$ und mit Lemma 1.2.2, (ii), sowie Lemma 2.1.2, (i), durch Bildung des orthogonalen Komplements die zweite Gleichheit.

(ii) folgt direkt aus (i) in Verbindung mit der Rangformel $\dim(\ker(A))+\dim(\operatorname{ran}(A)) = n$ und Lemma 1.2.2, (i).

$\blacksquare$

Lemma 2.1.4 Für $A \in L(\mathbb{C}^n)$ und einen Unterraum $M \subseteq \mathbb{C}^n$ ist M *A-invariant*, also $AM \subseteq M$, genau dann, wenn $M^{[\perp]}$ $A^{[*]}$-invariant ist.

Beweis: Man hat unter Berücksichtigung von Lemma 1.2.2, (ii), folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
M \text{ ist } A\text{-invariant} &\iff \forall x \in M : Ax \in M \\
&\iff \forall x \in M, y \in M^{[\perp]} : [Ax, y] = 0 \\
&\iff \forall x \in M, y \in M^{[\perp]} : [x, A^{[*]}y] = 0 \\
&\iff \forall y \in M^{[\perp]} : A^{[*]}y \in M^{[\perp]} \\
&\iff M^{[\perp]} \text{ ist } A^{[*]}\text{-invariant}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Definition 2.1.5 Eine Abbildung $A \in L(\mathbb{C}^n)$ heißt *normal bezüglich* $[.,.]$ oder *H-normal*, falls A und $A^{[*]}$ kommutieren, also $AA^{[*]} = A^{[*]}A$.

Unter Berücksichtigung von (2.1) bedeutet die H-Normalität von $A \in L(\mathbb{C}^n)$ also

$$AH^{-1}A^*H = H^{-1}A^*HA \tag{2.2}$$

Das nächste Resultat wird für den nachfolgenden Unterabschnitt 2.2 entscheidend sein.

Proposition 2.1.6 Seien $[.,.]_1, [.,.]_2$ indefinite Skalarprodukte auf $\mathbb{C}^n$ mit zugehörigen regulären hermiteschen Abbildungen $H_1, H_2 \in L(\mathbb{C}^n)$ und $A \in L(\mathbb{C}^n)$. Sind H_1 und H_2 kongruent, existiert also ein reguläres $S \in L(\mathbb{C}^n)$ mit $H_2 = S^*H_1S$, dann ist $A_1 := A$ genau dann H_1-normal, wenn $A_2 := S^{-1}A_1S$ H_2-normal ist.

Beweis: Angenommen, A_1 ist H_1-normal. Dann folgt mit Lemma 2.1.1

$$\begin{aligned}
A_2A_2^{[*]_2} &= S^{-1}A_1SH_2^{-1}S^*A_1^*(S^*)^{-1}H_2 \\
&= S^{-1}A_1(SH_2^{-1}S^*)A_1^*((S^*)^{-1}H_2S^{-1})S \\
&= S^{-1}A_1H_1^{-1}A_1^*H_1S \\
&= S^{-1}A_1A_1^{[*]_1}S \\
&= S^{-1}A_1^{[*]_1}A_1S \\
&= S^{-1}SH_2^{-1}S^*A_1^*(S^*)^{-1}H_2S^{-1}A_1S \\
&= H_2^{-1}A_2^*H_2A_2 \\
&= A_2^{[*]_2}A_2.
\end{aligned}$$

Die umgekehrte Richtung folgt direkt aus dem Gezeigten, da ja $H_1 = (S^{-1})^*H_2S^{-1}$ und $A_1 = SA_2S^{-1}$ gilt.

$\blacksquare$

2.2 Unitäre Ähnlichkeit

In diesem Unterabschnitt seien $[.,.]_i$ und H_i, $i = 1, 2$, indefinite Skalarprodukte auf $\mathbb{C}^n$ mit zugehörigen regulären hermiteschen Abbildungen aus $L(\mathbb{C}^n)$.

Definition 2.2.1 Eine lineare Abbildung T auf $\mathbb{C}^n$ heißt (H_1, H_2)-*unitär*, falls $[Tx, Ty]_2 = [x, y]_1$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt. Im Falle $H_1 = H_2$ nennen wir T auch *unitär bezüglich* $[.,.]$ oder H-*unitär*.

Lemma 2.2.2 $T \in L(\mathbb{C}^n)$ ist genau (H_1, H_2)-unitär, wenn T eine Kongruenz zwischen H_1 und H_2 etabliert, also wenn T regulär ist mit $H_1 = T^* H_2 T$.

Beweis: T ist (H_1, H_2)-unitär genau dann, wenn

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n : (H_1 x, y) = [x, y]_1 = [Tx, Ty]_2 = (H_2 T x, T y) = (T^* H_2 T x, y).$$

■

Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{M} := \{(A, H) \in L(\mathbb{C}^n) \times L(\mathbb{C}^n) : H \text{ ist regulär und hermitesch}\}.$$

Definition 2.2.1 und Lemma 2.2.2 legen die folgende Begriffsbildung nahe.

Definition 2.2.3 Wir nennen $(A_1, H_1), (A_2, H_2) \in \mathcal{M}$ *unitär ähnlich*, i.Z. $(A_1, H_1) \sim (A_2, H_2)$, falls es ein reguläres $T \in L(\mathbb{C}^n)$ gibt derart, dass

$$H_1 = T^* H_2 T \quad \text{und} \quad A_1 = T^{-1} A_2 T$$

erfüllt ist.

$(A_1, H_1) \sim (A_2, H_2)$ gilt also genau dann, wenn es ein (H_1, H_2)-unitäres $T \in L(\mathbb{C}^n)$ gibt, dass eine Ähnlichkeit zwischen A_1 und A_2 etabliert.

Man sieht sofort, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}$ ist. Bezeichnen wir weiters $(A, H) \in \mathcal{M}$ als normal, wenn A H-normal ist, so impliziert Proposition 2.1.6 direkt das folgende

Korollar 2.2.4 Sind $(A_1, H_1), (A_2, H_2) \in \mathcal{M}$ unitär ähnlich, so ist A_1 genau dann H_1-normal, wenn es A_2 H_2-normal ist. Somit ist die Eigenschaft der Normalität mit $\sim$ verträglich und daher eine Eigenschaft der ganzen Äquivalenzklasse aus $\mathcal{M}/\sim$.

Das Problem des nächsten und letzten Abschnittes lässt sich nun sehr prägnant wie folgt formulieren: Identifiziere in jeder normalen Äquivalenzklasse aus $\mathcal{M}/\sim$ einen möglichst einfachen, kanonischen Repräsentanten. Um dieses Problem anzugehen, brauchen wir noch die folgenden beiden Resultate.

Lemma 2.2.5 Seien A_k für $k = 1, 2$ lineare Abbildungen auf $\mathbb{C}^n$ und $\mathcal{B}_k := \{u_1^{(k)}, \ldots, u_n^{(k)}\}$ Basen. Haben A_1 bezüglich $\mathcal{B}_1$ und A_2 bezüglich $\mathcal{B}_2$ dieselbe Matrixdarstellung $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so sind (A_1, H_1) und (A_2, H_2) unitär ähnlich, falls

$$[u_i^{(1)}, u_j^{(1)}]_1 = [u_i^{(2)}, u_j^{(2)}]_2 \text{ für alle } i, j = 1, \ldots, n.$$

Beweis: Sei $A := (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ und definiere die lineare Abbildung T vermöge $Tu_i^{(1)} := u_i^{(2)}, i = 1, \ldots, n$. Dann gilt für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$A_2 T u_i^{(1)} = A_2 u_i^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} u_j^{(2)} = T \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} u_j^{(1)} \right) = T A_1 u_i^{(1)}$$

und damit $A_1 = T^{-1} A_2 T$. Außerdem hat man für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$[u_i^{(1)}, u_j^{(1)}]_1 = (u_i^{(1)}, H_1 u_j^{(1)}) \quad \text{und} \quad [u_i^{(2)}, u_j^{(2)}]_2 = (u_i^{(2)}, H_2 u_j^{(2)}) = (u_i^{(1)}, T^* H_1 T u_j^{(1)}).$$

Somit gilt $H_1 = T^* H_2 T$ genau dann, wenn die Bedingung aus der Aussage erfüllt ist.

■

Korollar 2.2.6 Sei A_1 eine lineare Abbildung auf $\mathbb{C}^n$, die bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1 := \{u_1^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}\}$ die Matrixdarstellung $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hat und sei $\mathcal{B}_2 := \{u_1^{(2)}, \ldots, u_n^{(2)}\}$ eine bezüglich des Standardskalarprodukts orthonormale Basis. Definiere zwei lineare Abbildungen A_2 und H_2 auf $\mathbb{C}^n$ durch ihre Matrixdarstellungen bezüglich $\mathcal{B}_2$ wie folgt: A_2 habe die Matrixdarstellung A und H_2 die Matrixdarstellung $(H_{2,ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, wobei $H_{2,ij} := [u_j^{(1)}, u_i^{(1)}]_1, i, j = 1, \ldots, n$. Dann sind (A_1, H_1) und (A_2, H_2) unitär ähnlich.
Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} [u_i^{(2)}, u_j^{(2)}]_2 &= (H_2 u_i^{(2)}, u_j^{(2)}) = \left(\sum_{k=1}^{n} H_{2,ki} u_k^{(2)}, u_j^{(2)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} H_{2,ki} (u_k^{(2)}, u_j^{(2)}) = \sum_{k=1}^{n} H_{2,ki} \delta_{kj} = H_{2,ji} = [u_i^{(1)}, u_j^{(1)}]_1, \end{aligned}$$

weshalb die Aussage aus Lemma 2.2.5 folgt.

■

3 Normale Abbildungen

Wir wenden uns dem titelgebenden Studium von normalen Abbildungen auf Räumen mit indefinitem Skalarprodukt zu.

3.1 Jordan'sche Normalform und Normale Abbildungen

Wir beginnen mit einer kurzen Wiederholung der wichtigsten Resultate aus der Theorie der Jordan'schen Normalform.

Definition 3.1.1 Ist $\lambda \in \mathbb{C}$, dann heißt

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & \ldots & & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times m}$$

Jordan-Block der Größe m zum Eigenwert λ.

Definition 3.1.2 Sei A eine lineare Abbildung auf $\mathbb{C}^n$. Wir nennen die Menge $\sigma(A)$ der Eigenwerte von A das *Spektrum von A* und für $\lambda \in \sigma(A)$ bezeichnen wir

$$\mathcal{E}_A(\lambda) := \ker(A - \lambda I_n) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{R}_A(\lambda) := \ker(A - \lambda I_n)^n$$

als den *Eigenraum* bzw. *Hauptraum von A zum Eigenwert λ*. Die Zahl $g_A(\lambda) := \dim \mathcal{E}_A(\lambda)$ heißt *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts λ.

Die Relevanz dieser Begriffsbildungen artikuliert sich in dem folgenden

Satz 3.1.3 Sei A eine lineare Abbildung auf $\mathbb{C}^n$, repräsentiert durch ihre Matrixdarstellung aus $\mathbb{C}^{n\times n}$ bezüglich der kanonischen Basis. Bezeichne weiter $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$ die verschiedenen Eigenwerte von A und $g_i := g_A(\lambda_i), i = 1, \dots, n$, deren geometrische Vielfachheiten. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) $\mathbb{C}^n$ lässt sich schreiben als $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}_A(\lambda_1)\dot{+}\dots\dot{+}\mathcal{R}_A(\lambda_l)$

(ii) Für $i = 1, \dots, l$ sind die Räume $\mathcal{E}_A(\lambda_i)$ und $\mathcal{R}_A(\lambda_i)$ A-invariant und A hat auf diesen genau den Eigenwert λ_i.

(iii) A ist ähnlich zu einer Jordan-Blockdiagonalmatrix der Form

$$J = \operatorname{diag}(J_{m_{1,1}}(\lambda_1), \dots, J_{m_{1,g_1}}(\lambda_1), \dots, J_{m_{l,1}}(\lambda_l), \dots, J_{m_{l,g_l}}(\lambda_l))$$

mit $\sum_{j=1}^{g_i} m_{i,j} = \dim(\mathcal{R}_A(\lambda_i)), i = 1, \dots, l$, und diese ist bis auf die Reihenfolge der sie aufbauenden Blöcke eindeutig durch A bestimmt.

Beweis: Siehe [1, Abschnitt A.2]. ■

Lemma 3.1.4 Seien A, B lineare Abbildungen auf $\mathbb{C}^n$ mit $AB = BA$, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\} := \sigma(A)$ die verschiedenen Eigenwerte von A und $\{\mu_1, \dots, \mu_m\} := \sigma(B)$ die verschiedenen Eigenwerte von B. Definiere weiters für $(i, j) \in \{1, \dots, l\} \times \{1, \dots, m\}$ den Unterraum $Q_{ij} := \mathcal{R}_A(\lambda_i) \cap \mathcal{R}_B(\mu_j)$ und $\Omega := \{(i, j) \in \{1, \dots, l\} \times \{1, \dots, m\} : Q_{ij} \neq \{0\}\}$. Dann gilt:

(i) $\forall (i, j) \in \{1, \dots, l\} \times \{1, \dots, m\} : Q_{ij}$ ist invariant für A und B

(ii) $\bigoplus_{(i,j)\in\Omega} Q_{ij} = \mathbb{C}^n$

(iii) $\forall (i, j) \in \{1, \dots, l\} \times \{1, \dots, m\}$: In Q_{ij} hat A genau den Eigenwert λ_i und B genau den Eigenwert μ_j

Beweis: Mit Ausnahme der gleichzeitigen Invarianz der Q_{ij} unter A und B folgen alle Aussagen direkt aus Satz 3.1.3. Die gleichzeitige Invarianz ist aber eine unmittelbare Konsequenz des Kommutierens von A und B, da Letzteres ja

$$A(B - \mu_j I)^n = (B - \mu_j I)^n A \quad \text{und} \quad B(A - \lambda_i I)^n = (A - \lambda_i I)^n B$$

impliziert.

∎

Wir wollen an dieser Stelle noch die Eigen- und Haupträume der Adjungierten einer linearen Abbildung untersuchen.

Proposition 3.1.5 Ist $A \in L(\mathbb{C}^n)$, so gilt

(i) $\sigma(A^{[*]}) = \overline{\sigma(A)}$,

(ii) $\dim(\mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\lambda})) = \dim(\mathcal{R}_A(\lambda))$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$,

(iii) $(\mathcal{R}_A(\lambda) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\mu}))\,[\perp]\,(\mathcal{R}_A(\kappa) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\nu}))$ für alle $\lambda, \mu, \kappa, \nu \in \sigma(A)$ mit $(\kappa, \nu) \neq (\mu, \lambda)$.

(iv) Ist zusätzlich A H-normal, so gilt $\dim(\mathcal{R}_A(\lambda) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\mu})) = \dim(\mathcal{R}_A(\mu) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\lambda}))$ für alle $\lambda, \mu \in \sigma(A), \lambda \neq \mu$.

Beweis: Wegen Lemma 2.1.2, (ii) und (iii), gilt $(A - \lambda I_n)^{[*]} = A^{[*]} - \overline{\lambda} I_n$, $((A - \lambda I_n)^n)^{[*]} = (A^{[*]} - \overline{\lambda} I_n)^n$. Damit folgen die Aussagen (i) und (ii) sofort aus Lemma 2.1.3, (ii).

Für (iii) seien $x \in \mathcal{R}_A(\lambda) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\mu}), y \in \mathcal{R}_A(\kappa) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\nu})$ mit $(\kappa, \nu) \neq (\mu, \lambda)$ beliebig vorgegeben. Im Falle $\nu \neq \lambda$ ist $(A - \nu I_n)^n$ nach Satz 3.1.3, (i), eine Bijektion von $\mathcal{R}_A(\lambda)$ auf sich. Also gibt es ein $z \in \mathcal{R}_A(\lambda)$ mit $x = (A - \nu I_n)^n z$. Damit folgt die Behauptung wegen

$$[x, y] = [(A - \nu I_n)^n z, y] = [z, (A^{[*]} - \overline{\nu} I_n)^n y] = [x, 0] = 0.$$

Den Fall $\kappa \neq \mu$ behandelt man entsprechend.

Für (iv) bemerken wir zunächst, dass wir für ein H-normales A mit $B := A^{[*]}$ genau in der Situation von Lemma 3.1.4 sind. Folglich haben wir unter Berücksichtigung von (i) die Zerlegung

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda, \mu \in \sigma(A)} \mathcal{R}_A(\lambda) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\mu}). \tag{3.1}$$

Aus (iii) erhalten wir unmittelbar

$$\bigoplus_{\substack{\kappa, \nu \in \sigma(A) \\ (\kappa, \nu) \neq (\mu, \lambda)}} \mathcal{R}_A(\kappa) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\nu}) \subseteq (\mathcal{R}_A(\lambda) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\mu}))^{[\perp]}, \tag{3.2}$$

woraus wir nach Lemma 1.2.2, (i), sowie (3.1) folgern, dass

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{R}_A(\mu) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\lambda})) &= n - \sum_{\substack{\kappa, \nu \in \sigma(A) \\ (\kappa, \nu) \neq (\mu, \lambda)}} \dim(\mathcal{R}_A(\kappa) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\nu})) \\ &\geq n - \dim\left((\mathcal{R}_A(\lambda) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\mu}))^{[\perp]}\right) \\ &= \dim(\mathcal{R}_A(\lambda) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\mu})) \end{aligned}$$

Vertauschen wir die Rollen von λ und μ in diesem Argument, so erhalten wir die umgekehrte Ungleichung und damit insgesamt die Behauptung.

∎

Definition 3.1.6 Die Matrix

$$S_n := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

heißt *sip-Matrix* (englisch für: standard involutory permutation) *der Größe n*.

Offensichtlich ist die Matrix S_n involutorisch, also $S_n^2 = I_n$, sowie regulär und hermitesch. Sie definiert somit ein indefinites Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$.

Proposition 3.1.7 Seien $J_1 := J_{n_1}(\lambda_1), \dots, J_k := J_{n_k}(\lambda_k)$ Jordan-Blöcke und $S_1 := S_{n_1}, \dots, S_k := S_{n_k}$ die sip-Matrizen der zugehörigen Größen. Dann definiert die Blockdiagonalmatrix $S := \operatorname{diag}(S_1, \dots, S_k)$ ein indefinites Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ und die Blockdiagonalmatrix $J := \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_k)$ ist S-normal, wobei $n := n_1 + \dots + n_k$.

Beweis: Mit den $S_i, i = 1, \dots, k$, ist auch S involutorisch, regulär und hermitesch. Die behauptete S-Normalität ist gemäß (2.2) äquivalent zu $JSJ^*S = SJ^*SJ$. Berücksichtigt man $J^* = \operatorname{diag}(J_1^*, \dots, J_k^*)$, so bedeutet das

$$\forall i = 1, \dots, k : J_i S_i J_i^* S_i = S_i J_i^* S_i J_i.$$

Wir nehmen also im Weiteren oBdA. $k = 1$ an und lassen die Indizes weg. Die Multiplikation einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit S von links vertauscht die Zeilen dieser Matrix gemäß der Permutation $\pi(i) = n + 1 - i, i = 1, \dots, n$, die von rechts in derselben Weise die Spalten. Gemeinsam mit

$$J^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda} & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & \overline{\lambda} & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & \overline{\lambda} & 0 \\ 0 & \dots & & 1 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$$

folgt daraus $SJ^*S = \overline{J}$, wobei $\overline{J}$ für die Matrix steht, die durch komplexes Konjugieren der Einträge von J entsteht. Die Aussage ist somit zu $J\overline{J} = \overline{J}J = \overline{J\overline{J}}$, also zur Reellwertigkeit der Einträge von $J\overline{J}$, äquivalent, was wegen

$$J\overline{J} = \begin{pmatrix} \lambda\overline{\lambda} & \lambda + \overline{\lambda} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda\overline{\lambda} & \lambda + \overline{\lambda} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda\overline{\lambda} & \lambda + \overline{\lambda} & 1 \\ & & & & \lambda\overline{\lambda} & \lambda + \overline{\lambda} \\ 0 & \dots & & & 0 & \lambda\overline{\lambda} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

erfüllt ist.

■

Korollar 3.1.8 Zu jedem $A \in L(\mathbb{C}^n)$ existiert ein reguläres hermitesches $H \in L(\mathbb{C}^n)$ derart, dass A H-normal ist.

Beweis: Wir arbeiten wieder mit den Matrixdarstellungen der involvierten Abbildungen bezüglich der kanonischen Basis. Es sei $J = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_k) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine gemäß Satz 3.1.3, (iii), existierende Jordan-Normalform von A mit den Jordan-Blöcken $J_1, \ldots, J_k$ und $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ regulär mit $A = T^{-1}JT$. Setze $S := \mathrm{diag}(S_1, \ldots, S_k)$ wie in Proposition 3.1.7 mit sip-Matrizen passender Größe. Nach Proposition 3.1.7 ist J S-normal, also ist nach Proposition 2.1.6 A bezüglich $H := T^*ST$ normal.

■

Wir sehen also, dass wenn wir von definiten zu indefiniten Skalarprodukten verallgemeinern, jede Abbildung aus $L(\mathbb{C}^n)$ bezüglich eines geeignet definierten Skalarproduktes normal ist. Das motiviert umso mehr die Suche nach einer Klassifikation normaler Abbildungen auf Räumen mit indefiniten Skalarprodukten modulo unitärer Ähnlichkeit, weist aber auch schon auf die große Komplexität dieses Problems hin, vgl. Abs. 3.3. Nichtsdestotrotz wollen wir uns dieser Aufgabe jetzt zuwenden.

3.2 Zerlegbarkeit normaler Abbildungen

Sei $[.,.]$ ein indefinites Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ und $H \in L(\mathbb{C}^n)$ die zugehörige reguläre hermitesche Abbildung.

Definition 3.2.1 Eine lineare Abbildung A auf $\mathbb{C}^n$ heißt *zerlegbar*, wenn ein nichtdegenerierter Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^n$ mit $\{0\} \neq V \neq \mathbb{C}^n$ derart existiert, dass V und $V^{[\perp]}$ A-invariant sind, also $AV \subseteq V$ und $AV^{[\perp]} \subseteq V^{[\perp]}$ gilt.

Gemäß Lemma 1.2.4 ist dann $\mathbb{C}^n = V \dot{+} V^{[\perp]}$ und wir sagen, dass A die *orthogonale Summe von* $A_1 := A|_V$ *und* $A_2 := A|_{V^{[\perp]}}$ *bezüglich* $[.,.]$ bzw. deren *H-orthogonale Summe* ist.

Gibt es keinen solchen Unterraum, dann heißt A unzerlegbar.

Lemma 3.2.2 Für eine lineare Abbildung A auf $\mathbb{C}^n$ ist ein Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^n$ gemeinsam mit seinem H-orthogonalen Komplement $V^{[\perp]}$ genau dann A-invariant, wenn V bezüglich A und $A^{[*]}$ invariant ist.

Beweis: Nach Lemma 1.2.2, (ii) und Lemma 2.1.3 ist $V^{[\perp]}$ genau dann bezüglich A invariant, wenn $(V^{[\perp]})^{[\perp]} = V$ bezüglich $A^{[*]}$-invariant ist.

■

Bemerkung 3.2.3 Ist mit der Terminologie aus Definition 3.2.1 A zerlegbar, so ist nach Lemma 3.2.2 V $A^{[*]}$-invariant und die Adjungierte von $A_1 = A|_V$ bezüglich $[.,.]|_{V \times V}$ offensichtlich $A^{[*]}|_V$. Ist A dabei H-normal, so ist A_1 bezüglich $[.,.]_{V \times V}$ normal. Analoges gilt für A_2 bezüglich $[.,.]_{V^{[\perp]} \times V^{[\perp]}}$.

Iterativ lässt sich basierend auf Definition 3.2.1 die Darstellbarkeit linearer Abbildungen als H-orthogonale Summe auch von $k > 2$ Summanden definieren. Man erhält unmittelbar

Proposition 3.2.4 Jede lineare Abbildung A auf $\mathbb{C}^n$ lässt sich in eine H-orthogonale Summe von unzerlegbaren linearen Abbildungen $A_1, \ldots, A_k$ zerlegen.

Schließlich kommen wir an bei

Proposition 3.2.5 Jede H-normale lineare Abbildung N auf $\mathbb{C}^n$ lässt sich in eine H-orthogonale Summe von linearen Abbildungen mit genau einem oder zwei Eigenwerten zerlegen.

Beweis: Ist N H-normal, so kommutiert $A := N$ mit $B := N^{[*]}$ und wir befinden uns in der Situation von Lemma 3.1.4. Bezeichnet wieder $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\} := \sigma(N)$ bzw. $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} := \sigma(N^{[*]})$ die verschiedenen Eigenwerte von N bzw. $N^{[*]}$, so gilt nach Proposition 3.1.5, (i), in diesem Fall $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \{\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_l}\}$. Weiters haben wir für $(r, s) \neq (j, i)$ nach Proposition 3.1.5, (iii), $Q_{ij}[\perp]Q_{rs}$. Setzt man nun $V_i := Q_{ii}$ für $(i, i) \in \Omega$ und $V_{ij} := Q_{ij} + Q_{ji}$ für $(i, j) \in \Omega$ und $i < j$, so gilt $\mathbb{C}^n = \bigoplus_i V_i \oplus \bigoplus_{i<j} V_{ij}$ und unter zusätzlicher Berücksichtigung von Lemma 1.2.4 haben die zugehörigen Einschränkungen $N|_{V_i}$ und $N|_{V_{ij}}$ genau die behaupteten Eigenschaften.

■

Bemerkung 3.2.6 Um die normalen Abbildungen auf einem gegebenen indefiniten Skalarproduktraum modulo unitärer Ähnlichkeit zu klassifizieren, reicht es nach Bemerkung 3.2.3 und Proposition 3.2.4 aus, das für die unzerlegbaren unter ihnen zu tun. Nach Proposition 3.2.5 haben diese genau einen oder zwei Eigenwerte.

3.3 Komplexität der Klassifikation normaler Abbildungen

Ehe wir uns weiter mit der Lösung des Problems der Klassifikation normaler Abbildungen auf Räumen mit indefinitem Skalarprodukt beschäftigen, wollen wir die Komplexität dieser Aufgabenstellung abschätzen. Wir beginnen mit dem folgenden

Lemma 3.3.1 Sind $A, B, C \in L(\mathbb{C}^n)$ mit $CA = BC$ und haben A und B keine gemeinsamen Eigenwerte, so folgt $C = 0$.

Beweis: Seien $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\} := \sigma(A)$ die verschiedenen Eigenwerte von A und bezeichne wie gewohnt $\mathcal{R}_A(\lambda_i)(\subseteq \mathbb{C}^n)$ den zum Eigenwert λ_i gehörigen Hauptraum von A. Für $x \in \mathcal{R}_A(\lambda_i)$ sei $s_x \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$s_x := \min\{s \in \mathbb{N} : (A - \lambda_i I_n)^s x = 0\} \ (\leq n).$$

Wir zeigen per Induktion nach s_x, dass $Cx = 0$ für alle $x \in \mathcal{R}_A(\lambda_i)$ gelten muss. Wegen $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}_A(\lambda_1)\dot{+} \ldots \dot{+}\mathcal{R}_A(\lambda_l)$, vgl. Satz 3.1.3, (i), folgt daraus die Behauptung.

- Im Fall $s_x = 0$ gilt $Ax = \lambda_i x$ und daher $\lambda_i Cx = CAx = BCx$. Da A und B keine gemeinsamen Eigenwerte haben, folgt $Cx = 0$.

- Wissen wir im Fall $s_x > 0$, dass die Aussage für alle $y \in \mathcal{R}_A(\lambda_i)$ mit $s_y = s_x - 1$ stimmt, so setzen wir $z := (A - \lambda_i I)x$. Offenbar gilt $s_z = s_x - 1$ und $Ax = \lambda_i x + z$. Gemäß Induktionsvoraussetzung folgt $Cz = 0$, weshalb $\lambda_i Cx = C(\lambda_i x + z) = CAx = BCx$ und folglich $Cx = 0$.

■

Wir verwenden für den Rest des Unterabschnitts konsequent die Identifikation von linearen Abbildungen mit ihren Matrixdarstellungen bezüglich der kanonischen Basis.

Sei $\nu := \min(i_+(H), i_-(H))$, wobei $i_+(H)$ $(i_-(H))$ die Anzahl der positiven (negativen) Eigenwerte von H bezeichnet und wir oBdA. annehmen wollen, dass $i_+(H) \geq i_-(H) = \nu$ gilt. Nach Lemma 1.3.4 ist H kongruent zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} I_{n-\nu} & 0 \\ 0 & -I_\nu \end{pmatrix}.$$

Definiert man $u_j := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_{n-\nu+j}), u_{\nu+j} := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_{n-\nu+j}), j = 1, \ldots, \nu$, sowie $u_{2\nu+j} = e_{\nu+j}, j = 1, \ldots, n-2\nu$, und die Matrix $U := (u_1| \ldots |u_n)$, so erhält man die Kongruenz von H zu

$$U^* \begin{pmatrix} I_{n-\nu} & 0 \\ 0 & -I_\nu \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & I_\nu & 0 \\ I_\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2\nu} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Da wir ohnehin nur modulo unitärer Ähnlichkeit arbeiten, können wir für H oBdA. diese Form voraussetzen. Insbesondere ist H dann involutorisch.

Wir betrachten nun Paare kommutierender Matrizen aus $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. Für ein derartiges Paar (P, Q) definieren wir zwei natürliche Zahlen $l(P, Q)$ und $m(P, Q)$ gemäß

$$\begin{aligned} l(P,Q) &:= \min\left\{ l \in \mathbb{N} : \max_{\lambda\in\sigma(P-lI)} \mathrm{Re}(\lambda) < \min_{\mu\in\sigma(Q)} \mathrm{Re}(\mu) \right\} \\ m(P,Q) &:= \min\left\{ m \in \mathbb{N} : \max_{\mu\in\sigma(Q)} \mathrm{Re}(\mu) < m \right\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

und weiter eine Matrix $N(P, Q)$ aus $\mathbb{C}^{n\times n}$ gemäß

$$N(P,Q) := \begin{pmatrix} P - l(P,Q)I_\nu & 0 & 0 \\ 0 & Q^* & 0 \\ 0 & 0 & m(P,Q)I_{n-2\nu} \end{pmatrix}.$$

Mit (P, Q) ist natürlich auch $(P - l(P, Q)I_\nu, Q)$ ein Paar kommutierender Matrizen aus $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. Weiters gilt mit den Abkürzungen $l := l(P, Q), m := m(P, Q)$ sowie $N := N(P, Q)$ wegen

$$N^{[*]} = HN^*H = \begin{pmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & P^* - lI_\nu & 0 \\ 0 & 0 & mI_{n-2\nu} \end{pmatrix}$$

und $PQ = QP$ offensichtlich $NN^{[*]} = N^{[*]}N$, also ist N stets H-normal.

Definition 3.3.2 Sind (P_1, Q_1) und (P_2, Q_2) Paare von Matrizen aus $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, so nennen wir diese *simultan ähnlich*, wenn es ein reguläres $R \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ gibt mit

$$P_2 = R^{-1}P_1R \quad \text{und} \quad Q_2 = R^{-1}Q_1R$$

Satz 3.3.3 Seien $(P_1, Q_1), (P_2, Q_2)$ Paare kommutierender Matrizen aus $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ und seien $l_i := l(P_i, Q_i), m_i := m(P_i, Q_i)$ und $N_i := N(P_i, Q_i)$ für $i = 1, 2$. Dann sind $(P_1 - l_1I_\nu, Q_1)$

und $(P_2 - l_2 I_\nu, Q_2)$ simultan ähnlich genau dann, wenn N_1 und N_2 H-unitär ähnlich sind, wobei H wie in (3.3) ist.

Beweis:

$\Longrightarrow$: Angenommen, $(P_1 - l_1 I_\nu, Q_1), (P_2 - l_2 I_\nu, Q_2)$ sind simultan ähnlich. Dann existiert ein reguläres $R \in \mathbb{C}^{\nu \times \nu}$ mit $P_2 - l_2 I_\nu = R^{-1}(P_1 - l_1 I_\nu)R$ und $Q_2 = R^{-1} Q_1 R$. Da ähnliche Matrizen dasselbe Spektrum haben, gilt $l_1 = l_2 =: l$ und $m_1 = m_2 =: m$. Definieren wir

$$T := \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & (R^*)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2\nu} \end{pmatrix},$$

so ist T wegen

$$T^{[*]} = \begin{pmatrix} R^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & R^* & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2\nu} \end{pmatrix} = T^{-1}$$

H-unitär und wegen

$$T^{-1} N_1 T = \begin{pmatrix} R^{-1}(P_1 - l I_\nu)R & 0 & 0 \\ 0 & R^* Q_1^* (R^*)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & m I_{n-2\nu} \end{pmatrix} = N_2$$

sind N_1 und N_2 unitär ähnlich bezüglich H.

$\Longleftarrow$: Nehmen wir umgekehrt an, dass N_1 und N_2 H-unitär ähnlich sind. Dann existiert ein H-unitäres $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $T^{-1} N_1 T = N_2$. Schreiben wir T analog zu den N_i als Blockmatrix

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix},$$

und reformulieren wir die Ähnlichkeit der N_i gemäß $N_1 T = T N_2$, so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{pmatrix} (P_1 - l_1 I_\nu)T_{11} & (P_1 - l_1 I_\nu)T_{12} & (P_1 - l_1 I_\nu)T_{13} \\ Q_1^* T_{21} & Q_1^* T_{22} & Q_1^* T_{23} \\ m_1 T_{31} & m_1 T_{32} & m_1 T_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} T_{11}(P_2 - l_2 I_\nu) & T_{12} Q_2^* & m_2 T_{13} \\ T_{21}(P_2 - l_2 I_\nu) & T_{22} Q_2^* & m_2 T_{23} \\ T_{31}(P_2 - l_2 I_\nu) & T_{32} Q_2^* & m_2 T_{33} \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir zunächst die Gleichheit der Einträge dieser Blockmatrizen an den Stellen $(3,1),(3,2),(1,3),(2,3)$, so folgt durch Adjungieren an geeigneter Stelle

$$(P_1 - l_1 I_\nu)T_{13} = m_2 T_{13}, Q_1^* T_{23} = m_2 T_{23}, (P_2 - l_2 I_\nu)^* T_{31}^* = m_1 T_{31}^*, Q_2 T_{32}^* = m_1 T_{32}^*.$$

Nehmen wir an, dass T_{13}, T_{23} nicht gleichzeitig verschwinden, dann folgt aus den ersten beiden Gleichungen wegen $\sigma(Q_1^*) = \overline{\sigma(Q_1)}$, dass $m_2 \in \sigma(P_1 - l_1 I_\nu) \cup \sigma(Q_1)$. Wegen der Definitionen von l_1 und m_1 folgt $m_2 < m_1$. Aus $m_1 T_{33} = m_2 T_{33}$ erhalten wir damit $T_{33} = 0$. Da T regulär ist, können folglich T_{31}, T_{32} nicht gleichzeitig verschwinden. Die zweiten beiden Gleichungen samt $\sigma((P_2 - l_2 I_\nu)^*) = \overline{\sigma(P_2 - l_2 I_\nu)}$ implizieren $m_1 \in \sigma(P_2 - l_2 I_\nu) \cup \sigma(Q_2)$. Wegen der Definitionen von l_2 und m_2 erhalten wir den Widerspruch $m_1 < m_2 < m_1$. Analog lässt sich die Annahme, dass T_{31}, T_{32} nicht gleichzeitig verschwinden auf einen Widerspruch führen. Wir schließen auf $T_{31} = T_{32} = T_{13} = T_{23} = 0$, womit die Regularität von T_{33} die Gleichung $m_1 = m_2$ nach sich zieht.

Im Fall

$$\min_{\mu \in \sigma(Q_1)} \mathrm{Re}(\mu) \leq \min_{\mu \in \sigma(Q_2)} \mathrm{Re}(\mu)$$

erhalten wir wegen $\sigma(Q_2^*) = \overline{\sigma(Q_2)}$, dass $\sigma(P_1 - l_1 I_\nu) \cap \sigma(Q_2^*) = \emptyset$. Nach Lemma 3.3.1 folgt $T_{12} = 0$ aus $T_{12} Q_2^* = (P_1 - l_1 I_\nu) T_{12}$. Damit sind T_{11} und T_{22} regulär, weshalb $P_2 - l_2 I_\nu = T_{11}^{-1}(P_1 - l_1 I_\nu) T_{11}$ sowie $Q_2 = T_{22}^* Q_1 (T_{22}^*)^{-1}$. Da dies die Gleichheit der Spektren der $P_i - l_i I_\nu$ bzw. der Q_i impliziert, folgt weiter aus $T_{21}(P_2 - l_2 I_\nu) = Q_1^* T_{21}$ wieder mit Lemma 3.3.1, dass $T_{21} = 0$. Ist

$$\min_{\mu \in \sigma(Q_1)} \mathrm{Re}(\mu) > \min_{\mu \in \sigma(Q_2)} \mathrm{Re}(\mu),$$

so erhält man $T_{12} = T_{21} = 0$ mit analogen Überlegungen.

Die Kongruenzbedingung aus Lemma 2.2.2 wird damit zu

$$T^* H T = \begin{pmatrix} 0 & T_{11}^* T_{22} & 0 \\ T_{22}^* T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{33}^* T_{33} \end{pmatrix} = H = \begin{pmatrix} 0 & I_\nu & 0 \\ I_\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2\nu} \end{pmatrix}.$$

Mit $R := T_{11}$ folgt $T_{22} = (R^*)^{-1}$, weshalb die Matrix R die simultane Ähnlichkeit von $(P_1 - l_1 I_\nu, Q_1)$ und $(P_2 - l_2 I_\nu, Q_2)$ realisiert.

■

Bemerkung 3.3.4 Der Inhalt dieses Unterabschnitts basiert auf [1, Abschnitt 8.2]. Der dortige Inhalt unterscheidet sich allerdings in zwei Punkten von dem hier präsentierten:

(i) Die in [1] verwendeten Definitionen von $l(P,Q)$ und $m(P,Q)$ sind

$$\begin{aligned} l(P,Q) &:= \min\{l \in \mathbb{N} : \sigma(P - lI_\nu) \cap \sigma(Q) = \emptyset\} \\ m(P,Q) &:= \min\{m \in \mathbb{N} : m \notin \sigma(P - l(P,Q)I_\nu) \cup \sigma(Q^*)\} \end{aligned}$$

und weichen damit von (3.4) ab. Die Definitionen aus [1] sind allerdings nicht stark genug, um in Teil (ii) des Beweises von Satz 3.3.2 die Blöcke von T abseits der Diagonalen zu eliminieren. Daher wurden die Definitionen soweit nachgeschärft, dass die entsprechenden Schlüsse möglich sind.

(ii) Die in [1] formulierte Behauptung ist, dass (P_1, Q_1) und (P_2, Q_2) genau dann simultan ähnlich sind, wenn N_1 und N_2 H-unitär ähnlich sind, ist nicht korrekt, wie man sich folgendermaßen überlegen kann.

Ist (P_1, Q_1) so gewählt, dass - egal ob mit den Definitionen von $l(P,Q)$ und $m(P,Q)$ aus [1] oder aus (3.4) - die Ungleichung $l_1 > 0$ erfüllt ist, so gilt für $(P_2, Q_2) := (P_1 - l_1 I_\nu, Q_1)$, dass $l_2 = 0, m_2 = m_1$ und weiter $N_1 = N_2$. Wegen $\sigma(P_2) = \sigma(P_1) - l_1 \neq \sigma(P_1)$ können aber (P_1, Q_1) und (P_2, Q_2) nicht simultan ähnlich sein.

Bemerkung 3.3.5 In der Literatur nennt man ein Klassifikationsproblem *wild*, wenn es das Problem der Klassifikation von Paaren kommutierender Matrizen modulo simultaner Ähnlichkeit umfasst. Derartige Probleme gelten als hoffnungslos kompliziert [1, Abschnitt 8.2]. Satz 3.3.2 zeigt, dass die Klassifikation von normalen Abbildungen modulo unitärer Ähnlichkeit, grob gesprochen, fast wild ist. Folglich kann man eine Lösung dieses Klassifikationsproblems nur für kleine Werte von $\nu = \min(i_+(H), i_-(H))$ erwarten.

3.4 Klassifikation im minimal indefiniten Fall

Der vorige Unterabschnitt 3.3 zeigt, dass man sich eine Klassifikation H-normaler Abbildungen modulo unitärer Ähnlichkeit nur dann erwarten kann, wenn das Skalarprodukt $[.,.]$ nur schwach indefinit ist, also wenn $\nu := \min(i_+(H), i_-(H))$ klein ist. Nach Bemerkung 3.2.6 können wir uns insbesondere auf die Klassifikation der unzerlegbaren H-normalen Abbildungen beschränken.

Für $\nu = 0$, also im Fall eines definiten Skalarproduktes, haben die normalen Abbildungen eine sehr einfache Struktur. Wir formulieren das entsprechende Ergebnis oBdA. nur für den positiv definiten Fall.

Satz 3.4.1 Sei H eine reguläre hermitesche Abbildung auf $\mathbb{C}^n$ mit $i_-(H) = 0$. Dann gilt:

(i) Für $n > 1$ ist jede H-normale Abbildung zerlegbar.

(ii) Für $n = 1$ ist jede lineare Abbildung H-normal und unzerlegbar.

Wir wollen im Folgenden eine solche Klassifikation für den minimal indefiniten Fall $\nu = 1$ angeben. Dazu werden wir oBdA. solche regulären hermiteschen $H \in L(\mathbb{C}^n)$ betrachten, die genau einen negativen Eigenwert haben. Normalformen werden wir über Matrixdarstellungen bezüglich der kanonischen Basis definieren.

Satz 3.4.2 Sei H eine reguläre hermitesche Abbildung auf $\mathbb{C}^n$ mit $i_-(H) = 1$. Dann gilt:

(i) Für $n > 4$ ist jede H-normale Abbildung zerlegbar.

(ii) Für $n = 1$ ist jede lineare Abbildung H-normal und unzerlegbar.

(iii) Im Fall $n = 2$ ist für jede unzerlegbare H-normale Abbildung N das Paar (N, H) unitär ähnlich zu genau einer der folgenden Normalformen (N_0, H_0):

$$N_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \; H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_1 \neq \lambda_2, \tag{3.5}$$

$$N_0 = \begin{pmatrix} \lambda & z \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \; H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda, z \in \mathbb{C}, |z| = 1. \tag{3.6}$$

(iv) Im Fall $n = 3$ ist für jede unzerlegbare H-normale Abbildung N das Paar (N, H) unitär ähnlich zu genau einer der folgenden Normalformen (N_0, H_0):

$$N_0 = \begin{pmatrix} \lambda & z & r \\ 0 & \lambda & z \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \; H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{mit } \lambda, z \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}, |z| = 1, \arg(z) \in (0, \pi), \tag{3.7}$$

$$N_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & ir \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \; H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

(iv) Im Fall $n = 4$ ist für jede unzerlegbare H-normale Abbildung N das Paar (N, H) unitär ähnlich zu genau einer der folgenden Normalformen (N_0, H_0):

$$N_0 = \begin{pmatrix} \lambda & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & z \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \; H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{mit } \lambda, z \in \mathbb{C}, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}), |z| = 1, \tag{3.9}$$

$$N_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \; H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.10}$$

Beweis (von Satz 3.3.1 und Satz 3.3.2): Sei N unzerlegbar. Gemäß Bemerkung 3.2.6 können wir annehmen, dass N genau einen oder zwei Eigenwerte hat.

Wir behandeln zunächst den Fall, dass N genau zwei Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2$ hat. Man entnimmt Lemma 3.1.4, Proposition 3.1.5 und dem Beweis von Proposition 3.2.5, dass dann

Haupträume Q_1, Q_2 zu den Eigenwerten λ_1, λ_2 existieren mit $\mathbb{C}^n = Q_1 \dot{+} Q_2, Q_1 \cap Q_2 = \{0\}, [Q_1, Q_1] = [Q_2, Q_2] = \{0\}$ sowie nach Proposition 3.1.5, (iv), $m = \dim(Q_1) = \dim(Q_2), n = 2m$. Da die Q_i neutrale Unterräume sind und ihre Dimension nach Proposition 1.3.6, (iii), somit durch ν nach oben hin beschränkt ist, folgt für $\nu = 0$, dass $m = n = 0$, weshalb dieser Fall nicht eintreten kann. Für $\nu = 1$ folgt $m = 1, n = 2$. Wählen wir Eigenvektoren $0 \neq v_i \in Q_i$, so gilt $[v_i, v_i] = 0, [v_1, v_2] \neq 0$ wodurch N bezüglich der aus den Vektoren $u_1 := \frac{1}{[v_1, v_2]} v_1, u_2 := v_2$ bestehenden Basis die Matrixdarstellung N_0 aus (3.5) hat, wobei

$$[u_1, u_1] = [u_2, u_2] = 0, \quad [u_1, u_2] = 1.$$

Nach Korollar 2.2.6 folgt die unitäre Ähnlichkeit von (N, H) zu (N_0, H_0) aus (3.5).

Es verbleibt der Fall, dass N genau einen Eigenwert λ hat. Dann hat $N^{[*]}$ genau den Eigenwert $\overline{\lambda}$ und wir definieren

$$S_0 := \mathcal{E}_N(\lambda) \cap \mathcal{E}_{N^{[*]}}(\overline{\lambda}).$$

Da N und $N^{[*]}$ kommutieren, gilt $\dim(S_0) > 0$. Im Folgenden machen wir eine Fallunterscheidung nach den Eigenschaften von S_0.

Fall 1, S_0 ist nicht neutral: Dann existiert $v \in S_0$ mit $[v, v] \neq 0, Nv = \lambda v$ und $N^{[*]} v = \overline{\lambda} v$. Damit ist der Unterraum $V := \operatorname{span}\{v\}$ nichtdegeneriert und für N und $N^{[*]}$ invariant. Nach Lemma 3.2.2 ist also N nur dann unzerlegbar, wenn $n = 1$, womit wir uns in Fall (ii) befinden.

Fall 2, S_0 ist neutral: Dann gilt wieder wegen Proposition 1.3.6, (iii), dass $\dim(S_0)$ durch ν nach oben beschränkt ist. Für $\nu = 0$ ergibt das einen Widerspruch zu $\dim(S_0) > 0$, womit der Fall $\nu = 0$ bereits abgehandelt ist. Wir betrachten also im Weiteren $\nu = 1$, womit wir auch $\dim(S_0) = 1$ haben. Weiters gilt $S_0 \subseteq S_0^{[\perp]}$ und nach Lemma 1.2.2, (i), $\dim(S_0^{[\perp]}) = n - 1$.

Fall 2.1, $S_0 = S_0^{[\perp]}$: In diesem Fall gilt nach dem gerade Gesagten $n = 2$. Sei $\{v_1', v_2'\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^2$ mit $v_1' \in S_0, v_2' \notin S_0^{[\perp]} = S_0$, weshalb $[v_1', v_2'] \neq 0$. Für $v_1 := v_1'$ und $v_2 := \alpha_1 v_1' + \alpha_2 v_2'$ gilt

$$[v_1, v_1] = 0, \quad [v_2, v_2] = \alpha_1 \overline{\alpha_2} [v_1', v_2'] + \overline{\alpha_1} \alpha_2 [v_2', v_1'] + |\alpha_2|^2 [v_2', v_2'], \quad [v_1, v_2] = \overline{\alpha_2} [v_1', v_2'].$$

Setzen wir $\alpha_2 := \frac{1}{[v_2', v_1']}$ und $\alpha_1 := -\frac{[v_2', v_2']}{2|[v_2', v_1']|^2}$, so folgt

$$[v_1, v_1] = 0, \quad [v_2, v_2] = 0, \quad [v_1, v_2] = 1.$$

Wegen $(N - \lambda I_2)^2 = 0$ und $v_1 \in S_0, v_2 \notin S_0, (N - \lambda I_2) v_2 \in S_0$ gilt $N v_1 = \lambda v_1$ und $N v_2 = \lambda v_2 + \mu v_1, \mu \neq 0$. Definiert man schließlich $u_1 := \sqrt{|\mu|} v_1, u_2 := \frac{1}{\sqrt{|\mu|}} v_2$, so hat N bezüglich der Basis $\{u_1, u_2\}$ die Matrixdarstellung N_0 aus (3.6) mit $z = \frac{\mu}{|\mu|}$ und es gilt

$$[u_1, u_1] = 0, \quad [u_2, u_2] = 0, \quad [u_1, u_2] = 1.$$

Wieder nach Korollar 2.2.6 ist (N, H) unitär ähnlich zu (N_0, H_0) aus (3.6).

Es bleibt zu zeigen, dass der Parameter z in der Normalform aus (3.6) unitär invariant ist. Dazu sei $T = (t_{ij})_{i,j=1,2} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ regulär,

$$N_0' := \begin{pmatrix} \lambda & z' \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ mit } z' \in \mathbb{C}, |z'| = 1,$$

und

$$N_0' = T^{-1} N_0 T, \quad H_0 = T^* H_0 T.$$

Die Ähnlichkeit von N_0 und N_0' bedeutet

$$\begin{pmatrix} \lambda t_{11} + z t_{21} & \lambda t_{12} + z t_{22} \\ \lambda t_{21} & \lambda t_{22} \end{pmatrix} = N_0 T = T N_0' = \begin{pmatrix} \lambda t_{11} & \lambda t_{12} + z' t_{11} \\ \lambda t_{21} & \lambda t_{22} + z' t_{21} \end{pmatrix}.$$

Daraus liest man $t_{21} = 0$ und $z t_{22} = z' t_{11}$ ab. Die Kongruenz lässt sich als

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{t_{11}} t_{22} \\ \overline{t_{22}} t_{11} & \overline{t_{12}} t_{22} + \overline{t_{22}} t_{12} \end{pmatrix} = T^* H_0 T = H_0$$

anschreiben, was insbesondere $t_{11}\overline{t_{22}} = 1$ impliziert. Zusammen mit $z t_{22} = z' t_{11}$ folgern wir $z' = z t_{22} \overline{t_{22}}$, und daraus wegen $|z| = |z'| = 1$ und $t_{22}\overline{t_{22}} > 0$ die Gleichung $z' = z$.

Fall 2.2, $S_0 \subsetneq S_0^{[\perp]}$: Wie in Fall 2.1 lassen sich Vektoren $v_1 \in S_0, v_n \notin S_0^{[\perp]}$ finden mit

$$[v_1, v_1] = [v_n, v_n] = 0, \quad [v_1, v_n] = 1. \tag{3.11}$$

Definiert man $S_1 := \operatorname{span}\{v_1, v_n\}^{[\perp]}$ und $S_2 := \operatorname{span}\{v_n\}$, so erhalten wir $S_0^{[\perp]} = S_0 \dot{+} S_1$ und $\mathbb{C}^n = S_0 \dot{+} S_1 \dot{+} S_2$.

Für alle $x \in S_0, y \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$[x, (N - \lambda I_n) y] = [(N^{[*]} - \overline{\lambda} I_n) x, y] = 0 = [(N - \lambda I_n) x, y] = [x, (N^{[*]} - \overline{\lambda} I_n) y]$$

und daher $\operatorname{ran}(N - \lambda I_n), \operatorname{ran}(N^{[*]} - \overline{\lambda} I_n) \subseteq S_0^{[\perp]}$. Ist $\{v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ eine Basis von S_1, so bildet $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$. Bezüglich $\mathbb{C}^n = S_0 \dot{+} S_1 \dot{+} S_2$ hat man folgende Blockmatrixdarstellungen von N und $N^{[*]}$:

$$N = \begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & N_1 & * \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad N^{[*]} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda} & * & * \\ 0 & N_2 & * \\ 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Mit $\operatorname{span}\{v_1, v_n\}$ ist auch $S_1 = \operatorname{span}\{v_1, v_n\}^{[\perp]}$ nichtdegeneriert, weshalb die Einschränkung $[.,.]|_{S_1 \times S_1}$ wieder ein indefinites Skalarprodukt ist. Wegen $i_-(H) = 1$ und

$$i_-\left(\begin{pmatrix} [v_1, v_1] & [v_1, v_n] \\ [v_n, v_1] & [v_n, v_n] \end{pmatrix}\right) = i_-\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$$

ist dieses sogar positiv definit. Für alle $x, y \in S_1$ gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $Nx = N_1 x + \alpha v_1, N^{[*]} y = N_2 y + \beta v_1$, weshalb

$$\begin{aligned}
[N_1 x, y]|_{S_1\times S_1} &= [N_1 x, y] \\
&= [Nx - \alpha v_1, y] \\
&= [Nx, y] \\
&= [x, N^{[*]} y] \\
&= [x, N_2 y + \beta v_1] \\
&= [x, N_2 y] \\
&= [x, N_2 y]|_{S_1\times S_1}
\end{aligned}$$

Bezüglich $[.,.]|_{S_1\times S_1}$ sind die linearen Abbildungen N_1, N_2 auf S_2 also zueinander adjungiert und wegen

$$NN^{[*]} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & N_1 N_2 & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = N^{[*]}N = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & N_2 N_1 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

ist $N_1 = N_2^{[*]}$ sogar normal. Wegen der positiven Definitheit von $[.,.]|_{S_1\times S_1}$ folgt damit aus (dem bereits bewiesenen) Satz 3.4.1 zusammen mit der Tatsache, dass λ der einzige Eigenwert von N_1 ist, $N_1 = \lambda I_{S_1}, N_2 = \overline{\lambda} I_{S_1}$, also

$$N = \begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & \lambda I_{n-2} & * \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad N^{[*]} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda} & * & * \\ 0 & \overline{\lambda} I_{n-2} & * \\ 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Fall 2.2.1, $n = 3$: Nach Obigem können wir v_2 so wählen, dass $[v_2, v_2] = 1$. Damit haben wir

$$([v_i, v_j])_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und bezüglich dieser Basis

$$N = \begin{pmatrix} \lambda & \mu_1 & \mu_3 \\ 0 & \lambda & \mu_2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad N^{[*]} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda} & \overline{\mu_2} & \overline{\mu_3} \\ 0 & \overline{\lambda} & \overline{\mu_1} \\ 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Wegen der Gleichungen

$$\begin{aligned}
NN^{[*]} &= \begin{pmatrix} \lambda\overline{\lambda} & \lambda\overline{\mu_2} + \mu_1\overline{\lambda} & \lambda\overline{\mu_3} + \mu_1\overline{\mu_1} + \mu_3\overline{\lambda} \\ 0 & \lambda\overline{\lambda} & \lambda\overline{\mu_1} + \mu_2\overline{\lambda} \\ 0 & 0 & \lambda\overline{\lambda} \end{pmatrix} \\
N^{[*]}N &= \begin{pmatrix} \lambda\overline{\lambda} & \mu_1\overline{\lambda} + \lambda\overline{\mu_2} & \mu_3\overline{\lambda} + \mu_2\overline{\mu_2} + \lambda\overline{\mu_3} \\ 0 & \lambda\overline{\lambda} & \lambda\overline{\mu_1} + \mu_2\overline{\lambda} \\ 0 & 0 & \lambda\overline{\lambda} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ist die Normalität von N äquivalent zu $\mu_1\overline{\mu_1} = \mu_2\overline{\mu_2}$. Weiters gilt wegen $v_2 \notin S_0$ und $Nv_2 = \lambda v_2 + \mu_1 v_1$ und $N^{[*]}v_2 = \overline{\lambda} v_2 + \overline{\mu_2} v_1$, dass $\mu_1, \mu_2 \neq 0$. Somit können wir $\mu_1 = \rho e^{i\theta_1}, \mu_2 = \rho e^{i\theta_2}$ mit $\rho > 0, \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$ schreiben. Wir gehen über zu der neuen Basis $w_1 := \rho v_1, w_2 := \pm e^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}} v_2, w_3 := \frac{1}{\rho} v_3$, wobei für w_2 das Vorzeichen so zu wählen ist, dass das Argument von $z := \pm e^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}} e^{i\theta_1} = \pm e^{i\frac{\theta_2+\theta_1}{2}}$ in $[0, \pi)$ zu liegen kommt. Setzen wir außerdem $\mu := \frac{\mu_3}{\rho^2}$, so gilt offensichtlich $[w_i, w_j] = [v_i, v_j]$ für alle $i, j = 1, 2, 3$, und

$$\begin{aligned} Nw_1 &= \rho\lambda v_1 = \lambda w_1, \\ Nw_2 &= \pm e^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}} (\lambda v_2 + \rho e^{i\theta_1} v_1) = \lambda w_2 + z w_1, \\ Nw_3 &= \frac{1}{\rho}(\lambda v_3 + \rho e^{i\theta_2} v_2 + \mu_3 v_1) = \lambda w_3 + z w_2 + \mu w_1. \end{aligned}$$

Also haben wir in dieser Basis die Matrixdarstellung

$$N = \begin{pmatrix} \lambda & z & \mu \\ 0 & \lambda & z \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, |z| = 1, \arg(z) \in [0, \pi), \mu \in \mathbb{C}.$$

Um zu den Normalformen aus (3.7) und (3.8) zu kommen, fehlt noch ein letzter Basiswechsel. Wir definieren $u_1 := t_1 w_1, u_2 := t_2 w_1 + t_3 w_2, u_3 := t_4 w_1 + t_5 w_2 + t_6 w_3$. Die Bedingung $[u_i, u_j] = [w_i, w_j]$ für $i, j = 1, 2, 3$ wird damit zu

$$t_1\overline{t_6} = 1, \quad t_3\overline{t_3} = 1, \quad t_3\overline{t_5} + t_2\overline{t_6} = 0, \quad t_6\overline{t_4} + t_4\overline{t_6} + t_5\overline{t_5} = 0. \tag{3.12}$$

Für $t_1 = t_3 = t_6 = 1$ bedeutet das

$$\overline{t_5} + t_2 = 0, \quad t_4 + \overline{t_4} + t_5\overline{t_5} = 0 \quad \text{bzw.} \quad t_2 = -\overline{t_5}, \quad \operatorname{Re}(t_4) = -\frac{|t_5|^2}{2} \tag{3.13}$$

Des Weiteren ist

$$\begin{aligned} Nu_1 &= \lambda w_1 = \lambda u_1, \\ Nu_2 &= \lambda w_2 + z w_1 + t_2 \lambda w_1 = \lambda u_2 + z u_1, \\ Nu_3 &= \lambda w_3 + z w_2 + \mu w_1 + t_5(\lambda w_2 + z w_1) + t_4 \lambda w_1 = \lambda u_3 + z u_2 + (\mu + z(t_5 + \overline{t_5}))u_1. \end{aligned}$$

Im Fall $z = 1$ wählen wir $t_5 := -\frac{\operatorname{Re}(\mu)}{2}$, womit $ir := \mu + z(t_5 + \overline{t_5})$ rein imaginär ist. Für $z \neq 1$ und folglich $\operatorname{Im}(z) > 0$ setzen wir $t_5 := -\frac{\operatorname{Im}(\mu)}{2\operatorname{Im}(z)}$, womit $r := \mu + z(t_5 + \overline{t_5})$ rein reell ist. t_2 und t_4 werden entsprechend (3.13) gewählt. In jedem Fall hat N in der Basis $\{u_1, u_2, u_3\}$ die jeweils passende Normalform N_0 aus (3.8) bzw. (3.7) als Matrixdarstellung. Nach Korollar 2.2.6 ist damit (N, H) unitär ähnlich zu (N_0, H_0).

Die unitäre Invarianz der Parameter r, z aus (3.7) bzw. r aus (3.8) und gleichzeitig die Tatsache, dass die beiden verschiedenen Normalformen untereinander nicht unitär ähnlich sein können, kann man wie im Fall 2.1 zeigen. Dafür sei $T \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ regulär sowie

$$N_0 = \begin{pmatrix} \lambda & \zeta & \rho \\ 0 & \lambda & \zeta \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad N_0' = \begin{pmatrix} \lambda & \zeta' & \rho' \\ 0 & \lambda & \zeta' \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad N_0' = T^{-1}N_0T, \quad H_0 = T^*H_0T$$

wobei ζ und ρ für die jeweiligen Einträge in den beiden Normalformen aus (3.7) und (3.8) stehen. Mit $T = (t_{ij})_{i,j=1,2,3}$ lässt sich die Ähnlichkeitsbedingung als Gleichheit der beiden Matrizenprodukte

$$\begin{aligned} N_0T &= \begin{pmatrix} \lambda t_{11} + \zeta t_{21} + \rho t_{31} & \lambda t_{12} + \zeta t_{22} + \rho t_{32} & \lambda t_{13} + \zeta t_{23} + \rho t_{33} \\ \lambda t_{21} + \zeta t_{31} & \lambda t_{22} + \zeta t_{32} & \lambda t_{23} + \zeta t_{33} \\ \lambda t_{31} & \lambda t_{32} & \lambda t_{33} \end{pmatrix} \\ TN_0' &= \begin{pmatrix} \lambda t_{11} & \lambda t_{12} + \zeta' t_{11} & \lambda t_{13} + \zeta' t_{12} + \rho' t_{11} \\ \lambda t_{21} & \lambda t_{22} + \zeta' t_{21} & \lambda t_{23} + \zeta' t_{22} + \rho' t_{21} \\ \lambda t_{31} & \lambda t_{32} + \zeta' t_{31} & \lambda t_{33} + \zeta' t_{32} + \rho' t_{31} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

auffassen. Daraus folgt $t_{21} = t_{31} = t_{32} = 0$, also ist T eine obere Dreiecksmatrix, und mit $t_1 := t_{11}, t_2 := t_{12}, t_3 := t_{22}, t_4 := t_{13}, t_5 := t_{23}, t_6 := t_{33}$ auch

$$\zeta' t_1 - \zeta t_3 = 0, \quad \zeta' t_3 - \zeta t_6 = 0, \quad \zeta' t_2 - \zeta t_5 + \rho' t_1 - \rho t_6 = 0. \tag{3.14}$$

Die Kongruenzbedingung $H_0 = T^*H_0T$ ist dann gegeben durch (3.12).

Unter Beachtung der durch die Regularität von T bedingten Tatsache, dass $t_1, t_3, t_6 \neq 0$, erhalten wir wegen der ersten beiden Gleichungen in (3.12) und (3.14) die Beziehung $\frac{\zeta'}{\zeta} = \frac{t_3}{t_1} = \frac{t_6}{t_3} = \frac{\overline{t_3}}{\overline{t_1}}$. Also ist $\frac{\zeta'}{\zeta} \in \mathbb{R}$, womit die beiden Normalformen aus (3.7) und (3.8) nicht ähnlich sein können.

Liegt die Normalform aus (3.7) vor, so gilt $\zeta = z, \zeta' = z', \rho = r, \rho' = r'$. Wegen $\arg(z), \arg(z') \in (0, \pi)$ folgt aus $\frac{z'}{z} \in \mathbb{R}$ schon $z' = z$. Damit ist auch $t_1 = t_3 = t_6, |t_1| = 1$ und mit der zweiten und dritten Gleichung in (3.12) und der dritten Gleichung in (3.14) $r - r' = \frac{z(t_2 - t_5)}{t_1} = z(t_2\overline{t_6} - t_5\overline{t_3}) = z(t_2\overline{t_6} + t_6\overline{t_2})$. Da r, r' und $t_2\overline{t_6} + t_6\overline{t_2}$ reell sind, z aber nicht, folgt $r = r'$.

Liegt die Normalform aus (3.8) vor, so gilt $\zeta = \zeta' = 1, \rho = ir, \rho' = ir'$. Man folgert ganz analog $t_1 = t_3 = t_6, |t_1| = 1$ und $i(r - r') = t_2\overline{t_6} - t_5\overline{t_3} = t_2\overline{t_6} + t_6\overline{t_2}$ und wegen der Reellwertigkeit von $r - r'$ und $t_2\overline{t_6} + t_6\overline{t_2}$ auch $r = r'$.

Fall 2.2.2, $n > 3$: Wählen wir eine Basis $\{v_2', \dots, v_{n-1}'\}$ von S_1 so haben wir bezüglich $\mathbb{C}^n = S_0 \dot{+} S_1 \dot{+} S_2$ die Blockdarstellung

$$N = \begin{pmatrix} \lambda & M_1 & \beta_1 \\ 0 & \lambda I_{n-2} & M_2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad N^{[*]} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda} & M_3 & \beta_2 \\ 0 & \overline{\lambda} I_{n-2} & M_4 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$$

Betrachte nun den Unterraum

$$V := S_0 \dot{+} (\operatorname{ran}(M_2) + \operatorname{ran}(M_4)) \dot{+} S_2. \tag{3.15}$$

Wir nehmen an, es würde $n > 4$ gelten. Wegen $2 \leq \dim(V) \leq 4$ schließen wir auf $\{0\} \neq V \neq \mathbb{C}^n$. Aus $(S_0 \dot{+} S_2)^{[\perp]} = S_1 \supseteq \operatorname{ran}(M_2) + \operatorname{ran}(M_4)$ folgt $V^{[\perp]} = (\operatorname{ran}(M_2) +$

$\mathrm{ran}(M_4))^{[\perp]} \cap S_1$, und wegen der positiven Definitheit von $[.,.]|_{S_1 \times S_1}$ insgesamt, dass der Unterraum V nichtdegeneriert ist. Wegen $N|_{S_1} = \lambda \mathrm{id}_{S_1}, N^{[*]}|_{S_1} = \overline{\lambda} \mathrm{id}_{S_1}$ ist V für N und $N^{[*]}$ invariant, womit nach Lemma 3.2.2 die Zerlegbarkeit von N folgt, im Widerspruch zur vorausgesetzten Unzerlegbarkeit.

Also gilt $n = 4$. Weil das in (3.15) definierte V im Fall $M_2 v_4 = 0$ höchstens von Dimension 3 wäre, folgte $\{0\} \neq V \neq \mathbb{C}^n$ und wir erhielten wie eben einen Widerspruch zur Unzerlegbarkeit, womit $v_2 := M_2 v_4 \neq 0$. Reskaliert man v_1 und v_4, falls nötig, so kann man $[v_2, v_2] = 1$ annehmen. Wählen wir noch $v_3 \in S_1$ so, dass $\{v_2, v_3\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des positiv definiten Skalarprodukts $[.,.]|_{S_1 \times S_1}$ von S_1 ist, so gilt

$$([v_i, v_j])_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = H_0.$$

Bezüglich der Basis $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ haben wir die Darstellungen

$$N = \begin{pmatrix} \lambda & \mu_1 & \mu_2 & \beta \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad N^{[*]} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda} & 1 & 0 & \overline{\beta} \\ 0 & \overline{\lambda} & 0 & \overline{\mu_1} \\ 0 & 0 & \overline{\lambda} & \overline{\mu_2} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Normalität bedeutet infolge die Gleichheit der Matrizenprodukte

$$\begin{aligned} NN^{[*]} &= \begin{pmatrix} \lambda\overline{\lambda} & \lambda + \mu_1\overline{\lambda} & \mu_2\overline{\lambda} & \lambda\overline{\beta} + \beta\overline{\lambda} + \mu_1\overline{\mu_1} + \mu_2\overline{\mu_2} \\ 0 & \lambda\overline{\lambda} & 0 & \lambda\overline{\mu_1} + \overline{\lambda} \\ 0 & 0 & \lambda\overline{\lambda} & \lambda\overline{\mu_2} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\overline{\lambda} \end{pmatrix}, \\ N^{[*]}N &= \begin{pmatrix} \lambda\overline{\lambda} & \lambda + \mu_1\overline{\lambda} & \mu_2\overline{\lambda} & \lambda\overline{\beta} + \beta\overline{\lambda} + 1 \\ 0 & \lambda\overline{\lambda} & 0 & \lambda\overline{\mu_1} + \overline{\lambda} \\ 0 & 0 & \lambda\overline{\lambda} & \lambda\overline{\mu_2} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\overline{\lambda} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also einfach $|\mu_1|^2 + |\mu_2|^2 = 1$.

Wir wollen nun zeigen, dass durch einen geeigneten Basiswechsel, der die Skalarprodukte der Basisvektoren invariant lässt, der Parameter $\beta = 0$ gesetzt werden kann. Betrachte dazu die für $t_1, t_3, t_6, t_{10} \neq 0$ manifest reguläre Matrix

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_4 & t_7 \\ 0 & t_3 & t_5 & t_8 \\ 0 & 0 & t_6 & t_9 \\ 0 & 0 & 0 & t_{10} \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Man rechnet zunächst nach, dass die Kongruenzbedingung aus Lemma 2.2.2 durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \overline{t_1}t_{10} \\ 0 & \overline{t_3}t_3 & \overline{t_3}t_5 & \overline{t_2}t_{10} + \overline{t_3}t_8 \\ 0 & \overline{t_5}t_3 & \overline{t_5}t_5 + \overline{t_6}t_6 & \overline{t_4}t_{10} + \overline{t_5}t_8 + \overline{t_6}t_9 \\ \overline{t_{10}}t_1 & \overline{t_{10}}t_2 + \overline{t_8}t_3 & \overline{t_{10}}t_4 + \overline{t_8}t_5 + \overline{t_9}t_6 & \overline{t_7}t_{10} + \overline{t_{10}}t_7 + \overline{t_8}t_8 + \overline{t_9}t_9 \end{pmatrix} = T^* H_0 T = H_0$$

gegeben ist. Dies ist gleichbedeutend mit

$$
\begin{gathered}
\overline{t_1}t_{10} = 1, \quad |t_3| = 1, \quad |t_6| = 1, \quad t_5 = 0, \\
2\mathrm{Re}(\overline{t_7}t_{10}) + |t_8|^2 + |t_9|^2 = 0, \quad \overline{t_2}t_{10} + \overline{t_3}t_8 = 0, \quad \overline{t_4}t_{10} + \overline{t_6}t_9 = 0
\end{gathered} \tag{3.18}
$$

Bezeichnen wir die als Funktion von β aufgefasste Matrix N in (3.16) mit $N(\beta)$, so bedeutet die gewünschte Ähnlichkeitsbedingung die Gleichheit der Matrizenprodukte

$$
\begin{aligned}
N(\beta)T &= \begin{pmatrix} \lambda t_1 & \lambda t_2 + \mu_1 t_3 & \lambda t_4 + \mu_2 t_6 & \lambda t_7 + \mu_1 t_8 + \mu_2 t_9 + \beta t_{10} \\ 0 & \lambda t_3 & 0 & \lambda t_8 + t_{10} \\ 0 & 0 & \lambda t_6 & \lambda t_9 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda t_{10} \end{pmatrix} \\
TN(0) &= \begin{pmatrix} \lambda t_1 & \lambda t_2 + \mu_1 t_1 & \lambda t_4 + \mu_2 t_1 & \lambda t_7 + t_2 \\ 0 & \lambda t_3 & 0 & \lambda t_8 + t_3 \\ 0 & 0 & \lambda t_6 & \lambda t_9 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda t_{10} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Wir bemerken zunächst, dass $\mu_2 \neq 0$, da anderenfalls nach (3.16) der Widerspruch $v_3 \in \mathcal{E}_N(\lambda) \cap \mathcal{E}_{N^{[*]}}(\overline{\lambda}) = S_0$ folgte. Folglich erhalten wir die Bedingungen

$$
t_1 = t_6, \quad t_3 = t_{10}, \quad \mu_1 t_1 = \mu_1 t_3, \quad t_2 = \mu_1 t_8 + \mu_2 t_9 + \beta t_{10}. \tag{3.19}
$$

Setzen wir $t_1 = t_3 = t_6 = t_{10} = 1, t_2 = t_8 = 0, t_4 = \frac{\overline{\beta}}{\mu_2}, t_7 = -\frac{|\beta|^2}{2|\mu_2|^2}$ und $t_9 = -\frac{\beta}{\mu_2}$, so sind die Bedingungen (3.18) und (3.19) erfüllt. Wir können also bezüglich der Basis $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ mit $u_i := Tv_i, i = 1, 2, 3, 4$, ausgehen von der Matrixdarstellung

$$
N = \begin{pmatrix} \lambda & \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}
$$

mit $|\mu_1|^2 + |\mu_2|^2 = 1$, also $\mu_1 = \cos(\alpha)e^{i\phi_1}, \mu_2 = \sin(\alpha)e^{i\phi_2}$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ und $\phi_1, \phi_2 \in [0, 2\pi)$. Ersetzen wir u_2 durch $e^{-i\phi_1}u_2$, u_3 durch $e^{-i\phi_2}u_3$ und definieren $z := e^{i\phi_1}$, so können wir von

$$
N = \begin{pmatrix} \lambda & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & z \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \ \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}), |z| = 1, \tag{3.20}
$$

bzw.

$$
N = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}
$$

ausgehen und haben wieder nach Korollar 2.2.6 die behauptete unitäre Ähnlichkeit von (N, H) zu (N_0, H_0) aus (3.9) bzw. (3.10). Letztlich bleibt, die unitäre Invarianz der Parameter α, z und die Tatsache, dass die Normalformen aus (3.9) und (3.10) untereinander nicht unitär ähnlich sind, zu zeigen. Dazu sei

$$N' = \begin{pmatrix} \lambda & \cos(\alpha') & \sin(\alpha') & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & z' \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$
$$\alpha' \in (0, \frac{\pi}{2}), |z'| = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha' = \frac{\pi}{2}, z' = 1,$$

sowie $T = (t_{ij})_{i,j=1,2,3,4} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ regulär mit $T^* H_0 T = H_0, T^{-1} N T = N'$ mit N wie in (3.20). Die Ähnlichkeitsbedingung bedeutet mit den Abkürzungen $c := \cos(\alpha), c' := \cos(\alpha'), s := \sin(\alpha), s' := \sin(\alpha')$ die Gleichheit der folgenden Matrizen

$$\begin{aligned} NT &= \begin{pmatrix} \lambda t_{11} + ct_{21} + st_{31} & \lambda t_{21} + ct_{22} + st_{32} & \lambda t_{13} + ct_{23} + st_{33} & \lambda t_{14} + ct_{24} + st_{34} \\ \lambda t_{21} + zt_{41} & \lambda t_{22} + zt_{42} & \lambda t_{23} + zt_{43} & \lambda t_{24} + zt_{44} \\ \lambda t_{31} & \lambda t_{32} & \lambda t_{33} & \lambda t_{34} \\ \lambda t_{41} & \lambda t_{42} & \lambda t_{43} & \lambda t_{44} \end{pmatrix}, \\ TN' &= \begin{pmatrix} \lambda t_{11} & \lambda t_{21} + c't_{11} & \lambda t_{13} + s't_{11} & \lambda t_{14} + z't_{12} \\ \lambda t_{21} & \lambda t_{22} + c't_{21} & \lambda t_{23} + s't_{21} & \lambda t_{24} + z't_{22} \\ \lambda t_{31} & \lambda t_{32} + c't_{31} & \lambda t_{33} + s't_{31} & \lambda t_{34} + z't_{32} \\ \lambda t_{41} & \lambda t_{42} + c't_{41} & \lambda t_{43} + s't_{41} & \lambda t_{44} + z't_{42} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus erhält man $t_{21} = t_{31} = t_{41} = t_{32} = t_{42} = t_{43} = 0$, also ist T eine obere Dreiecksmatrix, und

$$z't_{22} = zt_{44}, \quad c't_{11} = ct_{22}, \quad s't_{11} = ct_{23} + st_{33}, \quad z't_{12} = ct_{24} + st_{34}. \tag{3.21}$$

Benennen wir die Einträge von T entsprechend (3.17) um, so ist die Kongruenzbedingung wie oben äquivalent zu (3.18) und (3.21) zu

$$z't_3 = zt_{10}, \quad c't_1 = ct_3, \quad s't_1 = st_6, \quad z't_2 = ct_8 + st_9. \tag{3.22}$$

Betragsquadriert und addiert man die Gleichungen $c't_1 = ct_3, s't_1 = st_6$ und berücksichtigt $|t_3| = |t_6| = 1$, so folgt $|t_1| = 1$. Damit implizieren die beiden erstgenannten Gleichungen wegen der Injektivität und Positivität von $\cos, \sin$ auf $(0, \frac{\pi}{2})$ aber $\alpha' = \alpha$ und damit insbesondere, dass $\alpha' \neq \frac{\pi}{2}$, also dass N' nicht von der Form (3.4) ist und die Normalformen aus (3.9) und (3.4) untereinander nicht unitär ähnlich sein können. Weiter folgt $t_1 = t_3 = t_6$, was mit der ersten Gleichung in (3.22) zu $t_{10} = \frac{z'}{z} t_1$ führt. Gemeinsam mit $\frac{z'}{z} = \frac{z'}{z}\overline{t_1} t_1 = \overline{t_1} t_{10} = 1$ und $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) \in (-2\pi, 2\pi)$ folgt daraus und aus $|z| = |z'| = 1$ schon $\arg(z') = \arg(z)$, also $z' = z$.

■

Bemerkung 3.4.3 Der Inhalt dieses Unterabschnitts basiert auf [1, Abschnitt 8.4]. Wie auch schon in Abschnitt 3.3 unterscheiden sich jedoch die Inhalte (nachfolgend mit der in [1] gebrauchten Terminologie) in zwei Punkten:

(i) Die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & -\overline{\beta} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; 2\mathrm{Re}(y) + |\beta|^2 = 0$$

leistet nicht die gewünschte Elimination von β aus N, die im Beweis von Satz 3.4.2 in Schritt 2.2.2 durchgeführt wird. Es wurde deshalb eine andere Matrix konstruiert, die dann das Gewünschte leistet.

(ii) Die Normalform für unzerlegbare normale Abbildungen aus (3.9) bzw. (3.10) in $n = 4$ Dimensionen wurde gegenüber der von [1] korrigiert. Der in [1] gebrachte Beweis schlägt an der Stelle fehl, wo durch Umskalierung von der Basis $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4\}$ zu der Basis $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ übergegangen wird. Dieser Basiswechsel führt nämlich nicht, wie in [1] angegeben, auf

$$N = \begin{pmatrix} \lambda & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

sondern eben auf

$$N = \begin{pmatrix} \lambda & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & z \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $z := e^{i\phi_2}$ und folglich auf die hier postulierte Normalform.

Bemerkung 3.4.4 Wie man durch Vergleich von Satz 3.4.1 und Satz 3.4.2 sieht, ist die Struktur von normalen Abbildungen im Fall $\nu = 1$ bereits wesentlich komplizierter als im Fall $\nu = 0$; vgl. Bemerkung 3.3.5.

Bemerkung 3.4.5 Die in Satz 3.4.2 aufgelisteten Normalformen H-normaler Abbildungen für $n \geq 2$ haben die folgenden Jordan'schen Normalformen:

(i)
$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ für } (N_0, H_0) \text{ aus (3.5) bzw. (3.6).} \tag{3.23}$$

(ii)
$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ für } (N_0, H_0) \text{ aus (3.7) bzw. (3.8).} \tag{3.24}$$

(iii)

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ bzw. } J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ für } (N_0, H_0) \text{ aus (3.9) bzw. (3.10).} \tag{3.25}$$

3.5 Eindeutigkeit der Zerlegung in eine orthogonale Summe unzerlegbarer Abbildungen im minimal indefiniten Fall

Nach Proposition 3.2.4 wissen wir, dass jede lineare Abbildung auf $\mathbb{C}^n$ in eine H-orthogonale Summe von unzerlegbaren linearen Abbildungen zerfällt. Was wir bisher noch nicht untersucht haben, ist die Frage der Eindeutigkeit einer derartigen Zerlegung. Nachdem wir im vorigen Abschnitt die Normalformen unzerlegbarer H-normaler Abbildungen im minimal indefiniten Fall $\nu = \min(i_+(H), i_-(H)) = 1$ bestimmt haben, wollen wir uns der Frage der Eindeutigeit von solchen Zerlegungen in ebendiesem Fall zuwenden. Wie bisher werden wir oBdA. annehmen, dass $i_-(H) = 1$ gilt.

Wir betrachten also eine H-normale Abbildung N auf $\mathbb{C}^n$, die in die H-orthogonale Summe der unzerlegbaren Abbildungen $N_1, \dots, N_k$ mit zugrundeliegenden Unterräumen $V_1, \dots, V_k$, d.h. $N_i = N|_{V_i}, i = 1, \dots, k$, zerfällt; weiters seien $(.,.)_i := (.,.)|_{V_i \times V_i}$ und $[.,.]_i := [.,.]|_{V_i \times V_i}, i = 1, \dots, k$, wobei $(.,.)$ wie gewohnt das Standardskalarprodukt bezeichnet.

Wir bemerken, dass nach Definition 3.2.1 für alle $i = 1, \dots, k$ der Unterraum V_i nichtdegeneriert und bezüglich N_i invariant ist. Insbesondere ist $[.,.]_i$ ein indefinites Skalarprodukt auf V_i. Es gibt daher eine eindeutig bestimmte reguläre hermitesche Abbildung $H_i \in L(V_i)$ mit $[x,y]_i = (H_i x, y)_i$ für alle $x, y \in V_i$. Wegen

$$[x,y]_i = [x,y] = (Hx, y) = (P_i H|_{V_i} x, y) = (P_i H|_{V_i} x, y)_i$$

für alle $x, y \in V_i$ gilt $H_i = P_i H|_{V_i}$, wobei P_i die $(.,.)$-orthogonale Projektion auf V_i ist. Außerdem ist N_i nach Bemerkung 3.2.3 eine H_i-normale Abbildung.

Wegen $i_-(H) = 1$ können wir oBdA. $i_-(H_1) = 1$ und $i_-(H_i) = 0, i = 2, \dots, k$ annehmen. Damit folgt unmittelbar aus Satz 3.4.1 und Satz 3.4.2:

(i) Entweder ist $l := \dim(V_1) \in \{2, 3, 4\}$ und das Paar (N_1, H_1) ist unitär ähnlich zu einer der in (3.5)-(3.10) beschriebenen Normalformen, oder $l = 1$ und es gilt für ein $\lambda \in \sigma(N)$, dass das Paar (N_1, H_1) unitär ähnlich ist zu der Normalform

$$N_0 = (\lambda), \quad H_0 = (-1). \tag{3.26}$$

(ii) $\dim(V_i) = 1$ und das Paar (N_i, H_i) ist unitär ähnlich zu der Normalform

$$N_0 = (\mu_{i-1}), \quad H_0 = (1),$$

wobei $\mu_{i-1} \in \sigma(N)$, für alle $i = 2, \dots, k$.

Um den nachfolgenden Satz 3.5.1 kompakt formulieren zu können, arbeiten wir mit Matrixdarstellungen bezüglich geeignet gewählter Basen. Sei dazu $\mathcal{B} := \{u_1, \dots, u_n\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$ derart, dass $\{u_1, \dots, u_l\}$ eine Basis von V_1 ist bezüglich der N_1 entweder die Matrixdarstellung N_0 der jeweils passenden Normalform aus (3.5)-(3.10) hat und $([u_i, u_j])_{i,j=1,\dots,l} = H_0$ gilt oder die aus (3.26) entnommenene Matrixdarstellung $N_0 := (\lambda)$ hat und $H_0 := ([u_1, u_1]) = (-1)$ gilt; außerdem sei in jedem Fall $\{u_{l+i-1}\}$ eine Basis von V_i für alle $i = 2, \dots, k$ derart, dass $[u_{l+i-1}, u_{l+i-1}] = 1$ gilt. Fassen wir die mit den Unterräumen $V_i, i = 2, \dots, k$, assoziierten Eigenwerte gemäß $D := \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_{k-1})$ in eine Diagonalmatrix zusammen, so erhalten wir als Matrixdarstellung von N bezüglich der Basis $\mathcal{B}$

$$N_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} N_0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad ([u_i, u_j])_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} H_0 & 0 \\ 0 & I_{k-1} \end{pmatrix}$$

Damit können wir das Hauptresultat dieses Abschnittes formulieren.

Satz 3.5.1 Sei N eine H-normale Abbildung auf $\mathbb{C}^n$ und

$$N_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} N_0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad ([u_i, u_j])_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} H_0 & 0 \\ 0 & I_{k-1} \end{pmatrix}$$

die Matrixdarstellung einer Zerlegung von N in eine H-orthogonale Summe von unzerlegbaren Abbildungen bezüglich einer Basis $\mathcal{B} := \{u_1, \dots, u_n\}$ von $\mathbb{C}^n$ wie zu Beginn des Abschnitts beschrieben. Ist

$$N_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} N_0' & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad ([v_i, v_j])_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} H_0' & 0 \\ 0 & I_{k'-1} \end{pmatrix},$$

mit $l' \times l'$-Matrizen N_0' und H_0' und einer Diagonalmatrix $D' := \operatorname{diag}(\mu_1', \dots, \mu_{k'-1}')$, die Matrixdarstellung einer weiteren Zerlegung von N bezüglich einer Basis $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$, so gilt

$$k' = k, N_0' = N_0, H_0' = H_0$$

und D und D' stimmen bis auf eine Permutation ihrer Diagonalelemente überein.

Beweis: Wir unterscheiden im Folgenden nach den verschiedenen Fällen der Gestalt der Normalform (N_0, H_0):

Fall 1: Sei $l = 1$, also $N_0 = (\lambda)$ und $H_0 = (-1)$. Da die Jordan'sche Normalform (bis auf die Reihenfolge der Jordan-Blöcke) eindeutig bestimmt ist, folgt mit Bemerkung 3.4.5, dass entweder $l' = 1$ und $N_0' = (\lambda')$ sowie $H_0' = (-1)$ oder $l' = 2$ und (N_0', H_0') die Normalform aus (3.5) mit $N_0' = \operatorname{diag}(\lambda_1', \lambda_2')$ und $\lambda_1' \neq \lambda_2'$ ist. Da wegen $[u_1, u_1] = -1$ ein Eigenvektor mit negativem Quadrat existiert, es einen solchen aber im Fall $l' = 2$ wegen $\lambda_1' \neq \lambda_2'$ nicht geben kann, folgt, dass der Fall $l' = 1$ vorliegt. Da es weiter zu keinem anderen Eigenwert als λ einen Eigenvektor mit negativem Quadrat geben kann, aber $[v_1, v_1] = -1$ gilt, folgt $\lambda' = \lambda$. Schließlich stimmen auch D und D' bis auf eine Permutation der Diagonalelemente überein.

Fall 2: Gelte $l = 2$. Wir betrachten zunächst den Fall der Normalform (3.5) für (N_0, H_0), also $N_0 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Wieder aufgrund der Eindeutigkeit der Jordan'schen Normalform und Bemerkung 3.4.5 ergeben sich für (N_0', H_0') die gleichen Möglichkeiten wie auch schon in Fall 1. Wegen $[u_1, u_1] = [u_2, u_2] = 0$ gibt es Eigenvektoren zu zumindest zwei verschiedenen Eigenwerten mit verschwindendem Quadrat. Wäre $l' = 1$, so könnte es einen solchen Eigenvektor höchstens zum Eigenwert λ' geben. Also liegt der Fall $l' = 2$ vor. Da es neben den Eigenwerten λ_1 und λ_2 keinen weiteren Eigenwert geben kann, zu dem ein Eigenvektor mit verschwindendem Quadrat existiert, aber $[v_1, v_1] = [v_2, v_2] = 0$ gilt, haben wir $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{\lambda_1', \lambda_2'\}$. Damit gilt nach einer allfälligen Vertauschung von v_1 und v_2, dass $\lambda_1' = \lambda_1, \lambda_2' = \lambda_2$ und dass D und D' bis auf eine Permutation der Diagonalelemente übereinstimmen.

Gelte nun der Fall

$$N_0 = \begin{pmatrix} \lambda & z \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eindeutigkeit der Jordan'schen Normalform und Bemerkung 3.4.5 implizieren in diesem Fall direkt, dass

$$N_0' = \begin{pmatrix} \lambda & z' \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad H_0' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt sowie dass D und D' bis auf eine Permutation ihrer Diagonalelemente identisch sind. Seien $m := \dim\big(\mathcal{R}_N(\lambda)\big) - 2$ sowie $\{f_1, \ldots, f_m\} \subseteq \{u_3, \ldots, u_n\}$ bzw. $\{g_1, \ldots, g_m\} \subseteq \{v_3, \ldots, v_n\}$ derart, dass $\mathcal{R}_N(\lambda) = \operatorname{span}\big(\{u_1, u_2, f_1, \ldots, f_m\}\big) = \operatorname{span}\big(\{v_1, v_2, g_1, \ldots, g_m\}\big)$ gilt. Unter Beachtung der Tatsache, dass $\mathcal{R}_N(\lambda)$ ein N-invarianter Unterraum ist, folgt

$$\begin{gathered}
\operatorname{ran}\big(N|_{\mathcal{R}_N(\lambda)} - \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{R}_N(\lambda)}\big) = \operatorname{span}(u_1) = \operatorname{span}(v_1), \\
\ker\big(N|_{\mathcal{R}_N(\lambda)} - \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{R}_N(\lambda)}\big) = \operatorname{span}\big(\{u_1, f_1, \ldots, f_m\}\big) = \operatorname{span}\big(\{v_1, g_1, \ldots, g_m\}\big).
\end{gathered}$$

Es ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_N(\lambda) &= \operatorname{span}\big(\{u_1, u_2, f_1, \ldots, f_m\}\big) \\
&= \operatorname{span}(u_2) + \operatorname{span}\big(\{u_1, f_1, \ldots, f_m\}\big) \\
&= \operatorname{span}(u_2) + \operatorname{span}\big(\{v_1, g_1, \ldots, g_m\}\big) \\
&= \operatorname{span}(u_2) + \operatorname{span}(v_1) + \operatorname{span}\big(\{g_1, \ldots, g_m\}\big) \\
&= \operatorname{span}(u_2) + \operatorname{span}(u_1) + \operatorname{span}\big(\{g_1, \ldots, g_m\}\big) \\
&= V_1 + \operatorname{span}\big(\{g_1, \ldots, g_m\}\big),
\end{aligned}$$

wenn wir berücksichtigen, dass $V_1 = \operatorname{span}(\{u_1, u_2\})$ gilt. Es ist also $v_1 \in V_1$ und $v_2 = w_2' + g$ mit $w_2' \in V_1, g \in \operatorname{span}\big(\{g_1, \ldots, g_m\}\big)$. Setzen wir $w_1 := v_1, w_2 := w_2' - \frac{1}{2}[g, g]v_1 = v_2 - g - \frac{1}{2}[g, g]v_1$, so bildet $\{w_1, w_2\}$ eine Basis von V_1 derart, dass gilt

$$\begin{gathered}
N_1 w_1 = N_1 v_1 = \lambda v_1 = \lambda w_1, \\
N_1 w_2 = N_1(v_2 - g - \frac{1}{2}[g, g]v_1) = \lambda v_2 + z' v_1 - \lambda g - \frac{1}{2}[g, g]\lambda v_1 = \\
\lambda(v_2 - g - \frac{1}{2}[g, g]v_1) + z' v_1 = \lambda w_2 + z' w_1
\end{gathered}$$

sowie $[w_1,w_1]=[v_1,v_1]=0$ und

$$[w_1,w_2]=[v_1,v_2-g-\frac{1}{2}[g,g]v_1]=1,$$
$$[w_2,w_2]=[v_2-g-\frac{1}{2}[g,g]v_1,v_2-g-\frac{1}{2}[g,g]v_1]=0.$$

Also hat N_1 bezüglich der Basis $\{w_1,w_2\}$ die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix}\lambda & z'\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \quad \text{und es gilt} \quad ([w_i,w_j])_{i,j=1,2}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Da nach Satz 3.4.2 die in den dortigen Normalformen vorkommenden Parameter eindeutig bestimmt sind, folgt $z'=z$.

Fall 3: Wir betrachten den Fall $l=3$ und behandeln die beiden möglichen Normalformen aus (3.7) und (3.8) simultan, indem wir

$$N_0=\begin{pmatrix}\lambda&\zeta&\rho\\0&\lambda&\zeta\\0&0&\lambda\end{pmatrix}, \quad H_0=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

setzen. Nach Bemerkung 3.4.5 und der Eindeutigkeit der Jordan'schen Normalform sind hier für (N_0',H_0') zunächst sowohl $l'=3$ und die Normalform aus (3.7) bzw. (3.8) als auch $l'=4$ und die Normalform aus (3.9) möglich.

Wäre $l'=4$, so hätten wir

$$N_0'=\begin{pmatrix}\lambda&\cos(\alpha')&\sin(\alpha')&0\\0&\lambda&0&z'\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}, \quad H_0'=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

Analog zum Vorgehen in Fall 2 folgern wir daraus

$$\operatorname{ran}(N|_{\mathcal{R}_N(\lambda)}-\lambda\,\mathrm{id}_{\mathcal{R}_N(\lambda)})=\operatorname{span}\bigl(\{u_1,u_2\}\bigr)=\operatorname{span}\bigl(\{v_1,v_2\}\bigr).$$

Ersetzt man in der Basis $\mathcal{B}'$ die Vektoren v_2 durch $-\sin(\alpha')v_2+\cos(\alpha')v_3$ und v_3 durch $\cos(\alpha')v_2+\sin(\alpha')v_3$, so hat man die selbe Matrix H_0' der Skalarprodukte wie für die Basis $\mathcal{B}'$, aber als Matrixdarstellung von $N|_{\operatorname{span}\left(\{v_1,v_2,v_3,v_4\}\right)}$ erhält man

$$\begin{pmatrix}\lambda&0&1&0\\0&\lambda&0&-z'\sin(\alpha')\\0&0&\lambda&z'\cos(\alpha')\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}.$$

Für $M:=\prod_{\mu\in\sigma(N)}(N-\mu\,\mathrm{id})$ gilt

$$\ker(M)=\operatorname{span}\bigl(\{u_1,u_4,\dots,u_n\}\bigr)=\operatorname{span}\bigl(\{v_1,-\sin(\alpha')v_2+\cos(\alpha')v_3,v_5,\dots,v_n\}\bigr)$$

Wegen $\dim(\ker(M))=n-2$ und Lemma 1.2.2.(i) sowie der Gestalt der Matrizen der Skalarprodukte der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ folgt

$$\operatorname{span}\big(\{v_1, \cos(\alpha')v_2 + \sin(\alpha')v_3\}\big) = \ker(M)^{[\perp]} = \operatorname{span}\big(\{u_1, u_2\}\big) = \operatorname{span}\big(\{v_1, v_2\}\big),$$

und damit der Widerspruch $v_3 \in \operatorname{span}\big(\{v_1, v_2\}\big)$.

Wir können also von $l' = 3$ und damit von

$$N_0' = \begin{pmatrix} \lambda & \zeta' & \rho' \\ 0 & \lambda & \zeta' \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad H_0' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ausgehen. Außerdem sehen wir an dieser Stelle, dass D und D' bis auf eine Permutation der Diagonalelemente übereinstimmen. Wir setzen analog zu Fall 2 $m := \dim\big(\mathcal{R}_N(\lambda)\big) - 3$ und wählen $\{f_1, \dots, f_m\} \subseteq \{u_4, \dots, u_n\}, \{g_1, \dots, g_m\} \subseteq \{v_4, \dots, v_n\}$ derart, dass

$$\mathcal{R}_N(\lambda) = \operatorname{span}(\{u_1, u_2, u_3, f_1, \dots, f_m\}) = \operatorname{span}(\{v_1, v_2, v_3, g_1, \dots, g_m\})$$

gilt. Mit $V_1 = \operatorname{span}\big(\{u_1, u_2, u_3\}\big)$ und den Beziehungen

$$\operatorname{ran}\big(N|_{\mathcal{R}_N(\lambda)} - \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{R}_N(\lambda)}\big) = \operatorname{span}\big(\{u_1, u_2\}\big) = \operatorname{span}\big(\{v_1, v_2\}\big),$$
$$\ker\Big(\big(N|_{\mathcal{R}_N(\lambda)} - \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{R}_N(\lambda)}\big)^2\Big) = \operatorname{span}\big(\{u_1, u_2, f_1, \dots, f_m\}\big) = \operatorname{span}\big(\{v_1, v_2, g_1, \dots, g_m\}\big)$$

folgern wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_N(\lambda) &= \operatorname{span}\big(\{u_1, u_2, u_3, f_1, \dots, f_m\}\big) \\
&= \operatorname{span}(u_3) + \operatorname{span}\big(\{u_1, u_2, f_1, \dots, f_m\}\big) \\
&= \operatorname{span}(u_3) + \operatorname{span}\big(\{v_1, v_2, g_1, \dots, g_m\}\big) \\
&= \operatorname{span}(u_3) + \operatorname{span}\big(\{v_1, v_2\}\big) + \operatorname{span}\big(\{g_1, \dots, g_m\}\big) \\
&= \operatorname{span}(u_3) + \operatorname{span}\big(\{u_1, u_2\}\big) + \operatorname{span}\big(\{g_1, \dots, g_m\}\big) \\
&= V_1 + \operatorname{span}\big(\{g_1, \dots, g_m\}\big).
\end{aligned}$$

Insbesondere haben wir $v_1, v_2 \in V_1$ und $v_3 = w_3' + g$ mit $w_3' \in V_1, g \in \operatorname{span}\big(\{g_1, \dots, g_m\}\big)$. Damit bilden $w_1 := v_1, w_2 := v_2$ und $w_3 := w_3' - \frac{1}{2}[g, g]v_1 = v_3 - g - \frac{1}{2}[g, g]v_1$ eine Basis von V_1 mit

$$N_1 w_1 = N_1 v_1 = \lambda v_1 = \lambda w_1, \quad N_1 w_2 = N_1 v_2 = \lambda v_2 + \zeta' v_1 = \lambda w_2 + \zeta' w_1$$
$$N_1 w_3 = N_1(v_3 - g - \frac{1}{2}[g, g]v_1) = \lambda v_3 + \zeta' v_2 + \rho' v_1 - \lambda g - \frac{1}{2}[g, g]\lambda v_1 =$$
$$\lambda(v_3 - g - \frac{1}{2}[g, g]v_1) + \zeta' v_2 + \rho' v_1 = \lambda w_3 + \zeta' w_2 + \rho' w_1$$

Weiterhin ist offenbar $[w_i, w_j] = [v_i, v_j]$ für $i, j = 1, 2$ und

$$[w_1, w_3] = [v_1, v_3 - g - \frac{1}{2}[g, g]v_1] = 1, \quad [w_2, w_3] = [v_2, v_3 - g - \frac{1}{2}[g, g]v_1] = 0,$$
$$[w_3, w_3] = [v_3 - g - \frac{1}{2}[g, g]v_1, v_3 - g - \frac{1}{2}[g, g]v_1] = 0$$

Folglich hat N_1 bezüglich der Basis $\{w_1, w_2, w_3\}$ die Darstellung

$$\begin{pmatrix} \lambda & \zeta' & \rho' \\ 0 & \lambda & \zeta' \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{und es gilt} \quad ([w_i, w_j])_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eindeutigkeitsaussage über die Parameter in Satz 3.4.2 liefert schließlich $\zeta' = \zeta$ und $\rho' = \rho$.

Fall 4: Wir betrachten schließlich den Fall $l = 4$. Hat dabei die Normalform (N_0, H_0) die Gestalt aus (3.10), so folgt mit Bemerkung 3.4.5 und der Eindeutigkeit der Jordan'schen Normalform, dass $N_0' = N_0, H_0' = H_0$ und die Matrizen D und D' modulo Permutation ihrer diagonalen Einträge übereinstimmen.

Sei (N_0, H_0) durch die Normalform aus (3.9) beschrieben:

$$N_0 = \begin{pmatrix} \lambda & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & z \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eindeutigkeit der Jordan'schen Normalform in Verbindung mit Bemerkung 3.4.5 impliziert, dass (N_0', H_0') entweder die Größe $l' = 3$ hat und durch eine der Normalformen aus (3.7) oder (3.8) gegeben ist, oder aber dass $l' = 4$ und (N_0', H_0') durch die Normalform aus (3.9) gegeben ist.

Wäre $l' = 3'$, so ließe sich wie im Argument zu Beginn der Diskussion von Fall 3, jetzt aber mit einer Vertauschung der Rollen der beiden Normalformen, zeigen, dass $u_3 \in \operatorname{span}(\{u_1, u_2\})$ gilt, was einen Widerspruch darstellt.

Wir haben also $l' = 4$ und

$$N_0' = \begin{pmatrix} \lambda & \cos(\alpha') & \sin(\alpha') & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & z' \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad H_0' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

außerdem stimmen D und D' modulo Permutation der diagonalen Elemente überein. Wir definieren $m := \dim\big(\mathcal{R}_N(\lambda)\big) - 4$ und wählen $\{f_1, \dots, f_m\} \subseteq \{u_5, \dots, u_n\}, \{g_1, \dots, g_m\} \subseteq \{v_5, \dots, v_n\}$ derart, dass

$$\mathcal{R}_N(\lambda) = \operatorname{span}\big(\{u_1, u_2, u_3, u_4, f_1, \dots, f_m\}\big) = \operatorname{span}\big(\{v_1, v_2, v_3, v_4, g_1, \dots, g_m\}\big).$$

Wir haben $V_1 = \operatorname{span}\big(\{u_1, u_2, u_3, u_4\}\big)$ sowie

$$\begin{aligned} \operatorname{ran}\big(N|_{\mathcal{R}_N(\lambda)} - \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{R}_N(\lambda)}\big) &= \operatorname{span}\big(\{u_1, u_2\}\big) = \operatorname{span}\big(\{v_1, v_2\}\big), \\ \ker\Big(\big(N|_{\mathcal{R}_N(\lambda)} - \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{R}_N(\lambda)}\big)^2\Big) &= \operatorname{span}\big(\{u_1, u_2, u_3, f_1, \dots, f_m\}\big) \\ &= \operatorname{span}\big(\{v_1, v_2, v_3, g_1, \dots, g_m\}\big). \end{aligned}$$

Weiters lässt sich mit der gleichen Überlegung, die uns in Fall 3 unter der Annahme $l' = 4$ auf einen Widerspruch geführt hat, zeigen, dass

$$\operatorname{span}\bigl(\{u_1, \cos(\alpha)u_2 + \sin(\alpha)u_3\}\bigr) = \operatorname{span}\bigl(\{v_1, \cos(\alpha')v_2 + \sin(\alpha')v_3\}\bigr),$$

womit wir zuerst auf $v_3 \in \operatorname{span}\bigl(\{u_1, u_2, u_3\}\bigr)$ und schließlich auf $\operatorname{span}\bigl(\{u_1, u_2, u_3\}\bigr) = \operatorname{span}\bigl(\{v_1, v_2, v_3\}\bigr)$ schließen können. Mit $V_1 = \operatorname{span}\bigl(\{u_1, u_2, u_3, u_4\}\bigr)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_N(\lambda) &= \operatorname{span}\bigl(\{u_1, u_2, u_3, u_4, f_1, \dots, f_m\}\bigr) \\
&= \operatorname{span}(u_4) + \operatorname{span}\bigl(\{u_1, u_2, u_3, f_1, \dots, f_m\}\bigr) \\
&= \operatorname{span}(u_4) + \operatorname{span}\bigl(\{v_1, v_2, v_3, g_1, \dots, g_m\}\bigr) \\
&= \operatorname{span}(u_4) + \operatorname{span}\bigl(\{v_1, v_2, v_3\}\bigr) + \operatorname{span}\bigl(\{g_1, \dots, g_m\}\bigr) \\
&= \operatorname{span}(u_4) + \operatorname{span}\bigl(\{u_1, u_2, u_3\}\bigr) + \operatorname{span}\bigl(\{g_1, \dots, g_m\}\bigr) \\
&= V_1 + \operatorname{span}\bigl(\{g_1, \dots, g_m\}\bigr).
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $v_1, v_2, v_3 \in V_1$ und $v_4 = w_4' + g$ mit $w_4' \in V_1, g \in \operatorname{span}\bigl(\{g_1, \dots, g_m\}\bigr)$. Damit bilden $w_1 := v_1, w_2 := v_2, w_3 := v_3$ und $w_4 := w_4' - \frac{1}{2}[g,g]v_1 = v_4 - g - \frac{1}{2}[g,g]v_1$ eine Basis von V_1 mit

$$\begin{gathered}
N_1 w_1 = N_1 v_1 = \lambda v_1 = \lambda w_1, \quad N_1 w_2 = N_1 v_2 = \lambda v_2 + \cos(\alpha')v_1 = \lambda w_2 + \cos(\alpha')w_1, \\
N_1 w_3 = N_1 v_3 = \lambda v_3 + \sin(\alpha')v_1 = \lambda w_3 + \sin(\alpha')w_1 \\
N_1 w_4 = N_1(v_4 - g - \frac{1}{2}[g,g]v_1) = \lambda v_4 + z'v_2 - \lambda g - \frac{1}{2}[g,g]\lambda v_1 = \\
\lambda(v_4 - g - \frac{1}{2}[g,g]v_1) + z'v_2 = \lambda w_4 + z'w_2.
\end{gathered}$$

sowie $[w_i, w_j] = [v_i, v_j]$ für $i, j = 1, 2, 3$ und

$$\begin{gathered}
[w_1, w_4] = [v_1, v_4 - g - \frac{1}{2}[g,g]v_1] = 1, \quad [w_2, w_4] = [v_2, v_4 - g - \frac{1}{2}[g,g]v_1] = 0, \\
[w_3, w_4] = [v_3, v_4 - g - \frac{1}{2}[g,g]v_1] = 0, \quad [w_4, w_4] = [v_4 - g - \frac{1}{2}[g,g]v_1, v_4 - g - \frac{1}{2}[g,g]v_1] = 0.
\end{gathered}$$

Bezüglich der Basis $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ von V_1 hat also N_1 die Darstellung

$$\begin{pmatrix} \lambda & \cos(\alpha') & \sin(\alpha') & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & z' \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{und es gilt} \quad ([w_i, w_j])_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eindeutigkeitsaussage über die Parameter der Normalformen in Satz 3.4.2 liefert abschließend $\alpha' = \alpha, z' = z$.

■

Literatur

[1] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman: *Indefinite Linear Algebra and Applications*, Basel, Schweiz: Birkhäuser, 2005

[2] H. Havlicek: *Lineare Algebra für Technische Mathematiker*, Berliner Studienreihe zur Mathematik, Band 16, 3. Auflage, Lemgo, Deutschland: Heldermann Verlag, 2012

[3] I. Gohberg, B. Reichstein: *On classification of normal matrices in an indefinite scalar product*, Integral Equations and Operator Theory 13: 364-394, 1990