Paare orthogonaler Projektionen und abgeschlossener Unterräume auf Hilberträumen

Anton Suppersberger

Wien, 8. Juni 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Eigenschaften von Paaren von Projektionen sind schon seit Langem Gegenstand intensiver wissenschaftlicher Untersuchungen. Siehe etwa [2, 3, 4, 5]. Wir betrachten in dieser Arbeit generische Paare, äquivalente Paare, sowie Paare von abgeschlossenen Unterräume, die in generischer Position sind. Wir zeigen neben einigen charakterischtischen Eigenschaften, dass generische Paare bereits durch eine positive Kontraktion, die im Bild von P (oder Q) operiert, festgelegt sind. Weiters zeigen wir, dass Paare von abgschlossenen Unterräumen in generischer Position durch Graphen von linearen Abbildungen dargestellt werden können. Außerdem zeigen wir, dass alle diese Paare unter bestimmten Voraussetzungen unitär äquivalent sind.

2 Begriffsbildungen

Definition 2.1. *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $(.,.) : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ ein inneres Produkt auf X. Das Paar $(X, (.,.))$ heißt ein Prähilbertraum.*

Definition 2.2. *Ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist ein Prähilbertraum, der in der Norm $\|x\| := (x,x)^{\frac{1}{2}}$ vollständig ist.*

Definition 2.3. *Sei X ein Vektorraum. Eine lineare Abbildung $P : X \to X$ heißt Projektion falls $P^2 = P$ gilt*[1]

Definition 2.4. *Sei X ein Prähilbertraum. Eine Projektion P heißt orthogonale Projektion, falls*

$$ran(P) \perp ker(P)$$

gilt.

Definition 2.5. *Sei X ein Vektorraum. Sei $T : X \to X$ linear und beschränkt, I der identische Operator auf X und $\lambda \in \mathbb{C}$. Falls*

$$ker(T - \lambda I) \neq \{0\},$$

so heißt λ Eigenwert von T, $ker(T - \lambda I)$ Eigenraum zu λ und alle $x \in ker(T - \lambda I) \backslash \{0\}$ Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

Lemma 2.6. *Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum und sei $P : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine Projektion. Dann hat P nur die Eigenwerte 0 und 1.*

Beweis. Sei λ ein Eigenwert von P mit zugehörigem Eigenvektor x. Dann gilt $P(x) = \lambda x$. Auf diese Gleichung wenden wir wiederum P an und erhalten: $\lambda^2 x = P^2(x) = P(x) = \lambda x$. Wegen $x \neq 0$, muss $\lambda^2 = \lambda$ gelten. Die einzigen Lösungen dieser Gleichung sind 0 und 1. $\square$

Definition 2.7. *Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ normierte Räume. Dann bezeichnen wir den Raum der linearen und beschränkten Abbildungen von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.*

2.1 Polarzerlegung

Definition 2.8. *Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Falls $(Tx, x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt, so nennen wir T einen positiven Operator und schreiben $T \geq 0$.*

Lemma 2.9. *Sei $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine Projektion. P ist genau dann orthogonal, wenn $P \geq 0$.*

Beweis. Siehe Satz 2.2.3 in [1]. $\square$

Lemma 2.10. *Seien $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, wobei $S \geq 0$ und $T \geq 0$. Falls $ST = TS$, dann gilt $ST \geq 0$.*

[1] Operatoren mit dieser Eigenschaft heißen *idempotent*.

Beweis. Siehe Satz 2.4.5 in [1]. $\square$

Satz 2.11. *Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $0 \leq T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann existiert genau ein positiver Operator $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $S^2 = T$. Wir schreiben $S := T^{\frac{1}{2}}$ und nennen $T^{\frac{1}{2}}$ die Wurzel von T.*

Beweis. Siehe Satz 2.5.2 (i) in [1]. $\square$

Lemma 2.12. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $0 \leq T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Sei $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $TR = RT$, dann vertauscht R auch mit $T^{\frac{1}{2}}$.*

Beweis. Siehe Satz 2.5.2 (ii) in [1]. $\square$

Definition 2.13. *Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Wir nennen $|T| := (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ den Absolutbetrag von T.*

Bemerkung 2.14. Es gilt $ker(T) = ker(|T|)$, da $\|Tx\|^2 = (T^*Tx, x) = (|T|^2x, x) = \||T|x\|^2$.

Definition 2.15. *Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Hilberträume und $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. V heißt partielle Isometrie, wenn es einen Unterraum $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}$ gibt, sodass*

$$V|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{H}$$

isometrisch und

$$V|_{\mathcal{X}^\perp} = 0$$

ist.

Lemma 2.16. *Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter positiver Operator $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und eine eindeutig bestimmte partielle Isometrie $V_T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ mit $ker(V_T) = ran(P)^\perp$, sodass $T = V_T P$. Dabei gilt $P := |T|$ und wir nennen $T = V_T|T|$ die Polarzerlegung von T.*

Beweis. Siehe Satz 2.5.13 (i) in [1]. $\square$

Lemma 2.17. *Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Hilberträume, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ und $T = V_T|T|$ die Polarzerlegung von T. Dann gilt*

(a) $ker(V_T) = ker(|T|)$.

(b) Wenn T injektiv und $ran(T)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, dann ist V_T unitär.

Beweis.

(a) Für V_T gilt $ker(V_T) = ran(|T|)^\perp$. Weil $|T|$ selbstadjungiert ist, folgt

$$ker(|T|) = ker(|T|^*) = ran(|T|)^\perp = ker(V_T).$$

(b) Gemäß Bemerkung 2.14 gilt $\{0\} = ker(T) = ker(|T|) = ker(V_T)$. Außerdem ist wegen $ran(T) = ran(V_T|T|) \subseteq ran(V_T)$ das Bild von V_T dicht. Da das Bild von Isometrien abgeschlossen ist, folgt $ran(V_T) = \mathcal{K}$, womit V_T unitär ist.

□

Lemma 2.18. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert und $T = V_T|T|$ die Polarzerlegung von T. Dann gilt:*

(a) V_T ist selbstadjungiert.

(b) V_T vertauscht mit T und mit $|T|$.

(c) Falls $ker(|T|) = \{0\}$, dann ist V_T unitär.

Beweis.

(a) Wegen Satz 2.5.13 (iv) in [1] ist $T^* = V_T^*|T^*|$ die Polarzerlegung von T^*. Somit folgt aus Lemma 2.17, $ker(V_T^*) = ker(|T^*|) = ker(|T|)$. Da T selbstadjungiert ist, gilt $T = V_T^*|T|$. Abermals aus Lemma 2.17 erhalten wir, dass es genau eine Faktorisierung von T der Form $T = V_T|T|$ gibt, wobei V_T eine partielle Isometrie ist und $ker(V_T) = ker(|T|)$ ist, nämlich die Polarzerlegung von T. Somit gilt $V_T = V_T^*$.

(b)
$$V_T|T| = T = T^* = (V_T|T|)^* = |T|^* V_T^* = |T|V_T.$$
$$V_T T = V_T V_T|T| = V_T|T|V_T = TV_T.$$

(c) Wegen $ker(T) = ker(|T|) = \{0\}$ ist T injektiv. Wegen

$$\{0\} = ker(T) = ker(T^*) = ran(T)^\perp$$

ist $ran(T)$ dicht in $\mathcal{H}$. Daher gilt wegen Lemma 2.17 (c), dass V_T unitär ist.

□

3 Generische Paare

3.1 Begriffsbildungen und Beispiele

Definition 3.1. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und (P, Q) ein Paar orthogonaler Projektionen auf $\mathcal{H}$. (P, Q) heißt generisch, wenn P und Q keine gemeinsamen Eigenvektoren haben.*

Bemerkung 3.2. Für einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und ein Paar orthogonaler Projektionen (P, Q) auf $\mathcal{H}$ betrachten wir folgende Unterräume:

$$\mathcal{H}_{0,0} \coloneqq \{f \in \mathcal{H} : Pf = 0, Qf = 0\}$$
$$\mathcal{H}_{1,0} \coloneqq \{f \in \mathcal{H} : Pf = f, Qf = 0\}$$
$$\mathcal{H}_{0,1} \coloneqq \{f \in \mathcal{H} : Pf = 0, Qf = f\}$$
$$\mathcal{H}_{1,1} \coloneqq \{f \in \mathcal{H} : Pf = f, Qf = f\}$$

Sei $\mathcal{H}_g$ das orthogonale Komplement der direkten Summe dieser Unterräume.
$\mathcal{H}_{0,0}, \mathcal{H}_{1,0}, \mathcal{H}_{0,1}, \mathcal{H}_{1,1}$ enthalten alle gemeinsamen Eigenvektoren von P und Q; siehe Lemma 2.6. Weil die Räume $\mathcal{H}_{0,0}, \mathcal{H}_{1,0}, \mathcal{H}_{0,1}, \mathcal{H}_{1,1}$ alle invariant unter P und Q sind und weil P und Q selbstadjungiert sind, ist auch $\mathcal{H}_g$ unter P und Q invariant.
Daraus folgt, dass die Einschränkung von P und Q auf $\mathcal{H}_g$ ein generisches Paar von Projektionen ist.

Definition 3.3. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und seien M und N abgeschlossene Unterräume von $\mathcal{H}$. Gilt*

$$\{0\} = M \cap N = M \cap N^{\perp} = M^{\perp} \cap N = M^{\perp} \cap N^{\perp},$$

so nennen wir M und N in generischer Position.

Satz 3.4. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und M, N abgeschlossene Unterräume. Weiters sei $P : \mathcal{H} \to M$ die orthogonale Projektion auf M und $Q : \mathcal{H} \to N$ die orthogonale Projektion auf N. M und N sind genau dann in generischer Position, wenn (P,Q) ein generisches Paar ist.*

Beweis. Wegen $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$ und $\mathcal{H} = N \oplus N^{\perp}$ folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned}
&\{x \in \mathcal{H} | Px = 0, Qx = 0\} = ker(P) \cap ker(Q) = M^{\perp} \cap N^{\perp},\\
&\{x \in \mathcal{H} | Px = x, Qx = 0\} = ran(P) \cap ker(Q) = M \cap N^{\perp},\\
&\{x \in \mathcal{H} | Px = 0, Qx = x\} = ker(P) \cap ran(Q) = M^{\perp} \cap N,\\
&\{x \in \mathcal{H} | Px = x, Qx = x\} = ran(P) \cap ran(Q) = M \cap N.
\end{aligned}$$

□

Wir konstruieren ein Beispiel für ein generisches Paar orthogonaler Projektionen und werden in Abschnitt 3.4 zeigen, dass jedes Paar generischer orthogonaler Projektionen von dieser Bauart ist.

Satz 3.5. *Sei $\mathcal{K}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{H} = \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ und seien $C, S \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ Operatoren, für die gilt*

(i) $CS = SC$.

(ii) $C \geq 0$ *und* $S \geq 0$.

(iii) $C^2 + S^2 = I$.

(iv) $ker(C) = ker(S) = \{0\}$.

Weiters definieren wir Abbildungen $P, Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mittels folgender Blockoperatormatrixdarstellungen

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

bezüglich der Zerlegung $\mathcal{H} = (\mathcal{K} \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times \mathcal{K})$. Dann ist (P,Q) ein generisches Paar orthogonaler Projektionen.

Beweis.
Schritt 1:
Wir zeigen, dass P eine orthogonale Projektion ist. Wegen

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist P idempotent. Aus Lemma 2.9 und $I \geq 0$ erhalten wir, dass P orthogonal ist.

Schritt 2:
Wir zeigen, dass Q eine orthogonale Projektion ist:

$$\begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix}$$

folgt aus

$$C^4 + C^2S^2 = C^2(C^2 + S^2) = C^2I = C^2.$$
$$C^3S + CS^3 = CS(C^2 + S^2) = CSI = CS.$$
$$C^2S^2 + S^4 = (C^2 + S^2)S^2 = IS^2 = S^2.$$

Mit C und S sind auch C^2 und S^2 positiv. Wegen Lemma 2.10 ist auch CS positiv. Somit ist wieder wegen Lemma 2.9 auch Q orthogonal.

Schritt 3:
Wir zeigen, dass (P, Q) generisch ist.
Sei $(x; y) = (x; 0) + (0; y)$ die eindeutige Darstellung bezüglich $\mathcal{H} = (\mathcal{K} \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times \mathcal{K})$.

Wir nehmen an, dass $(x; y) \in \mathcal{H}$ ein Eigenvektor von P und Q zum Eigenwert 1 ist. Aus

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

folgt $y = 0$. Daraus erhalten wir wegen

$$\begin{pmatrix} C^2x + CSy \\ CSx + S^2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$CSx = 0$. Wegen $ker(CS) = \{0\}$ folgt somit $x = 0$. Das würde bedeuten, dass $(x; y) = (0, 0)$ kein Eigenvektor ist.

Wir nehmen an, dass $(x; y) \in \mathcal{H}$ ein Eigenvektor von P und Q zum Eigenwert 0 ist. Aus

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt $x = 0$. Aus

$$\begin{pmatrix} C^2x + CSy \\ CSx + S^2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir $CSy = 0$, also $(x; y) = (0, 0)$.

Sei $(x; y) \in \mathcal{H}$ Eigenvektor von P zum Eigenwert 0 und Eigenvektor von Q zum Eigenwert 1.
Aus

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt $x = 0$. Aus

$$\begin{pmatrix} C^2x + CSy \\ CSx + S^2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

erhalten wir $CSy = 0$, also wieder$(x; y) = (0, 0)$.

Sei $(x; y) \in \mathcal{H}$ Eigenvektor von P zum Eigenwert 1 und Eigenvektor von Q zum Eigenwert 0.
Aus

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

folgt $y = 0$. Aus

$$\begin{pmatrix} C^2x + CSy \\ CSx + S^2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir $CSx = 0$, also wieder$(x; y) = (0, 0)$.

$\square$

3.2 Eigenschaften generischer Paare

Proposition 3.6. *Sei (E, F) ein Paar von orthogonalen Projektionen in $\mathcal{H}$.*

(a) Ist $f \in \mathcal{H}$ mit $EFf = f$, so folgt $Ef = f$ und $Ff = f$.

(b) Ist (E, F) ein generisches Paar von Projektionen, dann folgt aus $EFf = f$, dass $f = 0$.

(c) Ist (E, F) ein generisches Paar von Projektionen, dann folgt aus $Fg = \alpha Eg$ und $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$, dass $g = 0$ ist.

Beweis.

(a) $Ef = f$ gilt wegen

$$Ef = EEFf = E^2Ff = EFf = f$$

Aus $Ff \neq f$ folgt wegen $f = Ff + (I - F)f$ mit $\|f\|^2 = \|Ff\|^2 + \|(I - F)\|^2$, dass $\|Ff\| < \|f\|$. Aus $\|E\| \leq 1$ erhalten wir den Widerspruch

$$\|f\| = \|EFf\| \leq \|Ff\| < \|f\|.$$

(b) Mit der Voraussetzung $EFf = f$ folgt aus (a) $Ef = f$ und $Ff = f$. Damit hätten E und F einen gemeinsamen Eigenvektor f zum Eigenwert 1. Da laut Voraussetzung (E, F) ein generisches Paar von Projektionen ist, muss $f = 0$.

(c) Sei $h \in \mathcal{H}$ mit $Fg = h = \alpha Eg$. Das bedeutet $h \in ran(F) \cap ran(E)$ also $Fh = h$ und $Eh = h$. Da (E, F) ein generisches Paar ist und somit keine gemeinsamen Eigenvektoren hat, gilt $h = 0$. Also $Fg = \alpha Eg = \{0\}$. Das bedeutet $g \in ker(F) \cap ker(E)$, also $Fg = 0$ und $Eg = 0$. Auch hier wenden wir das Argument an, dass E und F keine gemeinsamen Eigenvektoren haben dürfen, womit $g = 0$.

□

Definition 3.7. *Sei (P, Q) ein Paar von orthogonalen Projektionen in $\mathcal{H}$. Dann definieren wir*

$$\begin{aligned} P^{\perp} &= I - P, & Q^{\perp} &= I - Q, \\ A &= P - Q, & B &= I - P - Q = P^{\perp} - Q. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.8. Alle diese Operatoren sind selbstadjungiert.

Lemma 3.9. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, (P, Q) ein Paar orthogonaler Projektionen und $A, B, P^{\perp}, Q^{\perp}$ wie in Definition 3.7. Dann gilt*

(a) $A^2 + B^2 = I, \qquad AB + BA = 0.$

(b) $PQ = (I + A)Q, \qquad QP = (I - A)P.$

(c) $PA^2 = A^2P = PQ^{\perp}P, \qquad PB^2 = B^2P = PQP.$

(d) $QA^2 = A^2Q = QP^{\perp}Q, \qquad QB^2 = B^2Q = QPQ.$

(e) $B^2A = AB^2, \qquad A|B| = |B|A.$

(f) $P = \frac{1}{2}(I + A - B), \qquad Q = \frac{1}{2}(I - A - B).$

(g) $P^{\perp} = \frac{1}{2}(I - A + B), \qquad Q^{\perp} = \frac{1}{2}(I + A + B).$

Beweis. Wir zeigen exemplarisch $A^2 + B^2 = I$ und $B^2A = AB^2$:

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= (P - Q)^2 + (I - P - Q)^2 \\ &= P^2 - PQ - QP + Q^2 + I^2 - P - Q - P + P^2 + PQ - Q + QP + Q^2 \\ &= I. \end{aligned}$$

Wegen Lemma 3.9 (a) gilt

$$B^2A = BBA = -BAB = -AB(-B) = AB^2.$$

□

Lemma 3.10. *Sei (P, Q) ein generisches Paar orthogonaler Projektionen. Dann sind auch $(P, Q^\perp), (P^\perp, Q), (P^\perp, Q^\perp)$ generische Paare orthogonaler Projektionen.*

Beweis. Wir zeigen, dass $(P, Q^\perp)$ ein generisches Paar ist. Der Beweis für die anderen Paare funktioniert analog. Für die Unterräume $\mathcal{H}_{m,n} := \{f \in \mathcal{H} : Pf = mf,\, Q^\perp f = nf\}, m, n \in \{0, 1\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{0,0} &= \{f \in \mathcal{H} : Pf = 0,\, Qf = f\},\\
\mathcal{H}_{0,1} &= \{f \in \mathcal{H} : Pf = 0,\, Qf = 0\},\\
\mathcal{H}_{1,0} &= \{f \in \mathcal{H} : Pf = f,\, Qf = f\},\\
\mathcal{H}_{1,1} &= \{f \in \mathcal{H} : Pf = f,\, Qf = 0\}.
\end{aligned}$$

Die Räume auf der rechten Seite sind $\{0\}$, da (P, Q) ein generisches Paar ist. Infolge ist auch $(P, Q^\perp)$ ein solches. □

Lemma 3.11. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A = P - Q$. Dann ist $ran(P)$ invariant unter A^2.*

Beweis. Nach Lemma 3.9 (c) gilt $PA^2 = A^2P$. Das bedeutet $ran(A^2|_{ran(P)}) = ran(PA^2)$. Insbesondere bildet $A^2|_{ran(P)}$ nach $ran(P)$ ab. □

Lemma 3.12. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt. Dann ist $ran(A)$ separabel, das heißt er enthält eine höchstens abzählbare, dichte Teilmenge.*

Beweis. Siehe Satz 3.7 in [6]. □

Proposition 3.13. *Für ein Paar (P, Q) von generischen Projektionen gelten folgende Aussagen:*

(a) $ker(A) = ker(|A|) = ker(B) = ker(|B|) = ker(A \pm I) = ker(B \pm I) = \{0\}$.

(b) Die Einschränkung von Q auf $ran(P)$ ist injektiv und $ran(Q|_{ran(P)})$ ist dicht in ran(Q).

(c) Wenn A kompakt ist, dann ist $\mathcal{H}$ separabel.

Beweis.

(a) Aufgrund von Definition 3.7 und weil (P, Q) ein generisches Paar ist, folgt aus Proposition 3.6 (c) wegen

$$\begin{aligned}
&f \in ker(A) \Leftrightarrow Pf = Qf, \text{ dass } f = 0,\\
&g \in ker(A + I) \Leftrightarrow Pg = -Q^\perp, \text{ dass } g = 0,\\
&h \in ker(A - I) \Leftrightarrow P^\perp h = -Qh, \text{ dass } h = 0,\\
&f \in ker(B) \Leftrightarrow P^\perp f = Qf, \text{ dass } f = 0,\\
&h \in ker(B + I) \Leftrightarrow P^\perp h = -Q^\perp h, \text{ dass } h = 0,\\
&g \in ker(B - I) \Leftrightarrow -Pg = Qg, \text{ dass } g = 0.
\end{aligned}$$

Wegen Bemerkung 2.14 folgt die Behauptung auch für $|A|$ und $|B|$.

(b) Wir zeigen $ker(Q|_{ran(P)}) = \{0\}$. Dazu sei $f \in ran(P)$ mit $f \in ker(Q)$. Wegen Lemma 3.9 (b) gilt $f \in ker(A - I)$ was gemäß (a) $f = 0$ nach sich zieht.

Vertauschen die Rollen von P und Q, so gilt auch $ker(P|_{ran(Q)}) = \{0\}$.

Die Adjungierte von $P|_{ran(Q)}$ als Abbildung von $ran(Q)$ nach $\mathcal{H}$ ist QP als Abbildung von $\mathcal{H}$ nach $ran(Q)$. Somit folgt

$$ran(Q) \ominus ran(QP) = ker(P|_{ran(Q)}) = \{0\}.$$

Also ist $ran(QP) = ran(Q|_{ran(P)})$ dicht in $ran(Q)$.

(c) Wegen (a) gilt

$$\{0\} = ker(A) = ker(A^2) = ran(A^2)^\perp,$$

womit $ran(A^2)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist.
Weil mit A auch A^2 kompakt ist folgt aus Lemma 3.12, dass $ran(A^2)$ separabel ist.

□

3.3 Unitäre Äquivalenz

Definition 3.14. *Seien $A = V_A|A|$ und $B = V_B|B|$ die Polarzerlegungen von A und B. Wir setzen $V := V_A V_B$.*

Bemerkung 3.15. Wegen $ker(A) = \{0\}$ und $ker(B) = \{0\}$ sind die Operatoren V_A und V_B selbstadjungiert und unitär, vgl. Lemma 2.18.

Proposition 3.16. *Sei (P,Q) ein generisches Paar. Dann gelten folgende Aussagen.*

(a) $V_A|A| = |A|V_A, \quad V_A|B| = |B|V_A, \quad V_B|A| = |A|V_B, \quad V_B|B| = |B|V_B.$

(b) $V_A V_B + V_B V_A = 0.$

(c) $V^* = V^{-1} = -V.$

(d) $VP = P^\perp V$ *und* $VQ = Q^\perp V.$

(e) $V_B P = Q V_B$ *und* $V_A P = Q^\perp V_A.$

Beweis.

(a) Wegen Lemma 2.18 (b) vertauschen V_A und |A|.
Wegen Lemma 3.9 (a) und weil A und B selbstadjungiert sind, gilt

$$|B|^2 = B^2 = I - A^2 = I - |A|^2.$$

Wegen

$$(I - |A|^2)V_A = V_A - |A|^2 V_A = V_A - V_A|A|^2 = V_A(I - |A|^2)$$

folgt aus Lemma 2.12, dass V_A auch mit $|B|$ vertauscht.
Analog zeigt man, dass V_B mit |B| und |A| vertauscht.

(b) Wegen Lemma 3.9 (a) und (a) gilt

$$0 = AB + BA = |A||B|(V_A V_B + V_B V_A).$$

Die Behauptung folgt aus $ker(|A|) = ker(|B|) = \{0\}$.

(c) V ist als Produkt zweier unitärer Operatoren selbst unitär, dass heißt $V^* = V^{-1}$. Da V_A und V_B selbstadjungiert sind, erhalten wir aus (b)

$$V^* = V_B^* V_A^* = V_B V_A = -V_A V_B = -V.$$

(d) Aus (a) und (b) erhalten wir

$$VA = V_A V_B V_A |A| = |A| V_A V_B V_A = A V_B V_A = -A V_A V_B = -AV. \tag{2}$$

Analog verifiziert man $VB = -BV$. Wegen Lemma 3.9 (f) und (g) folgt

$$VP = V\frac{1}{2}(I+A-B) = \frac{1}{2}(V+VA-VB) = \frac{1}{2}(V-AV+BV) = \frac{1}{2}(I-A+B)V = P^\perp V$$

und

$$VQ = V\frac{1}{2}(I-A-B) = \frac{1}{2}(V-VA-VB) = \frac{1}{2}(V+AV+BV) = \frac{1}{2}(I+A+B)V = Q^\perp V.$$

(e) Zunächst zeigen wir $V_B A = -A V_B$.
Wegen (2) gilt $VA = -AV$. Durch Multiplikation mit V_A von rechts erhalten wir $VAV_A = -AVV_A$. Wir wenden Lemma 2.18 an und erhalten $VV_A A = -AVV_A$. Wegen $V = V_A V_B$ gilt $V_A V_B V_A A = -A V_A V_B V_A$ und wegen (b) zusammen mit $V_A^2 = V_A^* V_A = I$ folgt

$$V_B A = V_A V_A V_B A = -V_A V_B V_A A = A V_A V_B V_A = -A V_B V_A V_A = -A V_B.$$

Nun erhalten wir mit Lemma 3.9 (f)

$$\begin{aligned} V_B P &= V_B \frac{1}{2}(I + A - B) = \frac{1}{2}(V_B + V_B A - V_B B) \\ &= \frac{1}{2}(V_B - A V_B - B V_B) = \frac{1}{2}(I - A - B) V_B = Q V_B. \end{aligned}$$

Um die zweite Gleichung zu beweisen, zeigen wir zunächst $BV_A = -V_A B$.
In (d) haben wir gezeigt, dass $VB = -BV$. Durch Multiplikation mit V_B von rechts erhalten wir wegen $V = V_A V_B$ die Gleichung $V_A V_B B V_B = -B V_A V_B V_B$. Aus Lemma 2.18 folgt $V_A V_B V_B B = -B V_A V_B V_B$. Aus $V_B^2 = V_B^* V_B = I$ erhalten wir $BV_A = -V_A B$.
Nun erhalten wir mit Lemma 3.9 (f) und (g)

$$V_A P = \frac{1}{2}(V_A + V_A A - V_A B) = \frac{1}{2}(V_A + A V_A + B V_A) = Q^\perp V_A$$

$\square$

Korollar 3.17. *$ran(P)$ und $ran(P^{\perp})$ sind isomorph vermöge der Abbildung*

$$\tilde{V} \coloneqq V|_{ran(P)} : ran(P) \to ran(P^{\perp}). \tag{3}$$

Beweis. $\tilde{V}$ ist linear und injektiv, da V diese Eigenschaften hat. Aus $VP = P^{\perp}V$, (vgl. Proposition 3.16 (d)) folgt $P^{\perp} = VPV^{-1}$ also gilt $ran(P^{\perp}) = ran(V|_{ran(P)}) = ran(\tilde{V})$, womit $\tilde{V}$ surjektiv ist. $\square$

Definition 3.18. *Wir setzen $\mathcal{K} = ran(P)$.*

Wegen Definition 3.18 ist die Einschränkung $\tilde{V}$ von V auf $\mathcal{K}$ eine Isometrie von $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{K}^{\perp}$ und es gilt

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^{\perp}.$$

Bezüglich dieser Zerlegung von $\mathcal{H}$ können die Operatoren P und Q als Blockoperatormatrix dargestellt werden:

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} PQ|_{\mathcal{K}} & PQ|_{\mathcal{K}^{\perp}} \\ P^{\perp}Q|_{\mathcal{K}} & P^{\perp}Q|_{\mathcal{K}^{\perp}} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Wir werden zeigen, dass die Matrix für Q, durch zwei lineare Operatorn, die in $\mathcal{K}$ operieren, bestimmt werden kann.

Lemma 3.19.

(a) $A^2|_{\mathcal{K}}$ bildet nach $\mathcal{K}$ hinein ab.

(b) $A^2|_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ ist positiv und selbstadjungiert.

(c) $\|A^2|_{\mathcal{K}}\| \leq 1$.

Beweis.

(a) Folgt aus Lemma 3.11.

(b) Mit A ist auch A^2 und infolge ihre Einschränkung auf $\mathcal{K}$ selbstadjungiert.

(c) Wegen Lemma 3.9 (a) gilt für jedes $x \in \mathcal{H}$

$$0 \leq (Ax, Ax) = (A^2x, x) = (Ix, x) - (B^2x, x) = (x, x) - (Bx, Bx),$$

womit

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) \leq (x, x) = \|x\|^2$$

und daher $\|A\| \leq 1$.

$\square$

Definition 3.20. *Sei $S : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ die positive Quadratwurzel von $A^2|_{\mathcal{K}}$ und $C : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ die positive Quadratwurzel von $I - A^2|_{\mathcal{K}}$.*

Lemma 3.21. *$\mathcal{K}$ ist invariant unter $|A|$ und $|B|$.*

Beweis. Wegen Lemma 2.12 und Lemma 3.9 (c) gilt

$$P(A^2)^{\frac{1}{2}} = (A^2)^{\frac{1}{2}}P.$$

Mit derselben Argumentation wie im Beweis zu Lemma 3.11 ist daher $\mathcal{K}$ invariant unter $|A|$. Unter zu Hilfenahme von Lemma 3.9 (c) funktioniert der Beweis für die Invarianz unter $|B|$ analog. □

Korollar 3.22.

(a) S ist die Einschränkung von $|A|$ auf $\mathcal{K}$, d.h. $S = |A|\Big|_{\mathcal{K}}$.

(b) C ist die Einschränkung von $|B|$ auf $\mathcal{K}$, d.h. $C = |B|\Big|_{\mathcal{K}}$.

Beweis.

(a) Wegen Lemma 3.21 ist $\mathcal{K}$ invariant unter $|A|$, womit

$$|A|\Big|_{\mathcal{K}}^2 = |A|^2\Big|_{\mathcal{K}} = A^2\Big|_{\mathcal{K}} = S^2.$$

Aus $|A|\Big|_{\mathcal{K}} \geq 0$ und $S \geq 0$ folgt $|A|\Big|_{\mathcal{K}} = S$.

(b) Wegen $B^2|_{\mathcal{K}} = I - A^2|_{\mathcal{K}}$ funktioniert der Beweis analog wie für |A|.

□

Lemma 3.23. *Für S und C gelten folgende Aussagen:*

(a) C und S kommutieren.

(b) $C \geq 0$, $S \geq 0$, $\|S\| \leq 1$ und $\|C\| \leq 1$.

(c) $C^2 + S^2 = I$.

(d) $ker(C) = ker(S) = \{0\}$.

Beweis.

(a) Wegen Lemma 3.11 gilt

$$C^2S^2 = (I - A^2|_{\mathcal{K}})A^2|_{\mathcal{K}} = A^2|_{\mathcal{K}}(I - A^2|_{\mathcal{K}}) = S^2C^2.$$

Mehrmaliges Anwenden von Lemma 2.12 ergibt $CS = SC$.

(b) Diese Aussage wurde für S in Lemma 3.19 (c) gezeigt, wobei zu berücksichtigen ist, dass die Wurzel einer selbstadjungierten positiven Kontraktion wieder eine Kontraktion ist. Der Beweis für C funktioniert analog.

(c) $C^2 + S^2 = |B|_{\mathcal{K}}^2 + |A|_{\mathcal{K}}^2 = B_{\mathcal{K}}^2 + A_{\mathcal{K}}^2 = I$.

(d) Siehe Proposition 3.13.

□

3.4 Darstellung durch positive Kontraktion

Satz 3.24. *Sei (P, Q) ein generisches Paar von orthogonalen Projektionen im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Sei $\mathcal{K} = ran(P)$ und seien $\tilde{V}, S$ und C wie in Korollar 3.20 und Definition 3.17. Dann gilt für $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$, dass die Projektionen P und Q durch Blockoperatormatrizen in folgender Weise dargestellt werden können:*

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} C^2 & CS\tilde{V}^{-1} \\ \tilde{V}CS & \tilde{V}S^2\tilde{V}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Beweis. Aus Lemma 3.9 (c) folgt

$$PQP = PB^2 = PB^2P = P(I - A^2)P$$

und daher $PQ|_{\mathcal{K}} = C^2$.

Aus Proposition 3.16 (c) und (d) folgt:

$$P^\perp QP^\perp = VPV^{-1}VQ^\perp V^{-1}VPV^{-1} = VPQ^\perp PV^{-1} = VPA^2PV^{-1}$$

und daher $P^\perp Q|_{\mathcal{K}^\perp} = \tilde{V}S^2\tilde{V}^{-1}$.

Wegen Proposition 3.16 und Lemma 3.22, sowie unter zu Hilfenahme von $BA = PQ - QP$ und $V_B V_A = V^{-1}$ gilt auch

$$PQP^\perp = BAP^\perp = |B||A|V^{-1}P^\perp = |B|_{\mathcal{K}}|A|_{\mathcal{K}}\tilde{V}^{-1}P^\perp = CS\tilde{V}^{-1}P^\perp$$

und infolge $PQ|_{\mathcal{K}^\perp} = CS\tilde{V}^{-1}$.

Schließlich gilt

$$P^\perp QP = -P^\perp BA = -P^\perp V^{-1}|B||A| = \tilde{V}|B|_{\mathcal{K}}|A|_{\mathcal{K}}P = \tilde{V}CSP.$$

und damit $P^\perp Q|_{\mathcal{K}} = \tilde{V}CS$.
(5) folgt also aus (4). □

Korollar 3.25. *Wenn (P, Q) ein generisches Paar von Projektionen ist, dann haben die Potenzen von A folgende Blockoperatormatrix Darstellungen:*

$$A = \begin{pmatrix} S^2 & -CS\tilde{V}^{-1} \\ -\tilde{V}CS & -\tilde{V}S^2\tilde{V}^{-1} \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} S^2 & 0 \\ 0 & \tilde{V}S^2\tilde{V}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Für $p \in \mathbb{N}$ gilt allgemein

$$A^{2p} = \begin{pmatrix} S^{2p} & 0 \\ 0 & \tilde{V}S^{2p}\tilde{V}^{-1} \end{pmatrix} \tag{7}$$

und

$$A^{2p-1} = \begin{pmatrix} S^{2p} & -CS^{2p-1}\tilde{V}^{-1} \\ -\tilde{V}CS^{2p-1} & -\tilde{V}S^{2p}\tilde{V}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Beweis. Induktionsanfang: Für $p = 1$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} S^2 & -CS\tilde{V}^{-1} \\ -\tilde{V}CS & -\tilde{V}S^2\tilde{V}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Aus

$$S^4 + CS\tilde{V}^{-1}\tilde{V}CS = S^4 + C^2S^2 = S^2(s^2 + C^2) = S^2,$$
$$-S^2CS\tilde{V}^{-1} + CS\tilde{V}^{-1}\tilde{V}S^2\tilde{V}^{-1} = -CS^3\tilde{V}^{-1} + CS^3\tilde{V}^{-1} = 0,$$
$$-\tilde{V}CSS^2 + \tilde{V}S^2\tilde{V}^{-1}\tilde{V}CS = -\tilde{V}CS^3 + \tilde{V}CS^3 = 0,$$
$$\tilde{V}CSCS\tilde{V}^{-1} + \tilde{V}S^2\tilde{V}^{-1}\tilde{V}S^2\tilde{V}^{-1} = \tilde{V}C^2S^2\tilde{V}^{-1} + \tilde{V}S^4\tilde{V}^{-1} = \tilde{V}S^2\tilde{V}^{-1},$$

erhalten wir

$$A^2 = \begin{pmatrix} S^2 & 0 \\ 0 & \tilde{V}S^2\tilde{V}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass Gleichung (7) und (8) gelten.

$$A^{2(p+1)} = A^{2p}A^2 = \begin{pmatrix} S^{2p+2} & 0 \\ 0 & \tilde{V}S^{2p+1}\tilde{V}^{-1} \end{pmatrix}$$

erhält man aus

$$\tilde{V}S^{2p}\tilde{V}^{-1}\tilde{V}S^2\tilde{V}^{-1} = \tilde{V}S^{2p+2}\tilde{V}^{-1}$$

und

$$A^{2(p+1)-1} = A^{2p}A = \begin{pmatrix} S^{2p+2} & -CS^{2p+1}\tilde{V} \\ -\tilde{V}CS^{2p+1} & -\tilde{V}S^{2p+2}\tilde{V}^{-1} \end{pmatrix}$$

folgt aus

$$-S^{2p}CS\tilde{V}^{-1} = -CS^{2p+1}\tilde{V}^{-1},$$
$$-\tilde{V}S^{2p}\tilde{V}^{-1}\tilde{V}CS = -\tilde{V}S^{2p+1}C = -\tilde{V}CS^{2p+1},$$
$$-\tilde{V}S^{2p}\tilde{V}^{-1}\tilde{V}S^2\tilde{V}^{-1} = -\tilde{V}S^{2p+2}\tilde{V}^{-1}.$$

□

4 Aquivalente Paare

Satz 4.1. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und (P, Q) ein Paar orthogonaler Projektionen mit $\|P - Q\| < 1$.*

(a) Dann ist $V_B \coloneqq B|B|^{-1}$ ein unitärer Operator, wobei $B = I - P - Q$ ist, vgl. Definition 3.7.

(b) Für V_B gilt

$$P = V_B Q V_B^{-1}, \qquad Q = V_B P V_B^{-1}.$$

Beweis.

(a) Wir werden in Lemma 4.5 (a) sehen, dass B invertierbar ist. Mit B ist auch $|B|$ invertierbar. Somit ist V_B als Komposition invertierbarer Operatoren selbst invertierbar. Schließlich gilt

$$V_B^* V_B = (B|B|^{-1})^* B|B|^{-1} = |B|^{-1} B^* B|B|^{-1} = |B|^{-1}|B|^2|B|^{-1} = I.$$

(b) Da B mit V_B kommutiert (siehe Lemma 2.18) gilt

$$V_B B V_B^{-1} = B.$$

Wegen $B = I - (P + Q)$ folgt

$$V_B(P + Q)V_B^{-1} = P + Q. \tag{9}$$

Aus Lemma 3.9 (e) erhalten wir

$$A|B|^{-1} = |B|^{-1}A.$$

Unter zu Hilfenahme von Lemma 3.9 (e) folgt

$$\begin{aligned} V_B(P - Q) = V_B A = B|B|^{-1}A = BA|B|^{-1} = \\ - AB|B|^{-1} = -AV_B = (Q - P)V_B. \end{aligned} \tag{10}$$

Aus den Gleichungen (9) und (10) folgt

$$V_B P + V_B Q - V_B P - P V_B = P V_B + Q V_B - Q V_B - V_B Q.$$

Also folgt

$$V_B Q - P V_B = -(V_B Q - P V_B),$$

womit $V_B Q - P V_B = 0$ bzw. $P = V_B Q V_B^{-1}$ gilt.

□

Definition 4.2. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und sei (P,Q) ein Paar orthogonaler Projektionen in $\mathcal{H}$. Wir definieren*

$$W = PQ + P^\perp Q^\perp.$$

Lemma 4.3. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und sei (P,Q) ein Paar orthogonaler Projektionen in $\mathcal{H}$. Dann gilt*

(a) $PW = WQ$,

(b) $PB = -PQ = BQ$,

(c) $W = I - P - Q + 2PQ = (I - 2P)B = B(I - 2Q)$,

(d) $W^*W = B^2 = WW^*$.

Beweis.

(a)

$$PW = P(PQ + P^\perp Q^\perp) = PQ + PP^\perp Q^\perp = PQ =$$
$$PQ + P^\perp Q^\perp Q = (PQ + P^\perp Q^\perp)Q = WQ.$$

(b) Aus Lemma 3.9 erhalten wir

$$PB = P(I - P - Q) = -PQ = (I - P - Q)Q = BQ.$$

(c) Wegen Definition 4.2 und (b) gilt

$$\begin{aligned} W &= PQ + (I - P)(I - Q) = I - P - Q + 2PQ \\ &= B + 2PQ = B - 2PB \\ &= (I - 2P)B = B - 2BQ = B(I - 2Q). \end{aligned}$$

(d) Wegen $(I - 2P)^2 = I$, (c) und weil $(I - 2P)$ selbstadjungiert ist, gilt

$$\begin{aligned} W^*W &= ((I - 2P)B)^*(I - 2P)B = B^*(I - 2P)^*(I - 2P)B \\ &= B^2 = B(I - 2Q)(I - 2Q)B^* \\ &= B(I - 2Q)(B(I - 2Q))^* = WW^*. \end{aligned}$$

□

Lemma 4.4. *Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normal, so hat T eine beschränkte Inverse genau dann, wenn T nach unten beschränkt ist, das heißt es gibt ein $0 < c < \infty$, sodass $c\|x\| \le \|Tx\|$ für $x \in \mathcal{H}$.*

Beweis. Siehe Satz 2.3.5 in [1]. □

Lemma 4.5. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, (P,Q) ein Paar orthogonaler Projektionen mit $\|P - Q\| < 1$.*

(a) Der Operator B aus Definition 3.7 ist invertierbar.

(b) Der Operator W aus Definition 4.2 ist invertierbar.

(c) In der Polarzerlegung $W = V_W|W|$ ist V_W unitär und es gilt $|W| = |B|$.

Beweis.

(a) Aus Lemma 3.9 (a) und

$$\|Bu\|^2 = \|u\|^2 - \|Au\|^2 \geq (1 - \|A\|^2)\|u\|^2$$

folgt, dass B nach unten beschränkt und somit wegen Lemma 4.4 invertierbar ist.

(b) Mit B ist auch $B^2 = WW^* = W^*W$ invertierbar. Aufgrund der Invertierbarkeit von WW^* ist W surjektiv und weil auch W^*W invertierbar ist folgt, dass W injektiv ist. Insgesamt ist also auch W invertierbar.

(c) $|W| = |B|$ folgt aus $B^2 = WW^* = W^*W$. Zudem folgt aus Lemma 2.17, dass V_W ein unitärer Operator ist.

□

Satz 4.6. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und (P, Q) ein Paar orthogonaler Projektionen mit $\|P - Q\| < 1$. Sei W wie in Definition 4.2 mit der Polarzerlegung $W = V_W|B|$. Dann gilt*

(a) $V_W = (I - 2P)V_B$.

(b) $P = V_W Q V_W^{-1}$.

(c) Sei $W_n = I - P - Q_n + 2PQ_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $B_n = I - P - Q_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Falls $Q_n \to P$ für $n \to \infty$ in der Norm, so gilt $V_{W_n} \to I$ für $n \to \infty$ und $V_{B_n} \to (I - 2P)$ für $n \to \infty$ in der Norm.

Beweis.

(a) Wegen Lemma 4.3 (c) und Lemma 4.5 (c) gilt

$$V_W = W|W|^{-1} = (I - 2P)B|B|^{-1} = (I - 2P)V_B.$$

(b) Wegen Lemma 4.3 (a) gilt $PW = WQ$. Aufgrund von Lemma 3.9 (d) erhalten wir

$$PV_W|B| = V_W|B|Q = V_W Q|B|.$$

Aus Lemma 4.5 (a) folgt $PV_W = V_W Q$ und somit schließlich $P = V_W Q V_W^{-1}$.

(c) Aus $V_W = W|B|^{-1}$ erhalten wir unter zu Hilfenahme von Lemma 4.3 und wegen $W_n = I - P - Q_n + 2PQ_n \to I$ für $n \to \infty$ in der Norm und $|B_n|^{-1} = ((B_n^2)^{\frac{1}{2}})^{-1} = ((W_n^* W_n)^{\frac{1}{2}})^{-1} \to (I^{\frac{1}{2}})^{-1} = I$ für $n \to \infty$ in der Norm, dass $V_{W_n} \to I$ für $n \to \infty$ in der Norm.
Aus $V_B = B|B|^{-1}$ erhalten wir wegen $B_n = I - P - Q_n \to (I - 2P)$ für $n \to \infty$ in der Norm, dass $V_{B_n} \to (I - 2P)$ für $n \to \infty$ in der Norm.

□

5 Generische Unterräume

In diesem Abschnitt stellen wir Unterräume in generischer Position mittels Graphen von linearen Abbildungen dar.

5.1 Begriffsbildungen

Definition 5.1. *Seien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ Mengen und $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Dann heißt*

$$graph(f) := \{(x, f(x)) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : x \in \mathcal{X}\}$$

der Graph von f.

Definition 5.2. *Seien $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ normierte Vektorräume, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{V}$ ein Unterraum und $T : \mathcal{D} \to \mathcal{W}$ linear. T heißt abgeschlossen, wenn $graph(T)$ abeschlossen ist.*

Definition 5.3. *Die Dimension eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ ist gleich der Mächtigkeit einer Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$.*

Lemma 5.4. *Seien $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ Hilberträume. $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ sind genau dann isometrisch Isomorph, wenn sie dieselbe Hilbertraumdimension haben.*

Beweis. Siehe Satz 2.62 (a) in [6]. □

Lemma 5.5. *Seien $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ Hilberträume, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ injektiv und $ran(T)$ dicht in $\mathcal{K}$. Dann haben $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ dieselbe Hilbertraumdimension.*

Beweis. Für die Polarzerlegung $T = V_T|T|$ von T gilt wegen Lemma 2.17, dass V_T unitär ist. Aus Lemma 5.4 erhalten wir, dass $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ dieselbe Hilbertraumdimension haben. □

Lemma 5.6. *Sei $\mathcal{K}$ ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt $(.,.)_\mathcal{K}$. Sei $\mathcal{H} = \mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Dann ist $((x_1; y_1), (x_2; y_2))_\mathcal{H} = (x_1, x_2)_\mathcal{K} + (y_1, y_2)_\mathcal{K}$ ein inneres Produkt auf $\mathcal{H}$.*

Beweis. $(.,.)_\mathcal{H}$ ist positiv definit, da für $(x_1; y_1) \neq (0; 0)$

$$((x_1; y_1), (x_1; y_1))_\mathcal{H} = (x_1, x_1)_\mathcal{K} + (y_1, y_1)_\mathcal{K} > 0.$$

Sei $((x_1; y_1), (x_1; y_1))_\mathcal{H} = (x_1, x_1)_\mathcal{K} + (y_1, y_1)_\mathcal{K} = 0$. Aus der Definition des inneren Produkts auf $\mathcal{K}$ erhalten wir $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$. Also folgt $(x_1; y_1) = (0, 0)$.
Wir nehmen an, dass $(x_1; y_1) = (0, 0)$ durch Einsetzen in die Definition erhalten wir $((x_1; y_1), (x_1; y_1))_\mathcal{H} = 0$.

$(.,.)_\mathcal{H}$ ist hermitesch:

$$\begin{aligned}\overline{((x_2; y_2), (x_1; y_1))_\mathcal{H}} &= \overline{(x_2, x_1)_\mathcal{K}} + \overline{(y_2, y_1)_\mathcal{K}} = (x_1, x_2)_\mathcal{K} + (y_1, y_2)_\mathcal{K} \\ &= ((x_1; y_1), (x_2; y_2))_\mathcal{H}\end{aligned}$$

$(.,.)_{\mathcal{H}}$ ist semilinear im ersten Argument:

$$\begin{aligned}((x_1;y_1)+(x_2;y_2),(x_3;y_3))_{\mathcal{H}} &= (x_1+x_2,x_3)_{\mathcal{K}}+(y_1+y_2,y_3)_{\mathcal{K}}\\ &= (x_1,x_3)_{\mathcal{K}}+(y_1,y_3)_{\mathcal{K}}+(x_2,x_3)_{\mathcal{K}}+(y_2,y_3)_{\mathcal{K}}\\ &= ((x_1;y_1),(x_3;y_3))_{\mathcal{H}}+((x_2;y_2),(x_3;y_3))_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha(x_1;y_1),(x_2;y_2))_{\mathcal{H}} &= (\alpha x_1,x_2)_{\mathcal{K}}+(\alpha y_1,y_2)_{\mathcal{K}}\\ &= \alpha((x_1,x_2)_{\mathcal{K}}+(y_1,y_2)_{\mathcal{K}})\\ &= \alpha((x_1;y_1),(x_2;y_2))_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

□

Satz 5.7. *Sei $\mathcal{K}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{H}=\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ mit dem inneren Produkt $(.,.)_{\mathcal{H}}$ aus Lemma 5.6. Sei $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{K}$ eine dichte Teilmenge von $\mathcal{K}$ und sei $T:\mathcal{D}\to\mathcal{K}$ linear, abgeschlossen, $ker(T)=\{0\}$ und $ran(T)$ dicht in $\mathcal{K}$. Weiters sei*

$$M:=\{(f;0)\in\mathcal{H}:f\in\mathcal{K}\}$$

und N der Graph von T.

(a) Dann gilt $M^\perp=\{(0;g)\in\mathcal{H}|g\in\mathcal{K}\}$ und $N^\perp=\{(-T^*g;g)\in\mathcal{H}|g\in\mathcal{K}\}$.

(b) Dann sind M und N in generischer Position.

Beweis.

(a) Für beliebiges $(f;0)\in M$ und $(0;g)\in\mathcal{H}$ gilt $((f;0),(0;g))_{\mathcal{H}}=(f,0)_{\mathcal{K}}+(0,g)_{\mathcal{K}}=0$. Also ist $\{(0;g):g\in\mathcal{K}\}\subseteq M^\perp$.
Sei $(x;y)\in M^\perp$. Also gilt $0=((x;y),(f;0))_{\mathcal{H}}=(x,f)_{\mathcal{K}}+(y,0)_{\mathcal{K}}$ für alle $f\in\mathcal{K}$. Daraus folgt $(x,f)_{\mathcal{K}}=0$ für alle $f\in\mathcal{K}$. Somit erhalten wir $x\in\mathcal{K}^\perp=\{0\}$ und es gilt $M^\perp\subseteq\{(0;g):g\in\mathcal{K}\}$.

Für beliebiges $(g;Tg)\in graph(T)$ gilt $((-T^*f;f),(g;Tg))_{\mathcal{H}}=(-T^*f,g)_{\mathcal{K}}+(f,Tg)_{\mathcal{K}}=(f,-Tg)_{\mathcal{K}}+(f,Tg)_{\mathcal{K}}=(f,Tg-Tg)_{\mathcal{K}}=0$. Also ist $\{(-T^*f;f)\in\mathcal{H}|f\in\mathcal{K}\}\subseteq N^\perp$.

Sei $(x;g)\in N^\perp$, also gilt $0=((x;g),(f;Tf))_{\mathcal{H}}=(x,f)_{\mathcal{K}}+(g,Tf)_{\mathcal{K}}$ für alle $f\in\mathcal{K}$. Daraus erhalten wir $(x,f)_{\mathcal{K}}=(-T^*g,f)_{\mathcal{K}}$ für alle $f\in\mathcal{K}$. Also erhalten wir $N^\perp\subseteq\{(-T^*f;f)\in\mathcal{H}|f\in\mathcal{K}\}$.

(b) Sei $(f;0)\in M$ und $(g;Tg)\in N$ mit $(f;0)=(g;Tg)$. Also muss $Tg=0$ sein. Wegen $ker(T)=\{0\}$ folgt $g=0$ und somit $f=0$. Also $M\cap N=\{0\}$.

Weil $ran(T)$ dicht in $\mathcal{K}$ liegt, gilt $ker(T^*)=ran(T)^\perp=\{0\}$ und wegen

$$M^\perp=\{(0;f)\in\mathcal{H}\}\quad\text{und}\quad N^\perp=\{(-T^*f;f)\in\mathcal{H}\}$$

zeigt man $M^\perp\cap N^\perp=\{0\}$ analog wie $M\cap N=\{0\}$.

Aus $(f;0)=(-T^*g;g)$ folgt $g=0$ und somit $-T^*g=0$ und weiters $f=0$. Also gilt $M\cap N^\perp=\{0\}$. $M^\perp\cap N=\{0\}$ zeigt man analog.

□

5.2 Polarzerlegung für dicht definierte, abgeschlossene Operatoren

Definition 5.8. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linear. Wir nennen T dicht definiert, falls dom(T) dicht in $\mathcal{H}$ liegt.*

Definition 5.9. *Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Hilberträume und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ und $S : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ linear. Wir nennen T und S formal adjungiert falls $(y, Tx)_{\mathcal{K}} = (Sy, x)_{\mathcal{H}}$ für alle $x \in dom(T)$ und alle $y \in dom(S)$.*

Lemma 5.10. *Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Hilberträume und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ dicht definiert. Dann existiert ein eindeutig bestimmter zu T formal adjungierter Operator $T^* : dom(T^*) \subseteq \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ mit maximalem Definitionsbereich. Wir nennen T^* den zu T adjungierten Operator.*

Beweis. Siehe Seite 97 in [6]. □

Definition 5.11. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dicht definiert.*

(a) Wir nennen T selbstadjungiert, falls gilt $T = T^*$.

(b) Wir nennen T positiv, falls für alle $x \in dom(T)$ gilt, dass $(Tx, x) \geq 0$.

Lemma 5.12. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dicht definiert und abgeschlossen. Dann ist T^*T positiv und selbstadjungiert.*

Beweis. Wegen $(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) \geq 0$ ist T^*T positiv. Das T^*T selbstadjungiert ist sieht man in Satz 7.25 (c) in [16]. □

Lemma 5.13. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dicht definiert, positiv und selbstadjungiert. Dann existiert ein eindeutiger, positiver und selbstadjungierter Operator A, sodass $A^2 = T$. Wir nennen A die Wurzel von T und schreiben $A := T^{\frac{1}{2}}$.*

Beweis. Siehe Lemma XII7.3 in [14]. □

Definition 5.14. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dicht definiert. Dann nennen wir $|T| := (T^*T)^{\frac{1}{2}}$.*

Satz 5.15. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Weiters sei T dicht definiert und abgeschlossen. Dann gibt es genau einen dicht definierten, positiven und selbstadjungierten Operator $|T|$ und genau eine partielle Isometrie $V_T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, mit $ker(V_T) = ran|T|^{\perp}$, sodass $T = V_T|T|$. Wir bezeichnen diese Faktorisierung von T als Polarzerlegung.*

Beweis. Siehe Satz XII7.7 in [14]. □

Lemma 5.16. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, T dicht definiert, abgeschlossen und $T = V_T|T|$ die Polarzerlegung von T. Falls T injektiv und $ran(T)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, so ist V_T unitär.*

Beweis. Siehe Abschnitt 2.2 in [15]. □

5.3 Darstellung durch Graphen linearer Abbildungen

Definition 5.17. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und seien M_1, M_2, N_1, N_2 abgeschlossene Unterräume von $\mathcal{H}$. Das Paar (M_1, N_1) heißt unitär äquivalent zum Paar (M_2, N_2) wenn ein unitärer Operator $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ existiert mit $U(M_1) = M_2$ und $U(N_1) = N_2$.*

Satz 5.18. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und seien M und N abgeschlossene Unterräume von $\mathcal{H}$ in generischer Position. Dann existiert ein Hilbertraum $\mathcal{K}$, eine dichte Teilmenge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{K}$ und eine lineare, abgeschlossene Abbildung $T : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$, wobei $ker(T) = \{0\}$ und $ran(T)$ dicht in $\mathcal{K}$ ist, sodass die Paare $(K \times \{0\}, graph(T))$ und (M, N) unitär äquivalent sind.*

Beweis.

Schritt 1:
Sei $Q : \mathcal{H} \to N$ die orthogonale Projektion auf N und $P : \mathcal{H} \to M$ die orthogonale Projektion auf M. Aufgrund von Proposition 3.13 (b) wissen wir, dass $Q|_M$ injektiv und $ran(Q|_M)$ dicht in N ist. Entsprechend ist $P|_N$ injektiv und $ran(P|_N)$ dicht in M.

Schritt 2:
Unter zu Hilfenahme von Schritt 1 und Korollar 3.17 erhalten wir einen isometrischen Isomorphismus $S : M \to M^\perp$. Wir definieren

$$\mathcal{K} := M,$$

und T auf der dichten Teilmenge $ran(P|_N)$ von M als

$$T(Pg) = S^{-1}(1 - P)g \ \ f\ddot{u}r \ \ g \in N.$$

$T : ran(P|_N) \to M$ ist wohldefiniert, da $P|_N$ injektiv ist und $I - P$ die Orthogonale Projektion auf $M^\perp$ ist.
Weiters sei $U : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ definiert durch

$$U(f; g) = f + Sg \ \ f\ddot{u}r \ \ f, g \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}.$$

Schritt 3:
Wir zeigen die Injektivität von T. Da auch $M^\perp$ und N in generischer Position sind, sieht man wie im ersten Schritt, dass $(I - P)|_N$ injektiv ist. Weil $S : M \to M^\perp$ ein isometrischer Isomorphismus ist, ist auch S^{-1} isometrisch und somit $S^{-1}(I-P)$ injektiv auf N.

Mit derselben Argumentation wie in Schritt 1 ist $ran((I - P)|_N)$ dicht in $M^\perp$. Weil die Dichtheit wegen der Stetigkeit und Bijektivität von S^{-1} erhalten bleibt und somit $ran(S^{-1}(I-P)|_N)$ dicht in M ist, folgt aufgrund der Defintion von T, dass $ran(T)$ dicht in M ist.

Schritt 4:

Wir zeigen, dass T abgeschlossen ist, daher dass, falls $g_n \in N$ und $f_n = Pg_n$, $f_n \to f$ und $S^{-1}(1-P)g_n \to h$, dann gilt $f = Pg$ für ein $g \in N$ und $h = S^{-1}(1-P)g$.

Aus $S^{-1}(1-P)g_n \to h$ folgt $(1-P)g_n \to Sh$ und somit

$$g_n = Pg_n + (1-P)g_n \to f + Sh =: g.$$

Da $g_n \in N$ und N abgeschlossen ist, gilt $g \in N$. Aus der Abgeschlossenheit von M zusammen mit $S^{-1}(1-P)g_n \in M$ folgt $h \in M$. Also ist $Sh \in M^\perp$ und somit $(1-P)Sh = Sh$. Schließlich folgt aus $f \in M$

$$Pg = Pf + PSh = Pf = f$$

und

$$(1-P)g = (1-P)(f+Sh) = (1-P)Sh = Sh \text{ und daher } S^{-1}(1-P)g = h.$$

Schritt 5:
Wir zeigen, dass (M, N) und $(\mathcal{K} \times \{0\}, graph(T))$ unitär äquivalent sind. Wegen $S : M \to M^\perp$ gilt $U : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{H} = M \oplus M^\perp$. Für $f \in M$ und $Sg \in M^\perp$ gilt

$$\|U(f;g)\|^2 = \|f + Sg\|^2 = \|f\|^2 + \|Sg\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 = \|(f;g)\|^2,$$

womit U isometrisch ist.
Sei $(x, 0) \in \mathcal{K} \times \{0\}$. Dann gilt $U(x, 0) = x \in \mathcal{K} = M$, also $U(\mathcal{K} \times \{0\}) = M$.
Sei $(Pg; S^{-1}(1-P)g)$ mit $g \in N$ im Graphen von T. Das Bild von $(Pg; S^{-1}(1-P)g)$ unter U ist, $Pg + SS^{-1}(1-P)g = g$. Also ist $U(graph(T)) = N$. □

Lemma 5.19. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und M ein abgeschlossener Teilraum. Weiters sei $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein unitärer Operator mit $U(M) = M$. Dann ist*

(a) M invariant unter U^{-1},

(b) $U(M^\perp) = M^\perp$.

Beweis.

(a) Wegen U bijektiv gilt
$$U(M) = M \Leftrightarrow M = U^{-1}(M).$$

(b) Sei $x \in M^\perp$.Wegen $U(M) = M$ existiert für jedes $y \in M$ ein $y_{ur} \in M$, sodass $U(y_{ur}) = y$. Sei $y \in M$ beliebig. Also gilt wegen $(y_{ur}, x) = 0$ und $(U(y_{ur}), Ux) = (y, Ux) = 0$ die Inklusion $Ux \in M^\perp$. Somit gilt $U(M^\perp) \subseteq M^\perp$.

Da mit U auch U^{-1} unitär ist, folgt aus (a), dass auch $U^{-1}(M^\perp) \subseteq M^\perp$ und infolge $M^\perp \subseteq U(M^\perp)$.

□

Definition 5.20. *Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{H}$ ein Unterraum und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Man sagt $\mathcal{X}$ reduziert den Operator T, wenn*

$$T(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X} \quad \text{und} \quad T(\mathcal{X}^\perp) \subseteq \mathcal{X}^\perp.$$

Lemma 5.21. *Sei $\mathcal{K}$ ein Hilbertraum und $U : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ ein unitärer Operator. Falls $U(\mathcal{K} \times \{0\}) = \mathcal{K} \times \{0\}$, so gilt $U = U_1 \oplus U_2$, wobei U_1 und U_2 unitäre Operatoren in $\mathcal{K}$ sind.*

Beweis. Wegen Lemma 5.19 reduziert $\mathcal{K} \times \{0\}$ den Operator U. Wegen $\mathcal{K} \times \mathcal{K} = (\mathcal{K} \times \{0\}) \oplus (\mathcal{K} \times \{0\})^\perp$ definieren wir $U_1 \coloneqq U|_{\mathcal{K} \times \{0\}}$ und $U_2 \coloneqq U|_{(\mathcal{K} \times \{0\})^\perp}$ und erhalten somit $U = U_1 \oplus U_2$. □

Lemma 5.22. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und seien M und N abgeschlossene Unterräume von $\mathcal{H}$ in generischer Position. Sei T die Abbildung aus Satz 5.7, sodass (M, N) und $(\mathcal{K} \times \{0\}, graph(T))$ unitär äquivalent sind. Weiters sei $T = V_T|T|$ die Polarzerlegung von T. Dann sind auch (M, N) und $(\mathcal{K} \times \{0\}, graph(|T|))$ unitär äquivalent.*

Beweis. Wegen Lemma 5.16 ist V_T unitär. Wir wenden $I \oplus V_T^*$ auf $(\mathcal{K} \times \{0\}, graph(T))$ an und erhalten, wegen $V_T^* T = |T|$, $(\mathcal{K} \times \{0\}, graph(|T|))$. Sei U der unitäre Operator aus Satz 5.18. Dann gilt $(I \oplus V_T^*)U(N) = graph(|T|)$ und daher sind N und $graph(|T|)$ unitär äquivalent. □

Korollar 5.23. *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.18 existiert eine Abbildung $T : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ mit den Eigenschaften aus Satz 5.18, die zusätzlich positiv und selbstadjungiert ist. In diesem Fall ist T eindeutig in dem Sinne, dass, falls $(K \times \{0\}; graph(T_1))$ und $(K \times \{0\}; graph(T_2))$ unitär äquivalent sind, dann sind T_1 und T_2 unitär äquivalent für alle T_1, T_2 positiv und selbstadjungiert.*

Beweis. Wegen Lemma 5.22 existiert eine Abbildung $T : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ mit den Eigenschaften aus Satz 5.18, die positiv und selbstadjungiert ist.

Seien $(K \times \{0\}; graph(T_1))$ und $(K \times \{0\}; graph(T_2))$ unitär äquivalent, also existiert ein unitärer Operator $U : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ mit der Eigenschaft $U(\mathcal{K} \times \{0\}) = \mathcal{K} \times \{0\}$ und $U(graph(T_1)) = graph(T_2)$. Wegen Lemma 5.21 gilt, $U = U_1 \oplus U_2$, wobei U_1 und U_2 unitäre Operatoren in $\mathcal{K}$ sind.
Aus $U(graph(T_1)) = graph(T_2)$ folgt $U_1(f) \in dom(T_2)$, für jedes $f \in dom(T_1)$, wobei $T_2 U_1 f = U_2 T_1 f$. Also gilt

$$T_2 U_1 = U_2 T_1. \tag{11}$$

Wir adjungieren Gleichung (11) und erhalten, wegen $T_1 = T_1^*$ und $T_2 = T_2^*$,

$$U_1^* T_2 = T_1 U_2^*.$$

Weiters erhalten wir

$$T_1^2 = T_1 U_2^* U_2 T_1 = U_1^* T_2^2 U_1,$$

und wegen T_1, T_2 positiv und Lemma 2.12 folgt schließlich $T_1 = U_1^* T_2 U_1$. □

Literatur

[1] G. Wittstock, Lineare Operatoren auf dem Hilbertraum, $http://www.math.uni-sb.de/ag/wittstock/lehre/WS02/hilbert/Skript02_07/Vorlesung.pdf$

[2] J. Avron, R. Seiler, B. Simon, The index of a pair of projections, *J. Funct. Anal.*,120:220-237,1994

[3] C. Davis, Separation of two linear subspaces, *Acta. Sci. Math.*, 19:172-187,1958

[4] P. Halmos,Two subspaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 144:381-389,1969

[5] A. Lenard, The numerical range of a pair of projections, *J. Funct. Anal.*,10:410-423,1972

[6] J. Weidemann, Lineare Operatoren in Hilberträumen1, Teubner Verlag, Auflage 2000

[7] H. Woracek, M. Kaltenbäck, M. Blümlinger, Skriptum Funktionalanalysis,2012

[8] F. Riesz, B. Sz.-Nagy, Functional Analysis, Ungar, New York, 1965

[9] W. Rudin, Functional Analysis, International Series in Pure and Applied Mathematics, 2nd Edition, McGraw-Hill 1991

[10] P. Deift, Applications of commutation formula, Duke Math J. 45, 267-310,1978

[11] P.D. Hislop, I.M. Sigal : Introduction to Spectral Theory — With applications to Schrödinger Operators — Applied Mathematical Sciences 113. Springer,1995

[12] P.R. Halmos, A Hilbertspace problem book, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1967

[13] H.Heuser, Funktionalanalysis, B.G. Teubner, Stuttgart 1992

[14] N. Dunford, J.T. Schwartz, Linear Operators Part II, Spectral Theory, Wiley, N.J.,1988

[15] S. Carpi, From Vertex Operator Algebras to Conformal Nets and Back, $http://arxiv.org/pdf/1503.01260.pdf$

[16] K. Schrohe, Unbeschränkte Operatoren, $http://www.analysis.uni-hannover.de/\ schrohe/Lehre/FA/skript7.pdf$