Dualitätstheorie

Bachelorarbeit

Philipp Schönbauer
WS 2011/12

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist die Konstruktion von topologischen Repräsentationen einiger algebraischer Strukturen im Sinne von kategorientheoretischen Dualitäten. Die dazu notwendigen Begriffe der Kategorientheorie sind im Anhang zu finden und stammen hauptsächlich aus [4]. Außerdem befindet sich im Anhang der Beweis der Dualität von regulären Verbänden und nüchternen topologischen Räumen, welche die Grundlage für weite Teile dieser Arbeit bildet.

In Kapitel 2 werden die benötigten algebraischen Begriffe und Kategorien definiert und einige einfache Resultate bewiesen. Jene algebraische Definitionen, welche schon für die Dualität zwischen regulären Verbänden und nüchternen topologischen Räumen verwendet wurden, werden nicht mehr definiert, sondern sind im Anhang zu finden. Das Kapitel 3 enthält zu Beginn einige allgemeine Definitionen und Resultate der Topologie sowie grundlegende Notationen welche im Zuge der Arbeit sehr zweckmäßig sein werden. Im weiteren ist das Kapitel dann der Definition jener topologischen Kategorien gewidmet, welche später für die Dualitäten von Bedeutung sein werden. Hier teilt sich das Kapitel im wesentlichen in drei Teile. Im ersten Teil wird der Begriff der kohärenten Räume, so wie Verallgemeinerungen davon, eingeführt, im zweiten Teil werden geordnete topologische Räume besprochen und der dritte Teil ist dem Begriff der bitopologischen Räume gewidmet. In den Kapitel 4 bis 7 werden schließlich die topologischen Repräsentationen hergeleitet. Die Gliederung der Arbeit richtet sich hier nach den algebraischen Strukturen, für welche Dualitäten bewiesen werden. In Kapitel 4 werden drei Dualitäten für distributive Verbände bewiesen. Darunter ist eine Dualität mittels kohärenter topologischer Räume (die Stone Duality), eine Dualität mittels einer speziellen Teilkategorie der bitopologischen Räume und zuletzt eine Dualität mittels einer Teilkategorie der geordneten topologischen Räume (die Priestley Duality). In Kapitel 5 wird die Stone Duality eingeschränkt um eine topologische Dualität von boolschen Algebren und Stone Spaces zu erhalten (ebenfalls Stone Duality genannt). Die Stone Duality wird in Kapitel 6 erweitert, um eine Dualität für closure Algebren zu erhalten. Schließlich werden in Kapitel 7 Dualitäten für Heyting Algebren hergeleitet. Hier werden analog zu Kapitel 4 drei Dualitäten bewiesen, eine über eine Teilkategorie der kohärenten Räume (die Esakia Duality), einer über eine Teilkategorie der bitopologischen Räume und eine über eine Teilkategorie der geordneten topologischen Räume.

Die Stone Dualitäten wurden erstmals von M.H. Stone 1936 bzw. 1937 bewiesen. Eine gute und sehr ausführliche Aufbereitung findet sich z.B. in [3]. Die Priestley Duality wurde erstmals von Priestley im Jahre 1970 in [5] hergeleitet. Die Dualitäten von distributiven Verbänden bzw. Heyting Algebren mittels bitopologischer Räume stammt aus [1]. Die Dualität von closure Algebren sowie die Esakia Duality gehen zurück auf [2]

2 Ordnungen und Verbände

2.1 Ordnungen

Definition 2.1. Sei X eine Menge. Eine transitive und reflexive Relation auf X heißt *Quasiordnung.* Ist die Relation zusätzlich antisymmetrisch, so heißt sie *Halbordnung.*

Definition 2.2. Sei $(X, \leqslant)$ eine quasigeordnete Menge und $B \subseteq X$.

- Wir definieren die Mengen $\downarrow B := \{x \in X \,:\, \exists y \in B \,:\, x \leqslant y\}$ sowie $\uparrow B := \{x \in X \,:\, \exists y \in B \,:\, x \geqslant y\}$. Ist $B \subseteq Y \subseteq X$ so schreiben wir auch $\downarrow_Y B := \{x \in Y \,:\, \exists y \in B \,:\, x \leqslant y\}$ und $\uparrow_Y B := \{x \in Y \,:\, \exists y \in B \,:\, x \geqslant y\}$. Für $x \in X$ sei $\uparrow x := \uparrow \{x\}$ und $\downarrow x := \downarrow \{x\}$.
- B heißt *Upset*, falls $B = \uparrow B$, und *Downset*, falls $B = \downarrow B$.
- Wir bezeichen mit $\mathbf{up}(X)$ die Menge der Upsets und mit $\mathbf{down}(X)$ die Menge der Downsets von X.
- Eine Abbildung f zwischen zwei quasi geordneten Mengen $(X, \leqslant)$ und $(Y, \leqslant)$ heißt *stark isoton*, falls f ordnungserhaltend ist und für alle $x \in X$ und $y \in Y$ mit $f(x) \leqslant y$ ein $x' \in X$ existiert, sodass $x' \geqslant x$ und $f(x') = y$.

Lemma 2.3. *Für eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei quasigeordneten Mengen sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist stark isoton.*
2. *Für alle $x \in X$ gilt $f(\uparrow x) = \uparrow f(x)$.*
3. *Für alle $y \in Y$ gilt $f^{-1}(\downarrow y) = \downarrow f^{-1}(y)$.*

Ist f bijektiv, so ist folgende Aussage ebenfalls äquivalent:

4. Für alle $x, x' \in X$ gilt: $x \leqslant x' \iff f(x) \leqslant f(x')$.

Beweis. "1. $\Leftrightarrow$ 2." Es gilt: f ist stark isoton $\iff \big(f(x) \leqslant y \Leftrightarrow \exists x' \in X : x' \geqslant x$ und $f(x') = y\big) \iff (y \in \uparrow f(x) \Leftrightarrow y \in f(\uparrow x))$

"1. $\Leftrightarrow$ 3." Es gilt: f ist stark isoton $\iff \big(f(x) \leqslant y \Leftrightarrow \exists x' \in X : x' \geqslant x$ und $f(x') = y\big) \iff \big(f(x) \in \downarrow y \Leftrightarrow x \in \downarrow f(y)\big)$.

"1. $\Leftrightarrow$ 4." Es gilt: f ist stark isoton $\iff (f(x) \leqslant y \Leftrightarrow \exists x' \in X : x' \geqslant x$ und $f(x') = y) \iff (f(x) \leqslant y \Leftrightarrow x \leqslant f^{-1}(y)) \iff (f(x) \leqslant f(x') \Leftrightarrow x \leqslant x')$. □

2.2 Distributive Verbände

Definition 2.4. Sei A ein Verband.

- Dann bezeichne $Idl(A)$ die Menge aller Ideale von A.
- Für $B \subseteq A$ sei $\mathfrak{I}(B)$ das kleinste Ideal, dass B enthält, d.h.

$$\mathfrak{I}(B) := \bigcap_{\substack{I \in Idl(A) \\ B \subseteq I}} I$$

- Für $S \subseteq Idl(A)$ sei $\bigvee S := \mathfrak{I}(\bigcup S)$
- Ein $F \subseteq A$ heißt *Filter*, falls
  1. $1 \in F$, $0 \notin F$.
  2. Für alle $a, b \in F$ ist auch $a \wedge b \in F$.
  3. Für alle $a \in F$ und $b \geqslant a$ ist auch $b \in F$.
- Ein Filter F heißt *prim*, falls aus $a \vee b \in F$ folgt, dass entweder $a \in F$ oder $b \in F$.
- Ein Filter F heißt *maximal*, falls es keinen echt größern Filter $G \supsetneq F$ gibt. Ein maximaler Filter heißt auch *Ultrafilter.*
- Ist $B \subseteq A$, dann heißt B *Teilverband* von A, falls $0, 1 \in B$ und für alle $x, y \in B$ auch $x \wedge y \in B$ sowie $x \vee y \in B$.
- Ein $a \in A$ heißt *endlich*, falls für alle $S \subseteq A$ mit $\bigvee S \geqslant a$ eine endliche Teilmenge $T \subseteq S$ existiert, sodass auch $\bigvee T \geqslant a$. Wir bezeichnen die Menge der endlichen Elemente von A mit $K(A)$.

Lemma 2.5. *Sei A ein Verband und $S \subseteq Idl(A)$. Dann ist $\bigvee S = \{x \in A : \exists y_1, y_2, \dots, y_n \in \bigcup S : x \leqslant \bigvee_{i=1}^{n} y_i\}$.*

Beweis. Bezeichne J die rechte Seite der behaupteten Gleichung. Wie man leicht sieht, ist dann J ein Ideal. Also folgt $\bigvee S \subseteq J$. Andererseits gilt $\bigcup S \subseteq \bigvee S$. Da $\bigvee S$ ein Ideal ist, folgt für $y_1, \dots, y_n \in \bigcup S$, dass auch $\bigvee\limits_{i=1}^{n} y_i \in \bigvee S$ und für $x \leqslant \bigvee\limits_{i=1}^{n} y_i$ folgt weiters $x \in \bigvee S$. Also gilt auch $J \subseteq \bigvee S$, und damit $J = \bigvee S$. □

Lemma 2.6. *Sei A ein distributiver Verband. Dann ist $(Idl(A), \subseteq)$ ein Verband.*

Beweis. Da $Idl(A)$ mit der Teilmengenrelation gerichtet, und der Schnitt beliebig vieler Ideal wieder ein Ideal ist, folgt, dass für $S \subseteq Idl(A)$ das Ideal $\bigcap S$ das Infimum und $\bigvee S$ das Supremum ist. Außerdem sind $\{0\}, A \in Idl(A)$ und $\{0\} \subseteq I \subseteq A$ für alle Ideale $I \in Idl(A)$, also sind $\{0\}$ bzw. A das kleinste bzw. größte Element. Insgesamt ist daher $Idl(A)$ ein Verband. □

Bemerkung 2.7. Tatsächlich ist $Idl(A)$ sogar ein kohärenter Verband (siehe Definition 2.13). Der Beweis hiervon benötigt allerdings wesentlich mehr Vorarbeit und wird in Abschnitt 4.1 geführt.

Satz 2.8. *Seien A und B distributive Verbände, $f : A \to B$ ein Verbandshomomorphismus und I ein Ideal. Dann ist auch $f^{-1}(I)$ ein Ideal. Ist I ein Primideal, dann auch $f^{-1}(I)$.*

Die selbe Aussage gilt für Filter.

Beweis. Wir zeigen die Aussage für Ideale, für Filter verläuft der Beweis analog. Sei also $I \in Idl(B)$ ein Ideal. Wegen $0 = f(0) \in I$ folgt $0 \in f^{-1}(I)$. Für $a, b \in f^{-1}(I)$ folgt $f(a), f(b) \in I$ und daher $f(a) \vee f(b) = f(a \vee b) \in I$, also $a \vee b \in f^{-1}(I)$. Ist $a \in f^{-1}(I)$ und $b \leqslant a$ so folgt $f(b) \leqslant f(a)$ und daher $f(b) \in I$, also $b \in f^{-1}(I)$.

Sei I ein Primideal und $a \wedge b \in f^{-1}(I)$. Dann folgt $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \in I$, daher $f(a) \in I$ oder $f(b) \in I$. Also folgt $a \in f^{-1}(I)$ oder $b \in f^{-1}(I)$. □

Lemma 2.9. *Sei A ein distributiver Verband, $F \subseteq A$ ein Filter, $I \subseteq A$ ein Ideal und $F \cap I = \varnothing$. Dann gibt es ein Ideal $J \supseteq I$, sodass $J \cap F = \varnothing$ und J ist ein maximales Ideal disjunkt zu F, d.h. ist K ein Ideal, $K \supseteq J$ und $K \cap F = \varnothing$, dann ist $K = J$.*

Beweis. Sei $\mathcal{U} = \{J \in Idl(A) : J \supseteq I, J \cap F = \varnothing\} \neq \varnothing$ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{U}$ eine bezüglich der Teilmengenrelation totalgeordnete Menge. Dann ist $I := \bigcup\{J : J \in \mathfrak{A}\}$ ein Ideal, mit $I \cap F = \varnothing$ und $I \supseteq A$ für alle $A \in \mathfrak{A}$. Also ist $I \in \mathcal{U}$ eine obere Schranke für $\mathfrak{A}$ und nach dem Lemma von Zorn gibt es maximale Elemente in $\mathcal{U}$. □

Lemma 2.10. *Sei A ein distributiver Verband, $F \subseteq A$ ein Filter, $I \subseteq A$ ein Ideal, $F \cap I = \varnothing$ und I ein maximales Ideal disjunkt zu F. Dann ist I prim.*

Beweis. Da $1 \in F$ folgt $1 \notin I$.
Sei $a \wedge b \in I$, $J_a := \mathfrak{I}(I \cup \{a\})$ und $J_b := \mathfrak{I}(I \cup \{b\})$. Wir zeigen als erstes, dass

$$R := \{i \vee (a \wedge x) : i \in I, x \in A\} \stackrel{!}{=} J_a$$

Man sieht leicht, dass R ein Ideal ist. Weiters gilt für alle $i \in I$, dass $i = i \vee (a \wedge 0) \in R$ und daher $I \subseteq R$ sowie $a = 0 \vee (a \wedge a) \in R$. Also folgt $R \supseteq J_a$. Andererseits folgt für $i \in I$ und $x \in A$, dass $a \wedge x \in J_a$und daher auch $i \vee (a \wedge x) \in J_a$, also $R \subseteq J_a$.
Als nächstes zeigen wir, dass entweder J_a oder J_b disjunkt zu F ist. Nehmen wir an, dass $J_a \cap F \neq \varnothing \neq J_b \cap F$ und wählen wir $i \vee (a \wedge x) \in J_a \cap F$ und $j \vee (b \wedge y) \in J_b \cap F$. Nun folgt, da F ein Filter und I ein Ideal ist, der Widerspruch:

$$\begin{aligned} F \ni\ & (i \vee (a \wedge x)) \wedge (j \vee (b \wedge y)) = \\ &= (i \wedge j) \vee (i \wedge b \wedge y) \vee (j \wedge a \wedge x) \vee (\underbrace{a \wedge b}_{\in I} \wedge x \wedge y) \in I \end{aligned}$$

Also sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $J_a \cap F = \varnothing$. Dann ist $J_a = I$ und daher $a \in I$. □

Folgende zwei Lemmata sind oft nützlich:

Lemma 2.11. *Sind A und B Verbände und $f : A \to B$ bijektiv, dann ist f genau dann ein Verbandsisomorphismus, falls f stark isoton ist.*

Beweis. " $\Rightarrow$ " Sei f ein Verbandsisomorphismus und $x \in A$, $y \in B$ mit $f(x) \leqslant y$. Wegen der Bijektivität gibt es $x' \in A$ sodass $f(x') = y$ und weil f^{-1} ein Verbandshomomorphismus ist, folgt, dass $f(x') = y \geqslant f(x)$ impliziert $x \leqslant x'$. Also ist f stark isoton.

" $\Leftarrow$ " Sei f stark isoton. Dann ist $B = f(A) = f(\uparrow 0) = \uparrow f(0)$ und daher $f(0) = 0$, sowie $\{f(1)\} = f(\uparrow 1) = \uparrow f(1)$, also $f(1) = 1$. Es ist weiters $x \leqslant y$ genau dann, wenn $y \in \uparrow x$, genau dann, wenn $f(y) \in f(\uparrow x) = \uparrow f(x)$, also genau dann, wenn $f(x) \leqslant f(y)$. Damit sind f und f^{-1} Verbandshomomorphismen und daher f ein Verbandsisomorphismus. ☐

Lemma 2.12. *Sei A ein distributiver Verband und $(S_i)_{i=1}^n$ eine Familie von endlichen und nicht leeren Teilmengen von A. Dann gilt:*

$$\bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge S_i) = \bigwedge\{\bigvee_{i=1}^{n}\phi_i \ : \ \phi \in \prod_{i=1}^{n} S_i\}$$
$$\bigwedge_{i=1}^{n}(\bigvee S_i) = \bigvee\{\bigwedge_{i=1}^{n}\phi_i \ : \ \phi \in \prod_{i=1}^{n} S_i\}$$

Beweis. Wir beweisen die erste Aussage per Induktion, die zweite folgt analog. Für $n = 1$ ist die Aussage trivial. Für $n = 2$ folgt $\bigwedge S_1 \vee \bigwedge S_2 = \bigwedge\{(\bigwedge S_1) \vee y \ : \ y \in S_2\} = \bigwedge\{\bigwedge\{x \vee y \ : \ x \in S_1\} \ : \ y \in S_2\} = \bigwedge\{x \vee y \ : \ x \in S_1, y \in S_2\} = \bigwedge\{\phi_1 \vee \phi_2 \ : \ \phi \in S_1 \times S_2\}$. Sei nun $n > 2$ und die Aussage für $1 \leqslant k < n$ bewiesen. Für jedes $x \in S_n$ sei $S_{n-1}^x := \{x \vee y \ : \ y \in S_{n-1}\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\bigwedge\{\bigvee_{i=1}^{n}\phi_i \ : \ \phi \in \prod_{i=1}^{n} S_i\} &= \bigwedge_{x \in S_n}\left(\bigwedge\{\bigvee_{i=1}^{n-1}\phi_i \ : \ \phi \in \prod_{i=1}^{n-2} S_i \times S_{n-1}^x\}\right) \\
&= \bigwedge_{x \in S_n}\left(\bigvee_{i=1}^{n-2}(\bigwedge S_i) \vee (\bigwedge S_{n-1}^x)\right) && \text{Induktionsannahme} \\
&= \bigvee_{i=1}^{n-2}(\bigwedge S_i) \vee \bigwedge_{x \in S_n}\bigwedge S_{n-1}^x \\
&= \bigvee_{i=1}^{n-2}(\bigwedge S_i) \vee \bigwedge_{x \in S_n}(\bigwedge S_{n-1} \vee x) \\
&= \bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge S_i)
\end{aligned}$$

☐

2.3 Kohärente Verbände

Definition 2.13. Ein vollständiger Verband A heißt *kohärent*, falls

1. Jedes Element ist Supremum einer Menge von endlichen Elementen, d.h. für alle $a \in A$ existiert $S \subseteq K(A)$, sodass $a = \bigvee S$.
2. $K(A) \subseteq A$ ist ein Teilverband (nicht notwendigerweise vollständig).

Sind A, B kohärente Verbände und $f : A \to B$ ein vollständiger Verbandshomomorphismus, dann heißt f *kohärent,* falls $f(K(A)) \subseteq K(B)$. Wir bezeichnen mit **KohVerb** die Kategorie der kohärenten Verbände, zusammen mit kohärenten Verbandshomomorphismen.

Lemma 2.14. *Ein vollständiger Verband A ist genau dann kohärent, falls*

1. *Für alle $a \in A$ existiert $S \subseteq K(A)$, sodass $a = \bigvee S$.*

2′. $1 \in K(A)$

2″. *Für alle x, $y \in K(A)$ ist auch $x \wedge y \in K(A)$*

Beweis. Ist A kohärent, so ist $K(A)$ ein Teilverband und damit $1 \in K(A)$ sowie für alle $x, y \in K(A)$ auch $x \wedge y \in K(A)$.

Seien andererseits die Bedingungen dieses Satzes erfüllt. Offensichtlich ist 0 endlich. Außerdem folgt aus $x, y \in A$ endlich, dass auch $x \vee y$ endlich ist. Damit ist $K(A)$ ein Teilverband. □

Lemma 2.15. *Sind A, B kohärente Verbände und $f : A \to B$ bijektiv, dann ist f ein kohärenter Verbandsisomorphismus genau dann, wenn f stark isoton ist.*

Beweis. Die kohärenten Verbände A und B sind auch distributive Verände. Nach Lemma 2.11 ist f genau dann ein Verbandsisomorphismus, wenn f stark isoton ist. Insbesondere sind kohärente Verbandsisomorphismus auch Verbandsisomorphismen und daher ist die starke Isotonie notwendig. Sei umgekehrt f stark isoton, also ein Verbandsisomorphismus. Ist $S \subseteq A$ so gilt für alle $s \in S$, dass $\bigvee S \geqslant s$ und daher $f(\bigvee S) \geqslant f(s)$. Also folgt auch $f(\bigvee S) \geqslant \bigvee f(S)$. Andererseits gibt es für $t \geqslant \bigvee f(S)$ ein $a \in A$, sodass $f(a) = t$, und wegen $f(a) \geqslant f(s)$ folgt $a \geqslant s$ für alle $s \in S$. Also folgt $a \geqslant \bigvee S$ und folglich $t = f(a) \geqslant f(\bigvee S)$. Insgesamt ist also $f(\bigvee S)$ die kleinste obere Schranke für $f(S)$ und daher $f(\bigvee S) = \bigvee f(S)$, also ist f vollständig. Wendet man die selbe Überlegeung auf f^{-1} an, so erhält man, dass auch f^{-1} vollständig ist. Also ist f ein vollständiger Verbandsisomorphismus. Die Kohärenz von f und f^{-1} folgt jetzt einfach dadurch, dass die Eigenschaft eines Elementes endlich zu sein, von vollständigen Verbandsisomorphismen erhalten wird. □

2.4 Boolsche Algebren

Lemma 2.16. *Sind x, a, b drei Elemente eines distributiven Verbandes A, dann existiert höchstens ein $y \in A$, sodass $x \wedge y = a$ und $x \vee y = b$.*

Beweis. Seien y, $\tilde{y} \in A$ mit den Eigenschaften. Dann folgt

$$\begin{aligned} y &= y \wedge (x \vee y) = y \wedge b = y \wedge (x \vee \tilde{y}) = (y \wedge x) \vee (y \wedge \tilde{y}) \\ &= a \vee (y \wedge \tilde{y}) = y \wedge \tilde{y} \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus $a \leqslant y$ und $a \leqslant \tilde{y}$, und daher auch $a \leqslant y \wedge \tilde{y}$, folgt. Genauso folgt $\tilde{y} = y \wedge \tilde{y}$ und damit $y = \tilde{y}$. □

Definition 2.17. Sei A ein distributiver Verband und $a \in A$. Gibt es ein Element $b \in A$ mit der Eigenschaft, dass $a \wedge b = 0$ und $a \vee b = 1$, so heißt b das *Komplement* von a und wird mit a^* bezeichnet.

Das vorhergende Lemma zeigt also, dass jedes $a \in A$ maximal ein Komplement besitzt.

Definition 2.18. Ein distributiver Verband A heißt *boolsche Algebra*, falls jedes $a \in A$ ein Komplement besitzt. Wir bezeichnen die Kategorie der boolschen Algebren, zusammen mit Verbandshomomorphismen, mit **Bool**.

Beispiel 2.19. *Beispiele für boolsche Algebren.*

1. Das einfachste Beispiel einer boolschen Algebra ist der $\mathbb{Z}_2$.

2. Weiters wird jede mengentheoretische Algebra zu einer boolschen Algebra, wenn man als unäre Operation die Komplementbildung nimmt. Aus der Stone Duality I wird sogar folgen, dass alle boolschen Algebren isomorph zu einer mengentheoretischen Algebra sind.

Bemerkung 2.20. Auf mengentheoretischen Algebren ist also die Komplementbildung im Sinne von boolschen Algebren durch Komplementbildung ^{c} im mengentheoretischen Sinne gegeben. Wir werden diese aber im Kontext von boolschen Algebren meistens trotzdem mit $*$ bezeichnen.

Definition 2.21. Ist A eine boolsche Algebra und $B \subseteq A$, so heißt B *Teilalgebra* von A, falls B ein unter $*$ abgeschlossener Teilverband von A ist.

Lemma 2.22. *a^* ist das größte Element b, sodass $b \wedge a = 0$ und das kleinste Element c, sodass $c \vee a = 1$.*

Beweis. Ist $b \wedge a = 0$, so folgt $b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee a^*) = (b \wedge a) \vee (b \wedge a^*) = b \wedge a^*$, also $b \leqslant a^*$. Die zweite Aussage sieht man analog. □

Korollar 2.23. *Es gilt $a^{**} = a$. Insbesondere ist $^* : A \to A$ eine Bijektion. Weiters gilt: $a \leqslant b \iff a^* \geqslant b^*$ sowie die* De Morgan'schen Gesetze*: $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$ und $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$ für alle $a, b \in A$*

Beweis. Es ist $a^* \wedge a = 0$ und $a^* \vee a = 1$. Also folgt $a = a^{**}$.

Die De Morgan'schen Gesetze sieht man ebenfalls mit Lemma 2.16. Es gilt $(a \wedge b) \wedge (a^* \vee b^*) = (a \wedge a^* \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge b^*) = 0$ und $(a \wedge b) \vee (a^* \vee b^*) = (a \vee a^* \vee b) \wedge (a^* \vee b \vee b^*) = 1$ und daher $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$. Das zweite Gesetz sieht man genauso.

Weiters gilt $a \leqslant b \iff a \vee b = b \iff a^* \wedge b^* = b^* \iff a^* \geqslant b^*$. □

Korollar 2.24. *Ein Verbandshomomorphismus $f : A \to B$ zwischen boolschen Algebren erhält automatisch die unäre Operation.*

Beweis. Sei $a \in A$. Dann folgt $f(a) \wedge f(a^*) = f(a \wedge a^*) = f(0) = 0$ und $f(a) \vee f(a^*) = f(a \vee a^*) = f(1) = 1$, und daher $f(a^*) = f(a)^*$. □

Lemma 2.25. *Sei A eine boolsche Algebra. Dann ist $I \subseteq A$ genau dann ein echtes Ideal, falls $I^* := \{x^* : x \in I\}$ ein Filter ist.*

Beweis. Sei $I \subseteq A$ ein echtes Ideal. Dann ist $0 \in I$ und $1 \notin I$ und damit $1 = 0^* \in I^*$ und $0 = 1^* \notin I^*$. Für alle $a, b \in I^*$ folgt $a^*, b^* \in I$, daher auch $a^* \vee b^* \in I$ und damit $(a^* \vee b^*)^* = a \wedge b \in I^*$. Ist $a \in I^*$ und $b \geqslant a$ so folgt $a^* \in I$ und $b^* \leqslant a^*$. Also $b^* \in I$ und daher $b \in I^*$. Also ist I^* ein Filter. Die andere Richtung sieht man genauso. □

Lemma 2.26. *Sei A eine boolsche Algebra und $I \subseteq A$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *I ist ein Primideal.*
2. *I ist ein maximales Ideal.*
3. *Für alle $x \in A$ gilt entweder $x \in I$ oder $x^* \in I$.*
4. *I^* ist ein Primfilter.*
5. *I^* ist ein maximaler Filter.*
6. *Für alle $x \in A$ gilt entweder $x \in I^*$ oder $x^* \in I^*$.*

Beweis. "1. ⇒ 3." Sei I ein Primideal. Dann gilt für jedes $x \in A$, dass $x \wedge x^* = 0 \in I$ und daher $x \in I$ oder $x^* \in I$.

"3. ⇒ 2." Sei $J \supsetneq I$ ein echtes Ideal und $x \in J \backslash I$. Dann ist $x^* \in I$ und daher auch $x^* \in J$. Also folgt der Widerspruch $x \vee x^* = 1 \in J$.

"2. ⇒ 1." Folgt aus Lemma 2.10 angewandt auf den Filter $F = \{1\}$.

"1. ⇔ 4." I ist genau dann prim, wenn aus $a \wedge b \in I$ folgt, dass $a \in I$ oder $b \in I$. Das ist äquivalent dazu, dass aus $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^* \in I^*$ folgt, dass $a^* \in I^*$ oder $b^* \in I^*$, also genau dann, wenn I^* prim ist.

"4. ⇔ 5. ⇔ 6." Folgt analog zu "1. ⇔ 2. ⇔ 3.". □

2.5 Heyting Algebren

Definition 2.27. Sei A ein distributiver Verband und $a, b \in A$. Gibt es ein größtes Element $x \in A$, sodass $a \wedge x \leqslant b$, so heißt x *Pseudokomplement von a bezüglich b* und wird mit $a \to b$ bezeichnet.

Definition 2.28. Ein distributiver Verband A heißt *Heyting Algebra*, falls für alle $a, b \in A$ das Pseudokomplement von a bezüglich b existiert. Wir bezeichnen die Kategorie der Heyting Algebren zusammen mit Verbandshomomorphismen mit **Heyt**.

Lemma 2.29. *Jede boolsche Algebra ist eine Heyting Algebra. Die Pseudokomplemente sind dabei gegeben durch $a \to b = a^* \vee b$.*

Beweis. Es ist $(a^* \vee b) \wedge a = b \wedge a \leqslant b$. Sei andererseits $a \wedge x \leqslant b$. Dann folgt $x \vee a^* = (a \wedge x) \vee a^* \leqslant b \vee a^*$ und daher insbesondere $x \leqslant a^* \vee b$. □

2.6 Closure Algebren

Definition 2.30. Sei A eine boolsche Algebra. Eine unäre Operation $^- : A \to A$, $x \mapsto x^- = \overline{x}$ heißt *Abschlussoperator*, falls für alle $x, y \in A$ gilt

1. $\overline{0} = 0$
2. $x \leqslant x^-$
3. $x \leqslant y$ impliziert $x^- \leqslant y^-$
4. $x^- = x^{--}$
5. $(x \vee y)^- = x^- \vee y^-$

Das Paar $(A, ^-)$ heißt *closure Algebra*, falls A eine boolsche Algebra und $^-$ ein Abschlussoperator auf A ist. Für einen Abschlussoperator definieren wir den *Interioroperator* $^\circ$ über $x^\circ := x^{*-*}$. Ein Element $x \in A$ heißt *abgeschlossen*, falls $x^- = x$, und *offen*, falls $x^\circ = x$. Ist $B \subseteq A$ so bezeichnet $B^- := \{x^- : x \in B\}$ und $B^\circ := \{x^\circ : x \in B\}$.

Definition 2.31. Sind $(A, ^-)$ und $(B, ^-)$ zwei closure Algeberen und $f : A \to B$ eine Abbildung, dann heißt f *closure Algebrenhomomorphismus*, falls f ein Verbandshomomorphismus ist und für alle $x \in A$ gilt, dass $f(x^-) = f(x)^-$. Wir bezeichnen die Kategorie der closure Algebren mit closure Algebrenhomomorphismus mit **CloAlg**.

Lemma 2.32. *Sei $^-$ ein Abschlussoperator auf einer boolschen Algebra A. Dann gilt*

1. *$a^- = min(\uparrow a \cap A^-)$ für alle $a \in A$. Insbesondere ist der Abschlussoperator eindeutig über die Menge der abgeschlossenen Elemente festgelegt.*
2. *$x, y \in A^-$ impliziert $x \wedge y \in A^-$ und $x \vee y \in A^-$*
3. *Es ist $a \in A$ offen genau dann, wenn a^* abgeschlossen ist. Insbesondere ist $A^\circ = A^{-*}$*

Beweis. 1. Es folgt unmittelbar, dass $a^- \in \uparrow a \cap A^-$. Ist $d \in \uparrow a \cap A^-$, so folgt $a^- \leqslant d^- = d$. Also folgt die Behauptung.

2. Es gilt $(x \vee y)^- = x^- \vee y^- = x \vee y$, also $x \vee y \in A^-$. Außerdem ist $(x \wedge y)^- \leqslant x^-$ und $(x \wedge y)^- \leqslant y^-$, und daher $(x \wedge y) \leqslant (x \wedge y)^- \leqslant x^- \wedge y^- = x \wedge y$.

3. Folgt unmittelbar. □

Folgender Satz gibt eine präzise Charakterisierung jener Teilmengen T einer boolschen Algebra A, welche als Mengen der abgeschlossenen Elemente auftreten können.

Satz 2.33. *Sei A eine boolsche Algebra und $T \subseteq A$ nicht leer. Dann gibt es genau dann einen closure Operator $^-$ auf A mit $A^- = T$, falls T ein Teilverband von A ist und für alle $a \in A$ die Menge $\uparrow a \cap T$ ein Minimum besitzt.*

Beweis. " $\Rightarrow$ " Folgt sofort aus vorigem Lemma.

" $\Leftarrow$ " Sei $^- : A \to A$ definiert über $a^- := min(\uparrow a \cap T)$. Da T ein Teilverband ist, folgt $0 \in T$ und damit $0^- = 0$. Außerdem gilt: $x \leqslant x^-$, sowie $x \leqslant y \implies x^- \leqslant y^-$ und $x^- = x^{--}$ für alle $x, y \in A$. Weiters gilt für alle $x, y \in A$, dass $x \vee y \leqslant x^- \vee y^-$. Da $x^- \vee y^- \in T$ folgt $(x \vee y)^- \leqslant x^- \vee y^-$. Ist andererseits $d \in T$ mit $(x \vee y)^- \leqslant d \leqslant x^- \vee y^-$, so folgt $x \leqslant d$ und $y \leqslant d$ und daher $x^- \leqslant d$ und $y^- \leqslant d$, also $x^- \vee y^- \leqslant d$. Daher gilt auch $(x \vee y)^- = x^- \vee y^-$. □

2.7 Fortsetzungssätze

In diesem Abschnitt werden einige Resultate bewiesen, die sich mit der Fortsetzbarkeit von Funktionen zu Homomorphismen beschäftigen, welche zuvor nur auf Teilmengen definiert sind. Bis zum Ende dieses Abschnittes bezeichne $\mathscr{C}$ immer eine der Kategorien **Bool** oder **DVerb**.

Definition 2.34. Ist $(A, \leqslant) \in Obj(\mathscr{C})$ und $B \subseteq A$ so sei

$$[B]_{\mathscr{C}} := \bigcap\{E : B \subseteq E \subseteq A,\ E \text{ ist Teilverband (Teilalgebra) von } A\}.$$

Die Menge B heißt *$\mathscr{C}$-dicht* in A, falls $[B]_{\mathscr{C}} = A$. Falls klar ist welche Kategorie gemeint ist, so heißt B auch einfach nur *dicht* in A.

Lemma 2.35. *$[B]_{\mathscr{C}}$ ist der kleinste Teilverband (die kleinste Teilalgebra) von A, die B enthält.*

Beweis. Offensichtlich ist $0, 1 \in [B]_{\mathscr{C}}$. Weiters sieht man leicht, dass mit $x, y \in [B]_{\mathscr{C}}$ auch immer $x \wedge y \in [B]_{\mathscr{C}}$ sowie $x \vee y \in [B]_{\mathscr{C}}$ und, im Falle **Bool**, auch $x^* \in [B]_{\mathscr{C}}$. Also ist $[B]_{\mathscr{C}}$ ein Teilverband (eine Teilalgebra) von A. Aus der Definition von $[B]_{\mathscr{C}}$ folgt damit die Aussage. □

Satz 2.36. *Sei $A \in Obj(\mathscr{C})$ und $B \subseteq A$ nichtleer. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\text{In } \mathbf{DVerb}: \qquad [B]_{\mathbf{DVerb}} &= \{\bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge R_i) : \varnothing \neq R_i \subseteq B \cup \{0,1\},\ \#R_i < \infty,\ n \geqslant 1\} \\
&= \{\bigwedge_{i=1}^{n}(\bigvee R_i) : \varnothing \neq R_i \subseteq B \cup \{0,1\},\ \#R_i < \infty,\ n \geqslant 1\} \\
\text{In } \mathbf{Bool}: \qquad [B]_{\mathbf{Bool}} &= \{\bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge R_i) : \varnothing \neq R_i \subseteq B \cup B^*,\ \#R_i < \infty,\ n \geqslant 1\} \\
&= \{\bigwedge_{i=1}^{n}(\bigvee R_i) : \varnothing \neq R_i \subseteq B \cup B^*,\ \#R_i < \infty,\ n \geqslant 1\}
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $[B]_{\mathbf{Bool}} = [B \cup B^*]_{\mathbf{DVerb}}$.

Beweis. Wir zeigen jeweis nur die erste Gleichheit. Die zweite folgt analog.

Wir beginnen mit **DVerb**. Bezeichne X die rechte Seite der Gleichung, so folgt offenbar, da $D := [B]_{\mathbf{Verb}}$ ein Verband ist, $X \subseteq D$. Außerdem ist $0, 1 \in X$. Es reicht daher zu zeigen, dass X unter den Verbandsoperationen abgeschlossen ist. Offensichtlich ist X unter $\vee$ abgeschlossen. Dass X auch unter $\wedge$

abgeschlossen ist, folgt aus Lemma 2.12:

$$\begin{aligned}\bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge R_i) \wedge \bigvee_{j=1}^{m}(\bigwedge T_j) &= \bigvee\left\{\bigwedge_{k=1}^{2}\phi_k \,:\, \phi \in \{\bigwedge R_i \,:\, i=1,\dots,n\} \times \{\bigwedge T_j \,:\, j=1,\dots,m\}\right\} \\ &= \bigvee_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}\{(\bigwedge R_i) \wedge (\bigwedge T_j)\} \\ &= \bigvee_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}\bigwedge(R_i \cup T_j)\end{aligned}$$

Im Falle **Bool** bezeichne X wieder die rechte Seite. Es folgt wieder unmittelbar $X \subseteq D$ und wir müssen noch nachweisen, dass X schon eine boolsche Algebra ist. Es folgt wie vorher, dass X unter $\vee$ und $\wedge$ abgeschlossen ist. Da B nicht leer ist, gibt es x mit $x, x^* \in B \cup B^*$ und daher $0 = x \wedge x^* \in X$, sowie $1 = x \vee x^* \in X$. Es bleibt die Abgeschlossenheit unter * zu zeigen:

$$(\bigvee_{i=1}^{n}\bigwedge T_i)^* = \bigwedge_{i=1}^{n}(\bigvee T_i{}^*) = \bigvee\{\bigwedge_{i=1}^{n}\phi_i \,:\, \phi \in \prod_{i=1}^{n} T_i{}^*\} \in X$$

Schließlich folgt $[B]_{\mathbf{Bool}} = [B \cup B^*]_{\mathbf{Bool}} \supseteq [B \cup B^*]_{\mathbf{DVerb}}$. Aus den eben bewiesenen Darstellungen von $[B]_{\mathbf{DVerb}}$ und $[B]_{\mathbf{Bool}}$ folgt aber sofort $[B \cup B^*]_{\mathbf{Bool}} \subseteq [B \cup B^*]_{\mathbf{DVerb}}$ und damit insgesamt $[B]_{\mathbf{Bool}} = [B \cup B^*]_{\mathbf{DVerb}}$ □

Satz 2.37. *Seien $A, B \in Obj(\mathscr{C})$, $h, k \in Mor_{\mathscr{C}}(A, B)$ und $X \subseteq A$. Gilt dann $h|_X = k|_X$, so folgt $h|_{[X]_{\mathscr{C}}} = k|_{[X]_{\mathscr{C}}}$.*

Beweis. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit X dicht in A. Bezeichne $\xi := h|_X = k|_X$, $M := \{\varphi \in Mor(A, B) \,:\, \varphi|_X = \xi\}$ und $Y := \{x \in A \,:\, \forall \varphi, \psi \in M \,:\, \varphi(x) = \psi(x)\}$. Offenbar ist $0, 1 \in Y$. Sind $x, y \in Y$ so folgt für alle $\varphi, \psi \in M$, dass $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y) = \psi(x) \vee \psi(y) = \psi(x \vee y)$ und damit $x \vee y \in Y$. Analog sieht man auch $x \wedge y \in Y$ und im Falle **Bool** auch $x^* \in Y$. Also ist $Y \supseteq X$ ein Teilverband (eine Teilalgebra) von A und da X dicht in A ist, folgt $Y = A$. □

Satz 2.38. (Extension Theorem) *Seien $A, B \in Obj(\mathscr{C})$ und $X \subseteq A$ $\mathscr{C}$-dicht. Sei weiters $f : X \to B$ eine Funktion. Dann besitzt f genau dann eine Fortsetzung zu einem Verbandshomomorphismus $g : A \to B$, falls für alle endlichen Teilmengen $U, V \subseteq X$ mit $U \cup V \neq \varnothing$ (es darf aber $U = \varnothing$ oder $V = \varnothing$ gelten) gilt:*

1. *In* **DVerb**: $\bigwedge U \leqslant \bigvee V \implies \bigwedge f(U) \leqslant \bigvee f(V)$.
2. *In* **Bool**: $(\bigwedge U) \wedge (\bigwedge V^*) = 0 \implies (\bigwedge f(U)) \wedge (\bigwedge f(V)^*) = 0$.

In diesem Fall ist g eindeutig.

Es gelte zusätzlich $\{0, 1\} \subseteq X$. Dann ist die Fortsetzung ein Isomorphismus genau dann, wenn f injektiv ist, $f(X)$ $\mathscr{C}$-dicht in B ist und $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls die Voraussetzungen 1. bzw. 2. erfüllt.

Beweis. Die Bedingung 1. bzw. 2. sind sicherlich in beiden Fällen notwendig.

Wir zeigen, dass 1. im Falle **DVerb** auch hinreichend ist. Falls $0 \in X$ folgt mit $U = \{0\}$ und $V = \varnothing$: $\bigwedge\{0\} \leqslant 0 \implies f(0) = \bigwedge\{f(0)\} \leqslant 0$, also $f(0) = 0$, und mit $U = \varnothing$ und $V = \{1\}$ folgt analog auch $f(1) = 1$. Sei nun $\tilde{X} := X \cup \{0, 1\}$ und $\tilde{f} : \tilde{X} \to B$ definiert über $\tilde{f}(x) = f(x)$ für $x \in X$, $\tilde{f}(0) = 0$ und $\tilde{f}(1) = 1$. Man sieht leicht, dass dann auch $\tilde{X}$ und $\tilde{f}$ die Bedingung 1. erfüllen. Also nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $0, 1 \in X$.

Sei nun $g : A \to B$ definiert über $g(\bigvee_{i=1}^{n}\bigwedge S_i) := \bigvee_{i=1}^{n}\bigwedge f(S_i)$ für alle endlichen nichtleeren Teilmengen S_i von X. Um zu sehen, dass g wohldefiniert ist, sei $\bigvee_{i=1}^{n}\bigwedge S_i = \bigvee_{j=1}^{m}\bigwedge T_j$, wobei $S_i, T_j \subseteq X$ endliche Teilmengen sind. Dann gilt für alle $i = 1, \dots, n$ und $\phi \in \prod_{j=1}^{m} T_j$, dass $\bigwedge S_i \leqslant \bigvee_{j=1}^{m}\phi_j$. Also folgt wegen der Annahme des Satzes, dass $\bigwedge f(S_i) \leqslant \bigvee_{j=1}^{m} f(\phi_j)$, und daher

$$\bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge f(S_i)) \leqslant \bigwedge\{\bigvee_{j=1}^{m} f(\phi_j) \,:\, \phi \in \prod_{j=1}^{m} T_j\} = \bigvee_{j=1}^{m}(\bigwedge f(T_j))$$

Genauso zeigt man $\bigvee_{j=1}^{m}(\bigwedge f(T_j)) \leqslant \bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge f(S_i))$, also insgesamt $\bigvee_{j=1}^{m}(\bigwedge f(T_j)) = \bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge f(S_i))$. Wegen Satz 2.36 ist g auch überall definiert und offensichtlich gilt $g|_X = f$. Man überprüft nun leicht, dass g mit den Verbandsoperationen $\vee$ und $\wedge$ verträglich ist. Weiters ist $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$. Also ist g ein Verbandshomomorphismus.

Wir zeigen nun den Fall **Bool**. Dazu definieren wir eine Funktion $\tilde{f} : X \cup X^* \to f(X) \cup f(X)^*$ über $\tilde{f}(x) = f(x)$ für $x \in X$, und $\tilde{f}(x) = f(x^*)^*$ für $x \in X^*$. Diese Funktion ist wohldefiniert, denn für $x \in X \cap X^*$ gilt mit $U = \{x, x^*\}$ und $V = \varnothing$, dass $f(x) \wedge f(x^*) = 0$, und mit $U = \varnothing$ und $V = \{x, x^*\}$ folgt $f(x) \vee f(x^*) = 1$, also $f(x^*) = f(x)^*$. Aus Satz 2.36 folgt, dass $[X \cup X^*]_{\mathbf{DVerb}} = [X]_{\mathbf{Bool}} = A$ und nach dem ersten Beweisteil gibt es eine Fortsetzung von $\tilde{f}$ zu einem Verbandshomomorphismus auf A.

Die Eindeutigkeit folgt sofort aus Satz 2.37.

Im Folgenden steht (Iso) als Abkürzung für die drei Bedingungen: f ist injektiv, $f(X)$ ist $\mathscr{C}$-dicht in B und $f^{-1} : Y \to X$ erfüllt ebenfalls die Bedingung 1. bzw. 2.. Wir zeigen nun im Falle **DVerb** die Aussage über Isomorphismen. Als Erstes beweisen wir, dass (Iso) notwendig ist. Dass die Injektivität von f notwendig ist, ist klar. Hat g eine Inverse, so ist diese eine Fortsetzung von f^{-1}. Also muss f^{-1} die Bedingung 1. des Satz erfüllen. Aus der Injektivität folgt nun für alle Teilmengen $M \subseteq f(X)$, dass $M = f(f^{-1}(M))$. Also sind alle endlichen, nicht leeren Teilmengen von $f(X)$ von der Form $f(U)$ für eine endliche, nicht leere Teilmenge U von X. Außerdem folgt aus $0, 1 \in X$ zwingend $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$, also $0, 1 \in f(X)$. Mit der Definition von g und Satz 2.36 folgt, dass $g(A) = [f(X)]_{\mathbf{DVerb}}$, also ist $g(A)$ **DVerb**-dicht in A.

Sei umgekehrt (Iso) erfüllt. Dann haben f bzw. f^{-1} Fortsetzungen zu Homomorphismen $g : A \to B$ bzw. $\tilde{g} : B \to A$. Für alle $x \in A$ gibt es endliche, nicht leere Teilmengen $S_i \subseteq X$, $i = 1, \ldots, n$, sodass $x = \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge S_i$ und es folgt $\tilde{g} \circ g(x) = \tilde{g} \circ g(\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge S_i) = \tilde{g}(\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge f(S_i)) = \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge f^{-1} \circ f(S_i) = \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge S_i = x$. Analog folgt auch $g \circ \tilde{g}(y) = y$ für alle $y \in B$ und insgesamt folgt $g = \tilde{g}^{-1}$ und damit ist g ein Isomorphismus.

Zuletzt zeigen wir die Aussage über Isomorphismen im Fall **Bool**. Die Notwendigkeit der Injektivität von f und, dass f^{-1} die Bedingung 2. erfüllt, folgt wie zuvor. Weiters liegt X bzw. $f(X)$ genau dann **Bool**-dicht, wenn $X \cup X^*$ bzw. $f(X) \cup f(X)^*$ **Verb**-dicht liegt. Also ist g die eindeutige Fortsetzung von dem oben definierten $\tilde{f} : X \cup X^* \to f(X \cup X^*) = f(X) \cup f(X)^*$ zu einem Verbandsisomorphismus von X nach B. Mit dem zuvor bewiesenen folgt, dass $f(X) \cup f(X)^*$ **Verb**-dicht ist.

Wir zeigen nun, dass (Iso) im Fall **Bool** hinreichend ist. Sei also $f : X \to f(X)$ bijektiv. Mit den Voraussetzungen (Iso) erhalten wir Fortsetzungen $g : A \to B$ bzw. $h : B \to A$ von f bzw. f^{-1}. Wir zeigen als Erstes, dass $\tilde{f} = g|_{X \cup X^*} : X \cup X^* \to f(X) \cup f(X)^*$ bijektiv ist und die Inverse $h|_{f(X) \cup f(X)^*}$ besitzt. Surjektivität von $\tilde{f}$ ist klar. Seien $x, y \in X \cup X^*$ mit $x \neq y$ und $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(y)$. Dies ist offenbar nur möglich, wenn $x \in X$ und $y \in X^*$ oder umgekehrt. Nehmen wir $x \in X$ an, so folgt $f(x) = f(y^*)^*$ und weiters $x = f^{-1}(f(x)) = h(f(x)) = h(f(y^*)^*) = h(f(y^*))^* = y^{**} = y$. Also ist $\tilde{f}$ bijektiv und hat als Inverse $h|_{f(X) \cup f(X)^*}$. Weiters sind $X \cup X^*$ bzw. $f(X \cup X^*)$ **DVerb**-dicht in A bzw. B. Die Tatsache, dass $h|_{f(X) \cup f(X)^*}$ die Bedingung 1. erfüllt folgt nun notwendiger Weise, denn der Homomorphismus h ist eine Fortsetzung von $h|_{f(X) \cup f(X)^*}$ und eine solche kann nur existieren, falls die Bedingung 1. erfüllt ist. Insgesamt erhalten wir nun über die schon bewiesene Aussage über Isomorphismen im Fall **DVerb**, dass g ein Isomorphismus ist. □

Hilfreich ist oft folgende Variante des Fortsetzungssatzes:

Korollar 2.39. *Seien A, B boolsche Algebren, $X \subseteq A$ ein* **Bool**−*dichter Teilverband und $f : X \to B$ ein Verbandshomomorphismus. Dann gibt es eine eindeutige Fortsetzung von f zu einem Verbandshomomorphismus $g : A \to B$.*

Beweis. Seien $U, V \subseteq X$ endliche Teilmengen, $U \cup V \neq \varnothing$ und $(\bigwedge U) \wedge (\bigwedge V^*) = (\bigwedge U) \wedge (\bigvee V)^* = 0$. Dann folgt $\bigwedge U \leqslant \bigvee V$, und da die Suprema und Infima in X existieren und f ein Verbandshomomorphismus ist, folgt $\bigwedge f(U) \leqslant \bigvee f(V)$, und daher $(\bigwedge f(U)) \wedge (\bigwedge f(V)^*) = 0$. Also gibt es eine eindeutige Fortsetzung $g : A \to B$. □

3 Topologische Konzepte

3.1 Allgemeine Topologie

Definition 3.1. Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$.

- Eine gleichzeitig offene und abgeschlossene Menge wird auch als *clopen* bezeichnet.
- Wie gehabt bezeichnet $\Omega(X)$ das System der offenen Mengen und $K\Omega(X)$ das System der kompakten offenen Mengen von X.
- Wir bezeichnen weiters mit $\mathcal{A}(X)$, $\mathcal{K}(X)$ und $\mathcal{C}(X)$ die Systeme der abgeschlossenen, kompakten, bzw. clopen Mengen von X.
- Ist $\mathcal{T} = \Omega(X)$ die Topologie auf X, so bezeichnet $\mathcal{T}|_Y$ die Spurtopologie auf Y.
- Die *Saturation* von Y ist definiert als $Sat(Y) := \bigcap\{U \in \Omega(X) : Y \subseteq U\}$.
- Die Quasiordnung $\leqslant_\mathcal{T}$, definiert über $x \leqslant_\mathcal{T} y \iff x \in \overline{\{y\}}$, heißt *die von der Topologie induzierte Quasiordnung.*

Lemma 3.2. *Es ist $x \leqslant_\mathcal{T} y$ genau dann, wenn für alle offenen Mengen U gilt: $x \in U \implies y \in U$. Weiters ist $\leqslant_\mathcal{T}$ genau dann eine Halbordnung, wenn die Topologie T_0 ist.*

Beweis. Folgt sofort aus der Definition. □

Definition 3.3. Sei X ein topologischer Raum.

- X heißt *total unzusammenhängend,* falls die einpunktigen Mengen die einzigen zusammenhängenden Mengen sind.
- X heißt *total separiert*, falls für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ eine clopen Menge A existiert, mit $x \in A$ und $y \notin A$.
- X heißt *nulldimensional*, falls die clopen Mengen eine Basis bilden.

Lemma 3.4. *Für topologische Räume gelten folgende Implikationen:*

$$\begin{array}{lrcl} 1. & \textit{total unzusammenhängend} & \Longrightarrow & T_1 \\ 2. & \textit{total separiert} & \Longrightarrow & T_2 \textit{ und total unzusammenhängend} \\ 3. & T_0 \textit{ und nulldimensional} & \Longrightarrow & T_3 \textit{ und total separiert} \end{array}$$

Beweis. 1. Da $\overline{\{x\}}$ immer zusammenhängend ist, folgt $\{x\} = \overline{\{x\}}$ für alle x, und damit T_1.

2. T_2 folgt sofort. Ist $A \subseteq X$ und $x, y \in A$ mit $x \neq y$, dann gibt es eine clopen Menge $B \subseteq X$ mit $x \in B$ und $y \notin B$. Also ist A nicht zusammenhängend.

3. Ist A abgeschlossen und $x \notin A$ dann gibt es eine clopen Menge U mit $x \in U \subseteq A^c$. Also folgt T_3. Mit $A = \{y\}$ für beliebiges $y \neq x$ folgt auch total separiert. □

Folgender topologischer Satz wird in verschiedenen Stellen der Arbeit verwendet.

Satz 3.5. *(Alexander's Subbasis Lemma) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{C}$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$. Wenn jede Überdeckung von X mit Mengen aus $\mathcal{C}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt, dann ist X kompakt.*

Beweis. Nehmen wir an, dass X nicht kompakt ist. Dann ist das System

$$\mathfrak{X} := \{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T} : \bigcup \mathcal{U} = X, \nexists \mathcal{M} \subseteq \mathcal{U} : \mathcal{M} \textit{ endlich}, \bigcup \mathcal{M} = X\}$$

nicht leer. Wir suchen mit Hilfe des Lemmas von Zorn maximale Elemente. Ist $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ linear geordnet, so ist offenbar $\bigcup(\bigcup \mathfrak{Y}) = X$. Sei $\mathcal{M} \subseteq \bigcup \mathfrak{Y}$ eine endliche Teilmenge. Dann gibt es $\mathcal{U} \in \mathfrak{Y}$, sodass $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}$, und daher ist $\bigcup \mathcal{M} \neq X$. Also folgt $\bigcup \mathfrak{Y} \in \mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ hat eine obere Schranke in $\mathfrak{X}$.

Sei nun $\mathcal{U} \in \mathfrak{X}$ ein maximales Element. Würde das System der Subbasismengen in $\mathcal{U}$ ganz $\mathfrak{X}$ überdecken, so hätte es nach Vorausetzung eine endliche Teilüberdeckung, was aber der Definition von $\mathcal{U}$ widerspricht. Also folgt $\bigcup(\mathcal{U} \cap \mathcal{C}) \neq X$. Sei nun $x \in X \backslash (\bigcup(\mathcal{U} \cap \mathcal{C}))$. Da $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X ist, gibt es ein $U \in \mathcal{U}$, sodass $x \in U$. Da $\mathcal{C}$ eine Subbasis von $(X, \mathcal{T})$ ist, gibt es weiters $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$, sodass $x \in C_1 \cap \ldots \cap C_n \subseteq U$.

Wegen $x \notin \bigcup(\mathcal{U} \cap \mathcal{C})$ ist $C_i \notin \mathcal{U} \cap \mathcal{C}$, und daher $C_i \notin \mathcal{U}$. Aus der Maximalität von $\mathcal{U}$ folgt, dass es für $i = 1, \ldots, n$ endliche Teilmengen $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{U}$ gibt, sodass $C_i \cup \bigcup \mathcal{M}_i = X$. Es folgt der Widerspruch $U \cup \bigcup\{\bigcup \mathcal{M}_i : i = 1, \ldots, n\} = X$, und daher hat $\mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung. □

3.2 Kohärente topologische Räume

Die Definition von kohärenten topologischen Räumen ist bewusst so gewählt, dass sich sehr schnell eine Dualität zu kohärenten Verbänden ergibt (siehe Abschnitt 4.2). Zusammen mit der deutlich aufwendiger zu beweisenden Äquivalenz der Kategorien der kohärenten und distributiven Verbänden (siehe Abschnitt 4.1) ergibt sich schließlich die Dualität **KohTop** $\sim$ **DVerb**, welche in Anerkennung an M.H. Stone auch *Stone Duality* genannt wird. Historisch war dies die erste bedeutende Dualität zwischen Kategorien, welche entwickelt werden konnte.

Die kohärenten Esakia Spaces bilden eine Teilkategorie, welche dual zu Heyting Algebren ist, und die Kategorie der Stone Spaces bildet wiederum eine Teilkategorie, welche sich als dual zu der Kategorie der boolschen Algebren erweisen wird. Diese Dualität wird in der Literatur ebenfalls Stone Duality genannt.

Kohärente topologische Räume

Definition 3.6. Ein nüchterner topologischer Raum X heißt *kohärent,* falls $\Omega(X)$ kohärent ist. Sind X, Y kohärente Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Funktion, dann heißt f *kohärent,* falls $\Omega(f)$ kohärent ist. Wir bezeichnen die Kategorie der kohärenten Räume zusammen mit kohärenten stetigen Funktionen mit **KohTop**.

Lemma 3.7. *Seien X und Y nüchterne topologische Räume, $U \in \Omega(X)$ und $f : X \to Y$ eine stetige Funktion. Dann gilt:*[1]

$$\begin{aligned}
U \textit{ ist endlich.} &\iff U \textit{ ist kompakt.} \\
X \textit{ ist kohärent.} &\iff \begin{cases} X \textit{ ist kompakt.} \\ K\Omega(X) \textit{ ist unter endlicher Schnittbildung abgeschlossen.} \\ K\Omega(X) \textit{ bildet eine Basis von } \Omega(X). \end{cases} \\
f \textit{ ist kohärent.} &\iff \textit{Urbilder kompakter offener Mengen sind kompakt.}
\end{aligned}$$

Beweis. Folgt sofort aus der Definition. □

Definition 3.8. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ eines kohärenten topologischen Raumes heißt *kohärente Teilmenge,* falls Y, versehen mit der Spurtopologie, ein kohärenter Raum ist und $U \in K\Omega(X)$ impliziert $U \cap Y \in K\Omega(Y)$. Weiters heißt Y *doppelt kohärente Teilmenge,* falls Y und Y^c kohärent sind.

[1] Die Aussage „U ist endlich" bezieht sich auf U als Element des Verbandes $\Omega(X)$; ist also nicht im Sinne von endlicher Mächtigkeit gemeint.

Kohärente Esakia Spaces

Definition 3.9. Ein kohärenter topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *kohärenter Esakia Space*, falls für alle doppelt kohärenten Teilmengen $A \subseteq X$ auch $\overline{A}$ doppelt kohärent ist. Sind $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ zwei kohärente Esakia Spaces und $f : X \to Y$ stetig, so heißt f *kohärenter Esakia Homomorphismus*, falls für alle $x \in X$ gilt, dass $f(Sat(x)) = Sat(f(x))$. Wir bezeichnen die Kategorie der kohärenten Esakia Spaces zusammen mit kohärenten Esakia Homomorphismen mit **KohEsa**.

Stone Spaces

Definition 3.10. Ein kompakter topologischer Hausdorffraum heißt *Stone Space*, falls die kompakten offenen Mengen eine Basis für X bilden. Wir bezeichnen mit **Stone** die Kategorie der Stone Spaces mit stetigen Abbildungen.

Folgender Satz gibt verschiedene alternative Charakterisierungen von Stone Spaces.

Satz 3.11. *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist X genau dann ein Stone Space, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

1. *X ist Hausdorff und kohärent.*
2. *X ist kompakt, T_0 und nulldimensional.*
3. *X ist kompakt und total separiert.*
4. *X ist kompakt, Hausdorff und total unzusammenhängend.*

Beweis. "*Stone Space* $\Leftrightarrow$ 1." folgt sofort aus der Definition.

"1. $\Rightarrow$ 2." Kohärente Räume sind nüchtern und daher T_0. Außerdem sind sie per Definitionem kompakt und nulldimensional.

"2. $\Rightarrow$ 1." Sei X kompakt, T_0 und nulldimensional. Wegen Lemma 3.4 folgt, dass X Hausdorff ist. Außerdem sind die kompakten offenen Mengen genau die clopen Mengen. Diese sind unter endlicher Schnittbildung abgeschlossen. Also ist X kohärent.

"2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 4." Folgt sofort aus Lemma 3.4.

"4. $\Rightarrow$ 3." Für $x \in X$ sei $C(x)$ die Menge der Punkte, welche sich nicht durch eine clopen Menge von x trennen lassen, d.h.

$$C(x) := \{y \in X \;:\; \nexists A \in K\Omega(X) : \, y \in A, \, x \notin A\}$$

Dann ist $x \in C(x)$ und $C(x)$ ist abgeschlossen, denn nach Definition von $C(x)$ gibt es für $y \in X \backslash C(x)$ eine clopen Menge A mit $y \in A$ und $x \notin A$, und, wieder mit der Definition von $C(x)$, ist daher $A \cap C(x) = \varnothing$. Daher ist A eine offene Umgebung von y mit $A \subseteq X \backslash C(x)$.

Wir wollen zeigen, dass $C(x) = \{x\}$. Nehmen wir dazu an, dass $C(x)$ aus mehr als einem Punkt besteht. Da X total unzusammenhängend ist, ist dann $C(x)$ nicht zusammenhängend und es gibt abgeschlossene, disjunkte und nicht leere Teilmengen $A, B \subseteq C(x)$, sodass $A \cup B = C(x)$. Da $C(x)$ abgeschlossen in X ist, sind auch A und B abgeschlossen in X. Weil X kompakt und Hausdorff ist, ist X normal, daher gibt es ein offenes $U \subseteq X$, sodass $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq B^c$.

Nun gilt für den Rand $\partial U = \overline{U} \cap U^c$ von U, dass $\partial U \cap C(x) = \overline{U} \cap U^c \cap C(x) = \varnothing$, denn es gilt $U^c \cap A = \varnothing$ und $\overline{U} \cap B = \varnothing$. Also gibt es für jedes $y \in \partial U$ eine clopen Menge V_y, sodass $y \in V_y$ aber $x \notin V_y$. Dann ist $\{V_y \;:\; y \in \partial U\}$ eine offene Überdeckung von ∂U, und da ∂U kompakt ist gibt es endlich viele $y_1, \ldots, y_n \in \partial U$, sodass $\partial U \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{y_i} =: V$. Als endliche Vereinigung von clopen Mengen ist V clopen, und aus $x \notin V$ folgt $V \cap C(x) = \varnothing$. Jetzt ist $W := U \backslash V = \overline{U} \backslash V$ offen und abgeschlossen in X, und es ist $W \cap C(x) = A$. Nun folgt der Widerspruch: denn sowohl W also auch W^c sind clopen und haben beide nicht leeren Schnitt mit $C(x)$, müssten also beide x enthalten.

"3. $\Rightarrow$ 2." Nach Lemma 3.4 ist X Hausdorff und daher auch T_0. Um zu sehen, dass X nulldimensional ist, sei $U \subseteq X$ offen und $x \in U$. Wir müssen eine clopen Menge V finden, sodass $x \in V \subseteq U$. Da X total separiert ist, gibt es zu jedem $y \in U^c$ eine clopen Menge V_y mit $x \notin V_y$ und $y \in V_y$. Also ist $\{V_y : y \in U^c\}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge U^c und hat daher eine endliche Teilüberdeckung $V_{y_1}, \dots V_{y_n}$. Sei $V := \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}^c$. Dann ist $x \in V \subseteq U$, und V ist als endlicher Schnitt von clopen Mengen clopen. □

Es sind also Stone Spaces immer kohärente Räume. Sind X, Y Stone Spaces, $f : X \to Y$ stetig und $K \subseteq Y$ kompakt und offen, so ist $f^{-1}(K)$ ebenfalls kompakt. Daher sind alle stetigen Funktionen zwischen Stone Spaces kohärent. Insgesamt ist also **Stone** eine echte Teilkategorie von **KohTop.**

3.3 Geordnete topologische Räume

Geordnete topologische Räume bilden eine alternative Möglichkeit zur dualen Beschreibung von algebraischen Kategorien. Insbesondere die Priestley Duality zwischen distributiven Verbänden und Priestley Spaces ist oft angenehmer zu handhaben als die Stone Duality. Tatsächlich sind die Kategorien der Priestley Spaces und der kohärenten topologischen Räume eng miteinander verwandt und bilden sogar isomorphe Kategorien. Die Esakia Spaces schließlich werden sich, wie die kohärenten Esakia Spaces, als dual zu Heyting Algebren erweisen.

Definition 3.12. Ein *quasigeordneter (halbgeordneter) topologischer Raum* ist ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ zusammen mit einer Quasiordnung (Halbordnung) $\leqslant$ auf X. Für einen quasigeordneten topologischen Raum definieren wir die Mengen $\mathbf{up}\Omega(X)$, $\mathbf{up}\mathcal{A}(X)$, $\mathbf{up}\mathcal{K}(X)$ bzw. $\mathbf{up}\mathcal{C}(X)$ als die offenen, abgeschlossenen, kompakten, bzw. clopen Upsets von X. Analog bezeichne $\mathbf{down}\Omega(X)$, $\mathbf{down}\mathcal{A}(X)$, $\mathbf{down}\mathcal{K}(X)$ bzw. $\mathbf{down}\mathcal{C}(X)$ die offenen, abgeschlossenen, kompakten, bzw. clopen Downsets von X.

Priestley Spaces

Definition 3.13. Sei $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ ein quasigeordneter topologischer Raum. Dann heißt X *quasi Priestley Space,* falls X ein Stone Space ist, und für alle $x, y \in X$ mit $x \nleqslant y$ ein clopen Upset $A \in \mathbf{up}\mathcal{C}(X)$ existiert, sodass $x \in A$ und $y \notin A$.

X heißt *Priestley Space*, falls $\leqslant$ eine Halbordnung auf X ist.

Wir bezeichnen mit **QPries** (bzw. **Pries**) die Kategorie der quasi Priestley Spaces (bzw. Priestley Spaces) mit stetigen, ordnungserhaltenden Abbildungen.

Lemma 3.14. *Sei $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ ein quasi Priestley Space. Dann gilt:*

1. *Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen, so sind auch $\uparrow A$ und $\downarrow A$ abgeschlossen.*
2. *Jedes offene Upset (Downset) ist Vereinigung von clopen Upsets (Downsets).*
3. *Jedes abgeschlossene Upset (Downset) ist Schnitt von clopen Upsets (Downsets).*
4. *Ist $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ ein Priestley Space, dann bildet das System $\mathbf{up}\mathcal{C}(X) \cup \mathbf{down}\mathcal{C}(X)$ eine Subbasis der Topologie $\mathcal{T}$.*

Beweis. Für $y \nleqslant x$ sei $A_x^y \in \mathbf{up}\mathcal{C}(X)$ mit $y \in A_x^y$ und $x \notin A_x^y$

1. + 3. Wir zeigen, dass für abgeschlossenes A gilt $\uparrow A = \bigcap\{B \in \mathbf{up}\mathcal{C}(X) : A \subseteq B\} =: S$. Da für Upsets B aus $A \subseteq B$ folgt, dass auch$\uparrow A \subseteq B$, ist $\uparrow A \subseteq S$. Sei andererseits $x \in (\uparrow A)^c$. Dann gilt für alle $y \in A$, dass $y \nleqslant x$ und $y \in A_x^y$. Daher ist $\bigcup\{A_x^y : y \in A\}$ eine offene Überdeckung von A. Da A kompakt ist, gibt es endlich viele $y_1, \dots, y_n$ mit $A \subseteq \bigcup\{A_x^{y_i} : i = 1, \dots, n\} =: B_x \in \mathbf{up}\mathcal{C}(X)$. Wegen $x \notin B_x$ folgt $x \notin S$ und da $x \in (\uparrow A)^c$ beliebig war, folgt $\uparrow A = S$. Daher ist $\uparrow A$ der Schnitt von clopen Upsets und insbesondere abgeschlossen. Also folgt 1. (für $\uparrow A$) und 3. (für abgeschlossene Upsets). Der Beweis von 1. (für $\downarrow A$) bzw. 3. (für abgeschlossene Downsets) verläuft analog.

2. Wegen $\mathbf{up}\mathcal{A}(X) = \{U^c : U \in \mathbf{down}\Omega(X)\}$ und $\mathbf{down}\mathcal{A}(X) = \{U^c : U \in \mathbf{up}\Omega(X)\}$ folgt die Aussage über Komplementbildung.

4. Sei $U \in \Omega(X)$ eine offene Menge und $x \in U$. Da $\leqslant$ eine Halbordnung ist, ist für alle $y \in U^c$ die Menge

$$V_y := \begin{cases} (A_x^y)^c & \textit{falls } y \nleqslant x \\ A_y^x & \textit{falls } y \leqslant x \end{cases}$$

wohldefiniert, denn aus $y \leqslant x$ und $x \neq y$ folgt $x \nleqslant y$ und damit ist A_y^x definiert. Weiters gilt $V_y \in \mathbf{up}\mathcal{C}(X) \cup \mathbf{down}\mathcal{C}(X)$, sowie $x \in V_y$ und $y \notin V_y$. Also ist $\{V_y^c : y \in U^c\}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge U^c und daher gibt es $y_1, \ldots, y_n \in U^c$, sodass $\bigcup_{i=1}^n V_{y_i}^c \supseteq U^c$. Also ist $x \in \bigcap_{i=1}^n V_{y_i} =: V \subseteq U$, wobei V ein endlicher Schnitt von Mengen aus $\mathbf{up}\mathcal{C}(X) \cup \mathbf{down}\mathcal{C}(X)$ ist. Also bildet $\mathbf{up}\mathcal{C}(X) \cup \mathbf{down}\mathcal{C}(X)$ eine Subbasis der Topologie. □

Lemma 3.15. *Ist $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ ein halbgeordneter topologischer Raum, dann ist X genau dann ein Priestley Space, falls X kompakt ist und für alle $x, y \in X$ mit $x \nleqslant y$ ein clopen Upset $A \in \mathbf{up}\mathcal{C}(X)$ existiert, sodass $x \in A$ und $y \notin A$.*

Beweis. " $\Rightarrow$ " folgt sofort.

" $\Leftarrow$ " X ist nach Satz 3.11 genau dann ein Stone Space, falls X kompakt und total separiert ist. Ersteres ist erfüllt. Sei nun $x, y \in X$, $x \neq y$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x \nleqslant y$. Dann existiert ein clopen Upset A mit $x \in A$ und $y \notin A$. □

Folgender Satz gibt eine alternative Beschreibung für Priestley Spaces mittels einer auf den ersten Blick stärkeren Bedingung. Die Bedingung in dem Satz wird *Strong Priestley Separation Axiom* genannt.

Satz 3.16. *Sei $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ ein halbgeordneter topologischer Hausdorffraum. Dann ist X genau dann ein Priestley Space, falls X kompakt ist und für alle abgeschlossenen Mengen $A, B \subseteq X$ mit $\uparrow A \cap \downarrow B = \varnothing$ ein clopen Upset U existiert, sodass $A \subseteq U$ und $B \subseteq U^c$.*

Beweis. " $\Rightarrow$ " Da nach Lemma 3.14 die Mengen $\uparrow A$ und $\downarrow B$ abgeschlossen sind, sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A = \uparrow A$ ein Upset und $B = \downarrow B$ ein Downset. Es sei für $y \nleqslant x$ wieder $A_x^y \in \mathbf{up}\mathcal{C}(X)$ mit $y \in A_x^y$ und $x \notin A_x^y$. Sei nun $x \in B$. Dann ist $A \subseteq \bigcup\{A_x^y : y \in A\}$. Da A kompakt ist gibt es $y_1, \ldots, y_n \in A$, sodass $A \subseteq \bigcup\{A_x^{y_i} : i = 1, \ldots, n\} =: D_x$. Damit ist D_x ein clopen Upset. Nun gilt für alle $x \in B$, dass $x \notin D_x$, und daher $B \subseteq \bigcup\{(D_x)^c : x \in B\}$. Da B kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_m$, sodass $B \subseteq \bigcup\{(D_{x_i})^c : i = 1, \ldots, n\} = (\bigcap\{D_{x_i} : i = 1, \ldots, n\})^c$. Mit $U := \bigcap\{D_{x_i} : i = 1, \ldots, n\}$ folgt: U ist als endlicher Schnitt von clopen Upsets ein clopen Upset, und $A \subseteq U$ und $B \subseteq U^c$.

" $\Leftarrow$ " Sei $x, y \in X$ und $x \nleqslant y$. Mit $A = \{x\}$ und $B = \{y\}$ sind A und B abgeschlossen, und $\uparrow A \cap \downarrow B = \varnothing$. Also gibt es ein Upset U mit $x \in U$ und $y \in U^c$. □

Esakia Spaces

Definition 3.17. Ein (quasi) Priestley Space $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ heißt *(quasi) Esakia Space,* falls $A \in K\Omega(X)$ impliziert $\downarrow A \in K\Omega(X)$. Sind X und Y zwei quasi Esakia Spaces und $f : X \to Y$ eine Abbildung, so heißt f *Esakia Homomorphismus*, falls f stetig und stark isoton ist. Wir bezeichnen die Kategorie der Esakia Spaces (bzw. quasi Esakia Spaces) zusammen mit Esakia Homomorphismen mit **Esa** (bzw. **QEsa**).

Lemma 3.18. *Sei $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ ein quasigeordneter Stone Space. Dann ist X genau dann ein quasi Esakia Space, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Für alle $x \in X$ ist $\uparrow x$ abgeschlossen.*

2. *Für alle $U \in K\Omega(X)$ ist $\downarrow U \in K\Omega(X)$.*

Beweis. " $\Rightarrow$ " 1. folgt aus Lemma 3.14, 2. folgt aus der Definition.

" $\Leftarrow$ " Seien $x, y \in X$ und $x \nleqslant y$. Wir müssen zeigen, dass es ein clopen Upset $U \in \mathbf{up}\mathcal{C}(X)$ gibt, mit $x \in U$ und $y \notin U$. Es ist $\uparrow x$ abgeschlossen und $y \notin \uparrow x$. Da X normal ist gibt es eine offene Menge V, sodass $y \in V$ und $V \cap \uparrow x = \varnothing$. Da $K\Omega(X)$ eine Basis bildet, sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V \in K\Omega(X)$. Es folgt, dass auch $\downarrow V \in K\Omega(X)$ und $y \in \downarrow V$ sowie $\downarrow V \cap \uparrow x = \varnothing$. Also ist $U = (\downarrow V)^c$ die gewünschte Menge. □

3.4 Bitopologische Räume

Eine ganz anderer Ansatz Dualitäten zu gewinnen verwendet den Begriff der bitopologischen Räume.

Definition 3.19. Eine Tripel $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ heißt *bitopologischer Raum*, falls $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X sind. Sind $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ und $(Y, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ zwei bitopologische Räume und $f : X \to Y$, dann heißt f *bistetig*, falls $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{O}_1)$ und $f : (X, \mathcal{T}_2) \to (Y, \mathcal{O}_2)$ stetig sind.

Definition 3.20. Für einen bitopologischen Raum $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ bezeichne für $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$

- $\Omega_i(X) := \mathcal{T}_i$
- $\mathcal{A}_i(X)$ das System der bezüglich $\mathcal{T}_i$ abgeschlossenen Teilmengen von X.
- $\mathcal{K}_i(X)$ das System der bezüglich $\mathcal{T}_i$ kompakten Teilmengen von X.
- $\mathcal{C}_i(X)$ das System der bezüglich $\mathcal{T}_i$ clopen Teilmengen von X, d.h $\mathcal{C}_i(X) = \Omega_i(X) \cap \mathcal{A}_i(X)$.
- $\mathcal{D}_i(X)$ das System der bezüglich $\mathcal{T}_i$ offenen und bezüglich $\mathcal{T}_j$ abgeschlossenen Mengen, d.h $\mathcal{D}_i(X) = \Omega_i(X) \cap \mathcal{A}_j(X)$.
- $\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2$ die gröbste Topologie, welche $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ enthält.

Bitopologische Räume sind also definitionsgemäß lediglich zwei Topologien auf der selben Grundmenge. Interessant wird diese Begriffsbildung erst durch die Verallgemeinerung von topologischen Begriffen, wie den Trennungsaxiomen, Kompaktheit, ect., auf bitopologische Räume. Hier sind in sämtlichen Fällen unterschiedliche Möglichkeiten denkbar. Zwei einfache Möglichkeiten Begriffe der Topologie zu verallgemeinern sind folgendermaßen gegeben:

Definition 3.21. Ist E eine topologische Eigenschaft, so heißt der Raum $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ $bi - E$, falls $(X, \mathcal{T}_1)$ und $(X, \mathcal{T}_2)$ beide E sind, und $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ heißt $join - E$, falls $(X, \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2)$ E ist.

Für unsere Zwecke stellt sich in den meisten Fällen keine dieser Möglichkeiten als sinnvoll heraus, wohl aber der Begriff *paarweise* E zu sein:

Definition 3.22. Sei $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ ein bitoplogischer Raum.

- Der Raum $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ heißt *paarweise* T_0, falls für alle $x, y \in X$ ein $U \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ existiert mit $x \in U$ und $y \notin U$, oder $x \notin U$ und $y \in U$.
- Der Raum $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ heißt *paarweise* T_1, falls für alle $x, y \in X$ ein $U \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ existiert mit $x \in U$ und $y \notin U$.
- Der Raum $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ heißt *paarweise* T_2 (oder *paarweise Hausdorff*), falls für alle $x, y \in X$ Mengen $U, V \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ existieren mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \varnothing$.
- Der Raum $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ heißt *paarweise nulldimensional,* falls $\mathcal{D}_1(X) = \mathcal{T}_1 \cap A_2(X)$ eine Basis für $\mathcal{T}_1$ bildet, und $\mathcal{D}_2(X) = \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_1(X)$ eine Basis für $\mathcal{T}_2$ bildet.
- Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *paarweise kompakt*, falls für alle Überdeckungen $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ eine endliche Teilüberdeckung existiert.
- Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *paarweise clopen*, falls A und A^c beide paarweise kompakt sind.

Lemma 3.23. *Für einen bitopologischen Raum* $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ *gilt:* $\mathcal{D}_1(X) = \{U^c : U \in \mathcal{D}_2(X)\}$.

Beweis. Folgt unmittelbar aus der Definition. $\square$

Lemma 3.24. *Sei* $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ *paarweise nulldimensional. Dann sind äquivalent:*

1. $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ ist paarweise Hausdorff.
2. $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ ist join-Hausdorff.
3. $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ ist bi-T_0.
4. $(X, \mathcal{T}_1)$ ist T_0
5. $(X, \mathcal{T}_2)$ ist T_0
6. Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existieren disjunkte Mengen $U \in \mathcal{T}_1$ und $V \in \mathcal{T}_2$, sodass $x \in U$ und $y \in V$, oder $x \in V$ und $y \in U$.

Beweis. Sei $\mathcal{O} := \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2$

"1. $\Rightarrow$ 2." ist offensichtlich.

"2. $\Rightarrow$ 3." Seien x, $y \in X$ mit $x \neq y$. Da $(X, \mathcal{O})$ Hausdorff ist, existieren Mengen $U, V \in \mathcal{O}$, sodass $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \varnothing$. Da $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ paarweise nulldimensional ist, ist $\mathcal{D}_1(X)$ eine Basis für $(X, \mathcal{T}_1)$ und $\mathcal{D}_2(X)$ eine Basis für $(X, \mathcal{T}_2)$. Nach Definition von $\mathcal{O}$ ist daher das System $\mathcal{D}_1(X) \cup \mathcal{D}_2(X)$ eine Subbasis für $\mathcal{O}$ und daher $\{M \cap N \,:\, M \in \mathcal{D}_1(X),\, N \in \mathcal{D}_2(X)\}$ eine Basis für $\mathcal{O}$. Also existieren U_1, $V_1 \in \mathcal{D}_1(X)$ und U_2, $V_2 \in \mathcal{D}_2(X)$ sodass $x \in U_1 \cap U_2 \subseteq U$ und $y \in V_1 \cap V_2 \subseteq V$. Wir zeigen, dass $(X, \mathcal{T}_1)$ ein T_0-Raum ist: Falls $y \notin U_1$, so ist $U_1 \in \mathcal{T}_1$ eine offene Menge, die x und y trennt. Falls $y \in U_1$ folgt $y \notin U_2$ und daher $y \in U_1 \cap U_2^c \in \mathcal{D}_1(X) \subseteq \mathcal{T}_1$. Wegen $x \in U_2$ ist weiters $x \notin U_1 \cap U_2^c$. Insgesamt erfüllt also $(X, \mathcal{T}_1)$ das T_0 Axiom. Den Raum $(X, \mathcal{T}_2)$ behandelt man genauso.

"3. $\Rightarrow$ 4." ist offensichtlich.

"3. $\Rightarrow$ 5." ist offensichtlich.

"4. $\Rightarrow$ 6." Seien $x \neq y \in X$ und $U \in \mathcal{T}_1$ mit $x \in U$ und $y \notin U$. Da $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ paarweise nulldimensional ist, existiert $V \in D_1(X)$ mit $x \in V \subseteq U$. Es folgt V und V^c sind disjunkt, $V \in \mathcal{T}_1$ und $V^c \in \mathcal{T}_2$, sowie $x \in V$ und $y \in V^c$.

"5. $\Rightarrow$ 6." Beweis verläuft analog.

"6. $\Rightarrow$ 1." ist offensichtlich. $\square$

Es ist eine direkte Konsequenz von Alexander's Subbasis Lemma, dass $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ genau dann paarweise kompakt ist, falls $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ join-kompakt ist. Offensichtlich folgt dann auch, dass $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ bi-kompakt ist, wobei hier nicht die Umkehrung gilt. Der nächste Satz gibt eine oft hilfreiche Charakterisierung von paarweise kompakten Räumen:

Satz 3.25. *Ein bitopologischer Raum $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ ist genau dann paarweise kompakt, falls $\mathcal{A}_1(X) \subseteq \mathcal{K}_2(X)$ und $\mathcal{A}_2(X) \subseteq \mathcal{K}_1(X)$.*

Beweis. " $\Rightarrow$ " Wir zeigen $\mathcal{A}_1(X) \subseteq \mathcal{K}_2(X)$. Sei $A \in \mathcal{A}_1(X)$ und $\{U_i \,:\, i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_2$ eine bezüglich $\mathcal{T}_2$ offene Überdeckung von A. Wegen $A^c \in \mathcal{T}_1$ ist nun $A^c \cup \bigcup\{U_i \,:\, i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ eine Überdeckung von X. Da $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ paarweise kompakt ist, existieren endlich viele $i_1, \ldots, i_n \in I$ sodass $A^c \cup \bigcup\{U_{i_j} \,:\, j = 1, \ldots, n\} = X$ und damit $\bigcup\{U_{i_j} \,:\, j = 1, \ldots, n\} \supseteq A$. Also existiert eine endliche Teilüberdeckung, d.h. A ist kompakt bezüglich $\mathcal{T}_2$ und damit $\mathcal{A}_1(X) \subseteq \mathcal{K}_2(X)$. Dass $\mathcal{A}_2(X) \subseteq \mathcal{K}_1(X)$ ist, sieht man genauso.

" $\Leftarrow$ " Sei $\{U_i \,:\, i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_1$ und $\{V_j \,:\, j \in J\} \subseteq \mathcal{T}_2$ mit $U := \bigcup\{U_i \,:\, i \in I\}$ und $V := \bigcup\{V_j \,:\, j \in J\}$, und sodass $U \cup V = X$. Um zu zeigen, dass X paarweise kompakt ist, müssen wir eine endliche Teilüberdeckung konstruieren. Da $U \in \mathcal{T}_1$ folgt $U^c \in \mathcal{A}_1(X) \subseteq \mathcal{K}_2(X)$, also ist U^c kompakt bezüglich $\mathcal{T}_2$. Weiters ist $V = \bigcup\{V_j \,:\, j \in J\} \supseteq U^c$ eine bezüglich $\mathcal{T}_2$ offene Überdeckung. Also existieren $j_1, \ldots, j_n \in J$ sodass $\hat{V} := \bigcup\{V_{j_k} \,:\, k = 1, \ldots, n\} \supseteq U^c$. Also ist $\hat{V}^c \subseteq U$ und damit $\{U_i \,:\, i \in I\}$ eine bezüglich $\mathcal{T}_1$ offene Überdeckung von $\hat{V}$. Da wegen $\hat{V}^c \in \mathcal{A}_2(X) \subseteq \mathcal{K}_1(X)$ die Menge $\hat{V}$ kompakt ist bezüglich $\mathcal{T}_1$ existieren endlich viele $i_1, \ldots, i_m \in I$, sodass $\hat{V}^c \subseteq \{U_{j_k} \,:\, k = 1, \ldots, m\} =: \hat{U}$. Wir erhalten daher wegen $\hat{V} \cup \hat{U} = X$ eine endliche Teilüberdeckung. $\square$

Pairwise Stone Spaces

Definition 3.26. Der Raum $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ heißt *pairwise Stone Space,* falls er paarweise Hausdorff, paarweise nulldimensional und paarweise kompakt ist. **PStone** sei die Kategorie der pairwise Stone Spaces, zusammen mit bistetigen Abbildungen als Morphismen.

Pairwise Esakia Spaces

Definition 3.27. Ein pairwise Stone Space $(X, \mathcal{T}, \mathcal{O})$ heißt *pairwise Esakia Space* falls für alle paarweise clopen Mengen A auch $\overline{A}^{\mathcal{T}}$ paarweise clopen ist. Sind $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ und $(Y, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ zwei pairwise Esakia Spaces und $f : X \to Y$, dann heißt f pairwise Esakia Homomorphismus, falls f bistetig ist und für alle $x \in X$ gilt, dass $f(\overline{\{x\}}^{\mathcal{T}_2}) = \overline{\{f(x)\}}^{\mathcal{O}_2}$. Wie bezeichnen die Kategorie der pairwise Esakia Spaces mit pairwise Esakia Homomorphismen mit **PEsa**.

4 Distributive Verbände

4.1 Distributive und kohärente Verbände

Als Vorbereitung auf den Beweis der Dualitäten von distributiven Verbänden und verschiedenen topologischen Kategorien, wird in diesem Abschnitt die Äquivalenz der Kategorie **DVerb** der distributiven Verbände und der Kategorie **KohVerb** der kohärenten Verbände hergeleitet.

Wir beginnen mit der Konstruktion eines Funktors K : **KohVerb** → **DVerb**:

Definition 4.1. Für einen kohärenten Verband A bezeichne weiterhin $K(A)$ den distributiven Verband der endlichen Elemente. Ist B ein weiterer kohärenter Verband und $f : A \to B$ ein kohärenter Verbandshomomorphismus, so sei $K(f) := f|_{K(A)} : K(A) \to K(B)$.

Korollar 4.2. K : **KohVerb** → **DVerb** *ist ein Funktor.*

Beweis. Definitionsgemäß bildet K kohärente Verbände auf distributive Verbände ab. Weiters erhält für alle kohärenten Verbandshomomorphismen $f : A \to B$ die Einschränkung $f|_{K(A)}$ offensichtlich ebenfalls Suprema und Infima, und nach Definition gilt $f|_{K(A)} : K(A) \to K(B)$. Also ist $K(f)$ ein Verbandshomomorphismus. Man sieht nun, dass K ein Funktor ist. □

Die nächsten beiden Lemmata zeigen für distributive Verbände A die Beziehung zwischen A und $K(Idl(A))$, und für kohärente Verbände B die Beziehung zwischen B und $Idl(K(B))$.

Lemma 4.3. *Sei A ein distributiver Verband. Dann ist die Abbildung $\downarrow(.) : A \to K(Idl(A))$ ein Verbandsisomorphismus. Insbesondere ist $K(Idl(A))$ ein distributiver Verband und die endlichen Elemente von $Idl(A)$ sind genau die Hauptideale von A.*

Beweis. Wir zeigen als Erstes, dass die endlichen Elemente von $Idl(A)$ genau die Hauptideale von A sind.

" ⇒ " Sei $I \in Idl(A)$ endlich. Es ist $I = \bigvee\{\downarrow x \ : \ x \in I\}$ und daher existieren endlich viele $x_1, \dots, x_n \in I$ sodass $I = \bigvee_{i=1}^n \downarrow x_i = \downarrow (\bigvee_{i=1}^n x_i)$. Also ist I ein Hauptideal.

" ⇐ " Sei umgekehrt $a \in A$ und $S \subseteq Idl(A)$ mit $\bigvee S \supseteq \downarrow a$. Dann folgt

$$\begin{aligned} a \in \bigvee S &\implies \exists y_i \in J_i,\ J_i \in S,\ i = 1, \dots, n,\ sodass\ a \leqslant \bigvee_{i=1}^n y_i \\ &\implies a \in \bigvee_{i=1}^n J_i \\ &\implies \downarrow a \subseteq \bigvee_{i=1}^n J_i \end{aligned}$$

Also ist $\downarrow a$ endlich.

Nach dem eben gezeigten ist nun $\big\downarrow(.) : A \to K(Idl(A))$ eine Bijektion und offensichtlich gilt $x \leqslant y \iff \downarrow x \subseteq \downarrow y$. Also ist $\big\downarrow(.)$ stark isoton, und daher ein Verbandsisomorphismus. Insbesondere ist $K(Idl(A))$ ein distributiver Verband. □

Lemma 4.4. *Sei B ein kohärenter Verband. Dann ist die Abbildung $\Gamma_B : B \to Idl(K(B))$, $\Gamma_B(x) = \{k \in K(B) : k \leqslant x\}$ ein kohärenter Verbandsisomorphismus.*

Beweis. Für alle $x \in B$ die Menge $\Gamma_B(x)$ tatsächlich ein Ideal auf $K(B)$. Um zu sehen, dass Γ_B bijektiv ist, zeigen wir zuerst $I = \Gamma_B(\bigvee I)$ für alle $I \in Idl(K(A))$. Sei $k \in K(A)$, $k \leqslant \bigvee I$. Da k endlich ist, folgt $\exists x_1, ..., x_n \in I : k \leqslant \bigvee_{i=1}^n x_i$ und damit $k \in I$. Sei umgekehrt $k \in I$. Dann folgt sofort $k \leqslant \bigvee I$. Also ist $I = \Gamma_B(\bigvee I)$. Daraus folgt unmittelbar die Surjektivität. Die Injektivität folgt über $a = \bigvee \downarrow a = \bigvee \Gamma_B(\bigvee \downarrow a) = \bigvee \Gamma_B(a)$. Also gilt für $a \neq b$, dass $\bigvee \Gamma_B(a) \neq \bigvee \Gamma_B(b)$ und daher auch $\Gamma_B(a) \neq \Gamma_B(b)$. Damit haben wir die Bijektivität von Γ_B gezeigt. Wegen $x \leqslant y \iff \Gamma_B(x) \subseteq \Gamma_B(y)$ ist Γ_B stark isoton und folglich ein kohärenter Verbandsisomorphismus. □

Wir konstruieren nun den Funktor Idl : **DVerb** → **KohVerb**. Die nächsten beiden Sätze liefern nun die entscheidenen Aussagen zur Konstruktion des Funktors. Der folgende Satz bildet die Grundlage für die Arbeitsweise auf den Objekten, der darauf folgende Satz die Grundlage für die Arbeitsweise auf den Morphismen.

Proposition 4.5. *Sei A ein distributiver Verband. Dann ist $(Idl(A), \subseteq)$ ein kohärenter Verband.*

Beweis. Es wurde bereits gezeigt, dass $Idl(A)$ ein Verband ist. Weiters besitzt $Idl(A)$ beliebige Suprema. Wir zeigen nun die unendliche Distributivität von $Idl(A)$. Dazu sei $\mathcal{U}(A) := \{B \subseteq A : x \in B, y \leqslant x \implies y \in B\}$. Dann ist $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{P}(A)$[2] ein vollständiger Teilverband. Wir zeigen als nächstes, dass $\mathfrak{I}|_{\mathcal{U}(A)} : \mathcal{U}(A) \to Idl(A)$ beliebige Suprema und endliche Infima erhält.

Um zu sehen, dass $\mathfrak{I}$ beliebige Suprema erhält, sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}(A)$. Dann ist $\mathfrak{I}(\bigcup \mathcal{M}) = \bigcap\{I \in Idl(A) : \bigcup \mathcal{M} \subseteq I\}$. Nun gilt für alle $B \in \mathcal{M}$ offenbar $\mathfrak{I}(B) \subseteq \mathfrak{I}(\bigcup \mathcal{M})$, also folgt auch $\bigvee\{\mathfrak{I}(B) : B \in \mathcal{M}\} \subseteq \mathfrak{I}(\bigcup \mathcal{M})$. Auf der anderen Seite ist $\bigvee\{\mathfrak{I}(B) : B \in \mathcal{M}\}$ ein Ideal mit $\bigcup \mathcal{M} \subseteq \bigvee\{\mathfrak{I}(B) : B \in \mathcal{M}\}$. Also folgt auch $\mathfrak{I}(\bigcup \mathcal{M}) \subseteq \bigvee\{\mathfrak{I}(B) : B \in \mathcal{M}\}$ und damit $\mathfrak{I}(\bigcup \mathcal{M}) = \bigvee\{\mathfrak{I}(B) : B \in \mathcal{M}\} = \bigvee \mathfrak{I}(\mathcal{M})$.

Um zu sehen, dass $\mathfrak{I}$ endliche Infima erhält seien $B, C \in \mathcal{U}(A)$ und $I := \mathfrak{I}(B \cap C)$. Es ist $B \cap C \subseteq \mathfrak{I}(B) \cap \mathfrak{I}(C)$, und $\mathfrak{I}(B) \cap \mathfrak{I}(C)$ ist ein Ideal. Da I das kleinste Ideal ist, dass $B \cap C$ enthält, folgt $I \subseteq \mathfrak{I}(B) \cap \mathfrak{I}(C)$.

Sei nun
$$J := \{a \in A : \forall b \in B \implies a \wedge b \in I\}$$
Da für alle $c \in C$ und $b \in B$ gilt, dass $b \wedge c \leqslant b \in B$ und $b \wedge c \leqslant c \in C$, folgt auch $b \wedge c \in B \cap C$. Also ist $C \subseteq J$. Als nächstes zeigen wir, dass J ein Ideal ist. Sind $a, b \in J$ so gilt für alle $s \in B$, dass $s \wedge a \in I$ und $s \wedge b \in I$. Also folgt auch $(s \wedge a) \vee (s \wedge b) = s \wedge (a \vee b) \in I$ für alle $s \in B$ und daher $a \vee b \in J$. Ist $a \in J$ und $b \leqslant a$ so folgt für alle $s \in B$, dass $s \wedge b \leqslant s \wedge a \in I$ und damit $s \wedge b \in I$, also $b \in J$. Da offenbar auch $0 \in J$ ist, ist J ein Ideal.

Sei weiters
$$K := \{a \in A : \forall t \in J : a \wedge t \in I\}$$

Es folgt analog zu oben, dass $B \subseteq K$ und dass K ein Ideal ist. Nun gilt nach Definition von K für $d \in J \cap K$, dass $d = d \wedge d \in I$, also ist $J \cap K \subseteq I$. Außerdem impliziert $B \cap C \subseteq J \cap K$, dass auch $\mathfrak{I}(B) \cap \mathfrak{I}(C) \subseteq J \cap K$, da $J \cap K$ ein Ideal ist. Damit folgt $\mathfrak{I}(B) \cap \mathfrak{I}(C) \subseteq J \cap K \subseteq I = \mathfrak{I}(B \cap C)$ und daher insgesamt $\mathfrak{I}(B) \cap \mathfrak{I}(C) = \mathfrak{I}(B \cap C)$.

[2] $\mathbb{P}(A)$ bezeichnet wieder die Potenzmenge von A

Um die unendliche Distributivität zu sehen, sei $S \subseteq Idl(A)$ und $I \in Idl(A)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} I \cap \bigvee S &= I \cap \mathfrak{I}(\bigcup S) \\ &= \mathfrak{I}(I \cap \bigcup S) \\ &= \mathfrak{I}(\bigcup_{J \in S}(J \cap I)) \\ &= \bigvee_{J \in S} \mathfrak{I}(J \cap I) \\ &= \bigvee_{J \in S}(J \cap I) \end{aligned}$$

Also ist $Idl(A)$ ein vollständiger Verband. Weiters wurde schon oben gezeigt, dass $K(Idl(A))$ ein Teilverband von $Idl(A)$ ist. Außerdem gilt für $I \in Idl(A)$, dass $I = \bigvee\{\downarrow x : x \in I\}$ und damit lässt sich I als Supremum von einer Menge endlicher Elemente schreiben. Insgesamt ist also $Idl(A)$ ein kohärenter Verband. $\square$

Proposition 4.6. *Seien A, B kohärente Verbände und $f : K(A) \to K(B)$ ein Verbandshomomorphismus. Dann gibt es genau einen vollständigen Verbandshomomorphismus $g : A \to B$, sodass $f = g|_{K(A)}$. Dieser ist automatisch kohärent und gegeben durch*

$$g(x) = \bigvee\{f(a) : a \in K(A),\, a \leqslant x\}$$

für alle $x \in A$.

Beweis. Mit $C := K(A)$ und $D := K(B)$ sind C und D distributive Verbände und es gilt $A \cong Idl(C)$ und $B \cong Idl(D)$. Es reicht daher die Aussage für $Idl(C)$ und $Idl(D)$ zu beweisen. Sei also $f : K(Idl(C)) \to K(Idl(D))$ ein Verbandshomomorphismus und $g(I) = \bigvee\{f(J) : J \in K(Idl(C)),\, J \subseteq I\} = \bigvee\{f(\downarrow x) : x \in I\}$.

Wir zeigen als Erstes, dass $g(I) = \bigcup\{f(\downarrow x) : x \in I\}$. Dazu reicht es zu zeigen, dass $\bigcup\{f(\downarrow x) : x \in I\}$ ein Ideal ist. Es ist $0 \in f(\downarrow 0) \subseteq \bigcup\{f(\downarrow x) : x \in I\}$. Ist $a \in \bigcup\{f(\downarrow x) : x \in I\}$ und $b \leqslant a$ so gibt es $x \in I$ mit $a \in f(\downarrow x)$. Da $f(\downarrow x)$ ein Ideal ist, folgt $b \in f(\downarrow x)$ und damit $b \in \bigcup\{f(\downarrow x) : x \in I\}$. Sind $a, b \in \bigcup\{f(\downarrow x) : x \in I\}$, so gibt es $x, y \in I$ mit $a \in f(\downarrow x)$ und $b \in f(\downarrow y)$. Dann ist $a \vee b = f(\downarrow x) \vee f(\downarrow y) = f(\downarrow x \vee \downarrow y) = f(\big\downarrow(x \vee y)) \in \bigcup\{f(\downarrow x) : x \in I\}$.

Als nächstes zeigen wir $g|_{K(Idl(C))} = f$. Es gilt für $x, y \in C$, dass $x \leqslant y$ genau dann, wenn $\downarrow x \subseteq \downarrow y$. Also folgt aus $x \leqslant y$, dass $f(\downarrow x) \subseteq f(\downarrow y)$, und damit $g(\downarrow y) = \bigcup\{f(\downarrow x) : x \leqslant y\} \subseteq f(\downarrow y)$. Außerdem gilt wegen $y \in \downarrow y$ offensichtlich auch $\bigcup\{f(\downarrow x) : x \leqslant y\} \supseteq f(\downarrow y)$, und damit insgesamt $f(\downarrow y) = g(\downarrow y)$

Um zu sehen, dass g beliebige Suprema erhält, sei $S \subseteq Idl(C)$. Wir müssen zeigen, dass

$$\begin{aligned} \bigvee g(S) &= g(\bigvee S) \\ \iff \bigvee_{I \in S} \bigcup_{x \in I} f(\downarrow x) &= \bigcup_{x \in \bigvee S} f(\downarrow x) \end{aligned}$$

" $\subseteq$ " Da $I \in S$ impliziert $I \subseteq \bigvee S$, folgt für alle $I \in S$

$$\bigcup_{x \in I} f(\downarrow x) \subseteq \bigcup_{x \in \bigvee S} f(\downarrow x)$$

Da die rechte Seite der Relation ein Ideal ist, folgt damit auch:

$$\bigvee_{I \in S} \bigcup_{x \in I} f(\downarrow x) \subseteq \bigcup_{x \in \bigvee S} f(\downarrow x)$$

" $\supseteq$ " Sei $y \in \bigvee S$. Dann gibt es $x_i \in I_i$, $I_i \in S$, $i = 1, \ldots, n$ sodass $y \leqslant \bigvee_{i=1}^{n} x_i =: x$ und $f(\downarrow y) \subseteq f(\downarrow x)$.

Daher bleibt noch zu zeigen, dass $f(\downarrow x) \subseteq \bigvee_{I\in S} \bigcup_{z\in I} f(\downarrow z)$.

$$\begin{aligned}
f(\downarrow x) &= f(\downarrow (x_1 \vee ... \vee x_n)) \\
&= f((\downarrow x_1) \vee ... \vee (\downarrow x_n)) \\
&= f(\downarrow x_1) \vee ... \vee f(\downarrow x_n) \\
&\subseteq \bigcup_{z\in I_1} f(\downarrow z) \vee ... \vee \bigcup_{z\in I_n} f(\downarrow z) \\
&\subseteq \bigvee_{I\in S} \bigcup_{z\in I} f(\downarrow z)
\end{aligned}$$

Um zu sehen, dass g endliche Infima erhält seien $I, J \in Idl(C)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
g(I) \wedge g(J) &= (\bigvee_{x\in I} f(\downarrow x)) \wedge (\bigvee_{y\in J} f(\downarrow y)) \\
&= \bigvee_{x\in I,\, y\in J} (f(\downarrow x) \wedge f(\downarrow y)) \\
&= \bigvee_{x\in I,\, y\in J} f((\downarrow x) \wedge (\downarrow y)) \\
&= \bigvee_{x\in I\cap J} f(\downarrow x) \\
&= g(I \cap J)
\end{aligned}$$

Also ist g ein vollständiger Verbandshomomorphismus. Schließlich folgt die Kohärenz von g sofort aus $g(K(Idl(C))) = f(K(Idl(C))) \subseteq K(Idl(D))$.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, seien g, $h : Idl(C) \to Idl(D)$ mit den im Satz beschriebenen Eigenschaften und sei $I \in Idl(C)$.

$$g(I) = g(\bigvee_{x\in I} \downarrow x) = \bigvee_{x\in I} g(\downarrow x) = \bigvee_{x\in I} h(\downarrow x) = h(I)$$

□

Sind A und B distributive Verbände und $f : A \to B$ ein Verbandshomomorphismus, so haben wir bereits gesehen, dass $\downarrow (.) : A \to K(Idl(A))$ ein Verbandsisomorphismus ist. Also ist $\downarrow (.) \circ f \circ \downarrow (.)^{-1} : K(Idl(A)) \to K(Idl(B))$ ebenfalls ein Verbandshomomorphismus. Daher macht folgende Definition Sinn:

Definition 4.7. Für einen distributiven Verband A sei $Idl(A)$ wie gehabt der kohärente Verband der Ideale von A. Ist B ein weiterer distributiver Verband und $f : A \to B$ ein Verbandshomomorphismus, dann sei $Idl(f)$ die eindeutige Fortsetzung von $\tilde{f} = \downarrow (.) \circ f \circ \downarrow (.)^{-1} : K(Idl(A)) \to K(Idl(B))$ zu einem vollständigen Verbandshomomorphismus von $Idl(A)$ nach $Idl(B)$.

Damit haben wir insgesamt folgenden Satz hergleitet:

Satz 4.8. K : **KohVerb** $\to$ **DVerb** *und* Idl : **DVerb** $\to$ **KohVerb** *sind Funktoren. Sie begründen die Äquivalenz* **KohVerb≡DVerb**. *Weiters gilt:*

1. *Für jeden distributiven Verband A ist $\downarrow (.) : A \to K(Idl(A))$, $x \mapsto \downarrow x$ ein Verbandsisomorphismus. Er hat die bei einer Äquivalenz geforderte Kommutativitätseigenschaft $\downarrow (.) \circ f = K(Idl(f)) \circ \downarrow (.)$ für alle Verbandshomomorphismen $f : A \to B$.*

2. *Für jeden kohärenten Verband B ist $\Gamma_B : B \to Idl(K(B))$, $\Gamma_B(x) = \{k \in K(B) : k \leqslant x\}$ ein kohärenter Verbandsisomorphismus. Er hat die bei einer Äquivalenz geforderte Kommutativitätseigenschaft $\Gamma_C \circ g = Idl(K(g)) \circ \Gamma_B$ für alle kohärenten Verbandshomomorphismen $g : B \to C$.*

Beweis. Man überprüft leicht, dass K und Idl Funktoren sind.

Weiters haben wir bereits gezeigt, dass $\downarrow(.)$ ein Verbandsisomorphismus ist. Außerdem gilt nach Konstruktion $\downarrow(.)\circ f = K(Idl(f))\circ\downarrow(.)$. Die Kommutativitätseigenschaft von Γ_B folgt aus $K(\Gamma_B)(b) = \Gamma_B(b) = \{k \in K(B) : k \leqslant b\} = \downarrow_{K(B)} b$ für alle $b \in K(B)$, und daher $K(\Gamma_B) = \downarrow_{K(B)}(.)$ zusammen mit Lemma A.8.

Es bleibt die Bijektivität der Funktoren auf den Morphismen zu zeigen. Die Injektivität von Idl folgt sofort. Für die Surjektivität sei $f : Idl(A) \to Idl(B)$ ein kohärenter Homomorphismus. Es ist dann $g = \downarrow_B(.)^{-1}\circ f\circ\downarrow_A(.) : A \to B$ ein Verbandshomomorphismus und es gilt $Idl(g) = f$.

Bijektivität von K auf den Morphismen folgt sofort aus der Existenz- bzw. Eindeutigkeitsaussage von Satz 4.6. □

4.2 Distributive Verbände und kohärente Räume *(Stone Duality II)*

Um die Dualität **DVerb** $\sim$ **KohTop** zu zeigen, werden wir die Dualität **KohVerb** $\sim$ **KohTop** herleiten. Zusammen mit der Äquivalenz **DVerb≡KohVerb** folgt dann die gewünschte Dualität.

Sei B ein distributiver Verband. Nach dem vorhergehenden Abschnitt bildet dann $Idl(B)$ einen kohärenten Verband. Damit haben wir für $I \in Idl(B)$ zwei namentlich verwandte Begriffsbildungen, zum Einen die Primelemente des Verbands $Idl(B)$, zum Anderen die Primideale des Verbandes B. Glücklicherweise für unsere Notation haben wir aber:

Lemma 4.9. *Sei B ein distributiver Verband. Dann sind die Primelemente von $Idl(B)$ genau die Primideale von B.*

Beweis. Sei $I \in Idl(B)$. Dann gilt:

$$I \text{ } ist \text{ } Primelement \iff \begin{cases} I \neq B \quad\quad \text{und} \\ J \cap K \subseteq I \implies J \subseteq I \text{ } oder \text{ } K \subseteq I \end{cases}$$

$$I \text{ } ist \text{ } Primideal \iff \begin{cases} 1 \notin I \quad\quad \text{und} \\ b \wedge c \in I \implies b \in I \text{ } oder \text{ } c \in I \end{cases}$$

Offensichtlich ist $I \neq B$ genau dann, wenn $1 \notin I$.

" $\Rightarrow$ " Sei $I \in Idl(B)$ ein Primelement und seien weiters $b, c \in B$ mit $b \wedge c \in I \iff \downarrow b \cap \downarrow c \subseteq I$. Dann folgt $\downarrow b \subseteq I$ oder $\downarrow c \subseteq I$, und damit $b \in I$ oder $c \in I$. Also ist I auch ein Primideal.

" $\Leftarrow$ " Sei umgekehrt I ein Primideal und seien $J, K \in Idl(B)$ mit $J \cap K \subseteq I$ und $J \nsubseteq I$. Sei weiters $b \in J\backslash I$. Dann folgt für $c \in K$, dass $b \wedge c \in J \cap K \in I$, und damit auch $c \in I$. Also ist $K \subseteq I$ und daher I ein Primelement. □

Eine wichtige Konsequenz ist nun folgender Satz.

Proposition 4.10. *Jeder kohärente Verband ist regulär.*

Beweis. Sei B ein distributiver Verband und $A = Idl(B)$ ein kohärenter Verband. Seien weiters $I, J \in A$ mit $I \nsubseteq J$ und $b \in I\backslash J$. Anwendung von Lemma 2.9 auf den Filter $F := \uparrow b$ und das Ideal J impliziert die Existenz eines maximalen Ideals $K \in A$, sodass $K \cap F = \varnothing$ und $J \subseteq K$. Wegen Lemma 2.10 ist K ein Primideal und daher wegen Lemma 4.9 ein Primelement von A, und weiters $\downarrow K \subseteq A$ ein primes Hauptideal von A. Also gibt es einen Punkt p auf A mit $ker(p) = \downarrow K$. Es folgt $p(I) = 1 \neq 0 = p(J)$. □

Satz 4.11. *Die Funktoren Ω und pt, eingeschränkt auf die entsprechenden Teilkategorien, begründen eine Dualität zwischen der Kategorie* **KohVerb** *der kohärenten Verbänden mit kohärenten Homomorphismen zwischen ihnen und der Kategorie* **KohTop** *der kohärenten topologischen Räume mit kohärenten stetigen Funktionen zwischen ihnen.*

Beweis. Definitionsgemäß ist **KohTop** eine Teilkategorie von **NTop** und der obige Satz zeigt, dass **KohVerb** eine Teilkategorie von **RVerb** ist. Weiters bildet Ω definitionsgemäß genau die kohärente Räume auf kohärente Verbände ab und genau die kohärenten stetigen Funktionen auf kohärente Verbandshomomorphismen. Also sind Ω und pt Cofunktoren zwischen **KohVerb** und **KohTop**. Die Dualität folgt jetzt sofort über Einschränkung der Dualität **NTop** $\sim$ **RVerb**. □

Wenn wir die bis jetzt hergeleiteten Ergebnisse zusammenfassen, erhalten wir folgende berühmte Dualität zwischen distributiven Verbänden und kohärenten topologischen Räumen:

Satz 4.12. *(Stone Duality II)* [3] *Die Funktoren* $pt\,Idl : \mathbf{DVerb} \to \mathbf{KohTop}$ *und* $K\Omega : \mathbf{KohTop} \to \mathbf{DVerb}$ *begründen eine Dualität zwischen der Kategorie **DVerb** der distributiven Verbände und der Kategorie **KohTop** der kohärenten Topologien und kohärenten stetigen Funktionen zwischen Ihnen. Genauer gilt:*

1. *Die Dualität sendet einen distributiven Verband A auf den Raum $pt\,Idl(A)$ der Punkte auf seinen Idealen.*

2. *Umgekehrt sendet die Dualität einen kohärenten Raum auf den distributiven Verband seiner kompakten und offenen Mengen.*

3. *Für alle $A \in Obj(\mathbf{DVerb})$ ist $\zeta_A := K(\Phi_{Idl(A)}) \circ \downarrow_A (.) : A \to K\Omega pt\,Idl(A)$ ein Isomorphismus. Er hat die in der Dualität geforderte Kommutativitätseigenschaft $\zeta_B \circ f = K\Omega pt\,Idl(f) \circ \zeta_A$ für alle Isomorphismen $f : A \to B$.*

4. *Für alle $X \in Obj(\mathbf{KohTop})$ ist $\nu_X := pt(\Gamma^{-1}_{\Omega X}) \circ \Psi_X : X \to pt\,Idl K\Omega(X)$ ein Homöomorphismus. Er hat die in der Dualität geforderte Kommutativitätseigenschaft $\nu_Y \circ g = pt\,Idl K\Omega(g) \circ \nu_X$ für alle kohärenten Abbildungen $g : X \to Y$.*

Beweis. Die Dualität folgt sofort aus der Verknüpfung der Dualität **KohTop** $\sim$ **KohVerb** mit der Äquivalenz **KohVerb**$\equiv$**DVerb** zusammen mit Korollar A.10.
1. und 2. sind klar.
3. und 4. Folgen aus Lemma A.9. □

Bis zum Ende dieses Abschnittes soll nun die Dualität auf eine einfachere und ihre allgemein übliche Form gebracht werden. Wir beginnen mit folgender Überlegung:

Ein Punkt $p \in pt(Idl(A))$ eines distributiven Verbandes A hat ein primes Hauptideal von $Idl(A)$ als Kern, dieses wiederum ein Primelement von $Idl(A)$ (also ein Primideal von A) als Supremum. Umgekehrt ist für jedes Primideal $I \subseteq A$ die Menge $\downarrow_{Idl(A)} (I)$ ein primes Hauptideal auf $Idl(A)$ und daher Kern eines Punktes. Also ist die Abbildung $\alpha_A : pt(Idl(A)) \to \{I \in Idl(A) : I\ Primideal\} : p \mapsto \bigvee ker(p)$ eine Bijektion.

Definition 4.13. Seien A und B distributive Verbände.

1. Das Spektrum $spec(A) := \{I \in Idl(A) : I\ Primideal\}$ von A bezeichne die Menge der Primideale und $\alpha_A : pt\,Idl(A) \to spec(A) : p \mapsto \bigvee ker(p)$ die kanonische Bijektion. Wir versehen $spec(A)$ mit der eindeutigen Topologie, sodass α_A ein Homöomorphismus wird.

2. Für einen Homomorphismus $f : A \to B$ definieren wir

$$spec(f) : spec(B) \to spec(A) : \alpha_A \circ (pt\,Idl)(f) \circ \alpha_B^{-1}$$

Satz 4.14. *Mit diesen Definitionen wird* $spec : \mathbf{DVerb} \to \mathbf{KohTop}$ *zu einem Cofunktor. Er induziert zusammen mit* $K\Omega$ *ebenfalls Stone Duality II. Dabei gilt:*

[3] Abweichend von der Reihenfolge in dieser Arbeit, wird diese Dualität mit Stone Duality II bezeichnet und die im nächsten Kapitel hergeleitete Dualität mit Stone Duality I. Die Reihenfolge bezieht sich auf die chronologische Reihenfolge der erste Veröffentlichungen der Dualitäten. Die Stone Duality I wurde erstmals 1936, die Stone Duality II 1937, von M.H. Stone bewiesen.

1. *Die offenen Mengen von* $spec(A)$ *sind gegeben durch* $\{J \in spec(A) : J \not\supseteq I\}$ *für ein Ideal* I.

2. *Die kompakten offenen Mengen von* $spec(A)$ *sind gegeben durch* $\eta_A(a) := \{J \in spec(A) : a \notin J\}$ *für ein* $a \in A$.

3. *Die Abbildung* $\eta_A : A \to K\Omega spec(A)$ *ist ein Isomorphismus. Er besitzt die in der Dualität geforderte Kommutativitätseigenschaft:* $\eta_B \circ f = K\Omega spec(f) \circ \eta_A$ *für alle* $f \in Mor(A, B)$.

4. *Sind* A *und* B *distributive Verbände und* $f : A \to B$ *ein Verbandshomomorphismus, so ist* $spec(f) = f^{-1} : spec(B) \to spec(A)$

Beweis. Die Tatsache, dass *spec* ein Cofunktor ist und zusammen mit $K\Omega$ die Stone Duality II induziert, ist eine direkte Konsequenz von Lemma A.11.

1. Die offenen Mengen von $spec(A)$ sind von der Form

$$\begin{aligned}\alpha_A(\{p \in pt\,Idl(A) : p(I) = 1\}) &= \{\bigvee ker(p) : p \in pt\,Idl(A),\, p(I) = 1\}\\ &= \{J \in spec(A) : J \not\supseteq I\}\end{aligned}$$

für ein Ideal I von A.

3. Wir sind in der Situation von Lemma A.11, wobei $\mathscr{C} = \mathbf{DVerb}$, $\mathscr{D} = \mathbf{KohTop}$, $S = pt\,Idl$, $T = K\Omega$ und $\xi_A = \alpha_A$. Also folgt, dass $K\Omega(\alpha_A^{-1}) \circ \zeta_A$ ein Isomorphismus mit der geforderten Kommutativitätseigenschaft ist. Es folgt:

$$\begin{aligned}K\Omega(\alpha_A^{-1}) \circ \zeta_A(a) &= \alpha_A|_{K\Omega(pt\,Idl(A))}(K(\Phi_{Idl(A)}))(\downarrow a)\\ &= \alpha_A \circ \Phi_{Idl(A)}(\downarrow a)\\ &= \alpha_A(\{p \in pt(Idl(A)) \,:\, p(\downarrow a) = 1\})\\ &= \{J \in spec(A) \,:\, a \notin J\}\\ &= \eta_A(a)\end{aligned}$$

2. Folgt nun sofort aus 3.

4. Es gilt für $a \in A$

$$\begin{aligned}\eta_B \circ f(a) &= \{I \in spec(B) \,:\, f(a) \notin I\}\\ &= \{I \in spec(B) \,:\, a \notin f^{-1}(I)\}\\ &= \{I \in spec(B) \,:\, f^{-1}(I) \in \eta_A(a)\}\\ &= (f^{-1})^{-1}(\eta_A(a))\end{aligned}$$

wobei $(f^{-1})^{-1}$ als Abbildung von $\mathbb{P}(spec(A))$ nach $\mathbb{P}(spec(B))$ aufgefasst wird. Da die Mengen $\eta_A(a)$ eine Basis bilden, ist insbesondere $f^{-1} : spec(B) \to spec(A)$ stetig.

Andererseits gilt auch $\eta_B \circ f(a) = K\Omega spec(f) \circ \eta_A(a) = (spec(f))^{-1}(\eta_A(a))$. Da η_A eine Bijektion ist, folgt $spec(f)^{-1}|_{K\Omega spec(A)} = (f^{-1})^{-1}|_{K\Omega spec(A)} : K\Omega spec(A) \to K\Omega spec(B)$, und wegen der Stetigkeit sind diese Einschränkungen Verbandshomomorphismen. Da sowohl $spec(f)$ als auch f^{-1} stetig sind, sind $spec(f)^{-1}$ und $(f^{-1})^{-1}$ vollständige Verbandshomomorphismen von $\Omega spec(A)$ nach $\Omega spec(B)$. Weil $\Omega spec(A)$ ein kohärenter Verband ist, lassen sich Verbandshomomorphismen von $K\Omega spec(A)$ nach $K\Omega spec(B)$ eindeutig zu vollständigen Verbandshomomorphismen von $\Omega spec(A)$ nach $\Omega spec(B)$ fortsetzten. Also sind $spec(f)^{-1}$ und $(f^{-1})^{-1}$ identische vollständige Verbandshomomorphismen. Da $spec(A)$ und $spec(B)$ nüchtern sind, gibt es genau eine stetige Funktion $g : spec(B) \to spec(A)$, sodass $g^{-1} = spec(f)^{-1} = (f^{-1})^{-1}$, und zwangsläufig $g = spec(f) = f^{-1}$. $\square$

4.3 Distributive Verbände und pairwise Stone Spaces

In diesem Abschnitt soll die Repräsentation distributiver Verbände mittels bitopologischer Räume diskutiert werden. Wir werden zeigen, dass diese Repräsentation über eine Dualität der Kategorien **DVerb** und **PStone** gegeben ist. Im Hinblick auf die bereits bewiesene Dualität mit kohärenter Topologien gibt es dafür nun zwei mögliche Beweiswege: Es ist entweder die Dualität direkt zu beweisen, oder (äquivalent dazu) zu zeigen, dass **PStone** und **KohTop** äquivalente Kategorien sind. Wir werden im Folgenden den zweiten Weg gehen. Wie sich zeigen wird, sind die Kategorien **PStone** und **KohTop** sogar isomorph.

Die nächsten beiden Lemmata sichern, dass wir im Anschluss einen Funktor $\mathfrak{F}$: **PStone** → **KohTop** definieren können.

Proposition 4.15. *Sei $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ ein pairwise Stone Space. Dann ist $(X, \mathcal{T}_1)$ ein kohärenter Raum. Es gilt insbesondere, dass $K\Omega_1(X) = \mathcal{D}_1(X)$.*

Beweis. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten:

1. Da $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ paarweise kompakt ist, folgt, dass auch $(X, \mathcal{T}_1)$ kompakt ist.

2. Wir zeigen, dass $K\Omega_1(X)$=$\mathcal{D}_1(X)$. Nach Satz 3.25 ist $\mathcal{A}_2(X) \subseteq \mathcal{K}_1(X)$ und daher $\mathcal{D}_1(X) = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{A}_2(X) \subseteq \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{K}_1(X) = K\Omega_1(X)$. Sei andererseits $U \in K\Omega_1(X)$. Da $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ paarweise nulldimensional ist, bildet $\mathcal{D}_1(X)$ eine Basis von $\mathcal{T}_1$. Daher lässt sich U als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{D}_1(X)$ darstellen. Da U kompakt ist, lässt sich U auch als Vereinigung von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{D}_1(X)$ darstellen. Da $\mathcal{D}_1(X)$ unter endlicher Vereinigungsbildung abgeschlossen ist, folgt $U \in \mathcal{D}_1(X)$.

3. $K\Omega_1(X)$ ist unter endlicher Schnittbildung abgeschlossen, da $\mathcal{D}_1(X)$ dies ist. Weiters bildet $\mathcal{D}_1(X)$, und damit auch $K\Omega_1(X)$, eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_1$.

4. Wir zeigen, dass X nüchtern ist. Dazu sei $A \in \mathcal{A}_1(X)$ eine bezüglich $\mathcal{T}_1$ abgeschlossene, nicht leere und irreduzible Menge. Nehmen wir an, dass $A \neq \overline{\{x\}}^{\mathcal{T}_1}$ für alle $x \in A$. Dann gibt es zu jedem $x \in A$ ein $y \in A$, sodass $y \notin \overline{\{x\}}^{\mathcal{T}_1}$ und daher gibt es eine Basismenge $U_x^y \in K\Omega_1(X)$, sodass $x \notin U_x^y$ und $y \in U_x^y$. Sei nun $V_x^y := (U_x^y)^c$. Es folgt $x \in V_x^y$ für alle $y \notin \overline{\{x\}}^{\mathcal{T}_1}$, und damit ist $\{V_x^y : x, y \in A, y \notin \overline{\{x\}}^{\mathcal{T}_1}\}$ eine offene Überdeckung von A. Da A kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$, sodass $A \subseteq \bigcup\{V_{x_i}^{y_i} : i = 1, \ldots, n\}$. Nun sind alle $V_{x_i}^{y_i}$ abgeschlossen, und, da A irreduzibel ist, folgt, dass $A \subseteq V_{x_i}^{y_i}$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nun folgt der Widerspruch: $y_i \notin V_{x_i}^{y_i}$. Also ist A der Abschluss eines seiner Punkte. Dass dieser Punkt eindeutig ist, folgt, da nach Definition X paarweise nulldimensional und paarweise Hausdorff ist, und nach Lemma 3.24 daher $(X, \mathcal{T}_1)$ T_0 ist. □

Proposition 4.16. *Seien $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ und $(Y, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ zwei pairwise Stone Spaces. Ist $f : X \to Y$ bistetig, dann ist $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{O}_1)$ kohärent.*

Beweis. Nach Lemma 4.15 folgt:

$$\begin{aligned} U \in K\Omega_1(Y) &\implies U \in \mathcal{D}_1(Y) = \Omega_1(Y) \cap \mathcal{A}_2(Y) \\ &\implies f^{-1}(U) \in \Omega_1(X) \cap \mathcal{A}_2(X) = \mathcal{D}_1(X) \\ &\implies f^{-1}(U) \in K\Omega_1(X) \end{aligned}$$

und damit ist f kohärent. □

Nun können wir den Funktor $\mathfrak{F}$: **PStone** → **KohTop** wie folgt definieren:

Definition 4.17. Für einen pairwise Stone Space $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ sei $\mathfrak{F}(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) := (X, \mathcal{T}_1)$ und für eine bistetige Abbildung $f : X \to Y$ sei $\mathfrak{F}(f) := f$.

Die obigen Ergebnisse zeigen, dass $\mathfrak{F}$ tatsächlich ein Funktor ist. Für die Gegenrichtung benötigen wir noch zwei Sätze. Wir definieren zuerst eine Abbildung $\mathfrak{G}$ und weisen im Anschluss nach, dass es sich dabei um einen Funktor $\mathfrak{G}$: **KohTop** → **PStone** handelt:

Definition 4.18. Für einen kohärenten Raum $(X, \mathcal{T})$ bezeichne $\mathfrak{G}(X, \mathcal{T})$ den bitopologischen Raum $(X, \mathcal{T}, \mathcal{O})$, wobei $\mathcal{O}$ die von dem System $\Delta = \{U^c : U \in K\Omega(X)\}$ erzeugte Topologie ist. Ist $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{T}})$ ein weiterer kohärenter Raum, und $f : (X, \mathcal{T}) \to (\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{T}})$ eine kohärente Abbildung, so sei $\mathfrak{G}(f) := f$.

Proposition 4.19. *Mit der Notation von Definition 4.18 gilt: $\mathfrak{G}(X, \mathcal{T}) = (X, \mathcal{T}, \mathcal{O})$ ist ein pairwise Stone Space. Außerdem gilt: $\mathcal{D}_1(X) = K\Omega_1(X)$ und $\mathcal{D}_2(X) = \Delta$.*

Beweis. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten.

1. Wir zeigen, dass $(X, \mathcal{T}, \mathcal{O})$ paarweise kompakt ist. Dazu müssen wir zeigen, dass jede Überdeckung von X mit Mengen aus $\mathcal{T} \cup \mathcal{O}$ eine endliche Teilüberdeckung hat. Da $(X, \mathcal{T})$ kohärent ist, ist $K\Omega(X, \mathcal{T}) = K\Omega_1(X)$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$. Weiters ist Δ endlich Schnittstabil, und es ist $X \in \Delta$, also bildet Δ eine Basis von $(X, \mathcal{O})$. Also reicht es Überdeckungen von Mengen aus $K\Omega_1(X) \cup \Delta$ zu betrachten. Durch Übergang auf Komplemente ist paarweise kompakt äquivalent dazu, dass jedes System $\mathcal{U} \subseteq \{U^c : U \in K\Omega_1(X)\} \cup \{U^c : U \in \Delta\} = K\Omega_1(X) \cup \Delta$ mit der endlichen Schnitteigenschaft auch nicht leeren Gesamtdurchschnitt hat.

Es ist $\Delta \subseteq \mathcal{A}_1(X)$ und damit $\mathcal{U} \subseteq K\Omega_1(X) \cup \mathcal{A}_1(X)$. Bezeichne nun

$$\mathfrak{X} := \{\mathcal{V} \subseteq K\Omega_1(X) \cup \mathcal{A}_1(X) : \mathcal{V} \supseteq \mathcal{U} \text{ und } \mathcal{V} \text{ hat die endliche Schnitteigenschaft}\}$$

Wir wollen mit Hilfe des Lemmas von Zorn maximale Elemente in $\mathfrak{X}$ (bzg. der Teilmengenrelation) finden. Offensichtlich ist $\mathfrak{X}$ nicht leer. Ist $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ eine bezüglich der Teilmengenrelation linear geordnete Menge und $\mathcal{W} \subseteq \bigcup \mathfrak{Y}$ eine endliche Teilmenge, so gibt es $\mathcal{V} \in \mathfrak{Y}$, sodass $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ und da $\mathcal{V}$ die endliche Schnitteigenschaft hat, folgt $\bigcap \mathcal{W} \neq \emptyset$. Also hat auch $\bigcup \mathfrak{Y}$ die endliche Schnitteigenschaft und damit ist $\bigcup \mathfrak{Y} \in \mathfrak{X}$. Es hat also jede linear geordnete Menge eine obere Schranke in $\mathfrak{X}$ und daher existieren maximale Elemente in $\mathfrak{X}$. Sei nun $\mathcal{V}$ ein solches maximales Element.

Sei $C := \bigcap\{A : A \in \mathcal{V} \cap \mathcal{A}_1(X)\}$ der Schnitt aller bezüglich $\mathcal{T}$ abgeschlossenen Mengen in $\mathcal{V}$. Weil dieses System abgeschlossener Mengen die endliche Schnitteigenschaft hat, und X kompakt ist, folgt, dass C nicht leer ist.

Wir zeigen, dass $C \in \mathcal{V}$. Dazu zeigen wir, dass das System $\mathcal{V} \cup \{C\}$ die endliche Schnitteigenschaft hat. Seien $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{V} \cap \mathcal{K}\Omega_1(X)$ und $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{V} \cap \mathcal{A}_1(X)$ endliche Teilmengen von $\mathcal{V}$ und sei $M := \bigcap \mathcal{M}$ und $N := \bigcap \mathcal{N}$. Weil $(X, \mathcal{T})$ kohärent ist, ist $K\Omega_1(X)$ endlich Schnittstabil und daher $M \in K\Omega_1(X)$. Aus der Maximalität von $\mathcal{V}$ folgt daher, dass $M \in \mathcal{V}$. Weiters ist offenbar $N \supseteq C$. Bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$ gilt nun: M ist kompakt, und für alle $A \in \mathcal{V} \cap \mathcal{A}_1(X)$ sind die Mengen $M \cap A$ bezüglich der Spurtopologie abgeschlossen in M und haben die endliche Schnitteigenschaft. Also folgt auch, dass $M \cap \bigcap\{A : A \in \mathcal{V} \cap \mathcal{A}_1(X)\} = M \cap C = \bigcap \mathcal{M} \cap \bigcap \mathcal{N} \cap C$ nicht leer ist. Also gilt $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V} \cup \{C\} \in \mathfrak{X}$. Da $\mathcal{V}$ maximal in $\mathfrak{X}$ ist, folgt $C \in \mathcal{V}$.

Als nächstes zeigen wir, dass C bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$ irreduzibel ist. Sei dazu $C = A \cup B$ mit $A, B \in \mathcal{A}_1(X)$. Wir wollen zeigen, dass $A = C$ oder $B = C$ gilt. Nehmen wir an, dass sowohl $\mathcal{V} \cup \{A\}$ als auch $\mathcal{V} \cup \{B\}$ nicht die endliche Schnitteigenschaft besitzen. Dann wählen wir $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{V}$ sodass $A \cap \bigcap\{A_i : i = 1, \ldots, n\} = \emptyset$ und $B \cap \bigcap\{B_i : i = 1, \ldots, m\} = \emptyset$. Dann folgt der Widerspruch: $C \cap \bigcap\{A_i : i = 1, \ldots, n\} \cap \bigcap\{B_i : i = 1, \ldots, m\} = \emptyset$. Also hat $\mathcal{V} \cap \{A\}$ oder $\mathcal{V} \cap \{B\}$ die endliche Schnitteigenschaft, und folglich, da $\mathcal{V}$ maximal ist, $A \in \mathcal{V}$ oder $B \in \mathcal{V}$. Aus der Definition von C folgt damit $A = C$ oder $B = C$. Also ist C irreduzibel.

Da $(X, \mathcal{T})$ nüchtern ist, folgt $C = \overline{\{x\}}^{\mathcal{T}}$ für ein $x \in C$. Nun gilt $x \in A$ für alle $A \in \mathcal{V} \cap \mathcal{A}_1(X)$, da immer $C \subseteq A$. Außerdem folgt für alle $U \in \mathcal{V} \cap K\Omega_1(X)$, dass $U \cap C = U \cap \overline{\{x\}}^{\mathcal{T}} \neq \emptyset$. Da U offen ist, folgt $x \in U$. Also ist auch $x \in \bigcap \mathcal{V} \subseteq \bigcap \mathcal{U}$, und damit ist $\bigcap \mathcal{U}$ nicht leer.

2. Wir zeigen, dass $\mathcal{D}_1(X) = K\Omega_1(X)$. Nach der Definition von $\mathcal{O}$ folgt, dass $K\Omega_1(X) \subseteq \mathcal{A}_2(X)$. Da auch $K\Omega_1(X) \subseteq \mathcal{T}$ folgt $K\Omega_1(X) \subseteq \mathcal{A}_2(X) \cap \mathcal{T} = \mathcal{D}_1(X)$. Andererseits gilt nach Satz 3.25, dass $\mathcal{A}_2(X) \subseteq \mathcal{K}_1(X)$ und damit $\mathcal{D}_1(X) = \mathcal{A}_2(X) \cap \mathcal{T} \subseteq \mathcal{K}_1(X) \cap \mathcal{T} = K\Omega_1(X)$. Also folgt $K\Omega_1(X) = \mathcal{D}_1(X)$.

3. Wir zeigen, dass $\mathcal{D}_2(X) = \Delta$. Es gilt:

$$\begin{aligned} U \in \Delta &\iff U^c \in \mathcal{K}\Omega_1(X) = \mathcal{D}_1(X) = \mathcal{T} \cap \mathcal{A}_2(X) \\ &\iff U \in \mathcal{A}_1(X) \cap \mathcal{O} = \mathcal{D}_2(X) \end{aligned}$$

Also $\Delta = \mathcal{D}_2(X)$.

4. Da $K\Omega_1(X)$ eine Basis von $\mathcal{T}$ bildet, und, nach Definition, Δ eine Basis von $\mathcal{O}$ bildet, folgt zusammen mit Punkt 3., dass $(X, \mathcal{T}, \mathcal{O})$ paarweise nulldimensional ist.

5. Da $(X, \mathcal{T})$ nüchtern ist, ist er insbesondere T_0. Nach Lemma 3.24 ist $(X, \mathcal{T}, \mathcal{O})$ paarweise T_0. $\square$

Proposition 4.20. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ zwei kohärente Räume und $f : X \to Y$ eine kohärente Abbildung. Dann ist $f : \mathfrak{G}(X, \mathcal{T}) \to \mathfrak{G}(Y, \mathcal{O})$ bistetig.*

Beweis. Da f kohärent ist, ist $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{O})$ stetig. Sei andererseits $U \in \mathcal{D}_2(Y) = \{U^c : U \in K\Omega_1(Y)\}$, wobei die letzte Gleichheit aus Proposition 4.19 folgt. Dann ist $f^{-1}(U^c) \in K\Omega_1(X)$, da f kohärent ist. Also folgt $f^{-1}(U) = (f^{-1}(U^c))^c \in \mathcal{D}_2(X) \subseteq \Omega_2(Y)$. Da $D_2(Y)$ ein Basis für $\Omega_2(Y)$ bildet, folgt, dass $f : (X, \Omega_2(X)) \to (Y, \Omega_2(Y))$ stetig ist. $\square$

Satz 4.21. *Die Funktoren $\mathfrak{G}$: **KohTop** $\to$ **PStone** und $\mathfrak{F}$: **PStone** $\to$ **KohTop** begründen eine Isomorphie der Kategorien der kohärenten Räume und der pairwise Stone Spaces.*

Beweis. Die obigen Sätze zeigen, dass $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ Funktoren sind.

Es ist weiters $\mathfrak{G}\mathfrak{F}(X, \mathcal{T}, \mathcal{O}) = \mathfrak{G}(X, \mathcal{T}) = (X, \mathcal{T}, \widetilde{\mathcal{O}})$, wobei $\widetilde{\mathcal{O}}$ die von $\{U^c : U \in K\Omega(X, \mathcal{T})\} = \{U^c : U \in \mathcal{D}_1(X, \mathcal{T}, \mathcal{O})\} = \mathcal{D}_2(X, \mathcal{T}, \mathcal{O})$ erzeugte Topologie ist. Dabei folgt die erste Gleichheit aus Proposition 4.19 und die zweite aus Lemma 3.23. Also erzeugt $\mathcal{D}_2(X, \mathcal{T}, \mathcal{O})$ sowohl die Topologie $\mathcal{O}$ als auch $\widetilde{\mathcal{O}}$ und damit folgt $\mathcal{O} = \widetilde{\mathcal{O}}$.

Offensichtlich gilt auch $\mathfrak{F}\mathfrak{G}(X, \mathcal{T}) = (X, \mathcal{T})$. Die anderen Punkte einer Isomorphie folgen nun sofort. $\square$

4.4 Distributive Verbände und Priestley Spaces *(Priestley Duality)*

Wir gehen hier ähnlich zum vorhergehenden Kapitel vor: Wie werden zeigen, dass die Kategorie **Pries** isomorph zu der Kategorie **PStone** ist. Als Erstes beweisen wir ein kurzes Lemma über die induzierten Halbordnungen der beiden Topologien eines bitopologischen Raumes:

Lemma 4.22. *Sei $(X, \mathcal{T}, \mathcal{O})$ ein paarweise nulldimensionaler bitopologischer Raum und sei $\leqslant_{\mathcal{T}}$ die von $\mathcal{T}$ induzierte Ordnung, sowie $\leqslant_{\mathcal{O}}$ die von $\mathcal{O}$ induzierte Ordnung. Dann folgt $\leqslant_{\mathcal{T}} = \geqslant_{\mathcal{O}}$.*

Beweis. Da $(X, \mathcal{T}, \mathcal{O})$ paarweise nulldimensional ist, folgt, dass $\mathcal{D}_1(X)$ ist eine Basis für $\mathcal{T}$ und $\mathcal{D}_2(X)$ ist eine Basis für $\mathcal{O}$ bildet. Dann folgt für alle $x, y \in X$:

$$\begin{aligned}
x \leqslant_{\mathcal{T}} y &\iff \forall U \in \mathcal{T} : (x \in U \implies y \in U) \\
&\iff \forall U \in \mathcal{D}_1(X) : (x \in U \implies y \in U) \\
&\iff \forall U \in \mathcal{D}_1(X) : (y \in U^c \implies x \in U^c) \\
&\iff \forall V \in \mathcal{D}_2(X) : (y \in V \implies x \in V) \\
&\iff \forall V \in \mathcal{O} : (y \in V \implies x \in V) \\
&\iff y \leqslant_{\mathcal{O}} x
\end{aligned}$$

$\square$

Die nächsten beiden Lemmata zeigen, wie wir einen Funktor $\mathbb{S}$: **PStone** $\to$ **Pries** definieren können.

Proposition 4.23. *Sei $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ ein pairwise Stone Space und sei $\mathcal{T} := \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2$ und $\leqslant := \leqslant_{\mathcal{T}_1}$. Dann ist $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ ein Priestley Space. Außerdem gilt:*

1. $\mathbf{up}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant) = \mathcal{T}$
2. $\mathbf{down}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant) = \mathcal{O}$
3. $\mathbf{up}\mathcal{A}(X, \mathcal{T}, \leqslant) = \mathcal{A}_2(X)$
4. $\mathbf{down}\mathcal{A}(X, \mathcal{T}, \leqslant) = \mathcal{A}_1(X)$

5. $\mathbf{up}\mathcal{C}(X, \mathcal{T}, \leqslant) = \mathcal{D}_1(X)$

6. $\mathbf{down}\mathcal{C}(X, \mathcal{T}, \leqslant) = \mathcal{D}_2(X)$

Beweis. Da $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ paarweise Hausdorff ist, folgt mit Lemma 3.24, dass $(X, \mathcal{T}_1)$ das T_0-Axiom erfüllt. Also ist $\leqslant_{\mathcal{T}_1}$ eine Halbordnung auf X.

Da $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ paarweise kompakt ist, hat jede Überdeckung von Mengen aus $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ eine endliche Teilüberdeckung. Dieses System ist eine Subbasis von $\mathcal{T}$, und mit Alexander's Subbasis Lemma ist $(X, \mathcal{T})$ kompakt.

Sei nun $x, y \in X$ und $x \nleqslant y$. Nach der Definition der induzierten Ordnung $\leqslant = \leqslant_{\mathcal{T}_1}$ heißt das, dass $x \notin \overline{\{y\}}^{\mathcal{T}}$. Daher existiert ein $U \in \mathcal{D}_1(X)$, sodass $x \in U$ und $y \notin U$. Nun folgt für beliebige $a, b \in X$ mit $a \leqslant b$ und $a \in U$, dass auch $b \in U$. Damit ist U ein $\leqslant$-Upset. Außerdem ist bezüglich $\mathcal{T}_1$ die Menge U offen, und mit Lemma 3.23 ist bezüglich $\mathcal{T}_2$ die Menge U^c offen. Also ist U ein clopen Upset in $(X, \mathcal{T})$. Damit folgt, dass $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ ein Priestley Space ist.

Wir beweisen nun die Punkte 1. - 6.:

5. Der vorhergehende Absatz zeigt, dass $\mathcal{D}_1(X) \subseteq \mathbf{up}\mathcal{C}(X, \mathcal{T}, \leqslant)$.

Sei andererseits $A \in \mathbf{up}\mathcal{C}(X, \mathcal{T}, \leqslant)$. Wir zeigen, dass $A = \bigcup\{U \in \mathcal{D}_1(X) : U \subseteq A\}$. Offensichtlich ist $A \supseteq \bigcup\{U \in \mathcal{D}_1(X) : U \subseteq A\}$. Sei nun $x \in A$. Da A ein $\leqslant$-Upset ist, folgt für alle $y \notin A$, dass $x \nleqslant y$. Nach Definition der induzierten Ordnung existiert ein $U_y \in \mathcal{T}_1$, sodass $x \in U_y$ und $y \notin U_y$. Da $\mathcal{D}_1(X)$ eine Basis für $\mathcal{T}_1$ ist, sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $U_y \in \mathcal{D}_1(X)$. Es folgt $A^c \cap \bigcap\{U_y : y \in A^c\} = \varnothing$. Also ist $\{A^c\} \cup \{U_y : y \in A^c\}$ ein System von bezüglich $\mathcal{T}$ abgeschlossenen Mengen mit leerem Gesamtdurchschnitt. Da $(X, \mathcal{T})$ kompakt ist, gibt es endliche viel $y_1, \dots, y_n \in A^c$, sodass das System $\{A^c\} \cup \{U_{y_i} : i = 1, \dots, n\}$ leeren Schnitt hat. Da $\mathcal{D}_1(X)$ unter endlicher Schnittbildung abgeschlossen ist, folgt $U := U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n} \in \mathcal{D}_1(X)$. Es gilt also $x \in U \subseteq A$ und damit $x \in \bigcup\{U \in \mathcal{D}_1(X) : U \subseteq A\}$. Da $x \in A$ beliebig war, folgt $A = \bigcup\{U \in \mathcal{D}_1(X) : U \subseteq A\}$.

Weil A kompakt ist, gibt es endlich viele $U_1, \dots, U_n \in \{U \in \mathcal{D}_1(X) : U \subseteq A\}$, sodass $A = U_1 \cup \dots \cup U_n$, und da $\mathcal{D}_1(X)$ abgeschlossen unter endlicher Vereinigungsbildung ist, folgt $A \in \mathcal{D}_1(X)$.

1. Nach Lemma 3.14 ist jedes offene Upset darstellbar als Vereinigung von clopen Upsets. Nun folgt mit 5. und der Tatsache, dass $\mathcal{D}_1(X)$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$ bildet: $\mathbf{up}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant_{\mathcal{T}}) = \{\bigcup \mathcal{U} : \mathcal{U} \subseteq \mathbf{up}\mathcal{C}(X, \mathcal{T}, \leqslant_{\mathcal{T}})\} = \{\bigcup \mathcal{U} : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}_1(X)\} = \mathcal{T}$.

6. und 2. Beweist man genauso.

3. und 4. Folgt durch Komplementbildung von 1. bzw. 2. □

Proposition 4.24. *Seien $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ und $(Y, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ pairwise Stone Spaces, $f : X \to Y$ bistetig und sei $\mathcal{T} := \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2$, $\mathcal{O} := \mathcal{O}_1 \vee \mathcal{O}_2$. Dann ist $f : (X, \mathcal{T}, \leqslant_{\mathcal{T}_1}) \to (Y, \mathcal{O}, \leqslant_{\mathcal{O}_1})$ stetig und ordnungserhaltend.*

Beweis. Da f bistetig ist, folgt für alle $U \in \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$, dass $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}$. Da $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ eine Subbasis für $\mathcal{O}$ bildet, folgt, dass $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{O})$ stetig ist.

Um zu sehen, dass f ordnungserhaltend ist, seien $x, y \in X$ mit $x \leqslant_{\mathcal{T}_1} y$ und nehmen wir an, dass $f(x) \nleqslant_{\mathcal{O}_1} f(y)$. Dann gibt es eine Menge $U \in \mathcal{O}_1$ sodass $f(x) \in U$ und $f(y) \notin U$. Damit folgt der Widerspruch: $V := f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ und $x \in V$ aber $y \notin V$, also $x \nleqslant_{\mathcal{T}_1} y$. Also ist f ordnungserhaltend. □

Wir definieren nun den Funktor $\mathbb{S} : \mathbf{PStone} \to \mathbf{Pries}$ wiefolgt:

Definition 4.25. Für einen pairwise Stone Space $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ sei $\mathbb{S}(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) := (S, \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2, \leqslant_{\mathcal{T}_1})$. Ist $(Y, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ ein weiterer pairwise Stone Space und $f : X \to Y$ bistetig, dann sei $\mathbb{S}(f) := f$.

Die obigen zwei Propositionen zeigen, dass $\mathbb{S}$ tatsächlich ein Funktor ist. Für die Gegenrichtung benötigen wir noch folgende Ergebnisse:

Proposition 4.26. *Sei $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ ein Priestley Space, und sei $\mathcal{T}_u := \mathbf{up}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ und $\mathcal{T}_d := \mathbf{down}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant)$. Dann sind $\mathcal{T}_u$ und $\mathcal{T}_d$ Topologien auf X, und $(X, \mathcal{T}_u, \mathcal{T}_d)$ ist ein pairwise Stone Space. Außerdem gilt:*

1. $\mathbf{up}\mathcal{C}(X, \mathcal{T}, \leqslant) = \mathcal{D}_1(X, \mathcal{T}_u, \mathcal{T}_d)$

2. $\mathbf{down}\mathcal{C}(X, \mathcal{T}, \leqslant) = \mathcal{D}_2(X, \mathcal{T}_u, \mathcal{T}_d)$

Bezeichnet $\leqslant_u$ bzw. $\leqslant_d$ die von $\mathcal{T}_u$ bzw. $\mathcal{T}_d$ induzierte Ordnung, so gilt weiters

3. $\leqslant = \leqslant_u = \geqslant_d$

Beweis. Die Mengensysteme $\mathcal{T}_u$ und $\mathcal{T}_d$ sind beide endlich schnittstabil und beliebig Vereinigungsstabil. Außerdem sind $X, \varnothing \in \mathcal{T}_u$ und $X, \varnothing \in \mathcal{T}_d$, also sind beide Topologien.

$(X, \mathcal{T}_u, \mathcal{T}_d)$ ist paarweise kompakt, da $(X, \mathcal{T})$ kompakt ist, und $\mathcal{T}_u \cup \mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}$.

Um zu sehen, dass $(X, \mathcal{T}_u, \mathcal{T}_d)$ paarweise Hausdorff ist, seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x \nleqslant y$. Da $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ ein Priestley Space ist, existiert ein $U \in \mathbf{up}\mathcal{C}(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ sodass $x \in U$ aber $y \notin U$. Offensichtich ist nun U^c ebenfalls clopen und ein Downset; d.h. $U^c \in \mathbf{down}\mathcal{C}(X, \mathcal{T}, \leqslant)$. Damit sind $U \in \mathcal{T}_u$ und $U^c \in \mathcal{T}_d$, $U \cap U^c = \varnothing$ und $x \in U$, $y \in U^c$. Also ist $(X, \mathcal{T}_u, \mathcal{T}_d)$ paarweise Hausdorff.

Dass $(X, \mathcal{T}_u, \mathcal{T}_d)$ paarweise nulldimensional ist folgt aus den (noch zu beweisenden) Punkten 1. und 2., denn: nach Lemma 3.14 lässt sich jedes offene Upset (Downset) als Vereinigung von clopen Upsets (Downsets) darstellen. Also bildet $\mathbf{up}\mathcal{C}(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ ($\mathbf{down}\mathcal{C}(X, \mathcal{T}, \leqslant)$) eine Basis für $\mathbf{up}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ ($\mathbf{down}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant)$).

Wir müssen noch die Punkte 1. bis 3. beweisen.

1. Sei $U \subseteq X$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} U \in \mathcal{D}_1(X, \mathcal{T}_u, \mathcal{T}_d) &\iff U \in \mathcal{T}_u \text{ und } U^c \in T_d \\ &\iff U \in \mathbf{up}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant) \text{ und } U^c \in \mathbf{down}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant) \\ &\iff U \in \mathbf{up}\mathcal{C}(X, \mathcal{T}, \leqslant) \end{aligned}$$

und damit $\mathbf{up}\mathcal{C}(X, \mathcal{T}, \leqslant) = \mathcal{D}_1(X, \mathcal{T}_u, \mathcal{T}_d)$.

2. Beweis verläuft analog Punkt 1.

3. Seien $x, y \in X$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \leqslant y &\iff \forall U \in \mathbf{up}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant) : (x \in U \implies y \in U) \\ &\iff \forall U \in \mathcal{T}_u : (x \in U \implies y \in U) \\ &\iff x \leqslant_u y \end{aligned}$$

Also folgt $\leqslant = \leqslant_u$. Nun folgt sofort auch $\leqslant = \geqslant_d$. □

Proposition 4.27. *Seien $(X, \mathcal{T}, \leqslant_X)$ und $(Y, \mathcal{O}, \leqslant_Y)$ zwei Priestley Spaces und $\mathcal{T}_u$, $\mathcal{T}_d$, $\mathcal{O}_u$ und $\mathcal{O}_d$ analog zu Lemma 4.26 definiert. Ist $f : (X, \mathcal{T}, \leqslant_X) \to (Y, \mathcal{O}, \leqslant_Y)$ stetig und ordnungserhaltend, dann ist $f : (X, \mathcal{T}_u, \mathcal{T}_d) \to (Y, \mathcal{O}_u, \mathcal{O}_d)$ bistetig.*

Beweis. Ist f stetig und ordnungserhaltend, so folgt, dass für $U \in \mathbf{up}\Omega(Y, \mathcal{O}, \leqslant_Y) = \mathcal{O}_u$ und $V \in \mathbf{down}\Omega(Y, \mathcal{O}, \leqslant_Y) = \mathcal{O}_d$, dass $f^{-1}(U) \in \mathbf{up}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant_X) = \mathcal{T}_u$ und $f^{-1}(V) \in \mathbf{down}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant_X) = \mathcal{T}_d$. Damit ist f bistetig. □

Nun können wir einen Funktor $\mathbb{T} : \mathbf{Pries} \to \mathbf{PStone}$ definieren:

Definition 4.28. Ist $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ ein Priestley Space, so sei $\mathbb{T}(X, \mathcal{T}, \leqslant) := (X, \mathbf{up}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant), \mathbf{down}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant))$. Ist $(Y, \mathcal{O}, \leqslant_{\mathcal{O}})$ ein weiterer Priestley Space und $f : X \to Y$ stetig und ordnungserhaltend, so sei $\mathbb{T}(f) := f$.

Die obigen Ergebnisse zeigen, dass damit $\mathbb{T} : \mathbf{Pries} \to \mathbf{PStone}$ ein Funktor ist.

Satz 4.29. *(Priestley Duality) Die Funktoren $\mathbb{S} : \mathbf{PStone} \to \mathbf{Pries}$ und $\mathbb{T} : \mathbf{Pries} \to \mathbf{PStone}$ begründen eine Isomorphie der Kategorien* **PStone** *und* **Pries**.

Beweis. Aus Lemma 4.23 folgt, dass $\mathbb{TS}(X, \mathcal{T}, \mathcal{O}) = \mathbb{T}(X, \mathcal{T} \vee \mathcal{O}, \leqslant_{\mathcal{T}}) = (X, \mathbf{up}\Omega(X, \mathcal{T} \vee \mathcal{O}, \leqslant_{\mathcal{T}}), \mathbf{down}\Omega(X, \mathcal{T} \vee \mathcal{O}, \leqslant_{\mathcal{T}})) = (X, \mathcal{T}, \mathcal{O})$.

Andererseits gilt wegen Lemma 3.14, dass für jeden Priestley Space $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ das System $\mathbf{up}\mathcal{C}(X, \mathcal{T}, \leqslant) \cup \mathbf{down}\mathcal{C}(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ eine Basis für $\mathcal{T}$ bildet, d.h. $\mathbf{up}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant) \vee \mathbf{down}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant) = \mathcal{T}$. Außerdem gilt mit Lemma 4.26, dass $\leqslant = \leqslant_{\mathbf{up}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant)}$. Damit folgt $\mathbb{ST}(X, \mathcal{T}, \leqslant) = \mathbb{S}(X, \mathbf{up}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant), \mathbf{down}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant)) = (X, \mathbf{up}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant) \vee \mathbf{down}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant), \leqslant_{\mathbf{up}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant)}) = (X, \mathcal{T}, \leqslant)$.

Die anderen Punkte der Definition einer Isomorphie sind klar. □

Zusammenfassend zeigen die letzten Kapitel:

Korollar 4.30. *Die Kategorien* **KohTop**, **PStone** *und* **Pries** *sind zueinander isomorph und alle dual zu der Kategorie* **DVerb** *der distributiven Verbände.*

4.5 Zusammenhänge

In diesem Abschnitt wird aufbauend auf den Isomorphismen **KopTop** $\cong$ **PStone** $\cong$ **Pries** diskutiert, wie wichtige topologische Eigenschaften in einem dieser Räume in den jeweils anderen beiden charakterisiert werden können. Bis zum Ende dieses Abschnittes sei immer $(X, \mathcal{T}_1)$ ein kohärenter topologischer Raum, $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \mathfrak{G}(X, \mathcal{T}_1)$ der zugehörige pairwise Stone Space und $(X, \mathcal{T}, \leqslant) = (X, \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2, \leqslant) = \mathbb{S}\mathfrak{G}(X, \mathcal{T}_1)$ der zugehörige Priestley Space. Für $Y \subseteq X$ bezeichnen wir mit $\overline{Y}$, $\overline{Y}^1$ bzw. $\overline{Y}^2$ die Abschlüsse bezüglich der Topologien $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1$ bzw. $\mathcal{T}_2$, und mit $Sat(Y)$, $Sat_1(Y)$ bzw. $Sat_2(Y)$ die Saturation von Y bezüglich $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1$ bzw. $\mathcal{T}_2$.

Satz 4.31. *Sei $Y \subseteq X$. Dann gilt:*

1. $\downarrow(\overline{Y}) = \overline{Y}^1 = Sat_2(Y)$
2. $\uparrow(\overline{Y}) = \overline{Y}^2 = Sat_1(Y)$

Insbesondere gilt

3. $\downarrow x = \overline{x}^1 = Sat_2(x)$
4. $\uparrow x = \overline{x}^2 = Sat_1(x)$

Beweis. 1. Es gilt $\overline{Y}^1 = \bigcap\{U \in \mathcal{A}_1(X) : Y \subseteq U\} = \bigcap\{U \in \mathbf{down}\mathcal{A}(X) : Y \subseteq U\}$. Da $\downarrow\overline{Y}$ ein abgeschlossenes Downset ist, also $\downarrow\overline{Y} \in \mathbf{down}\mathcal{A}(X)$, folgt $\overline{Y}^1 \subseteq \downarrow\overline{Y}$. Sei umgekehrt $x \notin \overline{Y}^1$. Dann gibt es $U \in \Omega_1(X)$, sodass $x \in U$ und $Y \cap U = \varnothing$. Da $\Omega_1(X) = \mathbf{up}\Omega(X)$ ist also U offen und ein Upset in $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$. Also folgt aus $U \cap Y = \varnothing$, dass auch $U \cap \overline{Y} = \varnothing$ und weil U ein Upset ist, folgt $U \cap \downarrow\overline{Y} = \varnothing$. Damit ist $x \notin \downarrow\overline{Y}$ und daher $\downarrow(\overline{Y}) = \overline{Y}^1$.

Weiters ist $Sat_2(Y) = \bigcap\{U \in \Omega_2(X) : Y \subseteq U\} = \bigcap\{U \in \mathcal{D}_2(X) : Y \subseteq U\} \supseteq \bigcap\{U \in \mathcal{A}_1(X) : Y \subseteq U\} = \overline{Y}^1 = \downarrow\overline{Y}$. Andererseits ist $\downarrow\overline{Y}$ ein abgeschlossenes Downset in $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ und lässt sich daher als Schnitt von clopen Downsets darstellen. Wegen $\mathcal{D}_2(X) = \mathbf{down}\mathcal{C}(X)$ folgt $\overline{Y}^1 = \bigcap\{U \in \mathcal{D}_2(X) : \overline{Y}^1 \subseteq U\} \supseteq Sat_2(Y)$.

2. Beweist man genauso. □

Satz 4.32. *Sei $Y \subseteq X$. Dann sind äquivalent:*

1. *Y ist kompakt in $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$.*
2. *Y ist paarweise kompakt in $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$.*
3. *Y ist eine kohärente Teilmenge von $(X, \mathcal{T}_1)$.*

Beweis. "1. $\Leftrightarrow$ 2." Es ist $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2$. Also ist definitionsgemäß Y kompakt in $(X, \mathcal{T})$ genau dann, wenn Y join-kompakt in $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ ist. Die Aussage folgt jetzt sofort über Alexander's Lemma.

"1. $\Rightarrow$ 3." Da Y kompakt in $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ ist, ist $(Y, \mathcal{T}|_Y, \leqslant)$ ein Priestley Space. Also ist $(Y, \mathbf{up}\Omega(Y, \mathcal{T}|_Y, \leqslant))$ ein kohärenter Raum. Offenbar ist $\mathbf{up}\Omega(Y, \mathcal{T}|_Y, \leqslant) \supseteq \{U \cap Y : U \in \mathbf{up}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant)\}$. Ist andererseits $U \in \mathbf{up}\Omega(Y, \mathcal{T}|_Y, \leqslant)$, dann ist $Y \backslash U$ abgeschlossen in Y und daher auch in X. Weiters ist U ein Upset in Y und daher $(\downarrow_X(Y \backslash U)) \cap U = \varnothing$. Also folgt $U = (X \backslash (\downarrow_X(Y \backslash U))) \cap Y$, wobei $X \backslash (\downarrow_X(Y \backslash U)) \in \mathbf{up}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant)$. Also gilt insgesamt $\mathbf{up}\Omega(Y, \mathcal{T}|_Y, \leqslant) = \{U \cap Y : U \in \mathbf{up}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant)\} = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}_1\} = \mathcal{T}_1|_Y$. Also ist $(Y, \mathcal{T}_1|_Y)$ ein kohärenter Raum. Sei nun $U \in K\Omega(X) = \mathbf{up}\mathcal{C}(X, \mathcal{T}, \leqslant)$. Dann ist $U \cap Y \in \mathbf{up}\mathcal{C}(Y, \mathcal{T}|_Y, \leqslant) = K\Omega(Y, \mathcal{T}_1|_Y)$. Insgesamt ist also Y eine kohärente Teilmenge.

"3. $\Rightarrow$ 2." Sei $\Delta := \{Y\backslash U \,:\, U \in K\Omega(Y, \mathcal{T}_1|_Y)\}$. Wir zeigen, dass Δ Basis der Topologie $\mathcal{T}_2|_Y$ ist. Es ist $K\Omega(X, \mathcal{T}_2) = \mathbf{down}\mathcal{C}(X, \mathcal{T}, \leqslant) = \{X\backslash U \,:\, U \in \mathbf{up}\mathcal{C}(X, \mathcal{T}, \leqslant)\} = \{X\backslash U \,:\, U \in K\Omega(X, \mathcal{T}_1)\}$ eine Basis von $\mathcal{T}_2$. Also reicht es zu zeigen, dass $K\Omega(Y, \mathcal{T}_1|_Y) = \{U \cap Y \,:\, U \in K\Omega(X, \mathcal{T}_1)\}$, denn dann folgt $\Delta = \{Y\backslash U \,:\, U \in K\Omega(Y, \mathcal{T}_1|_Y)\} = \{Y\backslash(U \cap Y) \,:\, U \in K\Omega(X, \mathcal{T}_1)\} = \{Y\backslash U \,:\, U \in K\Omega(X, \mathcal{T}_1)\} = \{Y \cap U \,:\, U \in K\Omega(X, \mathcal{T}_2)\}$ und letzters ist eine Basis von $\mathcal{T}_2|_Y$. Weil Y eine kohärente Teilmenge ist, folgt $\{U \cap Y \,:\, U \in K\Omega(X, \mathcal{T}_1)\} \subseteq K\Omega(Y, \mathcal{T}_1|_Y)$. Sei andererseits $U \in K\Omega(Y, \mathcal{T}_1|_Y)$. Dann ist $U = V \cap Y$ für ein $V \in \Omega(X, \mathcal{T}_1)$, und $V = \bigcup\{V_i \,:\, i \in I\}$ für eine gewisse Familie von Basismengen $(V_i)_{i\in I} \in K\Omega(X, \mathcal{T}_1)^I$. Dann gilt $U = \bigcup\{V_i \cap Y \,:\, i \in I\}$ und da U kompakt ist gibt es endlich viele $i_1, \ldots i_n \in I$, sodass $U = \bigcup_{j=1}^n\{V_{i_j} \cap Y\}$. Sei $W := \bigcup_{j=1}^n V_{i_j}$ und damit $W \in K\Omega(X, \mathcal{T}_1)$ mit $Y \cap W = U$. Das war zu zeigen, und es folgt, dass Δ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_2|_Y$ ist.

Nun ist $(Y, \mathcal{T}_1|_Y)$ ein kohärenter Raum und wir haben gerade bewiesen, dass $(Y, \mathcal{T}_1|_Y, \mathcal{T}_2|_Y)$ sein pairwise Stone Space ist. Also ist $(Y, \mathcal{T}_1|_Y, \mathcal{T}_2|_Y)$ paarweise kompakt und daher Y paarweise kompakt in $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$. □

Korollar 4.33. *Für $Y \subseteq X$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Y ist clopen in $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$.*
2. *Y ist paarweise clopen in $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$.*
3. *Y ist eine doppelt kohärente Teilmenge von $(X, \mathcal{T}_1)$.*

5 Boolsche Algebren

5.1 Boolschen Algebren und Stone Space *(Stone Duality I)*

Definitionsgemäß sind Stone Spaces genau die kohärenten Hausdorffräume. Auf der anderen Seite kann man nun die Frage stellen, für welche distributiven Verbände A das Spektrum $spec(A)$ Hausdorff ist:

Proposition 5.1. *Sei A ein distributiver Verband. Dann ist das Spektrum $spec(A)$ genau dann Hausdorff, wenn A eine boolsche Algebra ist.*

Beweis. " $\Rightarrow$ " Es ist $A \cong K\Omega(spec(A))$. In Hausdorffräumen sind die kompakten offenen Mengen bezüglich Komplementbildung abgeschlossen. Offensichtlich definiert

$$^c : K\Omega(spec(A)) \to K\Omega(spec(A)) : K \mapsto K^c$$

eine unäre Operation, sodass $K\Omega(spec(A))$ zu einer boolschen Algebra wird. Also ist A isomorph zu einer boolschen Algebra und daher selbst eine boolsche Algebra.

" $\Leftarrow$ " Seien $I, J \in spec(A)$ mit $I \neq J$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a \in I\backslash J$. Aus $a^* \wedge a = 0 \in J$ folgt $a^* \in J$ und aus $a^* \vee a = 1 \notin I$ folgt $a^* \notin I$. Jetzt folgt $J \notin \eta_A(a^*) \ni I$ und $I \notin \eta_A(a) \ni J$. Außerdem folgt $\eta_A(a) \cap \eta_A(a^*) = \eta_A(a \wedge a^*) = \eta_A(0) = \varnothing$, und damit insgesamt die Hausdorff-Eigenschaft. □

Satz 5.2. *(Stone Duality I) Die Cofunktoren spec und $K\Omega$ begründen eine Dualität zwischen den Kategorien **Bool** der boolschen Algebren und **Stone** der Stone Spaces.*

Beweis. Es ist **Bool** ein Teilkategorie von **DVerb** und **Stone** eine Teilkategorie von **KohTop**. Der letzte Satz zeigt, dass *spec* genau die boolschen Algebren auf Stone Spaces abbildet. Die Dualität folgt nun unmittelbar aus der Einschränkung der Dualität **DVerb** $\sim$ **KohTop**. □

Damit haben wir auch folgende Repräsentation von boolschen Algebren:

Korollar 5.3. *Jede boolsche Algebra ist isomorph zu einer mengentheoretischen Algebra.*

Beweis. Jede boolsche Algebra A ist isomorph zu $K\Omega(specA)$. Die kompakten offenen Mengen auf einem Hausdorffraum sind unter endlicher Vereinigungs-, Schnitt- und Komplementbildung abgeschlossen, und formen daher eine mengentheoretische Algebra. □

Für die weitere Arbeit ist es zweckmäßig, die topologische Repräsentation von boolschen Algebren nicht nur über die Menge der Primideale zu haben, sondern auch über die Menge der Primfilter. Satz 2.25 liefert dazu die entscheidende Aussage.

Definition 5.4. Für eine boolsche Algebra A bezeichnen wir mit $\overline{spec}(A)$ die Menge der Primfilter auf A. Für $a \in A$ sei $\pi_A(a) := \{\mathfrak{F} \in \overline{spec}(A) \,:\, a \in \mathfrak{F}\}$.

Lemma 5.5. *Für eine boolsche Algebra A ist das System* $\{\pi_A(a) \,:\, a \in A\}$ *eine Basis einer Topologie* $\mathcal{T}$ *auf* $\overline{spec}(A)$. *Mit dieser Topologie versehen ist* $\overline{spec}(A)$ *homöomorph zu* $spec(A)$ *und die Abbildung* $^* : spec(A) \to \overline{spec}(A)$, $I^* = \{x^* \,:\, x \in I\}$ *ist ein Homöomorphismus. Dabei gilt:*

1. *Die Topologie* $\mathcal{T}$ *besteht genau aus den Mengen der Form* $\{\mathfrak{F} \in \overline{spec}(A) \,:\, \mathfrak{G} \nsubseteq \mathfrak{F}\}$ *für einen Filter* $\mathfrak{G}$ *bzw.* $\mathfrak{G} = A$.

2. *Die kompakten offenen Mengen von* $\overline{spec}(A)$ *sind genau die Mengen der Form* $\pi_A(a)$ *für ein* $a \in A$.

Beweis. Sind $a, b \in A$ so folgt $\pi_A(a) \cap \pi_A(b) = \pi_A(a \wedge b)$. Also ist das System $\{\pi_A(a) \,:\, a \in A\}$ schnittstabil. Außerdem ist $\overline{spec}(A) = \pi_A(1)$ und damit ist $\{\pi_A(a) \,:\, a \in A\}$ Basis einer Topologie. Nach Satz 2.25 ist $^* : spec(A) \to \overline{spec}(A)$ eine involutorische Bijektion. Für $a \in A$ gilt $\pi(a)^* = \{\mathfrak{F}^* \,:\, \mathfrak{F} \in \overline{spec}(A), a \in \mathfrak{F}\} = \{I \in spec(A) \,:\, a \notin I\} = \eta_A(a)$. Also induziert * eine Bijektion zwischen Basismengen und ist daher ein Homöomorphismus.

1. Die Topologie ist durch die Bilder von offenen Mengen von $spec(A)$ unter * gegeben. Das sind genau die Mengen der Form $\{J \in spec(A) \,:\, I \nsubseteq J\}^* = \{\mathfrak{F} \in \overline{spec}(A) \,:\, I \nsubseteq \mathfrak{F}^*\} = \{\mathfrak{F} \in \overline{spec}(A) \,:\, I^* \nsubseteq \mathfrak{F}\}$ für ein Ideal I. Die Aussage folgt nun, da für alle Ideale I entweder I^* ein Filter ist oder $I^* = A$ gilt.

2. Die Aussage folgt, da die kompakten offenen Mengen von $\overline{spec}(A)$ durch die Bilder der kompakten offenen Mengen von $spec(A)$ (das sind genau die Mengen der Form $\eta_A(a)$ für ein $a \in A$) unter * gegeben sind. □

Definition 5.6. Für eine boolsche Algebra A sei ab nun $\overline{spec}(A)$ der Raum der Primfilter versehen mit der soeben definierten Topologie. Ist B eine weitere boolsche Algebra und $f : A \to B$ ein Verbandshomomorphismus, so sei $\overline{spec}(f) := f^{-1} : \overline{spec}(B) \to \overline{spec}(A)$.

Satz 5.7. $\overline{spec}$: **Bool** → **Stone** *ist ein Cofunktor. Er begründet zusammen mit* $K\Omega$ *die Stone Duality I. Dabei gilt:*

1. *Für jede boolsche Algebra A ist* $\pi_A : A \to K\Omega\overline{spec}(A)$, $\pi(a) = \{\mathfrak{F} \in \overline{spec}(A) \,:\, a \in \mathfrak{F}\}$ *ein Verbandsisomorphismus. Er hat die bei einer Dualität erforderliche Kommutativitätseigenschaft:* $\pi_B \circ f = K\Omega\overline{spec}(f) \circ \pi_A$ *für alle Homomorphismen* $f : A \to B$.

2. *Für jeden Stone Space X ist* $\xi_X : X \to \overline{spec}K\Omega(X)$, $\xi_X(x) := \{U \in K\Omega(X) \,:\, x \in U\}$ *ein Homöomorphismus. Er hat die bei einer Dualität erforderliche Kommutativitätseigenschaft:* $\xi_Y \circ f = \overline{spec}K\Omega(f) \circ \xi_X$ *für alle Homöomorphismen* $f : X \to Y$.

3. *Es gilt* $K\Omega(\xi_X) = \pi^{-1}_{K\Omega(X)}$. *Äquivalent dazu gilt* $\xi_X(U) = \pi_{K\Omega(X)}(U)$ *für alle* $U \in K\Omega(X)$.

Beweis. Wir sind in der Situation von Lemma A.11, wobei $\mathscr{C}$ = **Bool**, $\mathscr{D}$ = **Stone**, $S = spec$, $T = K\Omega$ und $\xi_A = (.)^*$. Also folgt die Dualität.

1. Wieder mit Lemma A.11 ist $T(((.)^*)^{-1}) \circ \eta_A$ ein Isomorphismus mit der geforderten Kommutativitätseigenschaft. Es folgt $T(((.)^*)^{-1}) \circ \eta_A = T((.)^*) \circ \eta_A = ((.)^*)^{-1} \circ \eta_A = (.)^* \circ \eta_A = \pi_A$, wobei letzte Gleichheit aus dem Beweis von Lemma 5.5 folgt.

2. + 3. Man überprüft leicht, dass $\xi_X(x)$ tatsächlich immer ein Filter ist. Dass $\xi_X(x)$ prim ist, folgt da für $U \in K\Omega(X)$ entweder $U \in \xi_X(x)$ oder $U^c \in \xi_X(x)$, zusammen mit Korollar 2.26. Es ist $\xi_X(x) \in \pi_{K\Omega(X)}(U) \iff U \in \xi_X(x) \iff x \in U$. Also folgt $\xi_X(U) = \pi_{K\Omega(X)}(U)$.

Um zu sehen, dass ξ_X injektiv ist, seien $x, y \in X$ und $x \neq y$. Da X ein Stone Space ist, gibt es eine Menge $U \in K\Omega(X)$, sodass $x \in U$ und $y \notin U$. Also $U \in \xi_X(x)$, aber $U \notin \xi_X(y)$.

Wir zeigen, dass ξ_X surjektiv ist. Sei dazu $\mathfrak{F} \in \overline{spec}K\Omega(X)$. Es ist leicht zu überprüfen, dass dann $\mathfrak{H} := \{A \subseteq X \ : \ \exists U \in \mathfrak{F} : U \subseteq A\}$ ein mengentheoretischer Filter auf X ist. Nun gibt es einen feineren Ultrafilter $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{H}$. Da X kompakt ist, ist $\mathfrak{G}$ konvergent gegen ein (eindeutiges) $x \in X$. Also folgt für alle $U \in \Omega(X)$, dass $x \in U$ genau dann, wenn $U \in \mathfrak{G}$. Außerdem folgt aus der Maximalität von $\mathfrak{F}$, dass $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} \cap K\Omega(X) = \{U \in K\Omega(X) \ : \ x \in U\} = \xi_X(x)$.

Also ist ξ_X bijektiv. Da $\pi_{K\Omega(X)}$ die Basis $K\Omega(X)$ von X bijektiv auf die Basis $K\Omega\overline{spec}K\Omega(X)$ von $\overline{spec}K\Omega(X)$ abbildet, folgt wegen $\xi_X(U) = \pi_{K\Omega(X)}(U)$ für alle $U \in K\Omega(X)$, dass ξ_X auch eine Bijektion zwischen Basismengen induziert. Also ist ξ_X ein Homöomorphismus.

Die Kommutativitätseigenschaft folgt nun aus 3. zusammen mit Lemma A.8. $\square$

5.2 Boolsche Erweiterungen

Die Stone Duality I liefert nun eine Möglichkeit, aus einem distributiven Verband A eine boolsche Algebra zu konstruieren, welche in sehr engem Zusammenhang zu A steht.

Definition 5.8. Sei A ein distributiver Verband. Eine *boolsche Erweiterung* von A ist ein Paar (B, τ), sodass

1. B ist eine boolsche Algebra.
2. $\tau : A \to B$ ist ein injektiver Verbandshomomorphismus.
3. Ist C eine weitere boolsche Algebra und $f : A \to C$ ein Verbandshomomorphismus, dann gibt es einen eindeutigen Verandshomomorphimus $g : B \to C$, sodass $f = g \circ \tau$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau"'] & C \\ B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Wir zeigen als nächstes die Existenz und Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie) von boolschen Erweiterungen.

Lemma 5.9. *Sei A ein distributiver Verband und (B, τ), (B', τ') boolsche Erweiterungen. Dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus $f : B \to B'$, sodass $f \circ \tau = \tau'$.*

Beweis. Nehmen wir als Erstes an, dass B eine boolsche Teilalgebra von B' und $\tau = \tau'$ ist. Wir zeigen, dass dann schon $B = B'$ folgt. Sei also $B \subsetneq B'$ eine echte Teilalgebra. Für jedes $\mathfrak{F} \in \overline{spec}(B')$ folgt $\mathfrak{F} \cap B \in \overline{spec}(B)$. Also können wir eine Abbildung $\mu : \overline{spec}(B') \to \overline{spec}(B)$, $\mu(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F} \cap B$ definieren.

Wir zeigen, das μ bijektiv ist. Ist $\mathfrak{F} \in \overline{spec}(B)$, so folgt, dass $\{x \in B' \ : \ \exists y \in \mathfrak{F}, y \leqslant x\}$ ein Filter auf B' ist. Dann gibt es einen Ultrafilter $\mathfrak{G} \in \overline{spec}(B')$ mit $\{x \in B' \ : \ \exists y \in \mathfrak{F}, y \leqslant x\} \subseteq \mathfrak{G}$. Nun gilt zwangsläufig $\mathfrak{G} \cap B = \mathfrak{F}$, also ist μ surjektiv. Wäre μ nicht injektiv, so gäbe es $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} \in \overline{spec}(B')$ mit $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F} \cap B = \mathfrak{G} \cap B$. Wegen $\tau(A) \subseteq B$ folgt $\mathbb{I}_{\mathfrak{F}} \circ \tau = \mathbb{I}_{\mathfrak{G}} \circ \tau$ und daher $\mathbb{I}_{\tau^{-1}(\mathfrak{F})} = \mathbb{I}_{\tau^{-1}(\mathfrak{G})}$. Nun ist aber $\tau^{-1}(\mathfrak{F})$ ein Ultrafilter auf A und daher $\mathbb{I}_{\tau^{-1}(\mathfrak{F})} : A \to \mathbb{Z}_2$ ein Verbandshomomorphismus. Wegen der Definition der boolschen Erweiterung gibt es genau ein $g : B' \to \mathbb{Z}_2$, sodass $\mathbb{I}_{\tau^{-1}(\mathfrak{F})} = g \circ \tau$, also $\mathbb{I}_{\mathfrak{G}} = \mathbb{I}_{\mathfrak{F}} = g$. Also ist μ auch injektiv und daher bijektiv.

Nun gilt für $x \in B$, dass $\mu(\pi_{B'}(x)) = \{\mu(\mathfrak{F}) \ : \ \mathfrak{F} \in \overline{spec}(B'), x \in \mathfrak{F}\} = \{\mathfrak{F} \in \overline{spec}(B) \ : \ x \in \mathfrak{F}\} = \pi_B(x)$, wobei die vorletzte Gleichheit aus der Bijektivität der Abbildung μ folgt. Also ist $\mathcal{C} := \mu(K\Omega\overline{spec}(B)) \subsetneq K\Omega\overline{spec}(B')$, wobei die Ungleichheit aus $B \subsetneq B'$ folgt. Da μ als Bijektion mit der Durschnittbildung kommutiert und $K\Omega\overline{spec}(B)$ schnittstabil ist, ist auch $\mathcal{C}$ schnittstabil und daher Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf $\overline{spec}(B')$. Versehen mit dieser Topologie $\mathcal{T}$ ist $\overline{spec}(B')$ homöomorph zu $\overline{spec}(B)$ (versehen mit der „Standarttopologie"), und die Topologie $\Omega\overline{spec}(B')$ ist echt feiner als $\mathcal{T}$.

Sei nun $x \in B' \backslash B$. Dann ist auch $x^* \in B' \backslash B$, also $\pi_{B'}(x), \pi_{B'}(x^*) \in K\Omega\overline{spec}(B')$ aber $\pi_{B'}(x), \pi_{B'}(x^*) \notin \mathcal{C}$. Da $\pi_{B'}(x)$ und $\pi_{B'}(x^*)$ kompakt sind bezüglich $\Omega\overline{spec}(B')$, sind sie auch kompakt bezüglich der gröberen Topologie $\mathcal{T}$. Insbesondere sind sie wegen $\pi_{B'}(x^*) = \pi_{B'}(x)^c$ beide die Komplemente einer kompakten Menge und daher offen bezüglich $\mathcal{T}$. Also ist $\pi_{B'}(x) \in \mathcal{C}$, und das ist der gewünschte Widerspruch.

Um den Satz zu beweisen, seien (B, τ) und (B', τ') beliebige boolsche Erweiterungen. Wäre $\tau(A)$ nicht dicht in B, so wäre $([\tau(A)]_{\mathbf{Bool}}, \tau)$ ebenfalls eine boolsche Erweiterung und nach dem ersten Beweisteil folgt der Widerspruch. Also ist $\tau(A)$ dicht in B und $\tau'(A)$ dicht in B'. Da $\tau : A \to B$ und $\tau' : A \to B'$ Verbandshomomorphismen sind, gibt es nach der Definition der boolschen Erweiterung eindeutige $f : B \to B'$ und $g : B' \to B$ mit $f \circ \tau = \tau'$ und $g \circ \tau' = \tau$. Insbesondere folgt $f \circ g \circ \tau' = \tau$ und $g \circ f \circ \tau = \tau'$. Also sind $f|_{\tau(A)}$und $g|_{\tau'(A)}$ bijektiv und zu einander invers. Daher sind die eindeutigen Fortsetzung f und g von $f|_{\tau(A)}$ und $g|_{\tau'(A)}$ nach dem extension theorem (Satz 2.38) Isomorphismen. □

Definition 5.10. Sei A ein distributiver Verband. Dann bezeichnet $\mathscr{B}(A)$ die mengentheoretische Algebra auf $spec(A)$, welche von dem System $\{\eta_A(x) : x \in A\} = K\Omega spec(A)$ erzeugt wird.

Satz 5.11. *Sei A ein distributiver Verband. Dann ist $(\mathscr{B}(A), \eta_A)$ die bis auf Isomorphie eindeutige boolsche Erweiterung von A.*

Beweis. $\mathscr{B}(A)$ ist als Mengenalgebra eine boolsche Algebra und $\eta_A : A \to K\Omega spec(A)$ ist ein Verbandsisomorphismus und daher $\eta_A : A \to \mathscr{B}(A)$ ein injektiver Verbandshomomorphismus.

Sei C eine boolsche Algebra und $f : A \to C$ ein Verbandshomomorphismus. Ist $g : \mathscr{B}(A) \to C$ ein Verbandshomomorphismus, so erfüllt er offenbar genau dann die Bedingung $g \circ \eta_A = f$, falls $g|_{K\Omega spec(A)} = f \circ \eta_A^{-1}|_{K\Omega spec(A)}$.

Nun ist $K\Omega spec(A)$ ein **Bool**-dichter Teilverband von $\mathscr{B}(A)$, und $\tilde{f} : K\Omega spec(A) \to C$, definiert über $\tilde{f} := f \circ \eta_A^{-1}$, ist ein Verbandshomomorphismus. Nach Korollar 2.39 gibt es eine eindeutige Fortsetzung von $\tilde{f}$ zu einem Verbandshomomorphismus $g : \mathscr{B}(A) \to C$. Also ist $(\mathscr{B}(A), \eta_A)$ eine boolsche Erweiterung.

Die Eindeutigkeit folgt aus vorhergenden Lemma. □

6 Closure Algebren

Wir zeigen nun die Dualität von closure Algebren und quasi Esakia Spaces. Dazu erweitern wir die Stone Duality I zwischen boolschen Algebren und Stone Spaces, sodass sich die gewünschte Dualität ergibt.

Definition 6.1. Ist $(B, ^-)$ eine closure Algebra, dann sei $\Upsilon(B, ^-) := (\overline{spec}(B), \Omega\overline{spec}(B), \leqslant)$, wobei für $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} \in \overline{spec}(B)$ gilt, dass $\mathfrak{F} \leqslant \mathfrak{G} :\iff \mathfrak{F} \cap B^\circ \subseteq \mathfrak{G} \cap B^\circ$. Ist $(C, ^-)$ eine weitere closure Algebra und $f : B \to C$ ein closure Algebren Homomorphismus, dann sei $\Upsilon(f) := f^{-1} : \overline{spec}(C) \to \overline{spec}(B)$.

Wir zeigen nun zwei einfache Lemmata über die Halbordnung $\leqslant$, welche im Weiteren öfters benötigt werden.

Lemma 6.2. *Sei $(B, ^-)$ eine closure Algebra und $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} \in \overline{spec}(B)$. Dann ist $\mathfrak{F} \cap B^\circ \subseteq \mathfrak{G} \cap B^\circ$ genau dann, wenn $\mathfrak{F} \cap B^- \supseteq \mathfrak{G} \cap B^-$*

Beweis. Da B eine boolsche Algebra ist, gilt für alle $a \in B^\circ$ und Ultrafilter $\mathfrak{H}$, dass genau eine der folgenden Aussagen gilt: $a \in \mathfrak{H}$ oder $a^* \in \mathfrak{H}$. Daher ist $\mathfrak{H} \cap A^\circ = \{x \in A^\circ : x^* \notin \mathfrak{H}\}$ für alle Ultrafilter $\mathfrak{H}$. Also gilt $\mathfrak{F} \cap B^\circ \subseteq \mathfrak{G} \cap B^\circ \iff (\forall a \in \mathfrak{F} \cap B^\circ \Rightarrow a \in \mathfrak{G} \cap B^\circ) \iff (\forall a \in \mathfrak{G} \cap B^- \Rightarrow a \in \mathfrak{F} \cap B^-) \iff \mathfrak{F} \cap B^- \supseteq \mathfrak{G} \cap B^-$. □

Lemma 6.3. *Sei $(B, ^-)$ eine closure Algebra und $\leqslant$ die über Υ definierte Quasiordnung auf $\overline{spec}(B)$. Dann gilt für alle $a \in B$: $\pi_B(a^-) = \downarrow \pi_B(a)$.*

Beweis. " $\supseteq$ " Sei $\mathfrak{F} \in \downarrow \pi_B(a)$. Dann gibt es $\mathfrak{G} \in \overline{spec}(B)$, sodass $\mathfrak{G} \geqslant \mathfrak{F}$ und $a \in \mathfrak{G}$. Dann folgt auch $a^- \in \mathfrak{G}$ und wegen $\mathfrak{F} \cap B^- \supseteq \mathfrak{G} \cap B^-$ auch $a^- \in \mathfrak{F}$. Also folgt $\mathfrak{F} \in \pi_B(a^-)$.

" $\subseteq$ " Sei andererseits $\mathfrak{F} \in \pi_B(a^-)$ und daher $a^- \in \mathfrak{F}$. Wir zeigen, dass $\mathfrak{F} \in \downarrow \pi_B(a)$, d.h. wir zeigen, dass ein Filter $\mathfrak{G} \in \overline{spec}(B)$ existiert mit $\mathfrak{G} \geqslant \mathfrak{F}$ und $a \in \mathfrak{G}$. Sei dazu

$$\mathfrak{X} := \{\mathfrak{G} \subseteq B \,:\, \mathfrak{G}\, ist\, Filter,\, \mathfrak{G} \cap B^\circ \supseteq \mathfrak{F} \cap B^\circ,\, a \in \mathfrak{G}\}$$

Wir suchen maximale Elemente in $\mathfrak{X}$ bezüglich der Teilmengenrelation. Um zu sehen, dass $\mathfrak{X}$ nicht leer ist, sei

$$\mathfrak{H} := \{b \in B \,:\, \exists c \in \mathfrak{F} \cap B^\circ :\, b \geqslant a \wedge c\}$$

Für $c \in \mathfrak{F} \cap B^\circ$ folgt wegen $a^- \in \mathfrak{F}$, dass $c \wedge a^- \neq 0$ und daher $a^- \nleqslant c^*$. Da c offen ist, ist c^* abgeschlossen und damit folgt auch $a \nleqslant c^*$. Also ist $a \wedge c \neq 0$ für alle $c \in \mathfrak{F} \cap B^\circ$ und es folgt $0 \notin \mathfrak{H}$. Man sieht jetzt leicht, dass $\mathfrak{H}$ ein Filter ist. Außerdem gilt für $b \in \mathfrak{F} \cap B^\circ$, dass $b \geqslant a \wedge b$ und damit $b \in \mathfrak{H}$. Da auch $a \in \mathfrak{H}$, folgt $\mathfrak{H} \in \mathfrak{X}$.

Für eine lineare Teilkette $(\mathfrak{H}_i)_{i \in I} \in \mathfrak{X}^I$ ist $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{H}_i \in \mathfrak{X}$ eine obere Schranke. Also hat $\mathfrak{X}$ maximale Elemente. Nun sind maximale Elemente von $\mathfrak{X}$ aber auch maximal unter allen Filtern und daher Ultrafilter. Also gibt es ein $\mathfrak{G} \in \mathfrak{X} \cap \overline{spec}(B)$, und damit $\mathfrak{G} \geqslant \mathfrak{F}$ sowie $a \in \mathfrak{G}$. □

Im Folgenden ist das nächste Resultat sehr hilfreich.

Lemma 6.4. *Sei $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ ein quasi Esakia Space und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}(X)$ eine durch $\supseteq$ gerichtete Menge von abgeschlossenen Mengen, d.h. für alle $A, B \in \mathcal{U}$ gibt es $C \in \mathcal{U}$ mit $C \subseteq A \cap B$. Dann gilt $\downarrow(\bigcap_{A \in \mathcal{U}} A) = \bigcap_{A \in \mathcal{U}}(\downarrow A)$.*

Beweis. Sei $x \in \downarrow(\bigcap_{A \in \mathcal{U}} A)$. Dann existiert $y \in \bigcap_{A \in \mathcal{U}} A$ mit $x \leqslant y$. Also $x \in \downarrow A$ für alle $A \in F$ und damit $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{U}}(\downarrow A)$.

Sei andererseits $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{U}}(\downarrow A)$. Ist $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}$ eine endliche Teilmenge, dann existiert $C \in \mathcal{U}$, sodass $C \subseteq \bigcap \mathcal{M}$. Wegen $x \in \downarrow C$ folgt auch $x \in \downarrow(\bigcap \mathcal{M})$ und damit $\uparrow x \cap \bigcap \mathcal{M} \neq \varnothing$. Also ist $(\uparrow x \cap A)_{A \in \mathcal{U}}$ ein Familie abgeschlossener Teilmengen mit der endlichen Schnitteigenschaft. Da X kompakt ist, folgt $\uparrow x \cap \bigcap_{A \in \mathcal{U}} A \neq \varnothing$ und daher $x \in \downarrow(\bigcap_{A \in \mathcal{U}} A)$ □

Proposition 6.5. *Sei $(B, ^-)$ eine closure Algebra. Dann ist $\Upsilon(B, ^-)$ ein quasi Esakia Space.*

Beweis. Die Relation definiert über $\mathfrak{F} \leqslant \mathfrak{G} \iff \mathfrak{F} \cap B^\circ \subseteq \mathfrak{G} \cap B^\circ$ ist offenbar eine Quasiordnung auf $\overline{spec}(B)$. Außerdem ist B eine boolsche Algebra und daher $\Upsilon(B, ^-)$ ein Stone Space. Wir beweisen die Punkte von Satz 3.18:

Wir zeigen, dass $\uparrow \mathfrak{F}$ abgeschlossen ist für alle $\mathfrak{F} \in \overline{spec}(B)$. Sei dazu $\mathfrak{G} \notin \uparrow \mathfrak{F}$, also $\mathfrak{G} \cap B^- \nsubseteq \mathfrak{F} \cap B^-$, und sei $a \in (\mathfrak{G} \cap B^-) \backslash \mathfrak{F}$. Dann folgt für alle $\mathfrak{H} \geqslant \mathfrak{F}$, dass $a \notin \mathfrak{H}$ und damit $\pi_B(a) \cap \uparrow \mathfrak{F} = \varnothing$, und $\mathfrak{G} \in \pi_B(a)$. Da $\pi_B(a)$ offen ist, folgt die Behauptung.

Die clopen Mengen von $\Upsilon(B, ^-)$ sind von der Form $\pi_B(a)$ für ein $a \in B$. Es folgt, dass $\downarrow \pi_B(a) = \pi_B(a^-)$ ebenfalls clopen ist. □

Proposition 6.6. *Seien A und B closure Algebren und $f : A \to B$ ein closure Algebren Homomorphismus. Dann ist $\Upsilon(f)$ ein Esakia Homomorphismus.*

Beweis. Aus der Stone Duality folgt, dass $g := \Upsilon(f)$ stetig ist.

Um zu sehen, dass g stark isoton ist, zeigen wir als Erstes, dass für eine clopen Menge $U \subseteq \overline{spec}(A)$ gilt: $g^{-1}(\downarrow U) = \downarrow g^{-1}(U)$. Es gilt $U = \pi_A(x)$ für ein $x \in A$ und daher $g^{-1}(\downarrow \pi_A(x)) = g^{-1}(\pi_A(x^-)) = K\Omega\overline{spec}(f)(\pi_A(x^-)) = \pi_B(f(x^-)) = \pi_B(f(x)^-) = \downarrow \pi_B(f(x)) = \downarrow K\Omega\overline{spec}(f)(\pi_A(x)) = \downarrow g^{-1}(\pi_A(x))$.

Nun ist g genau dann stark isoton, falls $g^{-1}(\downarrow x) = \downarrow g^{-1}(x)$ für alle $x \in \Upsilon(B)$. Da $\Upsilon(B)$ ein Stone Space ist, ist $x = \bigcap\{U \in K\Omega(\Upsilon(B)) \,:\, x \in U\} = \bigcap_{U \in \xi_{\Upsilon(X)}(x)} U$ und daher ist g genau dann stark isoton, falls $g^{-1}(\downarrow(\bigcap_{U \in \xi_{\Upsilon(X)}(x)} U)) = \downarrow g^{-1}(\bigcap_{U \in \xi_{\Upsilon(X)}(x)} U)$. Es gilt aber:

$$\begin{aligned} g^{-1}(\downarrow(\bigcap_{U \in \xi_{\Upsilon(X)}(x)} U)) &= g^{-1}(\bigcap_{U \in \xi_{\Upsilon(X)}(x)} \downarrow U) = \bigcap_{U \in \xi_{\Upsilon(X)}(x)} g^{-1}(\downarrow U) = \bigcap_{U \in \xi_{\Upsilon(X)}(x)} \downarrow g^{-1}(U) \\ &= \downarrow(\bigcap_{U \in \xi_{\Upsilon(X)}(x)} g^{-1}(U)) = \downarrow(g^{-1}(\bigcap_{U \in \xi_{\Upsilon(X)}(x)} U)) \end{aligned}$$

wobei Lemma 6.4 verwendet wurde. $\square$

Korollar 6.7. $\Upsilon : \mathbf{CloAlg} \to \mathbf{QEas}$ *ist ein Cofunktor.*

Definition 6.8. Ist $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ ein quasi Esakia Space, dann sei $\Xi(X, \mathcal{T}, \leqslant) := (K\Omega(X), ^-)$, wobei $U^- := \downarrow U$ für alle $U \in K\Omega(X)$. Ist $(Y, \mathcal{O}, \leqslant_Y)$ ein weiterer quasi Esakia Space und $f : X \to Y$ ein Esakia Homomorphismus, dann sei $\Xi(f) := f^{-1} : K\Omega(Y) \to K\Omega(X)$.

Proposition 6.9. *Ist $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ ein quasi Esakia Sapce, dann ist $\Xi(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ eine closure Algebra.*

Beweis. Da X ein quasi Esakia Space ist, folgt tatsächlich $U^- = \downarrow U \in K\Omega(X)$ für alle $U \in K\Omega(X)$. Alle Axiome folgen nun sofort. $\square$

Proposition 6.10. *Ist $f : X \to Y$ ein Esakia Homomorphismus zwischen zwei Esakia Spaces $(X, \mathcal{T}, \leqslant_X)$ und $(Y, \mathcal{O}, \leqslant_Y)$, dann ist $\Xi(f)$ ein closure Algebren Homomorphismus.*

Beweis. Wegen der Stone Duality ist $g := \Xi(f)$ ist ein Verbandshomomorphismus. Es bleibt noch zu zeigen, dass Abschlüsse erhalten werden:

$$g(U^-) = g(\downarrow U) = f^{-1}(\downarrow U) = \downarrow f^{-1}(U) = g(U)^-.$$

$\square$

Korollar 6.11. $\Xi : \mathbf{QEsa} \to \mathbf{CloAlg}$ *ist ein Cofunktor.*

Satz 6.12. *Die Cofunktoren Ξ und Υ begründen eine Dualität zwischen der Kategorie* **QEsa** *und der Kategorie* **CloAlg**. *Dabei gilt*

1. *Für jede closure Algebra A ist $\pi_A : A \to \Xi\Upsilon(A)$, $\pi_A(x) = \{\mathfrak{F} \in \overline{spec}(A) : x \in \mathfrak{F}\}$ ein closure Algebren Isomorphismus. Er hat die bei einer Dualität erforderliche Kommutativitätseigenschaft: $\pi_B \circ f = K\Omega\overline{spec}(f) \circ \pi_A$ für alle Homomorphismen $f : A \to B$.*

2. *Für einen quasi Esakia Space X ist $\xi_X : X \to \Upsilon\Xi(X)$, $\xi_X(x) = \{U \in K\Omega(X) : x \in U\}$ ein Esakia Isomorphismus. Er hat die bei einer Dualität erforderliche Kommutativitätseigenschaft: $\xi_Y \circ f = \overline{spec}K\Omega(f) \circ \xi_X$ für alle Homöomorphismen $f : X \to Y$.*

Beweis. 1. Aus der Stone Duality I folgt, dass π_A ein Verbandsisomorphismus ist. Es bleibt zu zeigen, dass sowohl π_A als auch π_A^{-1} die Abschlussoperation erhalten. Wir haben $\pi_A(a^-) = \downarrow\pi_A(a) = \pi_A(a)^-$. Ist $U \in \Xi\Upsilon(A)$ so gibt es $a \in A$ mit $\pi_A(a) = U$ und damit $\pi_A^{-1}(U^-) = \pi_A^{-1}(\downarrow \pi_A(a)) = \pi_A^{-1}(\pi(a^-)) = a^- = \pi_A^{-1}(U)^-$.

2. Wieder mit der Stone Duality I folgt, dass ξ_X ein Homöomorphismus ist. Es bleibt die starke Isotonie von ξ_X und ξ_X^{-1} zu zeigen. Wegen der Bijektivität ist dies gleichbedeutend dazu, dass sowohl ξ_X als auch ξ_X^{-1} die Ordnung erhalten.

Seien $x, y \in X$ und $x \leqslant y$. Wir müssen zeigen, dass $\xi_X(x) \leqslant \xi_X(y)$. Das ist definitionsgemäß genau dann der Fall, wenn $\xi_X(x) \cap (K\Omega(X))^\circ \subseteq \xi_X(y) \cap (K\Omega(X))^\circ$. Sei also $U \in \xi_X(x) \cap (K\Omega(X))^\circ$. Da die abgeschlossenen Elemente in $K\Omega(X)$ genau die Downsets sind und deren Komplemente genau die Upsets, sind die Upsets genau die offenen Elemente. Es folgt, dass U ein Upset ist und daher $y \in U$. Also folgt $U \in \xi_X(y) \cap (K\Omega(X))^\circ$.

Sei umgekehrt $x \nleqslant y$. Dann gibt es ein clopen Upset U mit $x \in U$ aber $y \notin U$. Also $\xi_X(x) \cap (K\Omega(X))^\circ \nsubseteq \xi_X(y) \cap (K\Omega(X))^\circ$ oder $\xi_X(x) \nleqslant \xi_X(y)$.

Dass π_A und ξ_X die geforderten Kommutativitätseigenschaften haben folgt unmittelbar aus der Stone Duality.

Es bleibt die Bijektivität der Funktoren auf den Morphismen zu zeigen. Sämtliche Morphismen in **CloAlg** sind auch Morphismen in **Bool**. Da für closure Algebren A und B die Abbildungen π_A und π_B Isomorphismen sind, ist die Abbildung $Mor_{\mathbf{CloAlg}}(A, B) \to Mor_{\mathbf{CloAlg}}(\Xi\Upsilon(A), \Xi\Upsilon(B)) : f \to \pi_B^{-1} \circ f \circ \pi_A$ bijektiv. Aus der Stone Duality folgt, dass $\Xi\Upsilon(f) = \pi_B^{-1} \circ f \circ \pi_A$. Zwangsläufig ist Υ injektiv und Ξ surjektiv. Führt man die analoge Überlegung für Morphismen in **QEsa** durch erhält man die gewünschte Bijektivität. $\square$

7 Heyting Algebren

7.1 Heyting Algebren und Esakia Spaces *(Esakia Duality)*

Zum Beweis der Esakia Dualität verwenden wir die schon bewiesene Dualität zwischen closure Algebren und quasi Esakia Spaces. Wir werden diese Dualität einschränken: Auf der einen Seite auf die Kategorie der Esakia Spaces und auf der anderen Seite - zwangsläufig - auf jene Teilkategorie von **CloAlg**, deren Objekte genau solche closure Algebren A sind, für welche $\Upsilon(A)$ ein Esakia Spaces ist. Weiters werden wir sehen, dass letzter Teilkategorie äquivalent zu **Heyt** ist, und damit wird insgesamt die gewünschte Dualität **Heyt** $\sim$ **Esa** folgen.

Wir beginnen mit zwei Resultaten, welche eine erste Beziehung zwischen closure Algebren und Heyting Algebren erkennen lassen.

Proposition 7.1. *Sei $(A, ^-)$ eine closure Algebra. Dann ist A° ein Teilverband von A und eine Heyting Algebra. Dabei gilt: $x \to y = (x \wedge y^*)^{-*}$ für alle $x, y \in A^\circ$.*

Beweis. Dass A° ein Teilverband ist, folgt wegen $A^\circ = A^{-*}$ zusammen mit der Tatsache, dass A^- ein Teilverband ist. Für alle $x, y \in A^\circ$ ist tatsächlich $(x \wedge y^*)^{-*} \in A^\circ$. Es gilt weiters $x \wedge (x \wedge y^*)^{-*} \leqslant x \wedge (x \wedge y^*)^* = x \wedge (x^* \vee y) \leqslant y$. Also gilt $x \wedge (x \wedge y^*)^{-*} \leqslant y$. Sei andererseits $a \in A^\circ$ mit $x \wedge a \leqslant y$. Dann folgt $a \leqslant x^* \vee y$ und daher $x \wedge y^* \leqslant a^*$, also $(x \wedge y^*)^- \leqslant (a^*)^- = a^*$, da $a \in A^\circ$. Es folgt $a \leqslant (x \wedge y^*)^{-*}$ und insgesamt $x \to y = (x \wedge y^*)^{-*}$. □

Definition 7.2. Für eine closure Algebra A bezeichne A° die Heyting Algebra der offenen Elemente. Ist B eine weitere closure Algebra und $f : A \to B$ ein closure Algebrenhomomorphismus, dann sei $f^\circ := f|_{A^\circ} : A^\circ \to B^\circ$.

Proposition 7.3. *Sei $(H, \to)$ eine Heyting Algebra. Dann gibt es einen Abschlussoperator $^-$ auf der boolschen Erweiterung $(\mathscr{B}(H), \eta_H)$, sodass $\mathscr{B}(H)^\circ = \eta_H(H)$.*

Beweis. Wir zeigen, dass $A := \{\eta_H(x)^* : x \in H\}$ die Bedingungen an die Menge der abgeschlossenen Elemente erfüllt. Offenbar ist $\eta_H(H)$ ein Teilverband von $\mathscr{B}(H)$ und daher ist auch A ein Teilverband von $\mathscr{B}(H)$. Es bleibt zu zeigen, dass für jedes $a \in \mathscr{B}(H)$ die Menge $\uparrow a \cap A$ ein Minimum besitzt. Da $\eta_H(A)$ **Bool**-dicht in $\mathscr{B}(A)$ liegt folgt, dass jedes $a \in \mathscr{B}(H)$ von der Form $a^* = \bigwedge_{i=1}^n (\eta_H(x_i)^* \vee \eta_H(y_i))$ ist. Wir zeigen, dass dann $u := (\bigwedge_{i=1}^n \eta_H(x_i \to y_i))^* = min(\uparrow a \cap A)$. Erstens gilt $u \in A$. Weiters folgt für alle $i = 1, \dots, n$, dass $\eta(x_i \to y_i) \wedge \eta(x_i) = \eta((x_i \to y_i) \wedge x_i) \leqslant \eta(y_i)$ und daher $\eta(x_i \to y_i) \leqslant \eta(x_i) \to \eta(y_i)$. Also folgt $u \geqslant (\bigwedge_{i=1}^n \eta(x_i) \to \eta(y))^* = a$.

Sei nun $b \in \uparrow a \cap A$. Dann ist $b^* \in \eta_H(H)$, also $b^* = \eta_H(y)$ für ein $y \in H$. Es ist $b^* \leqslant a^*$ und daher gilt für alle $i = 1, \dots, n$, dass $b^* \leqslant \eta_H(x_i)^* \vee \eta_H(y_i)$, und damit $\eta_H(y_i) \wedge \eta_H(x_i) = b^* \wedge \eta_H(x_i) \leqslant \eta_H(y_i) \iff y \wedge x_i \leqslant y_i$ und daher $y \leqslant x_i \to y_i$. Also folgt auch $b^* = \eta_H(y) \leqslant \bigwedge_{i=1}^n (\eta_H(x_i \to y_i))$ und damit erhalten wir $b \geqslant u$. □

Definition 7.4. Für eine Heyting Algebra H sei $\mathscr{B}(H)$ ab nun die soeben definierte closure Algebra. Ist K eine weitere Heyting Algebra und $f : H \to K$ ein Homomorphismus, dann sei $\mathscr{B}(f) : \mathscr{B}(H) \to \mathscr{B}(K)$ der eindeutige Homomorphismus, sodass $\mathscr{B}(f) \circ \eta_H = \eta_K \circ f$.

Damit erhalten wir unmittelbar:

Korollar 7.5. $\mathscr{B}$: **Heyt** $\to$ **CloAlg** *und* $(.)^\circ$: **CloAlg** $\to$ **Heyt** *sind Funktoren.*

Es ist also jede Heyting Algebra H isomorph zu der Heyting Algebra der offenen Elemente einer closure Algebra A. Diese Repräsentation ist allerdings nicht eindeutig im kategorientheoretischen Sinne; d.h. aus $A^\circ \cong B^\circ$ für zwei closure Algebren A und B muss im Allgemeinen nicht $A \cong B$ folgen. Es gibt also für jede Heyting Algebra H mehrere, nicht isomorphe, closure Algebren A mit $A^\circ = H$. Allerdings hat, wie im Folgenden bewiesen wird, bis auf Isomorphie genau eine dieser closure Algebren die Eigenschaft, dass ihr zugehöriger quasi Esakia Space $\Upsilon(A)$ sogar ein Esakia Space ist. Wir definieren daher

Definition 7.6. Es bezeichne **CloAlg*** die Kategorie jener closure Algebren A, mit der Eigenschaft, dass $\Upsilon(A)$ ein Esakia Space ist, zusammen mit closure Algebren Homomorphismen.

Damit erhalten wir unmittelbar:

Korollar 7.7. *Die Funktoren* Υ : **CloAlg*** $\to$ **Esa** *und* Ξ : **Esa** $\to$ **CloAlg*** *begründen eine Dualität der Kategorien* **CloAlg*** *und* **Esa**.

Im Folgenden wird gezeigt, dass **CloAlg***$\equiv$**Heyt** gilt.

Lemma 7.8. *Sei H eine Heyting Algebra, $(\mathscr{B}(H), \eta_H)$ ihre boolsche Erweiterung und $(X, \mathcal{T}, \leqslant) := \Upsilon(\mathscr{B}(H), {}^*)$ der zugehörige quasi Esakia Space. Dann ist X ein Esakia Space. Ist A eine weitere closure Algebra mit den Eigenschaften $A^\circ \cong H$ und $\Upsilon(A)$ ist ein Esakia Space, so folgt $A \cong \mathscr{B}(H)$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\leqslant$ eine Halbordnung ist. Seien $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} \in X$ Ultrafilter und $\mathfrak{F} \cap \mathscr{B}(H)^\circ = \mathfrak{G} \cap \mathscr{B}(H)^\circ$. Wir müssen zeigen, dass $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ Primfilter sind, sind ihre Komplemente Primideale. Daher sind die Abbildungen $f := \mathbb{I}_{\mathfrak{F}}$ und $g := \mathbb{I}_{\mathfrak{G}}$ Verbandshomomorphismen von $\mathscr{B}(H)$ in den $\mathbb{Z}_2$. Somit sind $\tilde{f} := f \circ \eta_H$ und $\tilde{g} := g \circ \eta_H$ Homomorphismen von H in den $\mathbb{Z}_2$. Wegen $\eta_H(A) = \mathscr{B}(H)^\circ$ und $f|_{\mathscr{B}(H)^\circ} = g|_{\mathscr{B}(H)^\circ}$ folgt $\tilde{f} = \tilde{g}$. Da $\mathscr{B}(H)$ eine boolsche Erweiterung ist, gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $h : \mathscr{B}(H) \to \mathbb{Z}_2$, sodass $\tilde{f} = \tilde{g} = h \circ \eta_H$, und folglich $f = g = h$. Also folgt $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$.

Wir zeigen nun die zweite Aussage. Seien A, B closure Algebren mit $A^\circ \cong B^\circ$ und sodass $X := \Upsilon(A)$ und $Y := \Upsilon(B)$ Esakia Spaces sind. Wir müssen $A \cong B$, oder äquivalent $X \cong Y$, zeigen. Als Esakia Spaces sind X und Y auch Priestley Spaces.

Definitionsgemäß gilt $Mor_{\mathbf{Esa}}(X, Y) \subseteq Mor_{\mathbf{Priest}}(X, Y)$. Ist andererseits $f \in Mor_{\mathbf{Priest}}(X, Y)$ eine Isomorphie, so folgt für alle $x, y \in X$, dass $x \leqslant y$ genau dann, wenn $f(x) \leqslant f(y)$. Zusammen mit Lemma 2.3 folgt daraus die starke Isotonie von f. Insbesondere ist $f \in Mor_{\mathbf{Esa}}(X, Y)$. Es folgt, dass X und Y in der Kategorie **Esa** genau dann isomorph sind, wenn sie in der Kategorie **Priest** isomorph sind. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn ihre zugehörigen pairwise Stone Spaces isomorph sind, das ist wiederum genau dann der Fall, wenn die zugehörigen kohärenten Räume isomorph sind, also genau dann wenn $\mathfrak{F}\mathbb{T}(X) = (X, \mathbf{up}\Omega(X)) \cong \mathfrak{F}\mathbb{T}(Y) = (Y, \mathbf{up}\Omega(Y))$. Nach Lemma 3.14 bilden die kompakten offenen Mengen $\mathbf{up}\mathcal{C}(X)$ bzw. $\mathbf{up}\mathcal{C}(Y)$ Basen der Topologien $\mathbf{up}\Omega(X)$ bzw. $\mathbf{up}\Omega(Y)$. Die kompakten offenen Upsets in X bzw. Y sind aber gerade die offenen Elemente in der closure Algebra $\Xi(X)$ bzw. $\Xi(Y)$. Wegen $A^\circ \cong B^\circ$ folgt also die Verbandsisomorphie $\mathbf{up}\mathcal{C}(X) \cong \mathbf{up}\mathcal{C}(Y)$. Also gibt es einen Verbandsisomorphismus $\varphi : \mathbf{up}\mathcal{C}(X) \to \mathbf{up}\mathcal{C}(Y)$. Andererseits sind $\mathbf{up}\mathcal{C}(X)$ und $\mathbf{up}\mathcal{C}(Y)$ genau die endlichen Elemente der kohärenten Verbände $\mathbf{up}\Omega(X)$ und $\mathbf{up}\Omega(Y)$. Also gibt es genau eine Fortsetzung von φ zu einem kohärenten Verbandshomomorphismus $\tilde{\varphi} : \mathbf{up}\Omega(X) \to \mathbf{up}\Omega(Y)$. Aus der Äquivalenz **KohVerb**$\equiv$**DVerb** folgt weiters, dass dieser zwingend ein Isomorphismus ist. Aus der Dualität **KohVerb** $\sim$ **KohTop** folgt nun die Existenz eines eindeutigen stetigen $\psi : Y \to X$ mit der Eigenschaft $\tilde{\varphi} = \psi^{-1}$, und da $\tilde{\varphi}$ isomorph ist, folgt wiederum zwingend, dass ψ ein Homöomorphismus ist. Wegen $\Omega(\psi) = \psi^{-1}|_{\Omega(X)} = \tilde{\varphi}$ und der Kohärenz von $\tilde{\varphi}$, folgt auch, dass ψ kohärent ist. Wir erhalten damit die gesuchte Isomorphie $\mathfrak{F}\mathbb{T}(X) \cong \mathfrak{F}\mathbb{T}(Y)$. □

Satz 7.9. *Die Funktoren* $\mathscr{B}$: **Heyt** $\to$ **CloAlg*** *und* $^\circ$: **CloAlg*** $\to$**Heyt** *begründen eine Äquivalenz der Kategorien* **Heyt** *und* **CloAlg***. *Dabei gilt:*

1. *Für alle $H \in Obj$(**Heyt**) ist $\eta_H : H \to \mathscr{B}(H)^\circ$, $\eta_H(x) = \{I \in spec(H) : x \notin I\}$ ein Verbandsisomorphismus. Er hat die geforderte Kommutativitätseigenschaft $\mathscr{B}(f)^\circ \circ \eta_H = \eta_K \circ f$ für alle Homomorphismen $f : H \to K$.*

2. *Für alle $A \in Obj$(**CloAlg***) existiert ein eindeutiger closure Algebrenisomorphismus $\varphi_A : A \to \mathscr{B}(A^\circ)$, sodass $\varphi_A(a) = \eta_{A^\circ}(a)$ für alle $a \in A^\circ$. Dieser erfüllt ebenfalls die Kommutativitätseigenschaft $\mathscr{B}(g^\circ) \circ \varphi_A = \varphi_B \circ g$ für alle closure Algebren Homomorphismen $g : A \to B$.*

Beweis. 1. Für eine Heyting Algebra H ist $\eta_H : H \to \mathscr{B}(H)$ ein injektiver Verbandshomomorphismus mit Bild $\eta_H(H) = \mathscr{B}(H)^\circ$. Also ist $\eta_H : H \to \mathscr{B}(H)^\circ$ ein Verbandsisomorphismus. Die Kommutativitätseigenschaft ist definitionsgemäß erfüllt.

2. Sei $A \in Obj(\mathbf{CloAlg^*})$. Nach Punkt 1. gilt $\mathscr{B}(A^\circ)^\circ \cong A^\circ$. Außerdem sind $\Upsilon(A)$ und $\Upsilon(\mathscr{B}(A^\circ))$ Esakia Spaces. Also folgt mit Lemma 7.8, dass $A \cong \mathscr{B}(A^\circ)$. Da $\eta_{A^\circ}(A^\circ)$ dicht in $\mathscr{B}(A^\circ)$ ist und η_{A° ein Isomorphismus der offenen Elemente ist, ist auch A° dicht in A. Also sind A° und $\eta_{A^\circ}(A^\circ)$ dichte Teilverbände, η_{A° injektiv und $\eta_{A^\circ}^{-1}$ ebenfalls ein Isomorphimus (zwischen den Verbänden der offenen Elemente). Nach Satz 2.38 und Korollar 2.39 hat η_{A° eine eindeutige Fortsetzung zu einem Verbandsisomorphismus $\varphi_A : A \to \mathscr{B}(A^\circ)$. Wegen $(\varphi_A)^\circ = \eta_{A^\circ}$ folgt mit Satz A.8 auch, dass φ_A diese Kommutativitätseigenschaft hat.

Es bleibt noch die Bijektivität von $\mathscr{B}$ und $^\circ$ auf den Morphismen zu zeigen. Diese folgt aber schnell, da aus dem schon gezeigten unmittelbar folgt, dass $(\mathscr{B}(.))^\circ : Mor_{\mathbf{Heyt}}(H,K) \to Mor_{\mathbf{Heyt}}(\mathscr{B}(H)^\circ, \mathscr{B}(K)^\circ)$, $(\mathscr{B}(f))^\circ = \eta_K \circ f \circ \eta_H^{-1}$ und $\mathscr{B}((.)^\circ) : Mor_{\mathbf{CloAlg^*}}(A,B) \to Mor_{\mathbf{CloAlg^*}}(\mathscr{B}(A^\circ), \mathscr{B}(B^\circ))$, $\mathscr{B}(f^\circ) = \varphi_B \circ g \circ \varphi_A^{-1}$ bijektiv operieren, denn η_H, η_K sowie φ_A, φ_B sind Isomorphismen. Also folgt die Bijektivität von $\mathscr{B}$ und $^\circ$ auf den Morphismen. □

Korollar 7.10. *(Esakia Duality) Die Funktoren* $\Upsilon\mathscr{B} : \mathbf{Heyt} \to \mathbf{Esa}$ *und* $(.)^\circ\Xi : \mathbf{Esa} \to \mathbf{Heyt}$ *begründen eine Dualität der Kategorien* **Esa** *und* **Heyt**.

Als interessante Folgerung erhalten wir:

Korollar 7.11. *Die Dualität* **Heyt** $\sim$**Esa** *wird auch durch jene Funktoren induziert, welche die Dualität* **Pries** $\sim$ **DVerb** *induzieren.*

Beweis. Wir haben die Funktoren $\mathbb{S}\mathfrak{G}spec : \mathbf{DVerb} \to \mathbf{Pries}$ und $K\Omega\mathfrak{F}\mathbb{T} : \mathbf{Pries} \to \mathbf{DVerb}$. Wir zeigen, dass $K\Omega\mathfrak{F}\mathbb{T}|_{\mathbf{Esa}} = (.)^\circ\Xi|_{\mathbf{Esa}}$. Dann folgt notwendigerweise die Aussage. Für einen Esakia Space $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ gilt $K\Omega\mathfrak{F}\mathbb{T}(X, \mathcal{T}, \leqslant) = K\Omega(X, \mathbf{up}\Omega(X, \mathcal{T}, \leqslant)) = \mathbf{up}\mathcal{C}(X, \mathcal{T}, \leqslant) = \Xi(X, \mathcal{T}, \leqslant)^\circ$. Wobei die mittlere Gleichung aus Proposition 4.19 und Proposition 4.23 folgt. Für einen Morphismus $f : X \to Y$ folgt $K\Omega\mathfrak{F}\mathbb{T}(f) = f^{-1}|_{K\Omega(X, \mathbf{up}\Omega(X,\mathcal{T},\leqslant))} = f^{-1}|_{\Xi(X,\mathcal{T},\leqslant)^\circ} = (f^{-1})^\circ = (\Xi(f))^\circ$. □

7.2 Heyting Algebren und pairwise Esakia Spaces

Die Dualität von Heyting Algebren und pairwise Esakia Spaces folgt nun einfach über die Einschränkung der Isomorphie **Pries** $\cong$ **PStone** auf eine Isomorphie **Esa** $\cong$ **PEsa**.

Proposition 7.12. *Sei* $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ *ein Priestley Space. Dann ist der zugehörige pairwise Stone Space* $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) := \mathbb{T}(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ *genau dann ein pairwise Esakia Space, falls* $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ *ein Esakia Space ist.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Aussage „A paarweise clopen in $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ impliziert $\overline{A}^{\mathcal{T}_1}$ paarweise clopen in $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$" genau dann gilt, wenn „A clopen in $(X, \mathcal{T})$ impliziert $\downarrow A$ clopen in $(X, \mathcal{T})$" gilt. Nach Korollar 4.33 sind die clopen Mengen in $(X, \mathcal{T}, \leqslant)$ genau die paarweise clopen Mengen in $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$. Außerdem gilt nach Satz 4.31 die Identität $\overline{A}^{\mathcal{T}_1} = \downarrow A$. Also folgt die Aussage. □

Proposition 7.13. *Seien* $(X, \mathcal{T}, \leqslant_X)$ *und* $(Y, \mathcal{O}, \leqslant_Y)$ *zwei Esakia Spaces mit zugehörigen pairwise Esakia Spaces* $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) := \mathbb{T}(X, \mathcal{T}, \leqslant_X)$ *und* $(Y, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) := \mathbb{T}(Y, \mathcal{O}, \leqslant_Y)$ *und* $f : X \to Y$ *eine stetige, ordnungserhaltende Abbildung, d.h.* $f \in Mor(\mathbf{Pries})$. *Dann ist* f *genau dann ein Esakia Homomorphismus, falls* f *als Abbildung von* $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ *nach* $(Y, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ *ein pairwise Esakia Homomorphismus ist.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass f genau dann stark isoton ist, wenn $f(\overline{\{x\}}^{\mathcal{T}_2}) = \overline{\{f(x)\}}^{\mathcal{O}_2}$. Nach Satz 4.31 ist $\overline{\{x\}}^{\mathcal{T}_2} = \uparrow x$ und $\overline{\{f(x)\}}^{\mathcal{O}_2} = \uparrow f(x)$. Nach Lemma 2.3 ist f stark isoton genau dann, wenn $f(\uparrow x) = \uparrow f(x)$, also genau dann, wenn $f(\overline{\{x\}}^{\mathcal{T}_2}) = \overline{\{f(x)\}}^{\mathcal{O}_2}$. □

Als unmittelbare Konsequenz folgt

Satz 7.14. *Die Funktoren* $\mathbb{T}$ *und* $\mathbb{S}$ *induzieren eingeschränkt auf die Kategorien* **PEsa** *bzw.* **Esa** *eine Isomorphie dieser Kategorien.*

7.3 Heyting Algebren und kohärente Esakia Spaces

Wir gehen nun ähnlich zum letzten Abschnitt vor und schränken die Isomorphie **PStone** $\cong$ **KohTop** ein, um eine Isomorphie **PEsa** $\cong$ **KohEsa** zu Erhalten.

Proposition 7.15. *Sei $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ ein pairwise Stone Space. Dann ist der zugehörige kohärente Raum $(X, \mathcal{T}_1) = \mathfrak{F}(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ genau dann ein kohärenter Esakia Space, falls $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ ein pairwise Esakia Space ist.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Aussage „Y ist eine doppelt kohärente Teilmengen impliziert $\overline{Y}^{\mathcal{T}_1}$ ist eine doppelt kohärente Teilmenge" genau dann gilt, wenn „Y paarweise clopen impliziert $\overline{Y}^{\mathcal{T}_1}$ paarweise clopen" gilt. Nach Korollar 4.33 sind aber die doppelt kohärenten Teilmenge genau die paarweise clopen Teilmengen. Also folgt die Behauptung. □

Proposition 7.16. *Seien $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ und $(Y, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ pairwise Esakia Spaces und $f : X \to Y$ bistetig. Dann ist f genau dann ein pairwise Esakia Homomorphismus, falls f als Abbildung von $(X, \mathcal{T}_1)$ nach $(Y, \mathcal{O}_1)$ ein Esakia Homomorphismus ist.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $f(\overline{\{x\}}^{\mathcal{T}_2}) = \overline{\{f(x)\}}^{\mathcal{O}_2}$ genau dann, wenn $f(Sat_1(x)) = Sat_1(f(x))$ für alle $x \in X$, wobei Sat_1 die Saturation bezüglich $\mathcal{T}_1$ bzw. $\mathcal{O}_1$ bezeichnet. Nach Korollar 4.33 folgt $Sat_1(x) = \overline{\{x\}}^{\mathcal{T}_2}$ und $Sat_1(f(x)) = \overline{\{f(x)\}}^{\mathcal{O}_2}$, also folgt die Behauptung. □

Wieder ist eine unmittelbare Konsequenz:

Satz 7.17. *Die Funktoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ induzieren eingeschränkt auf die Teilkategorien* **PEsa** *und* **KohEsa** *eine Isomorphie dieser Kategorien.*

Korollar 7.18. *Die Kategorien* **Esa, PEsa** *und* **KohEsa** *sind zueinander isomorph und daher sämtlich dual zu der Kategorie* **Heyt** *der Heyting Algebren.*

A Kategorientheorie

Ziel dieser Arbeit ist die Herleitung der Dualität zwischen nüchternen topologischen Räumen und regulären Verbänden als Grundlage für die Herleitung verschiedener topologischer Repräsentationen algebraischer Strukturen, unter anderem der Stone Duality und der Esakia Duality. Diese topologischen Repräsentationen sind formal durch Dualitäten von Kategorien gegeben. In diesem Abschnitt werden dazu die benötigten Begriffe aus der Kategorientheorie definiert.

Definition A.1. Eine *Kategorie* $\mathscr{C}$ besteht aus einer Klasse von Objekten, einer Klasse von Morphismen und einer Verknüpfungsabbildung $\circ$ auf den Morphismen.

1. Die Klasse von Objekten wird bezeichnet mit $Obj(\mathscr{C})$.

2. Die Klasse von Morphismen wird bezeichnet mit $Mor(\mathscr{C})$. Jeder Morphismus hat einen Definitionsbereich $dom(f) \in Obj(\mathscr{C})$ und einen Bildbereich $ran(f) \in Obj(\mathscr{C})$. Für einen Morphismus mit Definitionsbereich A und Bildbereich B schreiben wir kurz $f : A \to B$. Die Menge aller Morphismen mit Definitionsbereich A und Bildbereich B wird mit $Mor(A, B)$ bezeichnet. Um die Kategorie zu betonen, wird die Menge der Morphismen $f : A \to B$ in der Kategorie $\mathscr{C}$ gelegentlich auch mit $Mor_{\mathscr{C}}(A, B)$ bezeichnet.

3. Die Verknüpfungsvorschrift $\circ$. Dabei gilt:

   (a) $\forall A, B, C \in Obj(\mathscr{C})$ ist $\circ : Mor(B, C) \times Mor(A, B) \to Mor(A, C)$, d.h. für alle Morphismen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ ist $g \circ f : A \to C$ ein Morphismus.

   (b) $\circ$ ist assoziativ.

   (c) Für alle Objekte A existiert ein *Identitätsmorphismus*, d.h. ein Morphismus $id_A : A \to A$, sodass $f \circ id_A = f$ und $id_A \circ g = g$, wann immer f, g Morphismen und die entsprechenden Ausdrücke definiert sind.

Zwei Objekte A, $B \in Obj(\mathscr{C})$ einer Kategorie $\mathscr{C}$ heißen *isomorph*, i.Z. $A \cong B$, falls Morphismen $f : A \to B$ und $g : B \to A$ existieren, sodass $f \circ g = id_B$ und $g \circ f = id_A$.

Beispiel A.2. Erste Beispiele von Kategorien.

1. Die Kategorie **Set** hat als Objekte die Klasse aller Mengen und als Morphismen die Klasse sämtlicher Funktionen. Die Verknüpfung $\circ$ ist dabei die klassische Verknüpfung von Funktionen.

2. Die Kategorie **Top** aller topologischen Räume zusammen mit stetigen Funktionen als Morphismen.

3. Die meisten algebraischen Strukturen (wie z.B. Ringe, Algebren, Gruppen, Vektorräume, ...) werden eine Kategorie, wenn man als Morphismen alle Homomorphismen zulässt.

Definition A.3. Ein *Funktor* $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ besteht aus einer Abbildungsvorschrift für Objekte, $T : Obj(\mathscr{C}) \to Obj(\mathscr{D})$, und einer Abbildungsvorschrift für Morphismen, $T : Mor(\mathscr{C}) \to Mor(\mathscr{D})$. Dabei gilt:

1. Ist $f : A \to B$ ein Morphismus in $\mathscr{C}$, so ist $T(f) : T(A) \to T(B)$ ein Morphismus in $\mathscr{D}$.

2. Es ist $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$, wann immer definiert (wegen 1. ist die linke Seite genau dann definiert, wenn die rechte Seite es ist).

3. Für alle Objekte A von $\mathscr{C}$ gilt: $T(id_A) = id_{T(A)}$.

Ein Funktor besteht daher eigentlich aus zwei Abbildungsvorschriften, eine operiert auf den Objekten, die Andere auf den Morphismen. Wir werden aber, der allgemeinen Konvention folgend, beide Abbildungsvorschriften mit dem selben Zeichen bezeichnen.

Beispiel A.4. Beispiele zu Funktoren.

1. Der einfachste Funktor ist schlicht der Identitätsfunktor $id_{\mathscr{C}}$ einer Kategorie $\mathscr{C}$ auf sich selbst.
2. Bezeichnet **Ring** die Kategorie aller Ringe mit Ringhomomorphismen, so bildet der „forgetful functor" U : **Ring** → **Set** einen Ring A auf die zugrunde liegende Menge ab, und einen Ringhomomorphismus auf seine zugrunde liegende Funktion. Analog kann der forgetful functor für jede algebraische Struktur definiert werden

Definition A.5. Ein *Cofunktor* $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ besteht analog zu einem Funktor aus einer Abbildungsvorschrift für Objekte $T : Obj(\mathscr{C}) \to Obj(\mathscr{D})$, und einer Abbildungsvorschrift für Morphismen, $T : Mor(\mathscr{C}) \to Mor(\mathscr{D})$. Dabei gilt:

1. Ist $f : A \to B$ ein Morphismus in $\mathscr{C}$, so ist $T(f) : T(B) \to T(A)$ ein Morphismus in $\mathscr{D}$.
2. Es ist $T(f \circ g) = T(g) \circ T(f)$, wann immer definiert (wieder ist wegen 1. ist die linke Seite genau dann definiert, wenn die rechte Seite es ist).
3. Für alle Objekte A von $\mathscr{C}$ gilt: $T(id_A) = id_{T(A)}$.

Als nächstes benötigen wir noch eine Möglichkeit zwei Kategorien miteinander vergleichen zu können. Hier stellt sich folgende Definition als sinnvoll heraus:

Definition A.6. Eine *Äquivalenz* zwischen zwei Kategorien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ (i.Z. $\mathscr{C} \equiv \mathscr{D}$) besteht aus zwei Funktoren $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ und $T : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, sodass:

1. Für alle $A \in Obj(\mathscr{C})$ gilt $TS(A) \cong A$.
2. Für alle $B \in Obj(\mathscr{D})$ gilt $ST(B) \cong B$.
3. Für alle $A, A' \in Obj(\mathscr{C})$ ist $S|_{Mor(A,A')}: Mor(A, A') \to Mor(S(A), S(A'))$ bijektiv.
4. Für alle $B, B' \in Obj(\mathscr{C})$ ist $T|_{Mor(B,B')}: Mor(B, B') \to Mor(T(B), T(B'))$ bijektiv.
5. Es existiert eine Abbildung $\tau : Obj(\mathscr{C}) \to Mor(\mathscr{C})$, sodass gilt:
   (a) Für alle $A \in Obj(\mathscr{C})$ ist $\tau_A := \tau(A) : A \to TS(A)$ ein Isomorphismus.
   (b) Für alle $f : A \to A' \in Mor(\mathscr{C})$ gilt $TS(f) \circ \tau_A = \tau_{A'} \circ f$, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "f"'] & TS(A) \arrow[d, "TS(f)"] \\ A' \arrow[r, "\tau_{A'}"'] & TS(A') \end{tikzcd}$$

6. Es existiert eine Abbildung $\sigma : Obj(\mathscr{D}) \to Mor(\mathscr{D})$, sodass gilt:
   (a) Für alle $B \in Obj(\mathscr{D})$ ist $\sigma_B := \sigma(B) : B \to ST(B)$ ein Isomorphismus.
   (b) Für alle $g : B \to B' \in Mor(\mathscr{D})$ gilt $ST(g) \circ \sigma_B = \sigma_{B'} \circ g$.

Eine Äquivalenz heißt *Isomorphismus* zwischen den Kategorien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ (i.Z. $\mathscr{C} \cong \mathscr{D}$), falls in obiger Definition immer $\tau_A = id_A$ und $\tau_B = id_B$ gewählt werden kann, d.h. falls für alle $A \in Obj(\mathscr{C})$ und $f \in Mor(\mathscr{C})$ gilt, dass $TS(A) = A$ und $TS(f) = f$, und für alle $B \in Obj(\mathscr{D})$ und $g \in Mor(\mathscr{D})$ gilt, dass $ST(B) = B$ und $ST(g) = g$.

Definition A.7. Eine *Dualität* zwischen zwei Kategorien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ (i.Z. $\mathscr{C} \sim \mathscr{D}$), ist analog zu einer Äquivalenz definiert, mit dem Unterschied dass hier S und T Cofunktoren sind, welche die Bedingungen 1. bis 6. erfüllen, wobei in 3. und 4. jeweils die Morphismen ihre Richtung ändern.

Als nächstes ein kleines Lemma, dass es gestattet, in gewissen Fällen die Überprüfung des 6. Axioms von Definition A.6 und A.7 zu vermeiden:

Lemma A.8. *Erfüllen mit den Bezeichnungen von Definition A.6 (bzw. Definition A.7) die Funktoren (bzw. Cofunktoren) S und T die Axiome 1. und 5., so folgt aus $T(\sigma_B) = \tau_{T(B)}$ (bzw. $T(\sigma_B) = \tau^{-1}_{T(B)}$) für alle $B \in Obj(\mathscr{D})$, unmittelbar, dass S und T eine Äquivalenz (Dualität) begründen.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage für Äquivalenzen. Seien $B, B' \in \mathscr{D}$ und $f : B \to B' \in Mor(\mathscr{D})$. Wir müssen das Axiom 6. beweisen. Es gilt:

$$\begin{array}{clr} & TS(T(f)) \circ \tau_{T(B)} = \tau_{T(B')} \circ T(f) & \text{wegen Axiom 5.} \\ \iff & TST(f) \circ T(\sigma_B) = T(\sigma_{B'}) \circ T(f) & \text{Voraussetzung} \\ \iff & T(ST(f) \circ \sigma_B) = T(\sigma_{B'} \circ f) & \text{da } T \text{ein Funktor ist} \\ \iff & ST(f) \circ \sigma_B = \sigma_{B'} \circ f & \text{wegen Axiom 4.} \end{array}$$

Der Beweis für Dualitäten verläuft analog. □

Lemma A.9. *Seien $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ und $\mathscr{E}$ Kategorien und $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $T : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ beide Funktoren oder Cofunktoren, sowie $F : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ und $G : \mathscr{E} \to \mathscr{D}$ beide Funktoren oder Cofunktoren. Sei weiters für alle $C \in Obj(\mathscr{C})$ ein Isomorphismus $\tau_C \in Mor_{\mathscr{C}}(C, TS(C))$ und für alle $D \in Obj(\mathscr{D})$ ein Isomorphismus $\sigma_D \in Mor_{\mathscr{D}}(D, GF(D))$ gegeben, sodass:*

1. *Für alle $f : C \to C' \in Mor(\mathscr{C})$ ist $TS(f) \circ \tau_C = \tau_{C'} \circ f$.*
2. *Für alle $g : D \to D' \in Mor(\mathscr{D})$ ist $GF(g) \circ \sigma_D = \sigma_{D'} \circ g$.*

Für alle $C \in Obj(\mathscr{C})$ sei weiters

$$\eta_C := \begin{cases} T(\sigma_{S(C)}) \circ \tau_C & \text{falls } S \text{ und } T \text{ Funktoren} \\ T(\sigma^{-1}_{S(C)}) \circ \tau_C & \text{falls } S \text{ und } T \text{ Cofunktoren} \end{cases}$$

Dann ist η_C ein Isomorphismus und es gilt für $f \in Mor_{\mathscr{C}}(C, C')$: $TGFS(f) \circ \eta_C = \eta_{C'} \circ f$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage für Funktoren, für Cofunktoren verläuft der Beweis analog. Dass η_C ein Isomorphismus ist, folgt, da Funktoren immer Isomorphismen auf Isomorphismen abbilden, und Verknüpfungen von Isomorphismen wieder Isomorphismen sind. Es gilt:

$$\begin{aligned} TGFS(f) \circ \eta_C &= T(\sigma_{S(C')} \circ S(f) \circ \sigma^{-1}_{S(C)}) \circ \eta_C \\ &= T(\sigma_{S(C')}) \circ \tau_{C'} \circ f \circ \tau_C \circ T(\sigma^{-1}_{S(C)}) \circ T(\sigma_{S(C)}) \circ \tau_C \\ &= \eta_{C'} \circ f \end{aligned}$$

□

Korollar A.10. *Falls mit den Bezeichnungen von Lemma A.9 S und T eine Äquivalenz (Dualität) begründen und F und G eine Äquivalenz begründen, dann begründen $FS : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ und $TG : \mathscr{E} \to \mathscr{C}$ ebenfalls eine Äquivalenz (Dualität).*

Beweis. Das letzte Lemma zeigt die Axiome 1., 2., 5., und 6 von Definition A.6 (bzw. A.7). Außerdem folgt die Bijektivität auf den Morphismen unmittelbar. □

Lemma A.11. *Es gelten die Bezeichnungen von Definition A.6 (bzw. Definition A.7) und für alle $C \in Obj(\mathscr{C})$ sei ein Objekt $\Xi(C) \in Obj(\mathscr{D})$, mit $S(C) \cong \Xi(C)$, und ein Isomorphismus $\xi_C : S(C) \to \Xi(C)$ gegeben. Dann ist $\widetilde{S} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ definiert über $\widetilde{S}(C) = \Xi(C)$ für alle $C \in Obj(\mathscr{C})$ und $\widetilde{S}(f) = \xi_{C'} \circ S(f) \circ \xi_C^{-1}$ (bzw. $\widetilde{S}(f) = \xi_C \circ S(f) \circ \xi_{C'}^{-1}$)) für alle $f \in Mor_{\mathscr{C}}(C, C')$ ein Funktor (bzw. Cofunktor). Er induziert dann zusammen mit T ebenfalls die gegebene Äquivalenz. Insbesondere gilt:*

1. *Mit $\mu_C := T(\xi_C) \circ \tau_C$ (bzw. $\mu_C := T(\xi_C^{-1}) \circ \tau_C$) gilt: μ_C ist ein Isomorphismus und $\mu_{C'} \circ f = T\widetilde{S}(f) \circ \mu_C$ für alle $f \in Mor_{\mathscr{C}}(C, C')$.*

2. *Mit $\lambda_D := \xi_{T(D)} \circ \sigma_D$ gilt: λ_D ist ein Isomorphismus und $\lambda_{D'} \circ f = \widetilde{S}T(f) \circ \lambda_D$ für alle $f \in Mor_{\mathscr{D}}(D, D')$.*

Beweis. Man sieht leicht, dass $\widetilde{S}$ ein Funktor (bzw. Cofunktor) ist. Dass $\widetilde{S}$ bijektiv auf den Morphismen operiert, folgt, da S dies tut und die Abbildung $Mor_{\mathscr{C}}(C, C') \to Mor_{\mathscr{C}}(\Xi(C), \Xi(C')) : g \mapsto \xi_{C'} \circ g \circ \xi_C^{-1}$ (bzw. $g \mapsto \xi_C \circ S(f) \circ \xi_{C'}^{-1}$) ebenfalls isomorph ist. Also bleibt noch 1. und 2. zu beweisen, dann folgt auch die Äquivalenz (Dualität).

1. Wir beweisen die Aussage für Funktoren, für Cofunktoren ist der Beweis analog. Wie im Beweis von Lemma A.9 folgt, dass μ_C isomorph ist. Weiters gilt:

$$\begin{aligned} T\widetilde{S}(f) \circ \mu_C &= T(\xi_{C'} \circ S(f) \circ \xi_C^{-1}) \circ T(\xi_C) \circ \tau_C \\ &= T(\xi_{C'}) \circ \tau_{C'} \circ f \circ \tau_C^{-1} \circ \tau_C \\ &= \mu_{C'} \circ f \end{aligned}$$

2. Beweis verläuft analog. □

B Die Kategorien RVerb und NTop

B.1 Reguläre Verbände

Definition B.1. Ein *Verband* $(A, \leqslant)$ ist eine beschränkte halbgeordnete Menge (d.h. es existiert ein größtes und ein kleinstes Element), sodass für je zwei $a, b \in A$ ein Supremum und ein Infimum existiert. Wir werden das Supremum mit $\vee$, das Infimum mit $\wedge$, sowie das kleinste bzw. größte Element mit 0 bzw. 1 bezeichnen. Ist $\varnothing \neq B \subseteq A$, so bezeichnet $\bigvee B$ bzw. $\bigwedge B$ das Supremum bzw. Infimum von B, falls dieses existiert. Um Fallunterscheidungen zu vermeiden definieren wir $\bigvee \varnothing := 0$ und $\bigwedge \varnothing := 1$.

- Ein Verbandshomomorphismus $f : A \to B$ ist eine Abbildung, welche kleinstes und größtes Element, sowie Infima und Suprema von je zwei Elementen erhält. Wir bezeichnen mit **Verb** die Kategorie der Verbände zusammen mit Verbandshomomorphismen.

- Ein Verband A heißt *distributiv*, falls für alle $a, b, c \in A$ gilt: $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Wir bezeichnen die Kategorie der distributiven Verbänden zusammen mit Verbandshomomorphismen mit **DVerb**.

- Ein Verband heißt *vollständig*, falls alle Teilmengen von A ein Supremum besitzen und die unendliche Distributivität erfüllt ist, d.h. für alle $x \in A$ und $S \subseteq A$ gilt $x \wedge \bigvee S = \bigvee\{x \wedge y : y \in S\}$. Ein *vollständiger Verbandshomomorphismus* ist ein Verbandshomomorphismus, welcher Suprema von sämtlichen Mengen erhält. Die so definierte Kategorie bezeichnen wir mit **VVerb**.

- Ist A ein vollständiger Verband, so heißt ein vollständiger Verbandshomomorphismus $p : A \to \mathbb{Z}_2$ ein *Punkt auf* A. Wir bezeichen die Menge aller Punkte auf A mit $pt(A)$.

- Ein vollständiger Verband heißt *regulär*, falls für alle $x, y \in A$ mit $x \neq y$ ein Punkt $p \in pt(A)$ existiert mit $p(x) \neq p(y)$. Die Kategorie der regulären Verbände zusammen mit vollständigen Verbandshomomorphismen bezeichnen wir **RVerb**.

Definition B.2. Sei A ein Verband.

- Ein $I \subseteq A$ heißt *Ideal*, falls
  1. $0 \in I$.
  2. Für alle $a, b \in I$ ist auch $a \vee b \in I$.
  3. Für alle $a \in I$ und $b \leqslant a$ ist auch $b \in I$.
- Ein Ideal I heißt *echt*, falls $I \neq A$
- Ein echtes Ideal I heißt *Primideal*, falls für alle $a, b \in A$ aus $a \wedge b \in I$ folgt, dass $a \in I$ oder $b \in I$.
- Ein echtes Ideal I heißt *maximal*, falls es kein echt größeres echtes Ideal $J \supsetneq I$ gibt.
- Für $x \in A$ definieren wir die Menge $\downarrow x := \{y \in A : y \leqslant x\}$. Dann ist $\downarrow x$ ein Ideal, und wird *(das von x erzeugte) Hauptideal* genannt.
- Ein $x \in A$ heißt *Primelement,* falls $\downarrow x$ ein Primideal ist.

Bemerkung B.3. Ist $I = \downarrow x$ ein Hauptideal, so ist $x = \bigvee I \in I$. Ein Ideal I ist daher genau dann ein Hauptideal, falls $\bigvee I \in I$. In diesem Fall ist $I = \downarrow (\bigvee I)$.

Lemma B.4. Die Bedingung $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ist äquivalent zu ihrer „dualen" Bedingung $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Beweis. Sei $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ für alle $a, b, c \in A$ erfüllt. Dann folgt

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= ((a \wedge b) \vee a) \wedge ((a \wedge b) \vee c) \\
&= a \wedge ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) && \text{wegen } (a \wedge b) \vee a = a \\
&= (a \wedge (a \vee c)) \wedge (b \vee c) \\
&= a \wedge (b \vee c) && \text{wegen } a \wedge (a \vee c) = a
\end{aligned}$$

Die andere Richtung sieht man genauso. □

Lemma B.5. *Sei A ein vollständiger Verband und $I \subseteq A$. Dann gilt: I ist Kern eines Verbandshomomorphismuses $f : A \to \mathbb{Z}_2$ genau dann, wenn I ein Primideal ist.*

Beweis. " $\Rightarrow$ " Wegen $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ folgt $0 \in I$ und $1 \notin I$. Weiters folgt für $a, b \in I$ und $c \leqslant a$, dass $f(a) = f(b) = 0$ und damit $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = 0$, also $a \vee b \in I$, sowie $f(c) \leqslant f(a) = 0$, also $c \in I$. Damit ist I ein echtes Ideal. Für $a, b \in A$ mit $a \wedge b \in I$ folgt $0 = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$. In $\mathbb{Z}_2$ ist das Infimum zweier Elemente aber genau dann Null, wenn zumindest eine der beiden Null ist. Also folgt $a \in I$ oder $b \in I$.

" $\Leftarrow$ " Definiere $f := \mathbb{I}_{I^c}$. Dann ist $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Weiters ist $f(a \wedge b) = 0$ genau dann, wenn $a \wedge b \in I$ und daher genau dann, wenn $a \in I$ oder $b \in I$. Also ist $f(a \wedge b) = 0$ genau dann, wenn $f(a) = 0$ oder $f(b) = 0$ und daher $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$. Analog sieht man auch, dass f Suprema erhält. □

Lemma B.6. *Sei A ein vollständiger Verband und $I \subseteq A$. Dann gilt: I ist Kern eines Punktes genau dann, wenn I ein primes Hauptideal ist.*

Beweis. " $\Rightarrow$ " Nach Lemma B.5 ist I ein Primideal. Weiters folgt $p(\bigvee ker(p)) = \bigvee p(ker(p)) = 0$ und damit $\bigvee I \in I$.

" $\Leftarrow$ " Nach Lemma B.5 ist I Kern eines Verbandshomomorphismuses $p : A \to \mathbb{Z}_2$. Nun gilt für $S \subseteq A$

$$\begin{aligned}
\bigvee p(S) = 0 &\iff \forall s \in S : p(s) = 0 \\
&\iff S \subseteq ker(p) = I \\
&\iff \bigvee S \in I && \text{da } I \text{ein Hauptideal ist} \\
&\iff p(\bigvee S) = 0
\end{aligned}$$

Damit erhält p sämtliche Suprema und ist daher ein vollständiger Verbandshomomorphismus. □

B.2 Nüchterne topologische Räume

Definition B.7. Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Dann heißt A *irreduzibel*, falls keine zwei disjunkten, nicht leeren und in der Spurtopologie offenen Teilmengen von A existieren.

Definition B.8. Ein topologischer Raum X heißt *nüchtern*, falls jede nicht leere, irreduzible und abgeschlossene Menge der Abschluss eines eindeutigen Elementes ist. Wir bezeichnen die Kategorie der nüchternen topologischen Räume, zusammen mit stetigen Funktionen als Morphismen, mit **NTop**.

Wir beweisen zwei kurze Lemmata über die vorangehenden Definitionen.

Lemma B.9. *$A \subseteq X$ ist genau dann irreduzibel, falls aus $B \cup C = A$ und $B, C \subseteq A$ abgeschlossen in der Spurtopologie folgt, dass $B = A$ oder $C = A$.*

Beweis. Folgt aus der Definition über Komplementbildung. □

Lemma B.10. *Für einen topologischen Raum X gilt: $T_2 \implies$ nüchtern $\implies T_0$*

Beweis. In Hausdorffräumen sind die nicht leeren, abgeschlossenen und irreduziblen Mengen genau die einpunktigen Mengen. Diese sind gleichzeitig der Abschluss ihres (eindeutigen) Elementes. Also sind Hausdorffräume nüchtern.

Umgekehrt sind Abschlüsse von einpunktigen Mengen immer irreduzibel, da jede in der Spurtopologie offene und nicht leere Teilmenge von $\overline{\{x\}}$ den Punkt x enthält. Daher folgt für nüchterne Räume aus $x \neq y$ immer $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, womit aber x und y durch zumindest eine offene Menge getrennt werden können. Damit erfüllen nüchterne Räume immer T_0. □

C Die Dualität

Wir leiten die Dualität **NTop** $\sim$ **RVerb** nun in drei Schritten her. Im ersten Schritt konstruieren wir einen Cofunktor Ω : **NTop** $\to$ **RVerb**. Im zweiten Schritt versehen wir für alle reguläre Verbände A die Menge $pt(A)$ mit einer Topologie, und zeigen, dass für reguläre Verbände A ein Verbandsisomorphismus $\Phi_A : A \to \Omega pt(A)$ existiert und für nüchterne Räume X ein Homöomorphismus $\Psi_X : X \to pt\Omega(X)$ existiert. Im letzten Schritt wird schließlich der Cofunktor pt : **RVerb** $\to$ **NTop** konstruiert.

Der Cofunktor Ω : Top $\to$ RVerb

Definition C.1. Für einen topologischen Raum X bezeichne $\Omega(X)$ das System der offenen Mengen. Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, dann sei $\Omega(f) := f^{-1} : \Omega(Y) \to \Omega(X)$.

Proposition C.2. *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist $(\Omega(X), \subseteq)$ ein regulärer Verband. Dabei gilt:*

1. *Ein $U \in \Omega(X)$ ist genau dann ein Primelement, falls $U \neq X$ und U^c irreduzibel ist.*
2. *Für alle $x \in X$ ist die Abbildung $U \mapsto \mathbb{I}_U(x)$ ein Punkt auf $\Omega(X)$.*

Beweis. Es ist $\varnothing \in \Omega(X)$ das kleinste Element und $X \in \Omega(X)$ das größte Element. Weiters ist die Topologie $\Omega(X)$ unter endlicher Schnitt- und beliebiger Vereinigungsbildung abgeschlossen. Da diese Operationen gerade die Infima bzw. Suprema definieren, folgt, dass $\Omega(X)$ ein Verband ist, welcher beliebige Suprema besitzt. Die unendliche Distributivität folgt nun aus elementarer Mengentheorie. Also ist $\Omega(X)$ ein vollständiger Verband.

1. " $\Rightarrow$ " Ist U ein Primelement, so folgt $X \notin \downarrow U$, also $U \neq X$. Um zu sehen, dass U^c irreduzibel ist, seien $V, W \subseteq U^c$ offen in der Spurtopologie, disjunkt und nicht leer. Dann ist $V = \tilde{V} \cap U^c$, $W = \tilde{W} \cap U^c$ mit gewissen $\tilde{V}, \tilde{W} \in \Omega(X)$. Nun folgt der Widerspruch: $\tilde{V}$, $\tilde{W} \notin \downarrow U$ aber $\tilde{V} \cap \tilde{W} \in \downarrow U$

" $\Leftarrow$ " Wegen $U \neq X$ folgt $X \notin \downarrow U$. Seien weiters $A, B \in \Omega(X)$, $A, B \notin \downarrow U$ aber $A \cap B \in \downarrow U$. Es folgt der Widerspruch $A \cap U^c \neq \varnothing \neq B \cap U^c$ und $A \cap B \cap U^c = \varnothing$ und daher U^c reduzibel.

2. Sei nun $x \in X$. Dann ist $\overline{\{x\}}$ irreduzibel und $\overline{\{x\}}^c \neq X$. Also ist nach dem ersten Beweisteil daher $\overline{\{x\}}^c \in \Omega(X)$ ein Primelement. Nach Lemma B.6 gibt es einen Punkt p auf $\Omega(X)$, sodass

$$\begin{array}{rc} & ker(p) = \downarrow (\overline{\{x\}}^c) \\ \Longleftrightarrow & p(V) = 0 \Leftrightarrow V \subseteq \overline{\{x\}}^c \\ \Longleftrightarrow & p(V) = 0 \Leftrightarrow V \cap \overline{\{x\}} = \varnothing \\ \Longleftrightarrow & p(V) = 0 \Leftrightarrow x \notin V \\ \Longleftrightarrow & p(V) = \mathbb{I}_V(x) \end{array}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\Omega(X)$ regulär ist. Seien dazu $U, V \in \Omega(X)$ mit $U \neq V$, und sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $U \nsubseteq V$. Dann gibt es $x \in U \backslash V$ und $p(W) := \mathbb{I}_W(x)$ ist ein Punkt auf $\Omega(X)$. Es folgt $p(U) = 1 \neq 0 = p(V)$. ☐

Proposition C.3. *Seien X und Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist $\Omega(f) = f^{-1} : \Omega(Y) \to \Omega(X)$ ein vollständiger Verbandshomomorphismus.*

Beweis. Es gilt $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ und $f^{-1}(Y) = X$. Außerdem ist die Urbildbildung mit Schnitten und Vereinigungen verträglich, und daher erhält f^{-1} sämtlich Infima und Suprema. ☐

Damit folgt unmittelbar:

Korollar C.4. $\Omega : \mathbf{Top} \to \mathbf{RVerb}$ *ist ein Cofunktor.*

Offenbar gilt dann auch:

Korollar C.5. $\Omega : \mathbf{NTop} \to \mathbf{RVerb}$ *ist ein Cofunktor.*

Die Isomorphismen Φ_A und Ψ_X

Definition C.6. Sei A ein vollständiger Verband und $a \in A$. Dann sei $\Phi_A(a) := \{p \in pt(A) \mid p(a) = 1\}$.

Lemma C.7. *Für einen regulären Verband A ist*[4] *$\Phi_A : A \to \mathbb{P}(pt(A))$ ein injektiver vollständiger Verbandshomomorphismus. Daher ist das Bild $\Phi_A(A)$ ein regulärer Verband und $\Phi_A : A \to \Phi_A(A)$ ist ein vollständiger Verbandsisomorphismus. Insbesondere ist das System $\Phi_A(A) = \{\Phi_A(a) : a \in A\}$ eine Topologie auf $pt(A)$.*

Beweis. Da für alle Punkte $p(0) = 0$ und $p(1) = 1$ ist, folgt $\Phi_A(0) = \varnothing$ und $\Phi_A(1) = pt(A)$.

Um zu sehen, dass Φ_A beliebige Suprema erhält, sei $S \subseteq A$. Wir müssen zeigen, dass $\bigcup \Phi_A(S) = \Phi_A(\bigvee S)$.

$$\begin{aligned} p \in \bigcup \Phi_A(S) &\Longleftrightarrow \exists s \in S : p(s) = 1 \\ &\Longleftrightarrow \bigvee \{p(s) : s \in S\} = 1 \\ &\Longleftrightarrow p(\bigvee S) = 1 \\ &\Longleftrightarrow p \in \Phi_A(\bigvee S) \end{aligned}$$

Um zu sehen, dass Φ_A endliche Infima erhält seien $x, y \in A$. Dann gilt

$$\begin{aligned} p \in \Phi_A(x) \cap \Phi_A(y) &\Longleftrightarrow p \in \Phi_A(x) \textit{ und } p \in \Phi_A(y) \\ &\Longleftrightarrow p(x) = p(y) = 1 \\ &\Longleftrightarrow p(x \wedge y) = 1 \\ &\Longleftrightarrow p \in \Phi_A(x \wedge y) \end{aligned}$$

[4] $\mathbb{P}$ bezeichnet hier die Potenzmenge.

Also ist Φ_A ein vollständiger Verbandshomomorphismus. Um zu sehen, dass Φ_A injektiv ist, seien $x, y \in A$ mit $x \neq y$. Da A regulär ist, gibt es einen Punkt p auf A mit $p(x) \neq p(y)$, also sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p(x) = 0$ und $p(y) = 1$. Damit folgt $p \in \Phi_A(y)$ und $p \notin \Phi_A(x)$, also $\Phi_A(x) \neq \Phi_A(y)$.

Das System $\Phi_A(A)$ ist als Bild eines vollständigen Verbandshomomorphismuses unter beliebigen Suprema und endlichen Infima abgeschlossen, also für sich ein vollständiger Verband. Offensichtlich ist nun $\Phi_A : A \to \Phi_A(A)$ bijektiv und daher ein vollständiger Verbandsisomorphismus. Insbesondere ist $A \cong \Phi_A(A)$, und da A regulär ist, ist auch $\Phi_A(A)$ regulär.

Die letzte Aussage folgt einfach über die Tatsache, dass in $\mathbb{P}(pt(A))$ Suprema bzw. Infima über Vereinigungen bzw. Schnitte gegeben sind. $\square$

Ab nun sei $pt(A)$ immer mit der Topologie $\Phi_A(A)$ versehen.

Definition C.8. Sei X ein topologischer Raum. Dann sei $\Psi_X : X \to pt(\Omega(X))$, $\Psi_X(x)(U) = \mathbb{I}_U(x)$.

Satz C.9. *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist Ψ_X genau dann bijektiv, wenn X nüchtern ist. In diesem Fall ist Ψ_X ein Homöomorphismus und es gilt $\Psi_X(U) = \Phi_{\Omega(X)}(U)$ für alle $U \in \Omega(X)$.*

Beweis. Ψ_X ist injektiv genau dann, wenn es für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ eine offene Menge U gibt, sodass U genau einen der beiden Punkte x oder y enthählt. Dies ist genau dann der Fall, wenn aus $x \neq y$ immer $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ folgt.

Ψ_X ist surjektiv genau dann, wenn aus $p \in pt\Omega(X)$ folgt $p \in \Psi_X(X)$. Nun gilt $pt\Omega(X) = \{\mathbb{I}_{\downarrow U} : U \in \Omega(X), U \text{ist Primelement}\}$ sowie $\Psi_X(X) = \{U \mapsto \mathbb{I}_U(x) : x \in X\} = \{\mathbb{I}_{\downarrow \overline{\{x\}}^c} : x \in X\}$. Also gilt $pt\Omega(X) = \Psi_X(X)$ genau dann, wenn alle Primelemente von $\Omega(X)$ von der Form $\overline{\{x\}}^C$ für ein $x \in X$ sind. Mit Lemma C.2 ist dies äquivalent dazu, dass alle irreduziblen, abgeschlossenen und nichtleeren Mengen von der Form $\overline{\{x\}}$ sind.

Insgesamt gilt daher: Ψ_X ist bijektiv genau dann, wenn alle irreduziblen, abgeschlossenen und nicht leeren Mengen von der Form $\overline{\{x\}}$ für genau ein $x \in X$ sind, also genau dann, wenn X nüchtern ist.

Nach Satz C.2 ist $\Omega(X)$ regulär, und damit $\Phi_{\Omega(X)} : \Omega(X) \to \Omega pt\Omega(X)$ bijektiv. Also sind alle offenen Mengen von $pt\Omega(X)$ von der Form $\Phi_{\Omega(X)}(U)$ für genau ein $U \in \Omega(X)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\Psi_X^{-1}(\Phi_{\Omega(X)}(U)) &= \Psi_X^{-1}(\{p \in pt\Omega(X) : p(U) = 1\}) \\
&= \{x \in X : \Psi_X(x)(U) = 1\} \\
&= \{x \in X : x \in U\} \\
&= U
\end{aligned}$$

Insbesondere induziert die bijektive Abbildung Ψ_X auch eine Bijektion zwischen den Topologien $\Omega(X)$ und $\Omega pt\Omega(X)$ und ist daher ein Homöomorphismus. $\square$

Der Cofunktor *pt*

Proposition C.10. *Sei A ein regulärer Verband. Dann ist $pt(A)$ nüchtern.*

Beweis. Nach Korollar C.9 reicht es zu zeigen, dass $\Psi_{pt(A)}$ bijektiv ist.

Um die Surjektivität zu sehen sei $p \in pt\Omega pt(A)$. Dann ist $ker(p) \subseteq \Omega pt(A)$ ein Hauptideal und daher

$$ker(p) = \downarrow (\bigvee ker(p)).$$

Da $\bigvee ker(p) \in \Omega pt(A)$ und A regulär ist, gibt es genau ein $a \in A$, sodass $\bigvee ker(p) = \Phi_A(a)$. Als Kern eines Punktes ist $ker(p)$ auch ein Primideal, und damit $\bigvee ker(p) \in \Omega pt(A)$ ein Primelement, und, da $\Phi_A : A \to \Omega pt(A)$ ein vollständiger Verbandsisomorphismus ist, ist auch $a = \Phi_A^{-1}(\bigvee ker(p))$ ein Primelement. Also existiert (genau) ein Punkt $q \in pt(A)$, sodass $\bigvee ker(q) = \downarrow a$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\Psi_{pt(A)}(q) = p$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\Psi_{pt(A)}(q) = p \iff & \quad ker(\Psi_{pt(A)}(q)) = ker(p) \\
\iff & \bigvee ker(\Psi_{pt(A)}(q)) = \bigvee(ker(p)) \\
\iff & \quad \overline{\{q\}}^c = \Phi_A(a) \\
\iff & \quad s := \Phi_A^{-1}(\overline{\{q\}}^c) = a
\end{aligned}$$

Es ist $s = \bigvee\{b \in A : \Phi_A(b) \subseteq \overline{\{q\}}^c\}$ und

$$\begin{aligned}
\Phi_A(b) \subseteq \overline{\{q\}}^c & \iff q \notin \Phi_A(b) \\
& \iff q(b) = 0 \\
& \iff b \in ker(q) \\
& \iff b \leqslant a
\end{aligned}$$

und daher $s = \bigvee\{b \in A : b \leqslant a\} = a$.

Um die Injektivität zu zeigen, seien $p, q \in pt(A)$ mit $p \neq q$. Dann existiert ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein $a \in A$, sodass:

$$\begin{aligned}
& p(a) = 0 && \textit{und} \quad q(a) = 1 \\
\implies & p \notin \Phi(a) && \textit{und} \quad q \in \Phi(a) \\
\implies & \Phi(a) \subseteq \overline{\{p\}}^c && \textit{und} \quad \Phi(a) \nsubseteq \overline{\{q\}}^c \\
\implies & \overline{\{p\}}^c \neq \overline{\{q\}}^c \\
\implies & \Psi(p) \neq \Psi(q)
\end{aligned}$$

□

Proposition C.11. *Seien X und Y nüchterne topologische Räume und $f : \Omega(Y) \to \Omega(X)$ eine Abbildung. Dann existiert genau dann eine stetige Funktion $g : X \to Y$ mit $g^{-1} = f$, falls f ein vollständiger Verbandshomomorphismus ist. In diesem Fall ist g eindeutig.*

Beweis. " $\Rightarrow$ " Es wurde bereits gezeigt, dass g^{-1} ein vollständiger Verbandshomomorphismus ist.

" $\Leftarrow$ " Sei $g : X \to Y$, $g(x) := \Psi_Y^{-1}(\Psi_X(x) \circ f)$ und sei $U \in \Omega(Y)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
g^{-1}(U) &= \{x \in X : \Psi_Y^{-1}(\Psi_X(x) \circ f) \in U\} \\
&= \{x \in X : \Psi_X(x) \circ f \in \Psi_Y(U)\} \\
&= \{x \in X : \Psi_X(x) \circ f \in \Phi_{\Omega(Y)}(U)\} \\
&= \{x \in X : \Psi_X(x) \circ f(U) = 1\} \\
&= \{x \in X : \mathbb{I}_{f(U)}(x) = 1\} \\
&= \{x \in X : x \in f(U)\} \\
&= f(U)
\end{aligned}$$

Also hat g die gewünschten Eigenschaften.

Um die Eindeutigkeit zu sehen, seien g, h stetig, sodass $g^{-1}(U) = h^{-1}(U) = f(U)$ für alle $U \in \Omega(Y)$, und sei $x \in X$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
& x \in g^{-1}(\overline{\{g(x)\}}) = h^{-1}(\overline{\{g(x)\}}) \\
\implies & h(x) \in \overline{\{g(x)\}} \\
\implies & \overline{\{h(x)\}} \subseteq \overline{\{g(x)\}}
\end{aligned}$$

Analog folgt auch $\overline{\{g(x)\}} \subseteq \overline{\{h(x)\}}$ und insgesamt $\overline{\{h(x)\}} = \overline{\{g(x)\}}$. Aus der Nüchternheit von Y folgt daraus $h(x) = g(x)$. □

Definition C.12. Für einen regulären Verband A sei wie gehabt $pt(A)$ der nüchterne topologische Raum der Punkte. Ist B ein weiterer regulärer Verband und $f : A \to B$ ein vollständiger Verbandshomomorphismus, dann ist $\Phi_B \circ f \circ \Phi_A^{-1} : \Omega pt(A) \to \Omega pt(B)$ ebenfalls ein vollständiger Verbandshomomorphismus und $pt(f) : pt(B) \to pt(A)$ sei die eindeutige stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass $(pt(f))^{-1} = \Phi_B \circ f \circ \Phi_A^{-1}$.

Dann folgt

Korollar C.13. *pt : **RVerb** $\to$ **NTop** ist ein Cofunktor.*

Die Dualität

Satz C.14. *Die Cofunktoren Ω und pt begründen eine Dualität zwischen der Kategorie der nüchternen topologischen Räume **NTop** und der Kategorie der regulären Verbänden **RVerb**. Dabei gilt:*

1. *Für alle regulären Verbände A ist $\Phi_A : A \to \Omega pt(A)$ ein vollständiger Verbandsisomorphismus. Er hat die bei einer Dualität geforderte Kommutativitätseigenschaft $\Omega pt(f) \circ \Phi_A = \Phi_B \circ f$ für alle vollständigen Verbandshomomorphismus $f : A \to B$.*

2. *Für alle nüchternen topologischen Räume X ist $\Psi_X : X \to pt\Omega(X)$ ein Homöomorphismus. Er hat die bei einer Dualität geforderte Kommutativitätseigenschaft $pt\Omega(g) \circ \Psi_X = \Psi_Y \circ g$ für alle stetigen Funktionen $g : X \to Y$.*

Beweis. 1. Dass Φ_A ein vollständiger Verbandshomomorphismus ist, wurde bereits bewiesen. Die Kommutativitätseigenschaft folgt sofort aus der Definition.

2. Dass Ψ_X ein Homöomorphismus ist, wurde ebenfalls schon bewiesen. Um die Kommutativitätseigenschaft zu beweisen, reicht es nach Lemma A.8 zu zeigen, dass $\Omega(\Psi_X) = \Phi_{\Omega(X)}^{-1}$. Dies folgt aber sofort aus Satz C.9.

Es bleibt die Bijektivität der Cofunktoren auf den Morphismen zu zeigen. Sind X und Y nüchterne topologische Räume, dann gibt es für jeden vollständigen Verbandshomomorphismus $f : \Omega(Y) \to \Omega(X)$ genau eine stetige Funktion $g : X \to Y$ mit $\Omega(g) = g^{-1} = f$. Es folgt die Bijektivität von Ω auf den Morphismen.

Die Bijektivität von pt auf den Morphismen folgt durch folgende Überlegung: Die Morphismen in $Mor(A, B)$ stehen in bijektiver Beziehung zu den Morphismen in $Mor(\Omega pt(A), \Omega pt(B))$ über die Abbildung $\chi(f) = \Phi_B \circ f \circ \Phi_A^{-1}$. Nun gilt nach Definition C.12 $\Omega pt(f) = \chi(f)$. Da nun $\chi : Mor(A, B) \to Mor(\Omega pt(A), \Omega pt(B))$ bijektiv, und $\Omega : Mor(pt(B), pt(A)) \to Mor(\Omega pt(A), \Omega pt(B))$ bijektiv, folgt auch die Bijektivität von $pt : Mor(A, B) \to Mor(pt(B), pt(A))$. $\square$

D Übersicht der Kategorien

Zeichen	Objekte	Morphismen
Verb	Verbände	Verbandshomomorphismen
VVerb	vollständige Verbände	vollständige Verbandshomomorphismen
RVerb	reguläre Verbände	vollständige Verbandshomomorphismen
KohVerb	kohärente Verbände	kohärente Verbandshomomorphismen
DVerb	distributive Verbände	Verbandshomomorphismen
Heyt	Heyting Algebren	Verbandshomomorphismen
Bool	boolsche Algebren	Verbandshomomorphismen
CloAlg	closure Algebren	closure Algebren Homomorphismen
CloAlg*	$A \in Obj(CloAlg) \,:\, \Upsilon(A) \in Obj(Esa)$	closure Algebren Homomorphismen
NTop	nüchterne Topologien	stetige Abbildungen
KohTop	kohärente Topologien	kohärente Abbildungen
Stone	Stone Spaces	stetige Abbildungen
PStone	pairwise Stone Space	bistetige Abbildungen
QPries	quasi Priestley Spaces	stetige, ordnungserhaltende Abbildungen
Pries	Priestley Spaces	stetige, ordnungserhaltende Abbildungen
QEsa	quasi Esakia Spaces	Esakia Homomorphismen
Esa	Esakia Spaces	Esakia Homomorphismen
PEsa	pairwise Esakia Spaces	pairwise Esakia Homomorphismen
KohEsa	kohärente Esakia Spaces	kohärente Esakia Homomorphismen

E Übersicht der Äquivalenzen und Dualitäten

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathbf{QEsa} & \supseteq & \mathbf{Esa} & & \\
 & & \sim & & \sim & & \\
 & & \mathbf{CloAlg} & \supseteq & \mathbf{CloAlg^*} & & \\
 & & & & \equiv & & \\
 & & \mathbf{DVerb} & \supseteq & \mathbf{Heyt} & \supseteq & \mathbf{Bool} \\
 & & \equiv & & & & \\
\mathbf{RVerb} & \supseteq & \mathbf{KohVerb} & & \sim & & \sim \\
\sim & & \sim & & & & \\
\mathbf{NTop} & \supseteq & \mathbf{KohTop} & \supseteq & \mathbf{KohEsa} & \supseteq & \mathbf{Stone} \\
 & & \cong & & \cong & & \\
 & & \mathbf{PStone} & \supseteq & \mathbf{PEsa} & & \\
 & & \cong & & \cong & & \\
 & & \mathbf{Pries} & \supseteq & \mathbf{Esa} & &
\end{array}
$$

Literatur

[1] GURAM BEZHANISHVILI, NICK BEZHANISHVILI, DAVID GABELAIA, and ALEXANDER KURZ. Bitopological duality for distributive lattices and heyting algebras. *Mathematical Structures in Computer Science*, 20(03):359–393, 2010.

[2] Leo Esakia. Topological kripke models. *Soviet Math. Dokl.*, 15:147–151, 1974.

[3] Peter Johnstone. *Stone Spaces*. Cambridge University Press, 1982.

[4] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag, 1971.

[5] Hillary Priestley. Representation of distributive lattices by means of ordered stone spaces. *Bull. London Math. Soc.*, 2:186–190, 1970.