TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

BACHELORARBEIT

Basen in Banachräumen

ausgeführt am Institut für
Analysis und Scientific Computing
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao. Univ. Prof. Dr. Michael Kaltenbäck

durch
Nathanael Skrepek

2. Juni 2015

Inhaltsverzeichnis

Notation

Symbol	Bedeutung
$\mathbb{N}_{\leq n}$	$\{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$
$\mathbb{N}_{<n}$	$\{k \in \mathbb{N} \mid k < n\}$
$[n, m]_{\mathbb{N}}$	$\{k \in \mathbb{N} \mid n \leq k \leq m\}$
X	meistens normierter Vektorraum oder Banachraum
X'	topologischer Dualraum zu X
X^*	algebraischer Dualraum zu X
$\mathcal{B}(M, X)$	Menge der beschränkten Funktionen $f : M \to X$
$\dot{+}$	direkte Summe zweier Unterräume
$B_r^X(x)$	offene Kugel um x mit Radius r in X
$\lim_{i\in I}^w$	Grenzwert in der schwachen Topologie
$\operatorname{cls} M$	Abschluss der linearen Hülle von M ($\operatorname{cls} M = \overline{\operatorname{span} M}$)
ι	kanonische isomorphe Isometrie von X nach X''
$\delta_{i,j}$	Kronecker-Delta ($\delta_{i,j} = 1$ wenn $i = j$ und 0 sonst)

1 Motivation/Einleitung

Der klassische Basisbegriff in einem Vektorraum ist der der Hamelbasis. Dabei lässt sich jedes Element des Vektorraumes eindeutig als Linearkombination von Basisvektoren darstellen. Hier sei angemerkt, dass Linearkombinationen immer endliche Summen sind. Das heißt konkret für einen Vektorraum V ist $B \subseteq V$ genau dann eine Basis, wenn sich jedes $x \in V$ eindeutig darstellen lässt als

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k b_k$$

für gewisse b_k aus B. Die Mächtigkeit der Basis wird als Dimension des Vektorraum bezeichnet.

In einem unendlichdimensionalen Banachraum sind Hamelbasen immer überabzählbar groß, wie das folgende Beispiel zeigen wird.

`1.1 Beispiel.` Sei X ein unendlichdimensionaler Banachraum und B seine normierte Hamelbasis, das heißt $\|b\|_X = 1$ für alle $b \in B$. Betrachte nun einen echten Teilraum Y von X, sodass M mit $M \subsetneq B$ eine Basis von Y ist. Da in jeder ϵ-Umgebung $B_\epsilon(y)$ eines $y \in Y$ das Element $y + \frac{\epsilon}{2} b$ für $b \notin M$ enthalten ist, gilt

$$B_\epsilon(y) \nsubseteq Y \quad \text{für alle} \quad \epsilon > 0.$$

Also ist keine offene Menge in Y enthalten. Daher ist das Innere von Y leer und infolge ist $X \backslash Y$ dicht in X.

Wäre B nun abzählbar, dann gäbe es eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf B. Daher lässt sich B auch als $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ schreiben. Nun erfüllt jedes Folgenglied von $\left(\operatorname{span}\{b_i \mid i \in \mathbb{N}_{\leq n}\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ die gleichen Vorraussetzungen wie Y zuvor. Außerdem ist jedes Folgenglied ein endlichdimensionaler Unterraum von X und daher abgeschlossen. Nach dem Satz von Baire [2, Satz 4.1.1] ist

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \setminus \operatorname{span}\{b_i \mid i \in \mathbb{N}_{\leq n}\}$$

dicht in X. Andererseits ist jedes $x \in X$ ein Element aus $\operatorname{span}\{b_i \mid i \in \mathbb{N}_{\leq n}\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Somit erhält man den Widerspruch

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \setminus \operatorname{span}\{b_i \mid i \in \mathbb{N}_{\leq n}\} = \emptyset.$$

Im Falle eines unendlichdimensionalen Banachraumes hat man also immer eine überabzählbar große Hamel-Basis. Nachdem der Existenzbeweis für solche Basen das Lemma von Zorn verwendet, ist es schwierig so eine anzugeben. Daher ist es naheliegend, einen anderen Basisbegriff für Banachräume zu verwenden.

2 Schauderbasis

Im weiteren Verlauf werden normierte Vektorräume und Banachräume über dem Skalarkörper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ betrachtet, da es selten einen Unterschied macht, welcher der beiden Skalarkörper konkret verwendet wird, wird $\mathbb{K}$ den Skalarkörper der Vektorräume bezeichnen.

2.1 Grundlegendes über Schauderbasen

2.1 Definition. Eine Folge $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in einem normierten Vektorraum X wird *Schauderbasis* von X genannt, falls es für jedes $x \in X$ eine eindeutige Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus dem Skalarkörper $\mathbb{K}$ gibt, sodass

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i.$$

`2.2 Beispiel.`

- Jede Orthonormalbasis in einem seperablen Hilbertraum ist klarerweise auch eine Schauderbasis.
- Die Räume ℓ^p mit $p \in [1, +\infty)$ haben $e_i = (\delta_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ für $i \in \mathbb{N}$ als Schauderbasis. Denn ist $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, so gilt

$$\left\|(a_i)_{i\in\mathbb{N}} - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\|_p = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$$

  für $n \in \mathbb{N}$ groß genug.
- Der Raum der Nullfolgen c_0 versehen mit der Supremumsnorm hat ebenfalls die Schauderbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus dem vorherigen Beispiel. Da für eine Nullfolge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$

$$\left\|(a_i)_{i\in\mathbb{N}} - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\|_\infty = \sup_{i>n} |a_i| < \epsilon$$

  für $n \in \mathbb{N}$ groß genug gilt.

2.3 Fakta. Aus Definition 2.1 folgen unmittelbar einige Eigenschaften:

- Wegen der Eindeutigkeit der Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sind die Vektoren $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig.

- Besitzt der Raum X eine Schauerbasis, so ist dieser automatisch seperabel, da die Menge aller rationalen Linearkombinationen von Basisvektoren $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ abzählbar ist und dicht in X liegt.

- Die Abbildungen $e'_i : X \to \mathbb{K}$, $x \mapsto a_i$ sind wohldefiniert und linear. Die Wohldefiniertheit der Abbildung folgt aus der Eindeutigkeit der Koeffizientenfolge zu jedem x. Die Abbildung ist linear, da es für alle $x, y \in X$ eine eindeutige Koeffizientenfolgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gibt, sodass

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \quad \text{und} \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i$$

und somit für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$

$$e'_i(x + \lambda y) = e'_i\Big(\sum_{i=1}^{\infty}(a_i + \lambda b_i)e_i\Big) = a_i + \lambda b_i = e'_i(x) + \lambda e'_i(y)$$

gilt

- Durch die Basisdarstellung sind in natürlicher Weise Projektionen

$$P_n : \begin{array}{rcl} X & \to & \operatorname{span}\{e_i \,|\, i \in \mathbb{N}_{\le n}\} \\ \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \end{array}$$

definiert. Für diese gilt $\dim \operatorname{ran} P_n = n$, $P_n P_m = P_m P_n = P_{\min\{n,m\}}$ und $\lim_{n\in\mathbb{N}} P_n x = x$ für alle $x \in X$.

Wenn man umgekehrt eine Folge von Projektionen $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben hat, dann gibt uns der folgende Satz Auskunft, wann man daraus wieder eine Schauderbasis erhält.

2.4 Satz. *Sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten linearen Selbstabbildungen in einem normierten Raum X mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $\dim \operatorname{ran} P_n = n$,

(ii) $P_n P_m = P_{\min\{n,m\}}$,

(iii) $\lim_{n\in\mathbb{N}} P_n x = x$ *für alle* $x \in X$.

Dann erhält man eine Schauderbasis indem man $0 \neq e_i \in \operatorname{ran} P_i \cap \ker P_{i-1}$ für $i \in \mathbb{N}$ beliebig wählt, wobei $P_0 = 0$. Dabei sind die $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wiederum genau die Projektionen zur Schauderbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Beweis. Aus $P_n P_m = P_{\min\{n,m\}}$ folgt für $m = n$, dass es sich um Projektionen handelt und damit $X = \operatorname{ran} P_n \dot{+} \ker P_n$.

Wegen (i) und (ii) gilt $\operatorname{ran} P_{n-1} \subsetneq \operatorname{ran} P_n$. Nachdem immer eine Dimension unterschied zwischen $\operatorname{ran} P_n$ und $\operatorname{ran} P_{n-1}$ ist, muss $\operatorname{ran} P_n \cap \ker P_{n-1}$ eindimensional sein. Die Abbildung $P_n - P_{n-1}$ ist genau die Projektion auf diesen eindimensionalen Unterraum. $P_n x$ lässt sich als Teleskopsumme

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} (P_i - P_{i-1})x.$$

schreiben. Gemäß der Wahl der $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ lässt sich so eine eindimensionale Projektion $(P_i - P_{i-1})x$ auch schreiben als $\alpha_i(x)e_i$ mit einem linearen Funktional α_i. Wegen (iii) gilt

$$x = \lim_{n\in\mathbb{N}} P_n x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x)e_i$$

für alle $x \in X$.

Gemäß der Wahl der $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gilt $P_n e_i = e_i$ falls $n \geq i$ und $P_n e_i = 0$ sonst. Gilt für ein $x \in X$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i$, dann folgt aus der Stetigkeit der Projektionen P_n

$$\alpha_n(x)e_n = (P_n - P_{n-1}) \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i \overset{P_j \text{stetig}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i (P_n - P_{n-1})e_i = \beta_n e_n,$$

womit auch die Eindeutigkeit der Koeffizientenfolge gezeigt wurde.

❑

2.5 Lemma. Sei X ein normierter Vektorraum, $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge und $(P_i)_{i\in I}$ ein Netz von beschränkten linearen Selbstabbildungen in X.

Wenn das Netz $(P_i)_{i\in I}$ gleichmäßig beschränkt ist, d.h. $\sup_{i\in I} \|P_i\| < +\infty$, und gilt $\lim_{i\in I} P_i x = x$ für alle $x \in D$ für ein dichtes $D \subseteq X$, dann folgt $\lim_{i\in I} P_i x = x$ für alle $x \in X$.

Beweis. Sei $y \in X$ beliebig. Wegen der Dichtheit von D gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $x_\epsilon \in D$, sodass $\|x_\epsilon - y\| < \epsilon$. Nun ergibt sich

$$\begin{aligned} \|P_i y - y\| &= \|P_i y - y + P_i x_\epsilon - P_i x_\epsilon + x_\epsilon - x_\epsilon\| \\ &\leq \|x_\epsilon - y\| + \|P_i(y - x_\epsilon)\| + \|P_i x_\epsilon - x_\epsilon\| \\ &\leq (C+1)\epsilon + \|P_i x_\epsilon - x_\epsilon\|, \end{aligned}$$

wobei C eine obere Schranke für alle $\|P_i\|$ ist. Somit gilt $\limsup_{i\in I} \|P_i y - y\| \leq (C+1)\epsilon$, und wegen der Beliebigkeit von $\epsilon > 0$ folgt $\lim_{i\in I} P_i y = y$ und damit die Aussage.

❑

2.6 Korollar. *Sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig beschränkte Folge von linearen Selbstabbildungen in einem normierten Vektorraum X, sodass $P_m P_n = P_{\min\{n,m\}}$ und $\dim \operatorname{ran} P_n = n$. Wählt man für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $0 \neq e_i \in \operatorname{ran} P_i \cap \ker P_{i-1}$, wobei $P_0 = 0$, so ist $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis für $Z := \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ran} P_n}$.*

Beweis. Wegen der Wahl der $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gilt $\operatorname{ran} P_n = \operatorname{span}\{e_i \mid i = 1, \ldots, n\}$, womit

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ran} P_n = \operatorname{span}\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad Z = \operatorname{cls}\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

gilt. Offensichtlich liegt $\operatorname{span}\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ dicht in Z. Für jedes $x \in \operatorname{span}\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ gibt es ein $k_x \in \mathbb{N}$ und Koeffizienten $(a_i)_{i=1}^{k_x}$, sodass $x = \sum_{i=1}^{k_x} a_i e_i$. Daher folgt

$$P_n x = P_n \sum_{i=1}^{k_x} a_i e_i = \sum_{i=1}^{k_x} a_i P_n e_i = \sum_{i=1}^{\min\{n,k_x\}} a_i e_i.$$

Also gilt $P_n x = x$, wenn $n \geq k_x$, weswegen $\lim_{n\in\mathbb{N}} P_n x = x$ erfüllt ist. Nun sind wegen Lemma 2.5 die Voraussetzungen von Satz 2.4 erfüllt, womit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis von Z ist.

❑

2.7 Proposition. *Sei $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis eines dichten Unterraumes Y von X, dessen Projektionen $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt sind, dann ist $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bereits eine Schauderbasis für X.*

Beweis. Die Projektionen lassen sich wegen der Dichtheit von Y in X stetig auf X fortsetzen. Da $P_n(Y)$ bereits abgeschlossen ist, gilt $P_n(X) = P_n(Y)$. Die Abbildungsnorm bleibt ebenfalls erhalten. Die Fortsetzungen erfüllen daher alle Voraussetzungen von Korollar 2.6, womit X eine Schauderbasis hat. Nachdem $0 \neq e_i \in \operatorname{ran} P_i \cap \ker P_{i-1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, ist $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine mögliche Wahl für eine Schauderbasis von X.

❑

Um zu zeigen, dass die Projektionen $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu einer Schauderbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem Banachraum beschränkt sind, wird ein Umweg über einen Funktionenraum gemacht.

2.2 Der Raum $c(\mathbb{N}, X)$

Für einen Banachraum X sei daran erinnert, dass der Raum $\mathcal{B}(I, X)$ der beschränkten Funktionen von einer Menge I nach X versehen mit der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$ einen Banachraum abgibt.

2.8 Definition. Für einen Banachraum X und eine gerichtete Menge I bezeichne $c(I, X)$ die Menge aller $f \in \mathcal{B}(I, X)$, für die $\lim_{i\in I} f(i)$ in X existiert.

Wegen der Linearität des Grenzwerts ist $c(I, X)$ ein Unterraum von $\mathcal{B}(I, X)$. $c(I, X)$ ist nicht leer, da alle konstanten Funktionen darin enthalten sind. Mit der Hilfe des folgenden Resultats aus der Analysis [6, Lemma 8.7.1] erhält man sogar mehr.

2.9 Satz. *Seien $(I, \preceq_I)$ und $(J, \preceq_J)$ zwei gerichtete Mengen und sei $\langle X, d\rangle$ ein vollständig metrischer Raum.*

Weiters seien $H : I \times J \to X$ und $h : I \to Y$ Funktionen, sodass für alle $j \in J$ die Funktion $H_j : I \to X, i \mapsto H(i, j)$ beschränkt ist und sodass

$$h(i) = \lim_{j\in J} H(i, j)$$

gleichmäßig auf I, das heißt

$$\forall \epsilon > 0\ \exists j_0 : \forall j \succeq j_0\ \forall i \in I : d(H(i, j), h(i)) \leq \epsilon,$$

bzw. äquivalent dazu $h = \lim_{j\in J} H_j$ in $\langle \mathcal{B}(I, X), d_\infty\rangle$.

Schließlich existiere für alle $j \in J$ der Limes $A_j := \lim_{i\in I} H(i,j)$. Unter diesen Voraussetzungen ist sowohl $(A_j)_{j\in J}$ als auch $(h(i))_{i\in I}$ in X konvergent, wobei

$$\lim_{i\in J} A_j = \lim_{i\in I} h(i).$$

Also gilt

$$\lim_{j\in J}\lim_{i\in I} H(i,j) = \lim_{i\in I}\lim_{j\in J} H(i,j).$$

2.10 Korollar. *Der Vektorraum c(I,X) ist ein Banachraum. Die Funktion $L : c(I,X) \to X$, $f \mapsto \lim_{i\in I} f(i)$ ist linear und beschränkt mit $\|L\| = 1$.*

Beweis. Wählt man $J = \mathbb{N}$, $H(i,n) = f_n(i)$ und $h(i) = f(i)$ für eine in $\mathcal{B}(I,X)$ gegen ein $f \in \mathcal{B}(I,X)$ konvergente Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $c(I,X)$, so folgt aus Satz 2.9, dass auch $f \in c(I,X)$. Damit ist $c(I,X)$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{B}(I,X)$ und infolge vollständig. Für den Operator L gilt

$$\|L(f)\| = \|\lim_{i\in I} f(i)\| \leq \sup_{i\in I} \|f(i)\| = \|f\|_\infty .$$

Da für konstante Funktionen sogar Gleichheit gilt, folgt $\|L\| = 1$.

❏

2.11 Definition. Sei X ein Banachraum und I eine gerichtete Menge. Weiters sei Z_i für jedes $i \in I$ ein abgeschlossener Teilraum von X und $A_{i,j} : Z_j \to Z_i$ für $i,j \in I$ mit $i \preceq j$ ein linearer beschränkter Operator, sodass $A_{i,k} = A_{i,j} \circ A_{j,k}$ für $i \preceq j \preceq k$. Dann setzen wir

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(I,(A_{i,j}),X) &:= \{f \in \mathcal{B}(I,X) \,|\, \forall i \in I\ f(i) \in Z_i,\ \forall i \preceq j\ f(i) = A_{i,j} f(j)\}\\ c(I,(A_{i,j}),X) &:= \mathcal{B}(I,(A_{i,j}),X) \cap c(I,X).\end{aligned}$$

Da die $(Z_i)_{i\in I}$ lineare Teilräume von X und die $(A_{i,j})_{i\preceq j}$ lineare Abbildungen sind, gilt für $f, g \in \mathcal{B}(I,(A_{i,j}),X)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$

$$f + \lambda g \in \mathcal{B}(I,(A_{i,j}),X).$$

Außerdem ist $\mathcal{B}(I,(A_{i,j}),X)$ nicht leer, da die konstante 0 Funktion alle Forderungen erfüllt, womit $\mathcal{B}(I,(A_{i,j}),X)$ ein linearer Teilraum von $\mathcal{B}(I,X)$ ist.

Die Teilräume $(Z_i)_{i\in I}$ werden in der Schreibweise $\mathcal{B}(I,(A_{i,j}),X)$ weggelassen, da sie implizit durch die Definitionsbereiche der $(A_{i,j})_{i\preceq j}$ gegeben sind:

$$Z_i = \operatorname{dom} A_{i,i}.$$

2.12 Lemma. $\mathcal{B}(I,(A_{i,j}),X)$ ist abgeschlossen in $\mathcal{B}(I,X)$ und damit selbst ein Banachraum. Insbesondere ist $c(I,(A_{i,j}),X)$ ebenfalls ein Banachraum.

Beweis. Die Abbildungen $\pi_i : \mathcal{B}(I,X) \to X, f \mapsto f(i)$ sind linear und beschränkt, womit

$$Y := \{f \in \mathcal{B}(I,X) \,|\, \forall i \in I\ f(i) \in Z_i\ \} = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(Z_i)$$

abgeschlossen ist. Die Abbildungen $\phi_{i,j} = \pi_i - A_{i,j} \circ \pi_j : Y \to Z_i$ sind als Zusammensetzung stetiger Abbildungen selbst stetig. Daher ist

$$\mathcal{B}(I, (A_{i,j}), X) = \{f \in Y \mid \phi_{i,j}(f) = 0 \ \forall i \preceq j\} = \bigcap_{i \preceq j} \ker \phi_{i,j}$$

abgeschlossen. Der Raum $c(I, (A_{i,j}), X) = \mathcal{B}(I, (A_{i,j}), X) \cap c(I, X)$ ist als Schnitt zweier abgeschlossener Teilräume selbst abgeschlossen.

❑

2.13 Satz. *Sei X ein Banachraum, $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis von X, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die dazugehörigen Projektionen und für $n \leq m$ sei $P_{n,m} : \operatorname{ran} P_m \to \operatorname{ran} P_n$ die Einschränkung $P_n|_{\operatorname{ran} P_m}$.*

Dann ist $L : c(\mathbb{N}, (P_{n,m}), X) \to X$, $f \mapsto \lim_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ eine in beide Richtungen beschränkte lineare Bijektion.

Beweis. $\operatorname{ran} P_m$ ist endlichdimensional, womit $P_{n,m}$ beschränkt und $\operatorname{ran} P_m$ abgeschlossen ist. Also lässt sich $c(\mathbb{N}, (P_{n,m}), X)$ definieren und gibt wegen Lemma 2.12 einen Banachraum ab. Für ein $f \in c(\mathbb{N}, (P_{n,m}), X)$ gilt $f(n) \in \operatorname{ran} P_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gilt $f(n) = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ für eindeutige Koeffizienten $(a_i)_{i=1}^n$. Nachdem $P_{k,m} f(m) = f(k)$ für $k \leq m$ oder gleichbedeutend

$$P_k \sum_{i=1}^m a_i e_i = \sum_{i=1}^k a_i e_i,$$

gilt, gibt es für jedes $f \in c(\mathbb{N}, (P_{n,m}), X)$ eine eindeutige Koeffizientenfolge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, sodass $f = (\sum_{i=1}^n a_i e_i)_{n\in\mathbb{N}}$. Somit gilt $L(f) = \sum_{i=1}^\infty a_i e_i$. Nun muss L injektiv sein, nachdem $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis ist und damit nur die konstante 0-Folge unter L auf 0 abgebildet wird.

Außerdem ist für jedes $x \in X$ die Folge $(P_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, da sie konvergent gegen x ist. Daher ist $f := (P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ein Element von $c(\mathbb{N}, (P_{n,m}), X)$ mit $L(f) = x$.

Schließlich ist L eine beschränkte lineare bijektive Abbildung zwischen zwei Banachräumen und wegen des Satzes der offenen Abbildung [2, Satz 4.3.1] ist auch L^{-1} beschränkt.

❑

2.14 Korollar. *Die Projektionen $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einer Schauderbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in einem Banachraum X sind stetig und sogar gleichmäßig beschränkt. Die Koeffizientenabbildungen $(e_i')_{i\in\mathbb{N}}$ sind ebenfalls stetig.*

Beweis. Nachdem die Inverse $L^{-1} : X \to c(\mathbb{N}, (P_{n,m}), X)$ von L aus Satz 2.13 beschränkt ist, wobei $L^{-1}x = (P_n x)_{n\in\mathbb{N}}$, erhalten wir

$$\left\|L^{-1}\right\| = \sup_{\|x\|=1} \|(P_n x)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{\|x\|=1} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\|x\|=1} \|P_n x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\|.$$

Insbesondere gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| < +\infty$ und für die Koeffizientenabbildungen folgt

$$|e_n'(x)| \, \|e_n\| = \|e_n'(x) e_n\| = \|(P_n - P_{n-1})x\| \leq 2 \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| \, \|x\| \, \|e_n\|,$$

womit $\|e_n'\| \leq \frac{2\sup_{n\in\mathbb{N}}\|P_n\|}{\|e_n\|}$.

❑

2.15 Definition. Der Wert $bc(e_i) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\|$ wird *Basiskonstante* genannt. Gilt $bc(e_i) = 1$, so wird die Schauderbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ monoton genannt.

2.16 Bemerkung. Normiert man die Schauderbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, so erhält man, dass $(\tilde{e}_i)_{i\in\mathbb{N}} = \left(\frac{e_i}{\|e_i\|}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Schauderbasis ist, dessen Koeffizientenabbildungen $(\tilde{e}_i')_{i\in\mathbb{N}} = (\|e_i\|\, e_i')_{i\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig mit

$$\|\tilde{e}_i'\| = \|e_i\|\,\|e_i'\| \leq 2bc(e_n)$$

beschränkt sind.

2.3 Basisfolgen

2.17 Definition. Eine Folge $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in einem Banachraum X wird *Basisfolge* genannt, falls diese eine Schauderbasis von $\operatorname{cls}\{e_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ ist.

2.18 Bemerkung. Auch für eine Basisfolge $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sind die Koordinatenabbildungen $e_i' : \operatorname{cls}\{e_i \,|\, i \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{K}$ stetige Funktionale und die Projektionen $P_n : \operatorname{cls}\{e_i \,|\, i \in \mathbb{N}\} \to \operatorname{span}\{e_i \,|\, i \in \mathbb{N}_{\leq n}\}$, $x \mapsto \sum_{i=1}^n e_i'(x)e_i$ gleichmäßig beschränkt mit $bc(e_i)$.

2.19 Korollar. *Eine Folge $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in einem Banachraum X ist genau dann eine Basisfolgen, wenn $e_i \neq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und es eine Konstante $K \in \mathbb{R}^+$ für alle Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus dem Skalarkörper und alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$ gibt, sodass*

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i e_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^m a_i e_i\right\|. \tag{1}$$

Die kleinste derartige Konstante K stimmt mit $bc(e_i)$ überein.

Beweis. Wenn $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Basisfolge ist, so gilt

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i e_i\right\| = \left\|P_n \sum_{i=1}^m a_i e_i\right\| \leq bc(e_i) \left\|\sum_{i=1}^m a_i e_i\right\|$$

für alle $n \leq m$ und alle $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, wobei die P_n die Projektionen aus Bemerkung 2.18 sind.

Wären die $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ linear abhängig, so gäbe es ein $n \in \mathbb{N}$ und Skalare $(a_i)_{i=1}^n$, sodass $\sum_{i=1}^n a_i e_i = 0$ und $\sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i \neq 0$ gilt. Das widerspräche aber Bedingung (1). Somit gilt $\dim \operatorname{span}\{e_i \,|\, i \in \mathbb{N}_{\leq n}\} = n$. Definiert man nun Projektionen durch

$$P_n : \begin{array}{ccc} \operatorname{span}\{e_i \,|\, i \in \mathbb{N}\} & \to & \operatorname{span}\{e_i \,|\, i \in \mathbb{N}\} \\ \sum_{i=1}^m a_i e_i & \mapsto & \sum_{i=1}^{\min\{n,m\}} a_i e_i \end{array},$$

so ist die Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wegen (1) gleichmäßig beschränkt und erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 2.4. Die Bedingung (iii) ist erfüllt, da $P_n x$ für ein

$x \in \operatorname{span}\{e_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ ab einem hinreichend großen n_0 konstant x ist. Also ist $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis von $\operatorname{span}\{e_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ und wegen Proposition 2.7 auch eine Schauderbasis von $\operatorname{cls}\{e_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$.

Aus der Definition von $bc(e_i)$ folgt unmittelbar $bc(e_i) \leq K$ für jedes K, welches (2.19) erfüllt. Da $bc(e_i)$ eine mögliche Wahl für ein solches K ist, folgt die Behauptung.

❑

2.20 Definition. Sei $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Basisfolge in einem Banachraum X und $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Basisfolge in einem Banachraum Y. Dann heißt $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *äquivalent* zu $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$, wenn für jede Koeffizientenfolge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ die Konvergenz Reihe $\sum_{i=1}^\infty a_i e_i$ äquivalent zu der von $\sum_{i=1}^\infty a_i b_i$ ist.

2.21 Satz. *Sei $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Basisfolge in einem Banachraum X und $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem Banachraum Y. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(*i*) *$(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine zu $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ äquivalente Basisfolge.*

(*ii*) *Es gibt eine in beide Richtungen beschränkte lineare Bijektion $\Phi : \operatorname{cls}\{e_i \,|\, i \in \mathbb{N}\} \to \operatorname{cls}\{b_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$, sodass $\Phi(e_i) = b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.*

(*iii*) *Es gibt zwei Konstante $C_1, C_2 > 0$, sodass für alle Skalare $(a_i)_{i=1}^n$*

$$\frac{1}{C_1}\left\|\sum_{i=1}^n a_i e_i\right\|_X \leq \left\|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right\|_Y \leq C_2\left\|\sum_{i=1}^n a_i e_i\right\|_X$$

gilt.

Beweis. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): Definiere die Abbildung

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \operatorname{cls}\{e_i \,|\, i \in \mathbb{N}\} & \to & \operatorname{cls}\{b_i \,|\, i \in \mathbb{N}\} \\ x = \sum_{i=1}^\infty e_i'(x) e_i & \mapsto & \sum_{i=1}^\infty e_i'(x) b_i \end{array}.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, linear, injektiv und surjektiv, da es sich laut Voraussetzung um äquivalente Basisfolgen handelt. Ist $\big((x_k, \Phi(x_k))\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen (x,y) konvergente Folge aus $\operatorname{cls}\{e_i \,|\, i \in \mathbb{N}\} \times \operatorname{cls}\{b_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$, so folgt aus der Stetigkeit der Koeffizientenabbildungen, dass

$$\lim_{k\in\mathbb{N}} e_i'(x_k) = e_i'(x) \quad \text{und} \quad \lim_{k\in\mathbb{N}} e_i'(x_k) = \lim_{k\in\mathbb{N}} b_i'(\Phi(x_k)) = b_i'(y)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Daher gilt $e_i'(x) = b_i'(y)$ und damit $\Phi(x) = y$. Aus dem Satz des abgeschlossenen Graphen [2, Satz 4.4.2] folgt, dass Φ stetig ist und aus dem Satz der offenen Abbildung [2, Korollar 4.3.4], dass Φ^{-1} stetig ist.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*): (*iii*) gilt für $C_1 := \left\|\Phi^{-1}\right\|$ und $C_2 := \|\Phi\|$.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*): Für beliebiges $m \leq n$ und beliebige Skalare $(a_i)_{i=1}^n$ gilt

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right\|_Y \leq C_2\left\|\sum_{i=1}^n a_i e_i\right\|_X \leq C_2 bc(e_i)\left\|\sum_{i=1}^m a_i e_i\right\|_X \leq C_1 C_2 bc(e_i)\left\|\sum_{i=1}^m a_i b_i\right\|_Y,$$

womit $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ laut Korollar 2.19 eine Basisfolge ist.

Sei nun $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus dem Skalarkörper, sodass $\sum_{i=1}^\infty a_i e_i$ konvergiert. Dann gilt nachdem Cauchy-Kriterium $\left\|\sum_{i=m}^n a_i e_i\right\|_X < \frac{\epsilon}{C_2}$, wenn

$n, m > n_0$ für ein gewisses $n_0 \in \mathbb{N}$. Wähle nun diese n_0 und definiere für gegebenes m die Folge $(\tilde{a}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ durch

$$\tilde{a}_i = \begin{cases} a_i, & i \leq m, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i=1}^{m} a_i b_i \right\|_Y = \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i - \tilde{a}_i) b_i \right\|_Y \leq C_2 \left\| \sum_{i=m+1}^{n} a_i e_i \right\|_X < \epsilon,$$

womit $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und konvergiert. Umgekehrt verläuft der Beweis analog. Also sind $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ äquivalent.

❑

3 Das Basisproblem

Wie schon am Anfang in Fakta 2.3 angemerkt, ist jeder Banachraum mit Schauderbasis seperabel, wodurch sich die Frage aufdrängt, ob auch jeder seperable Banachraum eine Schauderbasis besitzt. Diese Fragestellung wird das *Basisproblem* genannt. Lange Zeit war diese Fragestellung ein offenes Problem bis 1972 Per Enflo das Problem negativ löste [3].

3.1 Definition. Ein Banachraum X hat die *beschränkte Approximationseigenschaft* (BAP), wenn es eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von beschränkten linearen Selbstabbildungen endlichen Ranges gibt, sodass

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x - x\| = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in X. \tag{2}$$

3.2 Bemerkung. Die Projektionen $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu einer Schauderbasis erfüllen die Forderung (2), womit jeder Banachraum, der eine Schauderbasis besitzt, die beschränkte Approximationseigenschaft hat.

3.3 Definition. Ein Banachraum X hat die *Approximationseigenschaft*, wenn es für jeden Banachraum Y und zu jedem kompakten Operator $T : Y \to X$ eine Folge von Operatoren endlichen Ranges $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, sodass

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \|T - T_n\| = 0.$$

3.4 Lemma. Ein Banachraum X hat die *Approximationseigenschaft*, wenn für jede kompakte Menge K und alle $\epsilon > 0$ ein Operator $A : X \to X$ endlichen Ranges existiert, sodass

$$\sup_{x\in K} \|Ax - x\| < \epsilon.$$

Beweis. Ist Y ein Banachraum und $T : Y \to X$ ein kompakter Operator, so ist $K := \overline{T(B_1(0))}$ kompakt. Wähle nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Operator $A_n : X \to X$, sodass $\sup_{x\in K} \|A_n x - x\| < \frac{1}{n}$. Dann gilt

$$\|T - A_n T\| = \sup_{y\in B_1(0)} \|Ty - A_n Ty\| = \sup_{x\in K} \|x - A_n x\| < \frac{1}{n}.$$

Also hat $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} := (A_n T)_{n\in\mathbb{N}}$ die in Definition 3.3 geforderte Eigenschaft.

❑

3.5 Satz. *Aus der* beschränkten Approximationseigenschaft *folgt die* Approximationseigenschaft.

Beweis. Nachdem die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Definition 3.1 punktweise gegen die Identität konvergiert gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\| < \infty$. Nach dem Principle of Uniform Boundedness [2, Korollar 4.2.2] folgt $C := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$.

Sei $K \subseteq X$ kompakt. Klarerweise lässt sich K von $\bigcup_{x\in K} B_{\frac{\epsilon}{2(C+1)}}(x)$ überdecken. Nachdem K kompakt ist, gilt bereits $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{\epsilon}{2(C+1)}}(x_i)$ für bestimmte $(x_i)_{i=1}^{k}$ aus K. Für jedes $x \in K$ gibt es demnach ein x_i, sodass $\|x - x_i\| < \frac{\epsilon}{2(C+1)}$. Daher gilt

$$\begin{aligned}\|A_n x - x\| &\leq \|A_n x - A_n x_i + x_i - x\| + \|A_n x_i - x_i\| \\ &\leq (\|A_n\| + 1)\|x - x_i\| + \|A_n x_i - x_i\|.\end{aligned}$$

Wählt man nun n so groß, dass $\max_{i=1\dots k} \|A_n x_i - x_i\| \leq \frac{\epsilon}{2}$, so erhält man

$$\|A_n x - x\| < (C+1)\frac{\epsilon}{2(C+1)} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

wenn nur $x \in K$. Also gilt auch $\sup_{x\in K} \|A_n x - x\| < \epsilon$ für n groß genug. Aus Lemma 3.4 folgt schließlich die Behauptung.

❑

Aus Bemerkung 3.2 und Satz 3.5 folgt, dass jeder Banachraum mit Schauderbasis die Approximationseigenschaft hat.

Das heißt, um das Basisproblem negativ zu lösen, reicht es einen seperablen Banachraum zu finden, der die Approximationseigenschaft nicht erfüllt, da diese aus der Existenz einer Schauderbasis folgen müsste. In der Tat ging Per Enflo bei seiner Lösung des Basisproblems derart vor [3].

4 Schwache Schauderbasen

4.1 Definition. Eine Folge $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in einem normierten Vektorraum X wird *schwache Schauderbasis* von X genannt, falls es für jedes $x \in X$ eine eindeutige Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus dem Skalarkörper $\mathbb{K}$ gibt, sodass die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ schwach gegen x konvergiert, d.h.

$$\lim_{N\to\infty} \phi\Big(\sum_{i=1}^{N} a_i e_i\Big) = \phi(x) \quad \text{für alle} \quad \phi \in X'.$$

4.2 Bemerkung. Auch für eine schwache Schauderbasis ist in natürlicher Weise eine Folge von Projektionen $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert

$$P_n : \begin{array}{ccc} X & \to & \operatorname{span}\{e_i \mid i \in \mathbb{N}_{\leq n}\} \\ x & \mapsto & \sum_{i=1}^n a_i e_i \end{array},$$

wobei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ die eindeutige Koeffizietenfolge zu x ist.

4.3 Lemma. Sei X ein Banachraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x schwach konvergente Folge, d.h. $\lim_{n\in\mathbb{N}} \phi(x_n) = \phi(x)$ für alle $\phi \in X'$. Dann ist die Folge beschränkt.

Beweis. Im Folgenden bezeichnet $\iota : X \to X''$ die kanonische Einbettung von X in dessen topologischen Bidualraum X''.

Wegen $\phi(x_n) \overset{n\to\infty}{\to} \phi(x)$ gibt es ein n_0 sodass $|\phi(x_n)| < |\phi(x)| + 1$ für alle $n \geq n_0$. Nachdem $\iota(x_n)(\phi) = \phi(x_n)$ gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\iota(x_n)(\phi)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\phi(x_n)\| \leq \underbrace{\max_{n\leq n_o}\{|\phi(x_n)|, |\phi(x)+1|\}}_{:=C_\phi} < \infty.$$

Wegen des Principle of Uniform Boundedness [2, Korollar 4.2.2] ist $\iota(x_n)$ gleichmäßig beschränkt. Da ι eine Isometrie ist, folgt die Aussage.

❑

4.4 Definition. Für einen Banachraum X und eine gerichtete Menge $(I, \preceq)$ bezeichnet $c_w(I, X)$ die Menge aller $f \in \mathcal{B}(I, X)$ für die ein $x_f \in X$ existiert, sodass $\lim^w_{i\in I} f(i) = x_f$, das heißt $\lim_{i\in I} \phi(f(i)) = \phi(x_f)$ für alle $\phi \in X'$.

4.5 Lemma. $c_w(I, X)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{B}(I, X)$. Außerdem ist $L_w : c_w(I, X) \to X$, $f \mapsto \lim^w_{i\in I} f(i)$ eine lineare Abbildung mit $\|L_w\| = 1$.

Beweis. Konstante Funktionen sind in $c_w(I, X)$ enthalten, womit $c_w(I, X)$ nicht leer ist. Da für schwach konvergente Netze $(f(i))_{i\in I}$, $(g(i))_{i\in I}$ und komplexe Zahlen λ

$$\lim_{i\in I} \phi[f(i) + \lambda g(i)] = \lim_{i\in I} \phi(f(i)) + \lambda \lim_{i\in I} \phi(g(i)) \quad \text{für alle} \quad \phi \in X'$$

gilt, ist $c_w(I, X)$ ein Unterraum von $\mathcal{B}(I, X)$. Daraus folgt außerdem auch die Linearität von L_w.

Für $f \in c_w(I, X)$ gilt $f(i) \in \overline{B}^X_{\|f\|_\infty}(0)$ für alle $i \in I$. Nachdem diese Menge konvex und abgeschlossen in der Normtopologie ist, ist sie laut [2, Satz 5.3.8] auch abgeschlossen in der schwachen Topologie. Damit ist $L_w(f) = \lim^w_{i\in I} f(i)$ ebenfalls in $\overline{B}^X_{\|f\|_\infty}(0)$ enthalten und infolge gilt $\|L_w(f)\| \leq \|f\|_\infty$, wobei für konstante Funktionen Gleichheit gilt.

Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $c_w(I, X)$, die gegen ein $f \in \mathcal{B}(I, X)$ konvergiert, so gilt $\|L_w(f_n) - L_w(f_m)\| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$. Daher ist $(L_w(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in X und infolge konvergent gegen ein $x_0 \in X$. Mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auch $(\phi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $\phi \in X'$ gleichmäßig. Wegen der Stetigkeit von ϕ und Satz 2.9 gilt

$$\lim_{i\in I} \phi(f(i)) = \lim_{i\in I} \lim_{n\in\mathbb{N}} \phi(f_n(i)) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \lim_{i\in I} \phi(f_n(i)) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \phi(L_w(f_n)) = \phi(x_0)$$

für alle $\phi \in X'$. Also ist $f \in c_w(I, X)$ mit $L_w(f) = x_0$.

❏

4.6 Definition. Analog zu $c(I, (A_{i,j}), X)$ lässt sich für schwache Konvergenz

$$c_w(I, (A_{i,j}), X) := \mathcal{B}(I, (A_{i,j}), X) \cap c_w(I, X)$$

definieren.

Der Raum $c_w(I, (A_{i,j}), X)$ ist selbst als Schnitt zweier abgeschlossener Unterräume ein abgeschlossener Unterraum

4.7 Satz. *Sei $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine schwache Schauderbasis eines Banachraums X, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die dazugehörigen Projektionen und für $n \leq m$ sei $P_{n,m} : \operatorname{ran} P_m \to \operatorname{ran} P_n$ die Einschränkung $P_n|_{\operatorname{ran} P_m}$.*

Dann ist $L : c_w(\mathbb{N}, (P_{n,m}), X) \to X$, $f \mapsto \lim^w_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ eine in beide Richtungen beschränkte lineare Bijektion.

Beweis. Die Injektivität von L_w kann analog zu der Injektivität von L im Beweis von Satz 2.13 gezeigt werden.

Für $x \in X$ ist $(P_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ als schwach konvergente Folge laut Lemma 4.3 beschränkt. Daher liegt $f := (P_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ in $c_w(\mathbb{N}, (P_{n,m}), X)$, wobei $L_w(f) = x$. Also ist L_w surjektiv.

Nun ist L_w als bijektive beschränkte lineare Abbildung wegen des Satzes der offenen Abbildung [2, Satz 4.3.1] ein Homöomorphismus.

❏

4.8 Korollar. *Ist $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine schwache Schauderbasis eines Banachraums X, so ist $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis von X.*

Beweis. Die Projektionenfolge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig beschränkt durch $\left\|L_w^{-1}\right\|$. Der Beweis dafür verläuft exakt wie jener in Korollar 2.14.

Für jedes $x \in \operatorname{span}\{e_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ konvergiert $P_n x \overset{n\to\infty}{\to} x$ nicht nur in der schwachen Topologie sondern auch in der Normtopologie, da die Folge ab einem hinreichend großen Index n_0 konstant ist. Nachdem $\operatorname{span}\{e_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ konvex ist, stimmt der Normabschluss mit dem schwachen Abschluss, welcher X ist, überein.

Proposition 2.7 besagt, dass $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bereits eine Schauderbasis für X ist.

❏

5 Duale Schauderbasis

5.1 Definition. Ist X ein Banachraum und $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis von X, dann wird die dazu gegebenen Folge von Koeffizientenabbildungen $(e_i')_{i\in\mathbb{N}}$ aus X' (Korollar 2.14) *duale Schauderbasis* genannt.

5.2 Bemerkung. Die *duale Schauderbasis* $(e_i')_{i\in\mathbb{N}}$ ist im Allgemeinen keine Schauderbasis von X'.

5.3 Bemerkung. Nachdem $e_i'(e_j) = 0$ für $i \neq j$, gilt für alle Koeffizienten $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$

$$e_i'(e_i) = 1 \neq 0 = \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\{i\}} a_k e_k'(e_i).$$

Daher ist jedes $\phi \in \mathrm{cls}\{e'_k \,|\, k \in \mathbb{N}\backslash\{i\}\}$ ausgewertet an e_i gleich 0, wohingegen $e'_i(e_i) = 1$. Das impliziert $e'_i \notin \mathrm{cls}\{e'_k \,|\, k \in \mathbb{N}\backslash\{i\}\}$, womit die duale Schauderbasis nicht nur linear unabhängig, sondern auch *unendlich linear unabhängig* ist, was genau $e'_i \notin \mathrm{cls}\{e'_k \,|\, k \in \mathbb{N}\backslash\{i\}\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ bedeuten soll.

5.4 Satz. *Sei $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis eines Banachraumes X, $(e'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dessen duale Schauderbasis und $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die dazugehörigen Projektionen. Dann gilt:*

(*i*) *Für die Konjugierte Abbildung $P'_n : X' \to X'$ von P_n gilt, $P'_n x' = \sum_{i=1}^n x'(e_i)e'_i$.*

(*ii*) $\lim^{w^*}_{n\in\mathbb{N}} P'_n x' = x'$ *für alle $x' \in X'$.*

(*iii*) $(e'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *ist eine Schauderbasis für* $\mathrm{cls}\{e'_i \,|\, i \in \mathbb{N}\} \subseteq X'$.

Beweis.

(*i*) Wegen der Linearität eines $x' \in X'$ gilt für alle $x \in X$

$$\begin{aligned}\langle x, P'_n x'\rangle = \langle P_n x, x'\rangle = \sum_{i=1}^n e'_i(x)\langle e_i, x'\rangle = \sum_{i=1}^n x'(e_i)\langle x, e'_i\rangle \\ = \Big\langle x, \sum_{i=1}^n x'(e_i)e'_i\Big\rangle.\end{aligned}$$

(*ii*) Bezeichnet $\iota : X \to X''$ die kanonische Einbettung, so erhält man

$$\iota(x)(P'_n x') = \sum_{i=1}^n x'(e_i)e'_i(x) = x'\Big(\sum_{i=1}^n e'_i(x)e_i\Big).$$

Somit lässt sich der Grenzwert für $n \to \infty$, wegen der Stetigkeit von x' wie folgt berechnen:

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \iota(x)(P'_n x') = \lim_{n\in\mathbb{N}} x'\Big(\sum_{i=1}^n e'_i(x)e_i\Big) = x'(x) = \iota(x)(x').$$

(*iii*) Da die duale Schauderbasis linear unabhängig ist (vgl. Bemerkung 5.3), gilt $\dim \mathrm{ran}\, P'_n = n$. Nachdem wegen [2, Satz 6.1.2] $\|P'_n\| = \|P_n\|$ gilt, ist auch $(P'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt durch $bc(e_i)$. Für ein x' aus $\mathrm{span}\{e'_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ konvergiert $P_n x'$ sogar in der Norm gegen x'. Da $\mathrm{span}\{e'_i \,|\, i \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{ran}\, P'_n$ dicht in $\mathrm{cls}\{e'_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ liegt, ist aufgrund von Proposition 2.7 $(e'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis von $\mathrm{cls}\{e'_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$.

❑

5.5 Definition. Sei $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis von X und $(e'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dessen duale Schauderbasis.

- $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ wird *schrumpfend* genannt, falls $\mathrm{cls}\{e'_i \,|\, i \in \mathbb{N}\} = X'$.
- $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ wird *beschränkt vollständig* genannt, falls die Reihe $\sum_{i=1}^\infty a_i e_i$ schon dann konvergiert, wenn $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{i=1}^n a_i e_i\| < \infty$.

5.6 Bemerkung. Ist eine Schauderbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eines Banachraums X so bedeutet, wegen Satz 2.13 beschränkt vollständig nichts anderes als

$$c(\mathbb{N},(P_{n,m}),X)=\mathcal{B}(\mathbb{N},(P_{n,m}),X).$$

5.7 Satz. *Für eine schrumpfende Schauderbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eines Banachraums X ist $T:X''\to\mathcal{B}(\mathbb{N},(P_{n,m}),X)$ mit $x''\mapsto\left(\sum_{i=1}^n x''(e_i')e_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in beide Richtungen beschränkte lineare Bijektion.*

Ist $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zusätzlich monoton, d.h. $bc(e_i)=1$, so ist T sogar eine Isometrie.

Beweis. Da $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ schrumpfend ist, ist die duale Schauderbasis $(e_i')_{i\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis von X'. Daher kann Satz 5.4 (i) auf $(e_i')_{i\in\mathbb{N}}$ mit der dualen Schauderbasis $(\iota(e_i))_{i\in\mathbb{N}}$ angewandt werden. Insbesondere sind die entsprechenden Projektionen gegeben durch:

$$P_n'':\begin{array}{ccc} X'' & \to & X'' \\ x'' & \mapsto & \sum_{i=1}^n x''(e_i')\iota(e_i) \end{array}.$$

Nachdem $\iota:X\to X''$ eine lineare Isometrie ist, folgt

$$\|Tx''\|_\infty=\left\|\left(\sum_{i=1}^n x''(e_i')e_i\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty=\left\|\left(\sum_{i=1}^n x''(e_i')\iota(e_i)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|P_n''x''\|\,.$$

Aus $\|P_n''\|=\|P_n'\|=\|P_n\|\le bc(e_i)$ (vgl. [2, Satz 6.1.2]) erhält man

$$\|Tx''\|_\infty\le bc(e_i)\,\|x''\|\,.$$

Gilt $Tx''=Ty''$, so folgt $x''(e_i')=y''(e_i')$ für alle $i\in\mathbb{N}$. Weil die e_i' eine Schauderbasis für X' bilden, gilt daher auch $y''=x''$. Somit ist T injektiv.

Ist andererseits $f\in\mathcal{B}(\mathbb{N},(P_{n,m}),X)$, so gilt $f(n)=\sum_{i=1}^n a_ie_i$ für eine eindeutige Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Nachdem auch $\iota\circ f=\left(\sum_{i=1}^n a_i\iota(e_i)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in X'' beschränkt ist, hat diese Folge bezüglich der w^*-Topologie von X'', aufgefasst als Dualraum von X', einen Häufungspunkt x''. Das heißt es existiert eine gerichtete Menge $(J,\preceq)$ und eine Funktion $n:J\to\mathbb{N}$, sodass $\left(\sum_{i=1}^{n(j)} a_i\iota(e_i)\right)_{j\in J}$ ein Teilnetz von $\iota\circ f$ ist und

$$x''(\phi)=\lim_{j\in J}\sum_{i=1}^{n(j)} a_i\iota(e_i)(\phi)\quad\text{für alle}\quad\phi\in X'$$

gilt. Wertet man x'' an jedem Vektor der dualen Schauderbasis aus, so erhält man, wegen $e_i'(e_j)=\delta_{i,j}$

$$x''(e_k')=\lim_{j\in J}\sum_{i=1}^{n(j)} a_ie_k'(e_i)=a_k.$$

Also gilt $T(x'')=f$, womit T surjektiv ist.

Daher ist T eine bijektive beschränkte lineare Abbildung zwischen zwei Banachräumen. Außerdem folgt aus den Überlegungen zur Surjektivität von T, dass $\left\|T^{-1}f\right\| \leq \|f\|_\infty$, da abgeschlossene Normkugeln auch in der w^*-Topologie abgeschlossen sind. Also gilt $\left\|T^{-1}\right\| \leq 1$, womit T^{-1} beschränkt ist.

Wenn $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ monoton ist, so gilt $bc(e_i) = 1$, und folglich

$$\|x''\| \leq \|Tx''\|_\infty \leq \|x''\|.$$

Also ist T eine Isometrie.

❑

5.8 Satz. *Ein Banachraum X mit einer Schauderbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist genau dann reflexiv, wenn $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ schrumpfend und beschränkt vollständig ist.*

Beweis. Ist $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ schrumpfend so ist T aus Satz 5.7 eine in beide Richtungen beschränkte lineare Bijektion von X'' auf $\mathcal{B}(\mathbb{N},(P_{n,m}),X)$. Nachdem $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ auch beschränkt vollständig ist, folgt wegen Bemerkung 5.6, dass T bereits auf $c(\mathbb{N},(P_{n,m}),X)$ abbildet. Das heißt, $L\circ T : X'' \to X$ (L aus Satz 2.13) ist wohldefiniert und ebenfalls eine eine beide Richtungen beschränkte lineare Bijektion. Somit existiert die Umgekehrabbildung und für diese gilt

$$(T^{-1}\circ L^{-1})x = T^{-1}\Big(\sum_{i=1}^n e_i'(x)e_i\Big)_{n\in\mathbb{N}} = T^{-1}\Big(\sum_{i=1}^n \iota(x)(e_i')e_i\Big)_{n\in\mathbb{N}} = \iota(x).$$

Damit ist $\iota : X \to X''$ bijektiv.

Nun sei X umgekehrt reflexiv. Aus Satz 5.4 folgt, dass $\lim^{w^*}_{n\in\mathbb{N}} P_n'x' = x'$ für beliebiges $x' \in X'$. Wegen $X'' = \iota(X)$ stimmt die schwache Topologie mit der w^*-Topologie überein. Also ist die duale Schauderbasis eine schwache Schauderbasis von X' und wegen Korollar 4.8, sogar eine Schauderbasis von X'. Also ist $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ schrumpfend. Für jedes $x'' \in X''$ existiert ein $x \in X$, sodass $\iota(x) = x''$. Nun gilt

$$Tx'' = T\iota(x) = \Big(\sum_{i=1}^n e_i'(x)e_i\Big)_{n\in\mathbb{N}} = L^{-1}x.$$

Nachdem sowohl T als auch L bijektiv sind, folgt daraus

$$\mathcal{B}(\mathbb{N},(P_{n,m}),X) = TX'' = L^{-1}X = c(\mathbb{N},(P_{n,m}),X).$$

Somit ist $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ beschränkt vollständig.

❑

6 Beispiele

`6.1 Beispiel.` Um eine Schauderbasis für $C([0,1],\mathbb{K})$ zu erhalten, wähle man zunächst eine Folge $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$, sodass $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ und $\{t_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ dicht in $[0,1]$ ist. Weiters definiere man $P_1 f = f(0)$ und $P_n f$ als eine stückweise lineare Funktion mit Knoten $(t_i)_{i=1}^n$, sodass $P_n f(t_i) = f(t_i)$ für $i \leq n$. Dann gilt $\|P_n f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei bei konstanten Funktionen Gleichheit herrscht. Somit sind die P_n gleichmäßig mit 1 beschränkt. Außerdem gilt

$$P_n P_m f = P_m P_n f = P_{\min\{n,m\}} f \tag{3}$$

für alle $f \in C([0,1],\mathbb{K})$, womit es sich bei den $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um Projektionen handelt. Um nachzuweisen, dass $C([0,1],\mathbb{K})$ eine Schauderbasis hat, wird Satz 2.4 bemüht. Mit (3) ist Bedingung (ii) bereits erfüllt.

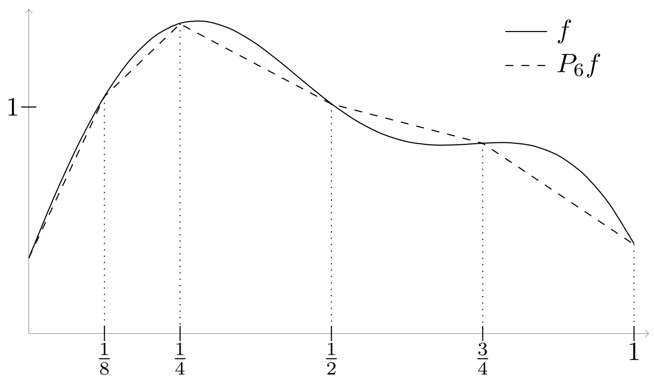

Abbildung 1: Funktion und ihre Projektion

Nachdem $C^1([0,1],\mathbb{K})$ dicht in $C([0,1],\mathbb{K})$ liegt und die $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt sind, reicht es, um Bedingung (iii) nachzuweisen, wegen Lemma 2.5 zu zeigen, dass $\lim_{n\in\mathbb{N}} P_n f = f$ für alle $f \in C^1([0,1],\mathbb{K})$.

Für festes f erhält man für jede Projektion P_n die Steigungen der stückweisen linearen Teile durch

$$s_{n,i} := \frac{P_n f(t_{\pi(i)}) - P_n f(t_{\pi(i+1)})}{t_{\pi(i)} - t_{\pi(i+1)}} = \frac{f(t_{\pi(i)}) - f(t_{\pi(i+1)})}{t_{\pi(i)} - t_{\pi(i+1)}} \quad i \in \mathbb{N}_{<n},$$

wobei π die Permutation ist, die $(t_i)_{i=1}^n$ der Größe nach ordnet, das heißt $t_{\pi(i)} < t_{\pi(i+1)}$. $P_n f$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine lipschitzstetige Funktionen mit Lipschitzkonstante $s_n := \max_{i\in\mathbb{N}_{<n}} |s_{n,i}|$. Wegen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung folgt $s_n \leq \|\operatorname{Re} f'\|_\infty + \|\operatorname{Im} f'\|_\infty := C$, womit $(P_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig lipschitzstetig ist. Nachdem $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dicht in $[0,1]$ ist, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$, sodass es für jedes $x \in [0,1]$ ein $t_{x,k} \in \{t_i \mid i \in \mathbb{N}_{\leq k}\}$ mit $|x - t_{x,k}| < \epsilon$ gibt. Nun gilt

$$\begin{aligned}
|P_n f(x) - f(x)| &= |P_n f(x) - P_n f(t_{x,k}) + P_n f(t_{x,k}) - f(t_{x,k}) + f(t_{x,k}) - f(x)| \\
&\leq |P_n f(x) - P_n f(t_{x,k})| + |P_n f(t_{x,k}) - f(t_{x,k})| + |f(x) - f(t_{x,k})| \\
&\leq 2C|x - t_{x,k}| + |P_n f(t_{x,k}) - f(t_{x,k})|.
\end{aligned}$$

Wähle $k \in \mathbb{N}$ nun so groß, dass $|x - t_{x,k}| \leq \frac{\epsilon}{2C}$. Nachdem $P_n f(t_i) - f(t_i) = 0$ für $n \geq i$, folgt

$$\|P_n f - f\| \leq \epsilon \quad \text{für } n \geq k,$$

womit nach Lemma 2.5 die Bedingung (iii), $\lim_{n\in\mathbb{N}} P_n f = f$ für alle $f \in C([0,1],\mathbb{K})$, erfüllt ist.

Für Bedingung (i) muss man $\dim \operatorname{ran} P_n = n$ zeigen, dafür betrachte man folgende lineare Funktion

$$\psi_n : \begin{array}{rcl} \operatorname{ran} P_n & \to & \mathbb{K}^n \\ f & \mapsto & \big(f(t_i)\big)_{i=1}^n \end{array}.$$

Nachdem man, zum Beispiel durch eine Polynominterpolation, für jeden Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ auch eine Funktion $f \in C([0,1],\mathbb{K})$ findet, sodass $f(t_i) = v_i$ für $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$, ist ψ_n surjektiv, da $P_n f(t_i) = f(t_i)$. Gilt für zwei Funktionen f, g aus $\operatorname{ran} P_n$

$$\psi_n(f) = \psi_n(g) \quad \text{bzw.} \quad f(t_i) = g(t_i) \quad \text{für} \quad i \in \mathbb{N}_{\leq n},$$

so muss auch $P_n f = P_n g$ gelten. Nachdem P_n als Projektion eingeschränkt auf $\operatorname{ran} P_n$ die Identität abgibt, ist ψ_n injektiv und somit insgesamt bijektiv. Daher gilt $\dim \operatorname{ran} P_n = \dim \mathbb{K}^n = n$.

Somit sind alle Bedingungen erfüllt und $C([0,1],\mathbb{K})$ hat eine Schauderbasis, die sogar monoton ist, d.h. $\|P_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wählt man die Folge $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ derart, dass

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 1 \quad \text{und} \quad t_{2^k+l+1} = \frac{2l-1}{2^{k+1}} \quad l \in \mathbb{N}_{\leq 2^k},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

so erhält man die *Faber-Schauder Basis*, wenn man die Basisfunktionen, die man aus den Projektionen erhält, normiert.

$$s_1 = 1, \qquad s_2 = \mathrm{id},$$

$$s_{2^k+l+1}(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{2l-2}{2^{k+1}}\right)2^{k+1}, & x \in \left[\frac{2l-2}{2^{k+1}}, \frac{2l-1}{2^{k+1}}\right], \\ \left(\frac{2l}{2^{k+1}} - x\right)2^{k+1}, & x \in \left(\frac{2l-1}{2^{k+1}}, \frac{2l}{2^{k+1}}\right], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

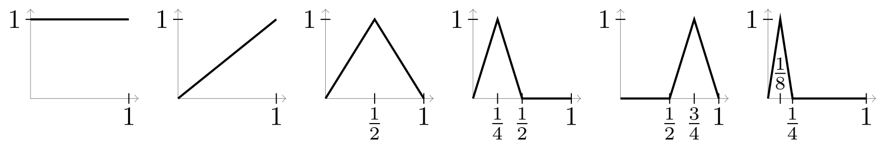

Abbildung 2: Die ersten Elemente der Faber-Schauder Basis

`6.2 Beispiel.` Um für festes $p \in [1, +\infty)$ eine Schauderbasis für $L^p([0,1],\mathbb{K})$ anzugeben, wähle man zunächst die Folge:

$$h_1 = 1, \quad h_{2^k+l} = \mathbb{1}_{\left[\frac{2l-2}{2^{k+1}}, \frac{2l-1}{2^{k+1}}\right]} - \mathbb{1}_{\left[\frac{2l-1}{2^{k+1}}, \frac{2l}{2^{k+1}}\right]} \quad l \in \mathbb{N}_{\leq 2^k},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Abbildung 3 illustriert die ersten Elemente dieser Folge. Betrachtet man $H := \operatorname{span}\{h_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, so stellt man fest, dass dieser Unterraum alle Indikatorfunktionen der Mengen $[\frac{i}{2^k}, \frac{j}{2^l}]$ im Sinne der Restklassen in $L^p([0,1],\mathbb{K})$ enthält. Somit sind auch alle Indikatorfunktionen von Vereinigungen solcher Mengen in H enthalten. Laut [7, Korollar 17.1.8] liegt H dicht in $L^p([0,1],\mathbb{K})$.

Nun definiere man die Projektionen

$$P_n : \begin{array}{ccc} H & \to & H \\ \sum_{i=1}^m a_i h_i & \mapsto & \sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} a_i h_i \end{array}$$

Wählt man ein $f = \sum_{i=1}^{n+1} a_i h_i$ aus $\operatorname{ran} P_{n+1}$, so unterscheidet sich $P_n f$ von f nur auf $\operatorname{supp} h_{n+1} = [a,b]$ für passende $a, b \in [0,1]$. Nun ist $P_n f$ auf $[a,b]$

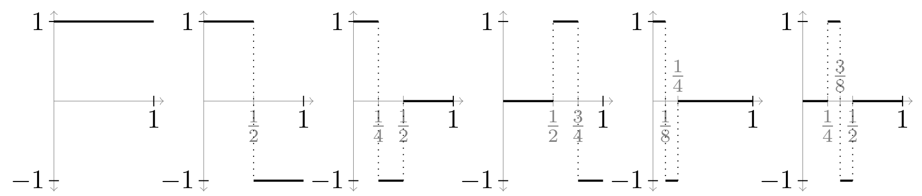

Abbildung 3: Die ersten Elemente der Haarbasis

konstant mit dem Wert c und für f gilt

$$f\left(\left[a, \frac{a+b}{2}\right)\right) = \{c + a_{n+1}\} \quad \text{und} \quad f\left(\left(\frac{a+b}{2}, b\right]\right) = \{c - a_{n+1}\}.$$

Wegen der Konvexität der Funktion $x \mapsto |x|^p$ gilt

$$|c|^p = |\frac{1}{2}(c + a_{n+1}) + \frac{1}{2}(c - a_{n+1})|^p \leq \frac{1}{2}|c + a_{n+1}|^p + \frac{1}{2}|c - a_{n+1}|^p.$$

Somit lässt sich die Norm von $P_n f$ folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} \|P_n f\|_p^p &= \int_{[0,a)\cup(b,1]} |f|^p \, d\lambda + \int_{[a,b]} |c|^p \, d\lambda \\ &\leq \int_{[0,a)\cup(b,1]} |f|^p \, d\lambda + \int_{[a,b]} \frac{1}{2}|c + a_{n+1}|^p \, d\lambda + \int_{[a,b]} \frac{1}{2}|c - a_{n+1}|^p \, d\lambda \\ &= \int_{[0,a)\cup(b,1]} |f|^p \, d\lambda + \int_{[a,\frac{a+b}{2}]} |c + a_{n+1}|^p \, d\lambda + \int_{[\frac{a+b}{2},b]} |c - a_{n+1}|^p \, d\lambda \\ &= \|f\|_p^p . \end{aligned}$$

Mittels vollständiger Induktion folgt, dass $\|P_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit sind alle Voraussetzungen von Proposition 2.7 erfüllt und $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine monotone Schauderbasis von $L^p([0,1])$, welche auch *Haarbasis* genannt wird.

7 Unbedingte Schauderbasen

Es sei daran erinnert, dass unbedingte Konvergenz einer Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ bedeutet, dass das Netz $\left(\sum_{n\in A} x_n\right)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}$ konvergiert, wobei $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist, welche durch $\subseteq$ gerichtet ist.

7.1 Lemma. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem Banachraum X über dem Skalarkörper $\mathbb{K}$.

Die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergiert genau dann unbedingt, wenn $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n x_n$ für alle $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ mit $\|(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \leq 1$ konvergiert.

Beweis. In einem Banachraum X konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ genau dann unbedingt, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $A_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$ existiert, sodass $\left\|\sum_{i\in A} x_i\right\| < \epsilon$, wenn $A \cap A_0 = \emptyset$ (Cauchysches Konvergenzkriterium).

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ wähle nun $A_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$, sodass $\left\|\sum_{i\in A} x_i\right\| < \frac{\epsilon}{4}$ für alle $A \cap A_0 = \emptyset$. Weiters definiere man

$$A_{f_+} := \{i \in A \,|\, \operatorname{Re} f(x_i) \geq 0\}, \quad A_{f_-} := \{i \in A \,|\, \operatorname{Re} f(x_i) < 0\}$$

zu einem beliebigen A mit $A \cap A_0 = \emptyset$ und einem $f \in X'$ mit $\|f\| \leq 1$. Da sowohl $A_{f_+} \cap A_0 = \emptyset$ als auch $A_{f_-} \cap A_0 = \emptyset$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i\in A} |\operatorname{Re} f(x_i)| &= \sum_{i\in A_{f_+}} \operatorname{Re} f(x_i) - \sum_{i\in A_{f_-}} \operatorname{Re} f(x_i) = \operatorname{Re} f\Big(\sum_{i\in A_{f_+}} x_i - \sum_{i\in A_{f_-}} x_i\Big) \\ &\leq \|f\| \left\|\sum_{i\in A_{f_+}} x_i - \sum_{i\in A_{f_-}} x_i\right\| \leq \left\|\sum_{i\in A_{f_+}} x_i\right\| + \left\|\sum_{i\in A_{f_-}} x_i\right\| < \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Analog zeigt man $\sum_{i\in A} |\operatorname{Im} f(x_i)| < \frac{\epsilon}{2}$. Insgesamt erhält man

$$\sum_{i\in A} |f(x_i)| \leq \sum_{i\in A} |\operatorname{Re} f(x_i)| + |\operatorname{Im} f(x_i)| < \epsilon \quad \text{für alle } f \in X' \text{ mit } \|f\| \leq 1.$$

Hier sei angemerkt, dass A_0 nicht von f abhängt.

Sei nun $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ mit $\|(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\infty = 1$, dann existiert, wegen den Sätzen von Hahn-Banach [2, Korollar 5.2.6] zu jedem $A \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$ mit $A \cap A_0 = \emptyset$ ein $f \in X'$ mit $\|f\| \leq 1$, sodass

$$\left\|\sum_{i\in A} \lambda_i x_i\right\| = f\Big(\sum_{i\in A} \lambda_i x_i\Big) = \sum_{i\in A} \lambda_i f(x_i) \leq \sum_{i\in A} \underbrace{|\lambda_i|}_{\leq 1} |f(x_i)| < \epsilon$$

gilt, womit $\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i x_i$ konvergiert.

Um die andere Richtung zu zeigen, nehme man an, dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ nicht unbedingt konvergiere. Das heißt es existiert ein $\epsilon > 0$, sodass es für jedes $A \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$ ein $B \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$ gibt mit

$$B \cap A = \emptyset \quad \text{und} \quad \left\|\sum_{i\in B} x_i\right\| > \epsilon. \tag{4}$$

Für dieses ϵ definiere man rekursiv $A_1 := \{1\}$ und $A_{k+1} := \mathbb{N}_{\leq \max B_k}$, wobei B_k immer so gewählt wird, dass (4) für A_k, B_k erfüllt ist. Weiters wähle man

$$\mu_j = \begin{cases} 1, & j \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit gibt es für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ ein B_k, sodass $\min B_k \geq n_0$ und $\left\|\sum_{i=\min B_k}^{\max B_k} \mu_i x_i\right\| = \left\|\sum_{i\in B_k} x_i\right\| > \epsilon$. Also kann $\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge sein, was einen Widerspruch zur Konvergenz der Reihe ergibt.

❑

7.2 Definition. Eine Folge $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in einem normierten Vektorraum X wird *unbedingte Schauderbasis* genannt, wenn es für jedes $x \in X$ eine eindeutige Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus dem Skalarkörper gibt, sodass x der unbedingte Grenzwert der Reihe

$$x = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i e_i$$

ist.

7.3 Fakta. Aus dieser Definition folgen unmittelbar einige Eigenschaften:

- Eine unbedingte Schauderbasis ist sicherlich auch eine Schauderbasis, da $\big(\sum_{i\in\mathbb{N}_{\le n}} a_i e_i\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Teilnetz von $\big(\sum_{i\in A} a_i e_i\big)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}$ ist.
- Da jede unbedingte Schauderbasis auch eine Schauderbasis ist, lässt sich Korollar 2.14 anwenden, womit die Koeffizientenabbildungen e_i' stetig sind, falls X ein Banachraum ist.
- Für jedes $A \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$ ist in der natürlicherweise eine Projektion
$$P_A : \begin{array}{rcl} X & \to & \operatorname{span}\{e_i \mid i \in A\} \\ \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i e_i & \mapsto & \sum_{i\in A} a_i e_i \end{array}$$
definiert. Für diese Abbildungen gilt $\dim\operatorname{ran} P_A = |A|$, $P_A P_B = P_{A\cap B}$ und $\lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} P_A x = x$ für alle $x \in X$.

`7.4 Beispiel.` Der Raum ℓ^p für $p \in [1, +\infty)$ hat mit $e_i = (\delta_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ für $i \in \mathbb{N}$ eine unbedingte Schauderbasis. Ist $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus ℓ^p und $\epsilon > 0$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i|^p < \epsilon$. Wählt man nun ein endliches $A \supseteq \mathbb{N}_{\le n}$, so gilt

$$\Big\|(a_i)_{i\in\mathbb{N}} - \sum_{i\in A} a_i e_i\Big\| = \sum_{i\in A^c} |a_i|^p \le \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i|^p < \epsilon.$$

Das heißt, $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i e_i$ konvergiert unbedingt.

Analog zeigt man, dass $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ auch für c_0 eine unbedingte Schauderbasis ist.

7.5 Lemma. Sei $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine unbedingte Schauderbasis eines normierten Vektorraums X und $(P_A)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}$ die natürlichen Projektionen. Dann ist für jedes feste $x \in X$ das Netz $(P_A x)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}$ beschränkt.

Beweis. Nachdem $P_A x$ gegen x konvergiert, existiert ein $A_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$, sodass $\|P_A x\| \in B_1(x)$ für alle $A \supseteq A_0$. Wähle $n := \max A_0$ und setze

$$c := \max_{M\subseteq\mathbb{N}_{\le n}} \|P_M x\|$$

Für alle $M \subseteq \mathbb{N}_{\le n}$ gilt daher $\|P_M x\| \le c$. Jedes $B \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$ mit $B \nsubseteq \mathbb{N}_{\le n}$ lässt sich darstellen als $A\backslash M$, wobei $A \supseteq A_0$ und $M \subseteq \mathbb{N}_{\le n}$. Wegen

$$\begin{aligned} \|P_B x\| &= \Big\|\sum_{i\in A\backslash M} a_i e_i\Big\| = \Big\|\sum_{i\in A} a_i e_i - \sum_{i\in M\cap A} a_i e_i\Big\| \\ &\le \Big\|\sum_{i\in A} a_i e_i\Big\| + \Big\|\sum_{i\in M\cap A} a_i e_i\Big\| \\ &\le \|x\| + 1 + c \end{aligned}$$

ergibt sich insgesamt $\|P_A x\| \le \|x\| + 1 + c$ für alle $A \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$.

❑

7.6 Bemerkung. Wählt man in Definition 2.11 $(I, \preceq)$ als $(\mathcal{E}(\mathbb{N}), \subseteq)$ und $P_{A,B} = P_A|_{\operatorname{ran} P_B} : \operatorname{ran} P_B \to \operatorname{ran} P_A$ für $A \subseteq B$, so erhält man, dass $c(\mathcal{E}(\mathbb{N}), P_{A,B}, X)$ ein Banachraum ist, wenn X einer ist.

7.7 Satz. *Sei $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine unbedingte Schauderbasis eines Banachraums X, $(P_A)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}$ die dazugehörigen Projektionen und für $A \subseteq B$ sei $P_{A,B} : \operatorname{ran} P_B \to \operatorname{ran} P_A$ die Einschränkung $P_A|_{\operatorname{ran} P_B}$.*

Dann ist die Abbildung $L_u : c(\mathcal{E}(\mathbb{N}), P_{A,B}, X) \to X$ mit $f \mapsto \lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} f(A)$ eine in beide Richtungen beschränkte lineare Bijektion.

Beweis. Die Linearität von L_u folgt aus der Linearität der Grenzwertbildung. Aus der Abgeschlossenheit der Normkugel $\overline{B}_{\|f\|_\infty}(0)$ folgt $\|L_u f\| \leq \|f\|_\infty$.

Für ein $A \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$ und ein $f \in c(\mathcal{E}(\mathbb{N}), P_{A,B}, X)$ gilt $f(A) \in \operatorname{ran} P_A$. Wegen der linear Unabhängigkeit der $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gibt es eindeutige Koeffizienten $(a_i)_{i\in A}$, sodass $f(A) = \sum_{i\in A} a_i e_i$. Nachdem

$$P_B f(A) = P_B \sum_{i\in C} a_i e_i = \sum_{i\in B} a_i e_i = f(B)$$

für $B \subseteq A$ gilt, gibt es zu einem $f \in c(\mathcal{E}(\mathbb{N}), P_{A,B}, X)$ eine eindeutige Koffizientenfolge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, sodass $f(A) = \sum_{i\in A} a_i e_i$ für alle $A \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$. Somit gilt $L_u(f) = \lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} \sum_{i\in A} a_i e_i$. Daher kann wegen der Eindeutigkeit der Koeffizientenfolge zu einer unbedingten Schauderbasis nur die konstante 0-Funktion unter L_u auf die 0 aus X abgebildet werden, was die Injektivität von L_u bedingt.

Laut Lemma 7.5 ist $f := (P_A x)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}$ für beliebiges $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i e_i \in X$ beschränkt und daher ein Element von $c(\mathcal{E}(\mathbb{N}), P_{A,B}, X)$. Daraus folgt

$$L_u(P_A x)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} = \lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} \sum_{i\in A} a_i e_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i e_i = x,$$

womit L_u surjektiv ist.

Schließlich ist L_u eine beschränkte lineare Bijektion zwischen zwei Banachräumen und wegen des Satzes der offenen Abbildung [2, Satz 4.3.1] ist auch L_u^{-1} beschränkt.

❑

7.8 Korollar. *Die Projektionen $(P_A)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}$ einer unbedingten Schauderbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in einem Banachraum X sind gleichmäßig beschränkt.*

Beweis. Nachdem die Inverse $L_u^{-1} : X \to c(\mathcal{E}(\mathbb{N}), (P_{A,B}), X)$ von L_u aus Satz 7.7 beschränkt ist, wobei $L_u^{-1} x = (P_n x)_{n\in\mathbb{N}}$, gilt

$$\begin{aligned}\left\|L_u^{-1}\right\| &= \sup_{\|x\|=1} \left\|(P_A x)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}\right\|_\infty = \sup_{\|x\|=1} \sup_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} \|P_A x\| = \sup_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} \sup_{\|x\|=1} \|P_A x\| \\ &= \sup_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} \|P_A\| .\end{aligned}$$

Daher ist auch $\sup_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} \|P_A\|$ beschränkt.

❑

7.9 Definition. Für eine unbedingte Schauderbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eines Banachraumes X wird der Wert $ubc(e_i) := \sup_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} \|P_A\|$ *unbedingte Basiskonstante* genannt.

7.10 Satz. *Ist $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine unbedingte Schauderbasis eines Banachraumes X, dann existiert ein $K > 0$, sodass für alle $x \in X$ und alle $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ mit $\|(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}\| \le 1$*

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i'(x) e_i\right\| \le K \left\|\sum_{i=1}^{\infty} e_i'(x) e_i\right\|$$

gilt.

Beweis. Wähle zunächst ein $x \in X$ fest. Dann definiere für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Operator $A_n : \ell^\infty \to X$ mit $\underline{\lambda} = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i'(x) e_i$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|A_n\| \le \sum_{i=1}^{n} |e_i'(x)| \, \|e_i\| < +\infty$. Da $A_n\underline{\lambda}$ laut Lemma 7.1 konvergiert, existiert ein $x_{\underline{\lambda}} \in X$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $A_n\underline{\lambda} \in B_1(x_{\underline{\lambda}})$ für $n \ge n_0$. Infolge gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\underline{\lambda}\| \le \underbrace{\left\|x_{\underline{\lambda}}\right\| + 1 + \max_{n\le n_0} \|A_n\| \, \|\underline{\lambda}\|_\infty}_{:=C_{\underline{\lambda}}} < +\infty.$$

Aus dem Principle of Uniform Boundedness [2, Korollar 4.2.2] folgt nun $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$ und damit

$$\sup_{\|\underline{\lambda}\|_\infty=1} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i'(x) e_i\right\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\|\underline{\lambda}\|_\infty=1} \|A_n\underline{\lambda}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty. \tag{5}$$

Weiters definiere die Operatorfamilien $(R_{\underline{\lambda}})_{\underline{\lambda}\in B_1^{\ell^\infty}(0)}$ wie folgt:

$$R_{\underline{\lambda}} : \begin{array}{ccc} X & \to & X \\ x & \mapsto & \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i'(x) e_i \end{array}.$$

Laut Lemma 7.1 sind diese Abbildungen wohldefiniert. Die Abbildung $P_n R_{\underline{\lambda}} : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i'(x) e_i$ ist beschränkt, da die e_i' beschränkt sind. Außerdem gilt $\lim_{n\in\mathbb{N}} P_n R_{\underline{\lambda}} x = R_{\underline{\lambda}} x$. Daher ist laut [2, Korollar 4.2.3] (ein Korollar des Principle of Uniform Boundedness) $R_{\underline{\lambda}}$ beschränkt. Wegen (5) gilt für jedes feste $x \in X$

$$\sup_{\|\underline{\lambda}\|_\infty=1} \left\|R_{\underline{\lambda}} x\right\| \le \sup_{\|\underline{\lambda}\|_\infty=1} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i'(x) e_i\right\| < +\infty.$$

Somit lässt sich wieder Principle of Uniform Boundedness [2, Korollar 4.2.2] anwenden und dies ergibt $\sup_{\|\underline{\lambda}\|_\infty=1} \left\|R_{\underline{\lambda}}\right\| < +\infty$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

❑

7.11 Proposition. *Ist eine unbedingte Schauderbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ als Schauderbasis beschränkt vollständig im Sinne von Definition 5.5, so gilt*

$$\mathcal{B}(\mathcal{E}(\mathbb{N}), P_{A,B}, X) = c(\mathcal{E}(\mathbb{N}), P_{A,B}, X). \tag{6}$$

Beweis. Die Tatsache $\mathcal{B}(\mathcal{E}(\mathbb{N}), P_{A,B}, X) \supseteq c(\mathcal{E}(\mathbb{N}), P_{A,B}, X)$ folgt unmittelbar aus den Definitionen.

Für $\big(\sum_{i\in A} a_i e_i\big)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}(\mathbb{N}), P_{A,B}, X)$ ist das Teilnetz $\big(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\big)_{n\in\mathbb{N}}$ klarerweise ebenfalls beschränkt. Wegen der vollständigen Beschränktheit von $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ liegt $\big(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in $c(\mathbb{N}, P_{n,m}, X)$. Nun gilt

$$(L_u^{-1}\circ L)\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\Big)_{n\in\mathbb{N}} = \Big(\sum_{i\in A} a_i e_i\Big)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}.$$

womit $\big(\sum_{i\in A} a_i e_i\big)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}$ aus $c(\mathcal{E}(\mathbb{N}), P_{A,B}, X)$ ist.

❑

7.12 Bemerkung. Für eine unbedingt Schauderbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ könnte man die Gleichheit (6) dazu verwenden, um beschränkt vollständig als unbedingte Schauderbasis zu definieren (vergleiche Bemerkung 5.6). Nachdem diese Eigenschaft äquivalent zu beschränkt vollständig als Schauderbasis ist, wird zwischen den Begriffen nicht unterschieden.

7.13 Satz. *Sei $(P_A)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}$ eine Folge von beschränkten linearen Selbstabbildungen in einem normierten Raum X mit:*

(i) $\dim \operatorname{ran} P_A = |A|$,

(ii) $P_A P_B = P_{A\cap B}$,

(iii) $\lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} P_A x = x$ *für alle* $x\in X$.

Dann erhält man eine unbedingte Schauderbasis indem man für jedes $i\in\mathbb{N}$ $0\neq e_i\in \operatorname{ran} P_{\{i\}}$ beliebig wählt. Zusätzlich sind die $(P_A)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}$ wiederum genau die Projektionen zur unbedingten Schauderbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Beweis. Aus *(ii)* folgt, dass $\operatorname{ran} P_{\{i\}}\cap \operatorname{ran} P_{A\setminus\{i\}} = \{0\}$ und $\operatorname{ran} P_{\{i\}} \subseteq \operatorname{ran} P_A$ für $i\in A$. Daher ist $\{e_i \,|\, i\in A\}$ eine linear unabhängig Menge mit der Mächtigkeit $|A|$ und somit eine Basis von $\operatorname{ran} P_A$. Für jedes $x\in X$ gilt

$$P_A x = \sum_{i\in A} \alpha_i(x) e_i,$$

wobei α_i wegen *(ii)* unabhängig von A ist. Infolge lässt sich jedes $x\in X$ schreiben als

$$x = \lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} P_A x = \lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} \sum_{i\in A} \alpha_i(x) e_i.$$

Gibt es eine Folge $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $x = \lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} \sum_{i\in A} \beta_i e_i$, so folgt

$$\alpha_i(x) e_i = P_{\{i\}} x = P_{\{i\}} \lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} \sum_{j\in A} \beta_j e_j = \lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} P_{\{i\}} \sum_{j\in A} \beta_j e_j = \beta_i e_i,$$

womit die Koeffizientenfolge eindeutig ist und $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine unbedingte Schauderbasis abgibt.

❑

7.14 Korollar. *Sei $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine unbedingte Schauderbasis eines dichten Unterraumes Y von X, dessen Projektionen $(P_A)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}$ gleichmäßig beschränkt sind. Dann ist $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bereits eine unbedingte Schauderbasis für X.*

Beweis. Die Projektionen lassen sich wegen der Dichtheit von Y in X stetig auf X fortsetzen. Dabei gilt $P_A(X) = P_A(Y)$, da $P_A(Y)$ bereits abgeschlossen ist. Die Abbildungsnorm bleibt ebenfalls erhalten. Daher konvergiert laut Lemma 2.5 das Netz $(P_A x)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}$ für jedes $x \in X$ gegen x.

Somit erfüllen die Fortsetzungen alle Voraussetzungen von Satz 7.13, weswegen X eine unbedingte Schauderbasis hat. Nachdem $0 \neq e_i \in \operatorname{ran} P_{\{i\}}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, ist $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine mögliche Wahl für eine unbedingte Schauderbasis von X. ❑

7.15 Satz. *Sei $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine unbedingte Schauderbasis eines Banachraumes X, $(e'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dessen duale Schauderbasis und $(P_A)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}$ die dazugehörigen Projektionen. Dann gilt:*

(i) Für die konjugierte Abbildung $P'_A : X' \to X'$ von P_A gilt, $P'_A x' = \sum_{i\in A} x'(e_i)e'_i$.

(ii) $\lim^{w^*}_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} P'_A x' = x'$ für alle $x' \in X'$.

(iii) $(e'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine unbedingte Schauderbasis für $\operatorname{cls}\{e'_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq X'$.

Beweis.

(i) Wegen der Linearität von x' gilt

$$\begin{aligned}\langle x, P'_A x'\rangle = \langle P_A x, x'\rangle &= \sum_{i\in A} e'_i(x)\langle e_i, x'\rangle = \sum_{i\in A} x'(e_i)\langle x, e'_i\rangle \\ &= \Big\langle x, \sum_{i\in A} x'(e_i)e'_i\Big\rangle.\end{aligned}$$

(ii) Bezeichne $\iota : X \to X''$ die kanonische Einbettung, so erhält man

$$\iota(x)(P'_A x') = \sum_{i\in A} x'(e_i)e'_i(x) = x'\Big(\sum_{i\in A} e'_i(x)e_i\Big).$$

Somit lässt sich der Grenzwert, wegen der Stetigkeit von x' wie folgt berechnen:

$$\lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} \iota(x)(P'_A x') = \lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} x'\Big(\sum_{i\in A} e'_i(x)e_i\Big) = x'(x) = \iota(x)(x').$$

(iii) Da die duale Schauderbasis linear unabhängig ist, gilt $\dim\operatorname{ran} P'_A = |A|$. Außerdem erfüllen die Projektionen $P'_A P'_B = (P_B P_A)' = P'_{A\cap B}$. Nachdem wegen [2, Satz 6.1.2] $\|P'_A\| = \|P_A\|$ gilt, ist auch $(P'_A)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}$ gleichmäßig beschränkt durch $ubc(e_i)$. Für ein $x' \in \operatorname{span}\{e'_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ konvergiert $P_A x'$ sogar in der Norm gegen x'. Da $\operatorname{span}\{e'_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\operatorname{cls}\{e'_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ liegt, ist aufgrund von Korollar 7.14 $(e'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine unbedingte Schauderbasis von $\operatorname{cls}\{e'_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

❑

7.16 Korollar. *Ist eine unbedingte Schauderbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eines Banachraumes X als Schauderbasis im Sinne von Definition 5.5 schrumpfend, so ist die duale Schauderbasis $(e'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sogar eine unbedingte Schauderbasis von X'.*

7.17 Lemma. Sei $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine unbedingte Schauderbasis in einem Banachraum X. Dann existiert ein $K > 0$, sodass für alle Folgen $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus ℓ^∞, alle Koeffizientenfolgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und alle $m \in \mathbb{N}$

$$\Big\|\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i e_i\Big\| \leq K \sup_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i| \Big\|\sum_{i=1}^m a_i e_i\Big\|$$

gilt.

Beweis. Für festes $m \in \mathbb{N}$ wähle mit Hilfe der Sätze von Hahn-Banach [2] ein $x' \in X'$, sodass $x'\big(\sum_{i=1}^m a_i e_i\big) = \big\|\sum_{i=1}^m a_i e_i\big\|$ und $\|x'\| = 1$. Weiters definiere man die Folge $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$, sodass $\mu_i a_i x'(e_i) = |a_i x'(e_i)|$. Daher gilt $\|(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\infty = 1$.

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i e_i\Big\| &= \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i x'(e_i) \leq \sum_{i=1}^m |\lambda_i||a_i x'(e_i)| \leq \|(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\infty \sum_{i=1}^m \mu_i a_i x'(e_i)\\ &\leq \|(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\infty \|x'\| \Big\|\sum_{i=1}^m \mu_i a_i e_i\Big\|.\end{aligned}$$

Aus Satz 7.10 und $\|x'\| = 1$ folgt

$$\Big\|\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i e_i\Big\| \leq K \|(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\infty \Big\|\sum_{i=1}^m a_i e_i\Big\|$$

und damit die Aussage.

❑

7.18 Definition. Ein Banachraum X enthält eine isomorphe Kopie eines Banachraum Z, wenn es einen abgeschlossenen Unterraum Y von X und eine bijektive lineare beschränkte Abbildung $\Phi : Y \to Z$ gibt.

Die Abbildung Φ ist laut dem Satz der offenen Abbildung [2, Satz 4.3.1] automatisch in beide Richtungen stetig.

7.19 Satz. *Hat ein Banachraum X eine unbedingte Schauderbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, die nicht beschränkt vollständig ist, dann enthält X eine isomorphe Kopie von c_0.*

Beweis. Nachdem $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt vollständig ist, gibt es eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus dem Skalarkörper, sodass $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{i=1}^n a_i e_i\| \leq 1$, aber $\sum_{i=1}^\infty a_i e_i$ konvergiert nicht. Laut dem Cauchy-Kriterium gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass es für alle $n \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen $q > p \geq n$ gibt, die $\Big\|\sum_{i=p}^q a_i e_i\Big\| > \epsilon$ erfüllen. Also lassen sich zwei Folgen $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $p_j < q_j < p_{j+1}$ definieren, sodass für $u_j := \sum_{i=p_j}^{q_j} a_i e_i$ die Ungleichung $\|u_j\| > \epsilon$ gilt.

Für eine Folge $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ definiere

$$\mu_j = \begin{cases} \lambda_i, & \exists\, i \text{ mit } j \in [p_i, q_i]_{\mathbb{N}},\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Somit gilt wegen Lemma 7.17 für alle $m \in \mathbb{N}$ – man denke sich $\lambda_i = 0$ für $i > m$ –

$$\Big\|\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i\Big\| = \Big\|\sum_{j=1}^{q_m} \mu_j a_j e_j\Big\| \leq K \|(\lambda_i)_{i=1}^m\|_\infty \Big\|\sum_{j=1}^{q_m} a_j e_j\Big\| \leq K \|(\lambda_i)_{i=1}^m\|_\infty .$$

Andererseits gilt $\frac{1}{ubc(e_i)}\|\lambda_j u_j\| \leq \left\|\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i\right\|$ für alle $j \in \mathbb{N}_{\leq m}$. Insgesamt erhält man

$$\frac{\epsilon}{ubc(e_i)}\|(\lambda_i)_{i=1}^m\|_\infty \leq \left\|\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i\right\| \leq K\|(\lambda_i)_{i=1}^m\|_\infty$$

und damit, dass $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ laut Satz 2.21 äquivalent zu der kanonischen Schauderbasis von c_0 ist. Außerdem gibt einem Satz 2.21 auch eine in beide Richtungen beschränkte lineare Abbildung $\Phi : \operatorname{cls}\{u_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to c_0$.

❑

7.20 Satz. *Hat ein Banachraum X eine unbedingte Schauderbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, so ist diese genau dann nicht schrumpfend, wenn X eine isomorphe Kopie von ℓ^1 enthält.*

Ein Banachraum X mit einer unbedingten Schauderbasis enthält eine isomorphe Kopie von ℓ^1, wenn X' nicht seperabel ist.

Beweis. Ist $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nicht schrumpfend, dann existiert ein $f \in X'$ mit $\|f\| = 1$ und $f \notin \operatorname{cls}\{e'_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Da $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis ist, gilt sicher

$$f(x) = f\Big(\sum_{i=1}^\infty e'_i(x)e_i\Big) = \sum_{i=1}^\infty e'_i(x)f(e_i) = \sum_{i=1}^\infty \iota(e_i)(f)e'_i(x).$$

Nachdem $f \notin \operatorname{cls}\{e'_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, kann $\sum_{i=1}^\infty \iota(e_i)(f)e'_i$ aber nicht in der Norm von X' gegen f konvergieren. Das heißt es existiert ein $\epsilon > 0$, sodass

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\|x\|=1} \left| f(x) - \sum_{i=1}^n \iota(e_i)(f)e'_i(x)\right| > 2\epsilon$$

$$\text{bzw.}\quad \limsup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\|x\|=1} \left| f\Big(\sum_{i=n+1}^\infty e'_i(x)e_i\Big)\right| > 2\epsilon.$$

Daher existiert eine unendliche Teilmenge K von $\mathbb{N}$, zu deren Elemente k es Elemente $x_k \in X$ mit $\|x_k\| = 1$ gibt, sodass $\left|f\big(\sum_{i=k}^\infty e'_i(x_k)e_i\big)\right| > \epsilon$. Demnach gibt es eine monotone Bijektion $k : \mathbb{N} \to K$, womit sich der Sachverhalt auch als

$$\left| f\Big(\sum_{i=k(n)}^\infty e'_i(x_{k(n)})e_i\Big)\right| > \epsilon \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

schreiben lässt. Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{i=k(n)}^\infty e'_i(x_{k(n)})e_i$ und der Stetigkeit von f folgt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $q_n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left| f\Big(\sum_{i=k(n)}^{q_n-1} e'_i(x_{k(n)})e_i\Big)\right| > \epsilon.$$

Nun definiere man rekursiv eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $p_1 = 1$ und $p_{(n+1)} = q_{p_n}$. Schließlich wähle man für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$u_n := \frac{\left|f\big(\sum_{i=k(p_n)}^{p_{(n+1)}-1} e'_i(x_{k(p_n)})e_i\big)\right|}{f\big(\sum_{i=k(p_n)}^{p_{(n+1)}-1} e'_i(x_{k(p_n)})e_i\big)} \sum_{i=k(p_n)}^{p_{(n+1)}-1} e'_i(x_{k(p_n)})e_i.$$

Somit gilt $\|u_n\| \leq ubc(e_i)$ und $\epsilon < f(u_n) \in \mathbb{R}^+$. Sei nun $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus dem Skalarkörper und $m \in \mathbb{N}$ fest. Gelte $\sum_{i\in M_+} \operatorname{Re} a_i \geq -\sum_{i\in M_-} \operatorname{Re} a_i$, wobei

$$M_+ := \{i \in \mathbb{N}_{\leq m} \mid \operatorname{Re} a_i \geq 0\}, \quad M_- := \{i \in \mathbb{N}_{\leq m} \mid \operatorname{Re} a_i < 0\}.$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned} 2\Big\|\sum_{i=1}^m a_i u_i\Big\| &\geq \frac{2}{ubc(e_i)}\Big\|\sum_{i\in M_+} a_i u_i\Big\| \geq \frac{2}{ubc(e_i)}\Big|\operatorname{Re} f\Big(\sum_{i\in M_+} a_i u_i\Big)\Big| \\ &= \frac{2}{ubc(e_i)} \sum_{i\in M_+} \operatorname{Re} a_i f(u_i) \geq \frac{2\epsilon}{ubc(e_i)} \sum_{i\in A} \operatorname{Re} a_i \\ &\geq \frac{\epsilon}{ubc(e_i)}\Big(\sum_{i\in M_+} \operatorname{Re} a_i - \sum_{i\in M_-} \operatorname{Re} a_i\Big) = \frac{\epsilon}{ubc(e_i)} \sum_{i=1}^m |\operatorname{Re} a_i|. \end{aligned} \tag{7}$$

Gelte $\sum_{i\in M_+} \operatorname{Re} a_i < -\sum_{i\in M_-} \operatorname{Re} a_i$, so betrachte man die Folge $(-a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und man erhalte ebenfalls die Ungleichung (7). Analog zeigt man, dass $\|\sum_{i=1}^m a_i u_i\| \geq \frac{\epsilon}{2ubc(e_i)} \sum_{i=1}^m |\operatorname{Im} a_i|$ gilt. Insgesamt folgt

$$\Big\|\sum_{i=1}^m a_i u_i\Big\| \geq \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{2ubc(e_i)}\Big(\sum_{i=1}^m |\operatorname{Re} a_i| + \sum_{i=1}^m |\operatorname{Im} a_i|\Big) \geq \frac{\epsilon}{4ubc(e_i)} \sum_{i=1}^m |a_i|$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$. Umgekehrt folgt aus der Dreiecksungleichung $\|\sum_{i=1}^m a_i u_i\| \leq \sum_{i=1}^m |a_i| \, \|u_i\| \leq ubc(e_i) \sum_{i=1}^m |a_i|$. Somit ist $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ laut Satz 2.21 äquivalent zur kanonischen Schauderbasis von ℓ^1. Außerdem zeugt Satz 2.21 auch von der Existenz einer in beiden Richtungen beschränkten linearen Bijektion $\Phi : \operatorname{cls}\{u_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to \ell^1$.

Wenn X' nicht seperabel ist, ist jede Schauderbasis nicht schrumpfend. Daher folgt aus dem bereits bewiesenem Teil der ersten Aussage des Satzes die zweite Aussage.

Enthält nun X eine isomorphe Kopie $Y \subseteq X$ von ℓ^1, dann gilt auch $Y' \mathrel{\hat=} \ell^\infty$. Da sich jedes beschränkt Funktional, das auf Y definiert ist, normtreu auf X fortsetzen lässt (Hahn Banach [2, Korollar 5.2.7]), enthält X' eine isomorphe Kopie von ℓ^∞. Somit ist X' nicht seperabel und $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist nicht schrumpfend.

❑

7.21 Korollar. *Sei X ein Banachraum mit einer unbedingten Schauderbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Dann ist X genau dann reflexiv, wenn X weder eine isomorphe Kopie von ℓ^1 noch eine von c_0 enthält.*

Beweis. Enthalte X keine isomorphe Kopie von c_0, so muss $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, wegen Satz 7.19, beschränkt vollständig sein. Enthalte X außerdem auch keine isomorphe Kopie von ℓ^1, so muss $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, wegen Satz 7.20, schrumpfend sein. Nun besagt Satz 5.8, dass X reflexiv ist.

Ist X umgekehrt reflexiv so folgt aus Satz 5.8, dass jede Schauderbasis $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sowohl beschränkt vollständig als auch schrumpfend ist. Mit Satz 7.20 erhält man, dass X keine isomorphe Kopie von ℓ^1 enthält. Enthielte X eine isomorphe Kopie von c_0, so enthielte X'' eine isomorphe Kopie von ℓ^∞. Daraus folgte, dass X'' nicht seperabel wäre. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass X als Raum mit Schauderbasis seperabel ist.

❑

Literatur

[1] Fernando Albiac and Nigel J. Kalton. *Topics in Banach space theory*, volume 233 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2006.

[2] Harald Woracek & Michael Kaltenbäck & Matrin Blümlinger. *Funktionalanalysis*. Wien, 2012. Vorlesungsskriptum, `http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/fana.pdf`.

[3] Per Enflo. A counterexample to the approximation problem in Banach spaces. *Acta Math.*, 130:309–317, 1973.

[4] Marián Fabian, Petr Habala, Petr Hájek, Vicente Montesinos, and Václav Zizler. *Banach space theory*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer, New York, 2011. The basis for linear and nonlinear analysis.

[5] Michael Kaltenbäck. *Analysis 1 WS 2014/15*. Wien, 2011. Vorlesungsskriptum, `http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/ANA_I.pdf`.

[6] Michael Kaltenbäck. *Analysis 2 SS 2012*. Wien, 2012. Vorlesungsskriptum, `http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/ANA_II_alt.pdf`.

[7] Michael Kaltenbäck. *Analysis 3 WS 2014/15*. Wien, 2014. Vorlesungsskriptum, `http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/ANA_III.pdf`.

[8] Ivan Singer. *Bases in Banach spaces. I.* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 154.