BACHELORARBEIT

Perron'sche Methode

ausgeführt am Institut für
Analysis and Scientific Computing
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao. Univ. Prof. Dr. Michael Kaltenbäck

durch
Markus Tempelmayr

22. November 2017

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Arbeit gehen wir der Frage der Lösbarkeit des *Dirichlet Problems* nach: Gibt es zu einer gegebenen reellwertigen Funktion $f : \partial G \to \mathbb{R}$ auf dem nichtleeren Rand einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{R}^p$, $p \geq 2$, eine harmonische Funktion $h : G \to \mathbb{R}$, sodass

$$\lim_{y \to x, y \in G} h(y) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in \partial G\,? \tag{1}$$

Ist die Funktion f stetig (auf das wir uns im Wesentlichen beschränken werden, siehe Satz 2.2), so ist dieses Problem äquivalent zum Auffinden einer klassischen Lösung $h \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta h &= 0 \text{ in } G, \\ h|_{\partial G} &= f. \end{aligned} \tag{2}$$

Denn eine klassische Lösung von (2) ist offensichtlich harmonisch in G und erfüllt (1). Eine in G harmonische Funktion für die (1) gilt, kann mit f auf $\overline{G}$ fortgesetzt werden und ist dann nach Lemma 2.1 eine klassische Lösung des RWP (2).

Anders als bei der „üblichen“ Herangehensweise - einen Umweg über die Existenz einer schwachen Lösung mittels Lax Milgram zu gehen - approximieren wir eine Lösung „von unten“ und „von oben“. Dieses Verfahren nennt man *Perron'sche Methode.*

1 Grundlagen

In diesem einleitenden Kapitel stellen wir einige Resultate vor, die wir später benötigen.

1.1 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ eine offene Menge und $f : G \to \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar. Dann definiert man die *Divergenz* von f als die Abbildung $\mathrm{div} f : G \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{div} f(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x).$$

Ist $f : G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so definiert man den *Gradient* von f als die Abbildung $\nabla f : G \to \mathbb{R}^p$,

$$\nabla f(x) = df(x)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(x) \end{pmatrix}.$$

Ist $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so definiert man *Laplace* f als die Abbildung $\Delta f : G \to \mathbb{R}$,

$$\Delta f(x) = \mathrm{div}(\nabla f(x)) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x).$$

Ist eine Funktion von mehreren Variablen abhängig, so verdeutlichen wir mit $\mathrm{div}_x f$, $\nabla_x f$ oder $\Delta_x f$ bzgl. welcher Variable der jeweilige Operator gemeint ist.

1.2 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ eine offene Menge. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch* auf G, falls

$$\Delta f(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in G.$$

1.3 Beispiel. Sei $y \in \mathbb{R}^p$ und[1] $f : \mathbb{R}^p \backslash \{y\} \to \mathbb{R}^p$, $f(x) = \frac{x-y}{\|x-y\|^p}$. Dann gilt für alle $j \in \{1, \dots, p\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\big(\sum_{i=1}^{p}(x_i - y_i)^2\big)^{-\frac{p}{2}}(x_j - y_j)\Big) \\ &= -\frac{p}{2}\big(\sum_{i=1}^{p}(x_i - y_i)^2\big)^{-\frac{p}{2}-1} 2(x_j - y_j)(x_j - y_j) + \big(\sum_{i=1}^{p}(x_i - y_i)^2\big)^{-\frac{p}{2}} \\ &= \frac{1}{\|x-y\|^p} - p\frac{1}{\|x-y\|^{p+2}}(x_j - y_j)^2, \end{aligned}$$

und damit

$$\mathrm{div} f(x) = \sum_{j=1}^{p}\big(\frac{1}{\|x-y\|^p} - \frac{p}{\|x-y\|^{p+2}}(x_j - y_j)^2\big) = \frac{p}{\|x-y\|^p} - \frac{p}{\|x-y\|^{p+2}}\|x-y\|^2 = 0.$$

//

[1] Wenn nicht anders angegeben, steht $\|.\|$ immer für die Zweinorm $||.||_2$.

1.4 Beispiel. Betrachte für $y \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 2$, die Funktion $u_y : \mathbb{R}^p \backslash \{y\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u_y(x) = \begin{cases} -\ln \|x-y\|, & p=2 \\ \|x-y\|^{2-p}, & p>2. \end{cases}$$

Für $p=2$ gilt

$$\nabla u_y(x) = -\frac{1}{2}\nabla \ln((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{2(x_1-y_1)}{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \\ \frac{2(x_2-y_2)}{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\|x-y\|^2}(x-y),$$

und für $p>2$ gilt

$$\nabla u_y(x) = \nabla \left(\sum_{i=1}^p (x_i-y_i)^2\right)^{\frac{2-p}{2}} = \frac{2-p}{2}\left(\sum_{i=1}^p (x_i-y_i)^2\right)^{\frac{2-p}{2}-1} 2(x-y) = \frac{2-p}{\|x-y\|^p}(x-y).$$

Aus Beispiel 1.3 folgt

$$\Delta u_y(x) = \operatorname{div}(\nabla u_y(x)) = 0.$$

Also ist u_y harmonisch. Die Funktion u_y wird auch *fundamentale harmonische Funktion mit Pol in* y genannt. //

1.5 Beispiel. Für $y \in \mathbb{R}^p$ und $r > 0$ definieren wir eine Funktion $K_{r,y} : U_r(y) \times \partial U_r(y) \to \mathbb{R}$, $K_{r,y}(x,z) = \frac{r^2-\|x-y\|^2}{rS_p\|x-z\|^p}$, wobei S_p die Oberfläche der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^p$ ist. Der Einfachheit halber schreiben wir im Folgenden statt $K_{r,y}$ nur K. Diese Funktion ist nichtnegativ, zweimal stetig differenzierbar und harmonisch in x, d.h. es gilt $\Delta_x K(x,z) = 0$, siehe z.B. [HK, Theorem 1.16]. Aus der Poissonschen Integralformel, siehe Satz 1.6, folgt mit der konstanten Eins-Funktion

$$\int_{\partial U_r(y)} K(x,z)\, d\mu(z) = 1. \tag{3}$$

//

1.6 Satz (Poisson'sche Integralformel)**.** *Sei $y \in \mathbb{R}^p$, $r > 0$ und h eine auf $K_r(y)$ stetige und auf $U_r(y)$ harmonische Funktion. Dann gilt für $x \in U_r(y)$*

$$h(x) = \int_{\partial U_r(y)} K_{r,y}(x,z)h(z)\, d\mu(z).$$

Beweis. Siehe z.B. [H, Theorem 1.5.4] ❑

1.7 Satz (Greenscher Integralsatz)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, beschränkt und ∂G eine C^2-Mannigfaltigkeit. Mit $\nu(y)$ bezeichnen wir die normierte äußere Normale auf ∂G im Punkt $y \in \partial G$. Weiters seien $g,\ h : O \to \mathbb{R}$ beide zweimal stetig differenzierbar auf einer offenen, $\overline{G}$ enthaltenden Menge O.*

Dann gilt die Erste Greensche Identität

$$\int_G g(x)\Delta h(x)\, d\lambda_p(x) = \int_{\partial G} g(y)dh(y)\nu(y)\, d\mu(y) - \int_G \nabla g(x)\cdot\nabla h(x)\, d\lambda_p(x),$$

und die Zweite Greensche Identität

$$\int_G \big(g(x)\Delta h(x) - h(x)\Delta g(x)\big)\, d\lambda_p(x) = \int_{\partial G} \big(g(y)dh(y)\nu(y) - h(y)dg(y)\nu(y)\big)\, d\mu(y).$$

Beweis. Siehe z.B. [KM, Korollar 16.8.8]. ❑

1.8 Lemma. *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^p$ eine offene Menge, $V \subseteq \mathbb{R}^p$ eine kompakte Menge und μ ein Maß auf V. Weiters sei $f : O \times V \to \mathbb{R}$ eine Funktion sodass $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ stetig auf $O \times V$ für alle $j \in \{1, \dots, p\}$ ist. Dann gilt für $x \in O$ und $j \in \{1, \dots, p\}$*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_V f(x, y)\, d\mu(y) = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y)\, d\mu(y).$$

Beweis. Sei $x \in O$ und $j \in \{1, \dots, p\}$ fest. Weil O offen ist, existiert ein $r > 0$ sodass $K_r(x) \subseteq O$. Die stetige Funktion $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ist auf dem Kompaktum $K_r(x) \times V$ beschränkt und mit [KM, Lemma 15.2.8] folgt die Behauptung. ❑

2 Dirichlet Problem

Wie wir mit folgendem Lemma zeigen werden, besitzt das *Dirichlet Problem*, wie in der Einleitung beschrieben, für unstetige Randfunktionen keine Lösung.

2.1 Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $h : G \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiters sei $f : \partial G \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in \partial G$ der Grenzwert $\lim_{y \to x, y \in G} h(y)$ existiert und mit $f(x)$ übereinstimmt. Dann ist die Funktion*

$$\overline{h} : \begin{cases} \overline{G} & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & \begin{cases} h(x), & x \in G, \\ f(x), & x \in \partial G, \end{cases} \end{cases}$$

stetig.

Beweis. Weil G offen ist, existiert für $x \in G$ eine Kugel um x auf der $\overline{h}$ mit der stetigen Funktion h übereinstimmt; also ist $\overline{h}$ stetig bei x. Sei $x \in \partial G$ und $\epsilon > 0$.

Wegen $\lim_{y \to x} h(y) = f(x)$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $|h(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $y \in U_\delta(x) \cap G$. Sei $x' \in U_{\delta/2}(x) \cap \partial G$. Wegen $\lim_{y \to x'} h(y) = f(x')$ existiert ein $\delta' > 0$, sodass $|h(y) - f(x')| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $y \in U_{\delta'}(x') \cap G$. Wählt man zudem $\delta' < \delta/2$, so gilt $U_{\delta'}(x') \subseteq U_\delta(x)$. Für jedes $z \in U_{\delta'}(x') \cap G \subseteq U_\delta(x) \cap G$ gilt

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - h(z)| + |h(z) - f(x')| < \epsilon.$$

Es folgt

$$|\overline{h}(x) - \overline{h}(y)| = |f(x) - \overline{h}(y)| < \epsilon$$

für alle $y \in U_{\delta/2}(x) \cap \overline{G}$. Somit ist $\overline{h}$ stetig bei $x \in \partial G$. ❑

2.2 Korollar. *Besitzt das Dirichlet Problem für eine Randfunktion f auf einer Menge G eine Lösung, so ist f stetig.*

Beweis. Eine Lösung h erfüllt alle Voraussetzungen von Lemma 2.1, womit $\overline{h}$ stetig ist. Dann ist auch f als Einschränkung von $\overline{h}$ auf ∂G stetig. ❑

Ist G eine Kugel im $\mathbb{R}^p$, so werden wir im Folgenden zeigen, dass für stetige Randfunktionen das Dirichlet Problem tatsächlich eine Lösung bestitzt.[2]

2.3 Satz. *Sei $y \in \mathbb{R}^p$, $r > 0$ und μ das Oberflächenmaß auf $\partial U_r(y)$. Ist $f : \partial U_r(y) \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt:*

(i) Die Funktion $h : U_r(y) \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \int_{\partial U_r(y)} K(x,z) f(z)\, d\mu(z) \tag{4}$$

ist harmonisch, wobei $K(x,z) = \frac{r^2 - \|x-y\|^2}{rS_p\|x-z\|^n}$ wie in Beispiel 1.5 ist.

(ii) Für $x_0 \in \partial U_r(y)$ gilt

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = f(x_0). \tag{5}$$

Beweis.

(i) Für $y \in \mathbb{R}^p$ erfüllen $K(x,z)f(z)$ und $\frac{\partial K}{\partial x_j}(x,z)f(z)$, $j = 1 \dots p$, die Voraussetzungen aus Lemma 1.8, somit gilt

$$\Delta h(x) = \int_{\partial U_r(y)} \Delta_x K(x,z) f(z)\, d\mu(z).$$

Nach Beispiel 1.5 gilt $\Delta_x K(x,z) = 0$, womit (i) bewiesen ist.

(ii) Sei $x_0 \in \partial U_r(y)$ und $\epsilon > 0$. Weil f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass $|f(z) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ falls $\|z - x_0\| < \delta$. Mit (3) erhalten wir für $x \in U_r(y)$ mit $\|x - x_0\| < \frac{\delta}{2}$

$$\begin{aligned} |h(x) - f(x_0)| &= \left| \int_{\partial U_r(y)} K(x,z)(f(z) - f(x_0))\, d\mu(z) \right| \\ &\leq \int_{M_1} K(x,z)|f(z) - f(x_0)|\, d\mu(z) + \int_{M_2} K(x,z)|f(z) - f(x_0)|\, d\mu(z) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + 2 \sup_{z \in \partial U_r(y)} |f(z)| \int_{M_2} K(x,z)\, d\mu(z), \end{aligned}$$

wobei $M_1 = \{z \in \partial U_r(y) : \|z - x_0\| < \delta\}$ und $M_2 = \{z \in \partial U_r(y) : \|z - x_0\| \geq \delta\}$.
Aus $\|x - x_0\| < \frac{\delta}{2}$ und $\|z - x_0\| \geq \delta$ folgt $\|x - z\| \geq \|z - x_0\| - \|x_0 - x\| \geq \frac{\delta}{2}$. Somit gilt

$$\int_{M_2} K(x,z)\, d\mu(z) = \frac{r^2 - \|x-y\|^2}{rS_p} \int_{M_2} \frac{1}{\|x-z\|^p}\, d\mu(z) \leq \frac{r^2 - \|x-y\|^2}{rS_p} \frac{2^p}{\delta^p} S_p.$$

[2] Wie wir in Korollar 3.19 sehen werden, ist diese sogar eindeutig bestimmt.

Wegen $r^2 - \|x-y\|^2 \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$ folgt für $\|x-x_0\|$ hinreichend klein $|h(x) - f(x_0)| \le \epsilon$; also gilt (5).

❑

3 Eigenschaften (super-)harmonischer Funktionen

In diesem Kapitel werden einige Definitionen angeführt und Eigenschaften bewiesen, die sich im späteren Verlauf als essenziell erweisen werden.

3.1 Bemerkung. Die erweiterten reelen Zahlen $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ versehen wir mit folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} a + \infty &= +\infty, \quad a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \\ a - \infty &= -\infty, \quad a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \\ +\infty - \infty &= \text{nicht definiert}, \\ a \cdot (\pm\infty) &= \begin{cases} \pm\infty, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}$ die Borelmengen auf $\mathbb{R}$, so sind die erweiterten Borelmengen $\overline{\mathfrak{B}} := \big\{B \cup C : B \in \mathfrak{B}, C \subseteq \{-\infty, +\infty\}\big\}$ nach [KN, Lemma 7.17] eine σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$ und deren Spur auf $\mathbb{R}$ stimmt mit $\mathfrak{B}$ überein.

Eine Funktion f nennen wir *erweitert reellwertig*, falls sie in die erweiterten reellen Zahlen abbildet. //

Im Folgenden sei, wenn nicht explizit anders angegeben, (D, d) ein metrischer Raum.

3.2 Definition. Eine Funktion $f : D \to (-\infty, +\infty]$ heißt *nach unten halbstetig* bei $x \in D$, falls

$$\liminf_{y \to x,\ y \in D} f(y) := \lim_{\delta \searrow 0} \inf_{y \in U_\delta(x) \cap D \setminus \{x\}} f(y) \ge f(x).$$

Analog definiert man *nach oben halbstetig*, falls $f : D \to [-\infty, +\infty)$ und

$$\limsup_{y \to x,\ y \in D} f(y) := \lim_{\delta \searrow 0} \sup_{y \in U_\delta(x) \cap D \setminus \{x\}} f(y) \le f(x).$$

Die Funktion f heißt nach unten (oben) halbstetig auf D, falls sie bei jedem $x \in D$ nach unten (oben) halbstetig ist.

3.3 Bemerkung. Als monoton wachsendes bzw. fallendes Netz existieren $\liminf_{y\to x} f(y)$ bzw. $\limsup_{y \to x} f(y)$ als Element von $[-\infty, +\infty]$.

Aus Definition 3.2 folgt sofort, dass eine Funktion f genau dann nach unten halbstetig ist, wenn $-f$ nach oben halbstetig ist.

Allgemeiner kann man nach unten (oben) halbstetig auch für erweitert reellwertige Funktionen definieren. In einigen Aussagen benötigen wir allerdings die Voraussetzung, dass eine gegebene Funktion nicht den Wert $-\infty$ annehmen darf, weshalb wir dies von vornherein per Definition ausschließen. //

3.4 Lemma. *Eine Funktion $f : D \to (-\infty, +\infty]$ ist genau dann nach unten halbstetig, wenn $f^{-1}((c, +\infty])$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ offen in D ist. Eine analoge Aussage gilt für nach oben halbstetige Funktionen, wobei $(c, +\infty]$ durch $[-\infty, c)$ zu ersetzen ist.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage nur für nach unten halbstetige Funktionen, der Beweis für nach oben halbstetige Funktionen verläuft analog.

"⇒": Für $c \in \mathbb{R}$ und $x \in D$ mit $f(x) > c$ gilt nach Definition

$$c < f(x) \leq \lim_{\delta \searrow 0} \inf_{y \in U_\delta(x) \cap D \setminus \{x\}} f(y).$$

Also gibt es ein $\delta' > 0$ sodass $\inf_{y \in U_{\delta'}(x) \cap D \setminus \{x\}} f(y) > c$, was impliziert, dass für alle $y \in U_{\delta'}(x) \cap D$ gilt $f(y) > c$, also

$$U_{\delta'}(x) \cap D \subseteq \big\{z \in D \,:\, f(z) > c\big\}.$$

"⇐": Sei $x \in D$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $c < f(x)$. Dann ist $f^{-1}((c, +\infty])$ eine offene, x enthaltende Menge. Also gilt für $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subseteq f^{-1}((c, +\infty])$, dass $\inf_{y \in U_\delta(x) \cap D \setminus \{x\}} f(y) \geq c$. Da $c < f(x)$ beliebig war, gilt

$$\liminf_{y \to x, y \in D} f(y) = \lim_{\delta \searrow 0} \inf_{y \in U_\delta(x) \cap D \setminus \{x\}} f(y) \geq f(x).$$

❑

3.5 Lemma. *Seien $A, B \subseteq D$ mit $A \cup B = D$ zwei abgeschlossene Teilmengen von D. Sind $u : A \to (-\infty, +\infty]$ und $v : B \to (-\infty, +\infty]$ zwei nach unten halbstetige Funktionen die auf $A \cap B$ übereinstimmen, dann ist auch die Funktion $u \cup v : D \to (-\infty, +\infty]$, welche auf A mit u und auf B mit v übereinstimmt, nach unten halbstetig.*

Beweis. Sei $c \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass $(u \cup v)^{-1}((c, +\infty])$ offen, bzw. äquivalent dazu, dass $(u \cup v)^{-1}((-\infty, c])$ abgeschlossen in D ist. Weil u nach unten halbstetig ist, ist $u^{-1}((c, +\infty])$ offen bzw. äquivalent dazu, $u^{-1}((-\infty, c])$ abgeschlossen in A, d.h. es existiert eine in D abgeschlossene Menge C, sodass $u^{-1}((-\infty, c]) = C \cap A$. Als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen ist daher $u^{-1}((-\infty, c])$ abgeschlossen. Analog zeigt man, dass $v^{-1}((-\infty, c])$ abgeschlossen ist. Als Vereinigung zweier Abgeschlossener Mengen ist damit auch

$$(u \cup v)^{-1}((-\infty, c]) = u^{-1}((-\infty, c]) \cup v^{-1}((-\infty, c])$$

abgeschlossen. ❑

3.6 Lemma. *Seien $f_1, f_2 : D \to (-\infty, +\infty]$ nach unten (oben) halbstetige Funktionen und $c \geq 0$. Dann sind $f_1 + f_2$ und cf_1 wieder nach unten (oben) halbstetig.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage nur für nach unten halbstetige Funktionen, der Beweis für nach oben halbstetige Funktionen verläuft analog.

Sind f_1 und f_2 nach unten halbstetige Funktionen, so gilt für $x \in D$

$$\begin{aligned}\liminf_{y\to x, y\in D}(f_1+f_2)(y) &= \lim_{\delta\searrow 0}\inf_{y\in U_\delta(x)\cap D\setminus\{x\}}(f_1(y)+f_2(y))\\ &\geq \lim_{\delta\searrow 0}\Big(\inf_{y\in U_\delta(x)\cap D\setminus\{x\}} f_1(y) + \inf_{y\in U_\delta(x)\cap D\setminus\{x\}} f_2(y)\Big)\\ &= \liminf_{y\to x, y\in D} f_1(y) + \liminf_{y\to x, y\in D} f_2(y) \geq f_1(x)+f_2(x).\end{aligned}$$

Weiters gilt wegen $c \geq 0$

$$\begin{aligned}\liminf_{y\to x, y\in D} cf_1(y) &= \lim_{\delta\searrow 0}\inf_{y\in U_\delta(x)\cap D\setminus\{x\}} cf_1(y) = c\lim_{\delta\searrow 0}\inf_{y\in U_\delta(x)\cap D\setminus\{x\}} f_1(y)\\ &= c\liminf_{y\to x, y\in D} f_1(y) \geq cf_1(x).\end{aligned}$$

❑

3.7 Lemma. *Seien $f_i : D \to (-\infty, +\infty]$, $i \in I$ nach unten halbstetige Funktionen. Dann ist $\sup_{i\in I} f_i$ nach unten halbstetig.*

Sind $f_1, \dots, f_n : D \to (-\infty, +\infty]$ nach unten halbstetige Funktionen, so ist $\min_{i=1,\dots,n} f_i$ nach unten halbstetig. Eine analoge Aussage gilt für nach oben halbstetige Funktionen, wobei $\sup$ *durch* $\inf$, *und* $\min$ *durch* $\max$ *zu ersetzen ist.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage nur für nach unten halbstetige Funktionen, der Beweis für nach oben halbstetige Funktionen verläuft analog.

Für $f := \sup_{i\in I} f_i$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$f^{-1}((c,+\infty]) = \big\{x\in D : \sup_{i\in I} f_i(x) > c\big\} = \big\{x \in D : \exists i \in I \text{ mit } f_i(x) > c\big\} = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}((c,+\infty]).$$

Damit ist $f^{-1}((c,+\infty])$ als Vereinigung offener Mengen offen. Für $f := \min_{i=1,\dots,n} f_i$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}f^{-1}((c,+\infty]) &= \big\{x\in D : \min_{i=1,\dots,n} f_i(x) > c\big\} = \big\{x\in D : \forall i = 1,\dots,n \text{ gilt } f_i(x) > c\big\}\\ &= \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}((c,+\infty]).\end{aligned}$$

Damit ist $f^{-1}((c,+\infty])$ als Schnitt endlich vieler offener Mengen offen. ❑

3.8 Lemma. *Sei f nach unten halbstetig auf D und $K \subseteq D$ eine kompakte Menge. Dann ist $f|_K$ nach unten beschränkt und nimmt ein Minimum an.*

Beweis. Nach Lemma 3.4 ist $\big(f^{-1}((c,+\infty])\big)_{c\in\mathbb{R}}$ eine offene Überdeckung von K. Weil K kompakt ist, existieren $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, sodass

$$K \subseteq f^{-1}((c_1,+\infty]) \cup \dots \cup f^{-1}((c_n,+\infty]) = f^{-1}((\min_{i=1,\dots,n} c_i, +\infty]).$$

Daraus folgt $f(x) > \min_{i=1,\dots,n} c_i$ für alle $x \in K$, womit f auf K nach unten beschränkt ist. Wäre $s = \inf_{x\in K} f(x)$ kein Minimum, so gilt $f(x) > s$ für alle $x \in K$. Wegen

$$\bigcup_{c>s} f^{-1}((c,+\infty]) = f^{-1}((s,+\infty])$$

ist $\left(f^{-1}((c,+\infty])\right)_{c>s}$ wieder eine offene Überdeckung von K. Also existieren $c_{s_1},\dots,c_{s_m} > s$, sodass $f^{-1}((\min_{i=1,\dots,m} c_{s_i},+\infty]) \supseteq K$. Daraus schließt man $\inf_{x\in K} f(x) \geq \min_{i=1,\dots,m} c_{s_i} > s$, was ein Widerspruch zu $s = \inf_{x\in K} f(x)$ ist. ❑

3.9 Lemma. *Sei $u : D \to (-\infty,+\infty]$ eine nach unten halbstetige Funktion. Weiters sei $K \subseteq D$ derart, dass u auf K nach unten beschränkt ist*[3], *d.h. $M := \inf_{z\in K} u(z) > -\infty$. Dann existiert eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von auf D stetigen, reellwertigen Funktionen mit $M \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$ auf D, sodass $f_n(z) \leq u(z)$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = u(z)$ für alle $z \in K$.*

Beweis. Falls $u \equiv +\infty$ auf K, so sind mit $f_n(x) := n$ für $x \in D$ alle geforderten Eigenschaften erfüllt. Andernfalls definiere für $x \in D$

$$f_n(x) := \inf_{y\in K}(u(y) + n\, d(x,y)).$$

Weil ein $y \in K$ mit $u(y) < +\infty$ existiert, gilt $f_n(x) < +\infty$, und wegen $M > -\infty$ ist f_n auf D reellwertig. Außerdem gilt nach Konstruktion $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$ auf D. Für $x \in K$ gilt, weil x in der Menge über die das Infimum gebildet wird enthalten ist, $f_n(x) \leq u(x) + n\, d(x,x) = u(x)$.

Hält man $x_1, x_2 \in D$ fest, so gilt für alle $y \in K$ mit der Dreiecksungleichung

$$f_n(x_1) \leq u(y) + n\, d(x_1,y) \leq u(y) + n\, d(x_2,y) + n\, d(x_1,x_2).$$

Bildet man nun das Supremum über alle $y \in K$, so erhält man

$$f_n(x_1) \leq f_n(x_2) + n\, d(x_1,x_2).$$

Aufgrund der Symmetrie in x_1 und x_2 erhält man

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| \leq n\, d(x_1,x_2),$$

also ist jedes f_n sogar Lipschitz-stetig.

Wegen der Monotonie existiert der Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \in (-\infty,+\infty]$. Angenommen es gibt ein $a \in K$ mit $f(a) \neq u(a)$, was wegen $f_n \leq u$ auf K bedeutet, dass $f(a) < u(a)$. Für ein $m \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < m < u(a)$ folgt $f_n(a) \leq f(a) < m < u(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition von f_n existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in K$ mit $u(y_n) + n\, d(y_n,a) < m$, d.h.

$$u(y_n) < m - n\, d(y_n,a), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Wegen $u(a) > m$ muss $y_n \neq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und weil u auf K mit M nach unten beschränkt ist, muss $n\, d(y_n,a)$ beschränkt bleiben, also $y_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ gelten. Zudem erhählt man aus (6), dass $u(y_n) < m$ für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus

$$\inf_{y\in U_\delta(a)\setminus\{a\}} u(y) < m$$

für alle $\delta > 0$ folgt. Aus der Halbstetigkeit nach unten erhält man letztendlich

$$u(a) \leq \liminf_{y\to a} u(y) \leq m,$$

was ein Widerspruch zu $m < u(a)$ ist. ❑

3.10 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen. Eine Borel-messbare[4] Funktion $f : G \to (-\infty,+\infty]$ heißt *superharmonisch* auf G, falls folgende Bedingungen gelten:

[3] Insbesondere ist diese Eigenschaft nach Lemma 3.8 für kompaktes K erfüllt.

[4] d.h. $f^{-1}(\overline{\mathfrak{B}}) \subseteq \mathfrak{B}_p$

- $f \not\equiv +\infty$ auf jeder Zusammenhangskomponente von G,
- f ist nach unten halbstetig auf G,
- für alle $x \in G$ gibt es ein $R > 0$ mit $K_R(x) \subseteq G$, sodass für $0 < r < R$

$$f(x) \geq \frac{1}{S_p r^{p-1}} \int_{\partial U_r(x)} f(z)\, d\mu(z). \tag{7}$$

Die Funktion f heißt *subharmonisch* auf G, falls $-f$ superharmonisch auf G ist.

3.11 Bemerkung. Mit der Voraussetzung, dass f nach unten halbstetig auf G ist, ist f nach Lemma 3.8 auf jedem Kompaktum nach unten beschränkt und infolge das Integral in (7) als Element von $(-\infty, +\infty]$ wohldefiniert. //

3.12 Lemma. *Sind f_1, f_2 superharmonische (subharmonische) Funktionen und $c \geq 0$, so sind* $\min(f_1, f_2)$ $(\max(f_1, f_2))$*, $f_1 + f_2$ und cf_1 wieder superharmonisch (subharmonisch).*

Beweis. Wir zeigen die Aussage nur für superharmonische Funktionen, der Beweis für subharmonische Funktionen verläuft analog.

Sind $f_1, f_2 \not\equiv +\infty$ und $f_1, f_2 > -\infty$, so sind auch deren Minimum, Summe und Produkt mit der Konstanten c nicht identisch $+\infty$ und größer $-\infty$. Nach Lemma 3.6 und 3.7 sind deren Minimum, Summe und das Produkt mit der Konstanten c auch nach unten halbstetig. Für o.B.d.A. $f_1(x) \leq f_2(x)$ erhalten wir mit $R > 0$, sodass (7) für alle $0 < r < R$ gilt,

$$\min(f_1, f_2)(x) = f_1(x) \geq \frac{1}{S_p r^{p-1}} \int_{\partial U_r(x)} f_1(z)\, d\mu(z) \geq \frac{1}{S_p r^{p-1}} \int_{\partial U_r(x)} \min(f_1, f_2)(z)\, d\mu(z),$$

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &\geq \frac{1}{S_p r^{p-1}} \int_{\partial U_r(x)} f_1(z)\, d\mu(z) + \frac{1}{S_p r^{p-1}} \int_{\partial U_r(x)} f_2(z)\, d\mu(z) \\ &= \frac{1}{S_p r^{p-1}} \int_{\partial U_r(x)} \left(f_1(z) + f_2(z)\right)\, d\mu(z), \end{aligned}$$

und

$$cf_1(x) \geq c\frac{1}{S_p r^{p-1}} \int_{\partial U_r(x)} f_1(z)\, d\mu(z) = \frac{1}{S_p r^{p-1}} \int_{\partial U_r(x)} cf_1(z)(z)\, d\mu(z).$$

❑

Die folgenden Resultate werden eine zentrale Rolle spielen.

3.13 Lemma (Minimumprinzip). *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und zusammenhängend und f superharmonisch auf G. Dann nimmt f sein Infimum nicht in G an, außer f ist konstant.*

Beweis. Wir nehmen an, es gibt ein $x_0 \in G$ mit $f(x_0) = \inf_{x \in G} f(x)$ und folgern, dass f konstant ist. Weil f superharmonisch ist, gilt $f > -\infty$ auf G, und weil G zusammenhängend ist, auch $f \not\equiv +\infty$ auf G. Es gibt also zumindest einen Punkt an dem f endlich ist, daher $-\infty < f(x_0) = \inf_G f < +\infty$. Nun definieren wir $K := \big\{x \in G : f(x) = f(x_0)\big\}$. Die Menge K ist nicht leer, denn $x_0 \in K$, und wegen Lemma 3.4 ist K abgeschlossen. Im Folgenden zeigen wir, dass K auch offen ist. Dazu sei $y \in K$ und $R_y > 0$, sodass $K_{R_y}(y) \subseteq G$ und sodass (7) für alle $0 < r < R_y$ gilt. Angenommen, es existiert ein $x \in U_r(y) \setminus K$. Weil f superharmonisch ist, und wegen $y \in K$ gilt mit $\rho := \|x - y\| < R_y$

$$f(y) \geq \frac{1}{\sigma_p \rho^{p-1}} \int_{\partial U_\rho(y)} f(z)\, d\mu(z) \geq \frac{1}{\sigma_p \rho^{p-1}} \int_{\partial U_\rho(y)} \inf_{x \in G} f(x)\, d\mu(z) = \inf_{x \in G} f(x) = f(y). \tag{8}$$

Aus Gleichung (8) folgt

$$\int_{\partial U_\rho(y)} (f(z) - f(y))\, d\mu(z) = 0,$$

woraus wegen $f(z) - f(y) = f(z) - \inf_G f \geq 0$ für $z \in \partial U_\rho(y)$ folgt, dass $f = f(y)$ μ-fast überall auf $\partial U_\rho(y)$. Wegen $x \notin K$ gilt $f(x) > f(y)$. Daher gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ sodass $f(x) > c > f(y)$, und weil f nach unten halbstetig ist, existiert wegen Lemma 3.4 eine Umgebung U_x von $x \in \partial U_\rho(y)$ mit $f(z) > c > f(y)$ für $z \in U_x \cap \partial U_\rho(y)$. Daraus folgt, dass $f - f(y) > 0$ auf einer Menge mit positivem Maß $\mu(U_x \cap \partial U_\rho(y)) > 0$, was einen Widerspruch liefert. Also gilt $U_\rho(y) \subseteq K$, und K ist offen. Weil G zusammenhängend und K nicht leer ist, muss $K = G$ gelten. ❑

3.14 Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und beschränkt, $f : G \to (-\infty, +\infty]$ eine superharmonische Funktion und es gelte* $\liminf_{z \to x, z \in G} f(z) \geq 0$ *für alle $x \in \partial G$. Dann ist $f \geq 0$ auf G.*

Beweis. Sei U eine offene Kugel im $\mathbb{R}^p$, die $\overline{G}$ enthält. Nun setzt man f auf $\overline{U} \setminus G$ mit 0 fort und bezeichnet diese Fortsetzung wieder mit f. Diese Funktion ist nach unten halbstetig auf $\overline{U}$ und nimmt nach Lemma 3.8 ihr Minimum k bei $x_0 \in \overline{U}$ an. Wäre $k < 0$, so liegt x_0 in G. Wählt man ein $\delta > 0$, sodass $K_\delta(x_0) \subseteq G$, so ist f auf $U_\delta(x_0)$ superharmonisch und nach dem Minimumprinzip, Lemma 3.13, folgt, dass f auf $U_\delta(x_0)$ konstant k sein muss. Daraus schließt man, dass die Menge

$$A := \left\{x \in \overline{U} \,:\, f(x) = k\right\}$$

offen, und weil x_0 darin enthalten, auch nicht leer ist. Weil f nach unten halbstetig ist, ist aber auch die Menge

$$B := \left\{x \in \overline{U} \,:\, f(x) > k\right\}$$

offen und nicht leer. Nun gilt $\overline{U} = A \cup B$, was aber im Widerspruch dazu steht, dass $\overline{U}$ zusammenhängend ist. Es muss also $k \geq 0$ gelten, woraus $f \geq 0$ auf G folgt. ❑

3.15 Lemma (Mittelwerteigenschaft)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $f : G \to \mathbb{R}$ harmonisch auf G. Dann gilt für alle $x \in G$, $r > 0$ mit $K_r(x) \subseteq G$*

$$f(x) = \frac{1}{S_p r^{p-1}} \int_{\partial U_r(x)} f(z)\, d\mu(z). \tag{9}$$

Beweis. Sei $x \in G$ und $R \geq r > 0$, sodass $K_R(x) \subseteq G$. Dann folgt aus dem Greenschen Integralsatz, Satz 1.7,

$$0 = \int_{U_r(x)} \Delta f(y)\, d\lambda_p(y) = \int_{\partial U_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \nu}(z)\, d\mu(z) = r^{p-1} \int_{\partial U_1(0)} \frac{\partial f}{\partial r}(x + rz)\, d\mu(z).$$

Dividiert man diese Gleichung durch r^{p-1} und integriert nach r von 0 bis R, so erhält man zusammen mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}0 &= \int_{(0,R)} \int_{\partial U_1(0)} \frac{\partial f}{\partial r}(x+rz)\, d\mu(z)\, d\lambda(r) = \int_{\partial U_1(0)} \int_{(0,R)} \frac{\partial f}{\partial r}(x+rz)\, d\lambda(r)\, d\mu(z) \\ &= \int_{\partial U_1(0)} (f(x+Rz) - f(x))\, d\mu(z) = \frac{1}{R^{p-1}} \int_{\partial U_R(x)} f(z)\, d\mu(z) - S_p f(x),\end{aligned}$$

was zu zeigen war. ❑

Wie wir im folgenden Lemma sehen werden, ist die Mittelwerteigenschaft eine Charakterisierung der Harmonizität. Es gilt sogar noch ein bisschen mehr:

3.16 Satz. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ eine offene Menge. Dann ist $f : G \to \mathbb{R}$ genau dann harmonisch auf G, wenn $f \in C(G)$ und* (9) *für alle $x \in G$ und $r > 0$ mit $K_r(x) \subseteq G$ gilt.*

Beweis. Dass (9) für $x \in G$ und $r > 0$ mit $K_r(x) \subseteq G$ gilt, wenn f harmonisch ist, folgt aus Lemma 3.15. Sei also f stetig, $x \in G$ und $r > 0$ mit $K_r(x) \subseteq G$. Ziel ist es, zu zeigen, dass f harmonisch auf G ist. Da Harmonizität eine lokale Eigenschaft und $x \in G$ beliebig ist, genügt es schon, zu zeigen, dass f harmonisch auf $U_r(x)$ ist.

Weil f insbesondere stetig auf $\partial U_r(x)$ ist, gibt es nach Satz 2.3 eine auf $U_r(x)$ harmonische Funktion h, die auf $\partial U_r(x)$ mit f übereinstimmt. Also gilt $f - h = 0$ auf $\partial U_r(x)$. Die Funktion f erfüllt nach Voraussetzung alle Bedingungen von Definition 3.10, ist also superharmonisch. Außerdem ist die Funktion $-h$ als harmonische Funktion nach Lemma 3.15 superharmonisch. Nach Lemma 3.12 ist auch $f - h$ superharmonisch. Damit erfüllt die Funktion $(f-h)|_{U_r(x)}$ alle Voraussetzungen von Lemma 3.14 und ist daher nichtnegativ auf $U_r(x)$. Selbige Argumentation lässt sich auch auf $-f$ und h anwenden, woraus man schließt, dass auch $(h-f)|_{U_r(x)}$ nichtnegativ ist. Es folgt, dass f auf $U_r(x)$ mit h übereinstimmt, und damit harmonisch ist. ❑

Man beachte, dass im obigen Satz f nur als stetig vorausgesetzt werden muss, um Harmonizität zu folgern. Die zweimal stetige Differenzierbarkeit von f, wie sie in der Definition von harmonisch gefordert wird, folgt also schon aus der Mittelwerteigenschaft.

Die Definition von superharmonisch, wie wir sie gegeben haben, hat den Vorteil, dass keine Differenzierbarkeit gefordert wird. Für zweimal stetig differenzierbare Funktionen gilt allerdings folgende einfache Charakterisierung von Superharmonizität:

3.17 Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist f genau dann superharmonisch auf G, wenn $\Delta f \leq 0$ auf G.*

Beweis. "$\Leftarrow$": Sei $y \in G$ und $r > 0$, sodass $K_r(y) \subseteq G$. Zunächst setzen wir $\Delta f < 0$ auf $K_r(y)$ voraus. Definieren wir eine Funktion $h : K_r(y) \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \partial U_r(y), \\ \int_{\partial U_r(y)} K_{r,y}(x,z) f(z)\, d\mu(z), & x \in U_r(y), \end{cases}$$

dann wissen wir aus Satz 2.3, dass diese Funktion stetig auf $K_r(y)$ und harmonisch auf $U_r(y)$ ist. Die Funktion $w := f - h$ erfüllt somit für alle $x \in U_r(y)$

$$\Delta w(x) = \Delta f(x) - \Delta h(x) < 0. \tag{10}$$

Als stetige Funktion muss w auf dem Kompaktum $K_r(y)$ ein Minimum annehmen. Angenommen w nimmt dieses Minimum bei $\tilde{x} \in U_r(y)$ an, so folgt

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}(\tilde{x}) \geq 0, \quad i = 1, ..., p,$$

und somit $\Delta w(\tilde{x}) \geq 0$, was im Widerspruch zu (10) steht. Also nimmt w das Minimum auf $\partial U_r(y)$ an, dort gilt aber $w = 0$. Es gilt also $f \geq h$ auf $K_r(y)$. Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} f(y) \geq h(y) &= \int_{\partial U_r(y)} K_{r,y}(y,z) f(z)\, d\mu(z) = \int_{\partial U_r(y)} \frac{r^2 - \|y-y\|^2}{rS_p \underbrace{\|y-z\|^p}_{=r^p}} f(z)\, d\mu(z) \\ &= \frac{1}{S_p r^{p-1}} \int_{\partial U_r(y)} f(z)\, d\mu(z). \end{aligned}$$

Nun sei allgemeiner $\Delta f \leq 0$. Für die Funktion $q(x) := \|x\|^2 = \sum_{j=1}^p x_j^2$ gilt $\frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2}(x) = 2$, also $\Delta q(x) = 2p$. Für jedes $\epsilon > 0$ gilt $\Delta f - \epsilon \Delta q < 0$ und nach dem ersten Beweisteil folgt

$$f - \epsilon q \geq \frac{1}{S_p \delta^{p-1}} \int_{\partial U_r(y)} (f(z) - \epsilon q(z))\, d\mu(z).$$

Durch den Grenzübergang $\epsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

"$\Rightarrow$": Sei f superharmonisch und zweimal stetig differenzierbar. Dann ist Δf stetig und $G^+ := \{x \in G : \Delta f(x) > 0\} \subseteq G$ offen. Ist G^+ die leere Menge sind wir fertig, ansonsten gilt $\Delta(-f) < 0$ auf G^+. Aus dem ersten Beweisteil folgt dass $-f$ superharmonisch auf G^+ ist, bzw. f subharmonisch auf G^+. Nach Satz 3.16 ist f sogar harmonisch auf G^+, was $\Delta f = 0$ auf G^+ impliziert, aber unserer Definition von G^+ widerspricht. ❑

Wir können nun zeigen, dass immer wenn ein $R > 0$ existiert, sodass (7) für $0 < r < R$ gilt, (7) sogar für alle $r > 0$ mit $U_r(x) \subseteq G$ gilt.

3.18 Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen. Eine Borel-messbare Funktion $f : G \to (-\infty, +\infty]$ ist genau dann superharmonisch auf G, falls*

- *$f \not\equiv +\infty$ auf jeder Zusammenhangskomponente von G,*
- *f ist nach unten halbstetig auf G,*
- *für alle $x \in G$, $r > 0$ mit $K_r(x) \subseteq G$ gilt (7).*

Beweis. Sei f superharmonisch, $x \in G$ und $r > 0$ mit $K_r(x) \subseteq G$. Wir zeigen, dass (7) gilt. Sei ϕ eine stetige Funktion auf $\partial U_r(x)$ mit $\phi \leq f$ auf $\partial U_r(x)$. Weil f nach unten halbstetig ist, und wegen Satz 2.3 gilt für $y_0 \in \partial U_r(x)$

$$\liminf_{y \to y_0} \Bigg(f(y) - \underbrace{\int_{\partial U_r(x)} K_{r,x}(y,z) \phi(z)\, d\mu(z)}_{=:h(y)} \Bigg) \geq f(y_0) - \phi(y_0) \geq 0. \tag{11}$$

Weil $-h$ als harmonische Funktion nach Satz 3.16 insbesondere superharmonisch ist, ist $f - h$ nach Lemma 3.12 superharmonisch. Zusammen mit (11) folgt aus Lemma 3.14 $f - h \geq 0$. Sei nun $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen auf $\partial U_r(x)$ die punktweise monoton wachsend gegen f konvergiert, vgl. Lemma 3.9. Zusammen mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt für $y \in U_r(x)$

$$f(y) - \int_{\partial U_r(x)} K_{r,x}(y,z) f(z)\, d\mu(z) \geq 0.$$

Insbesondere gilt

$$f(x) \geq \int_{\partial U_r(x)} K_{r,x}(x,z) f(z)\, d\mu(z) = \frac{1}{S_p r^{p-1}} \int_{\partial U_r(x)} f(z)\, d\mu(z),$$

was zu zeigen war. ❑

Für das Dirichlet Problem auf einer offenen, beschränkten Menge mit einer reellwertigen Randfunktion können wir nun im Fall der Existenz einer Lösung auch deren Eindeutigkeit nachweisen.

3.19 Korollar. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und beschränkt und $f : \partial G \to \mathbb{R}$ eine Randfunktion. Existieren zwei Funktionen $h_1, h_2 : G \to \mathbb{R}$ die auf G harmonisch sind und die $\lim_{x\to x_0} h_{1,2}(x) = f(x_0)$ für alle $x_0 \in \partial G$ erfüllen, so gilt $h_1 = h_2$ auf ganz G.*

Beweis. Aus Lemma 3.17 folgt, dass harmonische Funktionen insbesondere superharmonisch sind. Also sind $w_1 := h_1 - h_2$ und $w_2 := h_2 - h_1$ superharmonisch auf G. Außerdem gilt $\lim_{x\to x_0} w_{1,2}(x) = 0$ für alle $x_0 \in \partial G$. Aus Lemma 3.14 folgt $w_{1,2} \geq 0$, was bedeutet dass h_1 auf G mit h_2 übereinstimmt. ❑

3.20 Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz harmonischer Funktionen auf G, das lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist f harmonisch auf G.*

Beweis. Als lokal gleichmäßiger Grenzwert von stetigen Funktionen ist f stetig. Außerdem gilt für jedes $x \in G$ und $r > 0$ mit $K_r(x)$ weil alle f_i harmonisch sind

$$f(x) = \lim_{i\in I} f_i(x) = \lim_{i\in I} \frac{1}{S_p r^{p-1}} \int_{\partial U_r(x)} f_i(z)\, d\mu(z) = \frac{1}{S_p r^{p-1}} \int_{\partial U_r(x)} f(z)\, d\mu(z),$$

wobei die Vertauschung von Grenzwert und Integral wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf dem Kompaktum $\partial U_r(x)$ gerechtfertigt ist. Aus Satz 3.16 folgt, dass f harmonisch ist. ❑

3.21 Lemma (Ungleichung von Harnack)**.** *Sei $h : U_1(0) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ harmonisch und nichtnegativ. Dann gilt für $x \in U_1(0)$*

$$\frac{1 - \|x\|}{(1 + \|x\|)^{p-1}} h(0) \leq h(x) \leq \frac{1 + \|x\|}{(1 - \|x\|)^{p-1}} h(0). \tag{12}$$

Beweis. Wegen der Dreiecksungleichung nach unten bzw. nach oben gilt für $x \in U_1(0)$ und $z \in \partial U_1(0)$

$$1 - \|x\| \leq \|x - z\| \leq 1 + \|x\|.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\frac{1-\|x\|}{(1+\|x\|)^{p-1}} &= \frac{(1-\|x\|)(1+\|x\|)}{(1+\|x\|)^p} = \frac{1-\|x\|^2}{(1+\|x\|)^p} \leq \frac{1-\|x\|^2}{\|x-z\|^p} \leq \frac{1-\|x\|^2}{(1-\|x\|)^p} \\ &= \frac{(1-\|x\|)(1+\|x\|)}{(1-\|x\|)^p} = \frac{1+\|x\|}{(1-\|x\|)^{p-1}}.\end{aligned}$$

Sei $0 < r < 1$ und $x \in U_1(0)$. Dann folgt aus Satz 2.3 und Lemma 3.19 für die harmonische Funktion $x \mapsto h(rx)$

$$\begin{aligned}\frac{1-\|x\|}{(1+\|x\|)^{p-1}}h(0) &= \frac{1-\|x\|}{(1+\|x\|)^{p-1}}\frac{1}{S_p}\int_{\partial U_1(0)} h(rz)\,d\mu(z) \leq \underbrace{\int_{\partial U_1(0)} \frac{1-\|x\|^2}{S_p\,\|x-z\|^p}h(rz)\,d\mu(z)}_{=h(rx)} \\ &\leq \frac{1+\|x\|}{(1-\|x\|)^{p-1}}\frac{1}{S_p}\int_{\partial U_1(0)} h(rz)\,d\mu(z) = \frac{1+\|x\|}{(1-\|x\|)^{p-1}}h(0),\end{aligned}$$

wobei die erste und letzte Gleichheit aus Lemma 3.16 folgt. Mit dem Grenzübergang $r \nearrow 1$ folgt (12). ❑

3.22 Korollar. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ ein Gebiet und $K \subseteq G$ kompakt. Dann gibt es eine nur von G und K abhängige Konstante $C \geq 1$, sodass*

$$\frac{1}{C} \leq \frac{h(y)}{h(x)} \leq C \tag{13}$$

für alle $x, y \in K$ und alle harmonischen und positiven Funktionen $h : G \to \mathbb{R}$.
Für alle $x, y \in K$ und alle harmonischen und nichtnegativen Funktionen $h : G \to \mathbb{R}$ gilt

$$h(y) \leq Ch(x). \tag{14}$$

Beweis. Für (13) genügt es $\frac{h(y)}{h(x)} \leq C$ zu zeigen, denn x und y können vertauscht werden. Zu $(x, y) \in G \times G$ definiert man

$$s(x,y) := \sup\Big\{\frac{h(y)}{h(x)} \,:\, h \text{ positiv und harmonisch auf } G\Big\}.$$

Sei $x \in G$ fest und sei $E := \big\{y \in G \,:\, s(x,y) < +\infty\big\}$. Die Menge E ist nicht leer, denn $s(x,x) = 1$ und somit $x \in E$. Wir zeigen, dass E sowohl offen als auch abgeschlossen in G ist. Weil G als zusammenhängend vorausgesetzt ist, muss $E = G$ gelten.

Zu einem $y \in E$ wähle $r > 0$, sodass $U_{2r}(y) \subseteq G$. Aus Lemma 3.21 folgt für $\xi \mapsto h(y + 2r\xi)$ mit einem positiven und harmonischen h

$$h(y+2r\xi) \leq \frac{1+\|\xi\|}{(1-\|\xi\|)^{p-1}}h(y) \leq \frac{1+\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^{p-1}}h(y) \quad \text{für alle } \|\xi\| < \frac{1}{2}.$$

Also gilt für alle $\eta \in U_r(y)$

$$h(\eta) \leq \frac{1+\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^{p-1}}h(y),$$

woraus für $\eta \in U_r(y)$

$$\frac{h(\eta)}{h(x)} \leq \frac{1+\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^{p-1}} \frac{h(y)}{h(x)} \leq \frac{1+\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^{p-1}} s(x,y) < \infty$$

folgt. Also gilt $s(x,\eta) < \infty$ für $\eta \in U_r(y)$, woraus $U_r(y) \subseteq E$ folgt, und E somit offen ist.

Sei nun $y \in \overline{E} \cap G$ und $r > 0$, sodass $U_{2r}(y) \subseteq G$. Wieder folgt aus Lemma 3.21 für $\xi \mapsto h(y+2r\xi)$ mit einem positiven und harmonischen h

$$h(y+2r\xi) \geq \frac{1-\|\xi\|}{(1+\|\xi\|)^{p-1}} h(y) \geq \frac{1-\frac{1}{2}}{(1+\frac{1}{2})^{p-1}} h(y) \quad \text{für alle } \|\xi\| < \frac{1}{2}.$$

Also gilt für $\eta \in U_r(y)$

$$h(\eta) \geq \frac{1-\frac{1}{2}}{(1+\frac{1}{2})^{p-1}} h(y).$$

Für $\widetilde{\eta} \in U_r(y) \cap E$, gilt

$$\infty > s(x,\widetilde{\eta}) \geq \frac{h(\widetilde{\eta})}{h(x)} \geq \frac{1-\frac{1}{2}}{(1+\frac{1}{2})^{p-1}} \frac{h(y)}{h(x)}.$$

Also gilt $s(x,y) < \infty$ und daher $y \in E$, womit gezeigt ist, dass E abgeschlossen in G ist.

Es gilt also $E = G$, d.h. $s(x,y) < \infty$ für alle $(x,y) \in G \times G$. Bleibt noch zu zeigen, dass sogar eine Konstante C existiert, mit der man $s|_{K\times K}$ beschränken kann. Dazu sei $(a,b) \in K \times K$ und $r > 0$, sodass sowohl $U_{2r}(a)$ also auch $U_{2r}(b)$ in G enthalten sind. Dann folgt aus Lemma 3.21

$$\frac{h(a+2r\xi)}{h(b+2r\eta)} \leq \frac{\frac{1+\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^{p-1}} h(a)}{\frac{1-\frac{1}{2}}{(1+\frac{1}{2})^{p-1}} h(b)} = \frac{(1+\frac{1}{2})^p h(a)}{(1-\frac{1}{2})^p h(b)} \leq \frac{(1+\frac{1}{2})^p}{(1-\frac{1}{2})^p} s(b,a) =: C_{b,a} \quad \text{für alle } \|\xi\|, \|\eta\| < \frac{1}{2}.$$

Nun lässt sich $K \times K$ mit endlich vielen Mengen der Bauart $U_{2r}(a_i) \times U_{2r}(b_j)$ überdecken. Zu $(x,y) \in K \times K$ gibt es also a_i, b_j, ξ, η mit $\|\xi\|, \|\eta\| < \frac{1}{2}$, sodass

$$\frac{h(y)}{h(x)} = \frac{h(a_i+2r\xi)}{h(b_j+2r\eta)} \leq C_{b_j,a_i}.$$

Definiert man $C := \max_{i,j} C_{b_j,a_i}$, so ist (13) erfüllt.

Für harmonisches und nichtnegatives h ist $h+\epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$ harmonisch und positiv. Nach dem ersten Beweisteil existiert ein $C \geq 1$, sodass $\frac{h(y)+\epsilon}{h(x)+\epsilon} \leq C$ für alle $x, y \in K$, was äquivalent zu $h(y)+\epsilon \leq C(h(x)+\epsilon)$ ist. Mit $\epsilon \searrow 0$ erhält man (14). ❑

3.23 Satz (Prinzip von Harnack)**.** *Sei $(h_i)_{i\in I}$ ein Netz harmonischer Funktionen auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^p$, sodass $h_i \leq h_j$ für $i \preceq j$. Dann konvergiert $(h_i)_{i\in I}$ lokal gleichmäßig entweder gegen $+\infty$ oder gegen eine harmonische Funktion h.*

Beweis. Ersetzt man das Netz $(h_i)_{i\in I}$ durch $(h_i - h_{i_0})_{i\in I_{\succeq i_0}}$ für ein $i_0 \in I$, so erhählt man ein monoton wachsendes Netz nichtnegativer und harmonischer Funktionen. Sei also o.B.d.A. bereits das Netz $(h_i)_{i\in I}$ monoton wachsend und alle Funktionen h_i nichtnegativ und harmonisch.

Für $x \in G$ definieren wir $h(x) := \lim_{i \in I} h_i(x)$ als Element von $[0, +\infty]$. Gibt es ein $x \in G$ mit $h(x) = +\infty$, so existiert zu jedem $M > 0$ ein $i_0 \in I$ sodass $h_i(x) \geq M$ für alle $i \succeq i_0$. Sei K eine kompakte Menge mit $x \in K \subseteq G$. Für beliebiges $y \in K$ gilt nach (14)

$$h_i(x) \leq C h_i(y)$$

für alle $i \in I$ und einem $C \geq 1$. Also gilt $Ch_i(y) \geq M$ für alle $i \succeq i_0$ und alle $y \in K$. Also $(h_i)_{i \in I}$ konvergiert auf K lokal gleichmäßig gegen $+\infty$.

Sei andererseits $h(x)$ endlich für alle $x \in G$ und $K \subseteq G$ eine kompakte Menge mit x in K fest. Zu einem $\epsilon > 0$ existiert ein $i_0 \in I$, sodass $|h(x) - h_i(x)| < \epsilon$ für alle $i \succeq i_0$. Ist $j \succeq i$ so gilt nach (14) für alle $y \in K$

$$|h_j(y) - h_i(y)| = h_j(y) - h_i(y) \leq C(h_j(x) - h_i(x)). \tag{15}$$

Bildet man nun in (15) links und rechts den Grenzwert $j \in I_{\succeq i}$, so erhält man für $i \succeq i_0$

$$|h(y) - h_i(y)| \leq C(h(x) - h_i(x)) < C\epsilon.$$

Da y in K beliebig war, konvergiert $(h_i)_{i \in I}$ auf K gleichmäßig gegen h. Also konvergiert $(h_i)_{i \in I}$ lokal gleichmäßig gegen h, welches nach Lemma 3.20 harmonisch ist. ❑

4 Dirichlet Problem auf beschränkten Mengen

In diesem Abschnitt betrachten wir eine nicht leere, offene, beschränkte Menge $G \subseteq \mathbb{R}^p, p \geq 2$ und eine Funktion $f : \partial G \to \mathbb{R}$. Wieder wollen wir eine Funktion h finden, die auf G harmonisch ist und die bei Annäherung an den Rand ∂G mit f übereinstimmt. Wie wir bereits gesehen haben, ist dieses Problem im Allgemeinen nich lösbar, aber auch für stetige Randfunktionen wird die Beziehung $\lim_{y \to x} h(y) = f(x)$ nicht in allen Punkten $x \in \partial G$ gelten, was uns zu den Begriffen *Barriere* und *regulärer Randpunkt* führt. Wie bereits erwähnt, wird die Methode, mit der wir die Existenz einer Lösung zeigen wollen, *Perron'sche Methode* genannt.

4.1 Bemerkung. Im $\mathbb{R}^p$ gilt $\overline{G} = G^\circ$ nur für die leere Menge und ganz $\mathbb{R}^p$, weshalb $\partial G := \overline{G} \setminus G^\circ$ nach obigen Voraussetzungen nicht leer ist. //

4.2 Definition. Eine Funktion $f : G \to (-\infty, +\infty]$ heißt *hyperharmonisch (hypoharmonisch)* auf G, wenn für jede Zusammenhangskomponente Γ von G die Funktion $f|_\Gamma$ superharmonisch (subharmonisch) ist, oder $f|_\Gamma \equiv +\infty$ $(-\infty)$.

4.3 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ eine offene Menge mit nicht leerem Rand ∂G. Zu einer gegebenen Funktion $f : \partial G \to \mathbb{R}$ definieren wir die *Oberklasse* $\mathcal{O}_f$ von f als

$$\mathcal{O}_f := \big\{ u : G \to (-\infty, +\infty] \,:\, u \text{ hyperharmonisch und nach unten beschränkt auf } G, \\ \liminf_{y \to x,\ y \in G} u(y) \geq f(x) \text{ für alle } x \in \partial G \big\}.$$

Analog definieren wir die *Unterklasse* $\mathcal{U}_f$ von f als

$$\mathcal{U}_f := \big\{ u : G \to [-\infty, +\infty) \,:\, u \text{ hypoharmonisch und nach oben beschränkt auf } G, \\ \limsup_{y \to x,\ y \in G} u(y) \leq f(x) \text{ für alle } x \in \partial G \big\}.$$

Weiters definieren wir die *Perronsche Oberlösung* $\overline{H}_f$ von f als

$$\overline{H}_f := \inf \{u \,:\, u \in \mathcal{O}_f\},$$

und die *Perronsche Unterlösung* $\underline{H}_f$ von f als

$$\underline{H}_f := \sup \{u \,:\, u \in \mathcal{U}_f\}.$$

Um zu verdeutlichen, von welcher Menge die Rede ist, schreiben wir $\mathcal{O}_f^G$, $\mathcal{U}_f^G$, $\overline{H}_f^G$, $\underline{H}_f^G$.

4.4 Bemerkung. Ist $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen mit $\partial G \neq \emptyset$ und Γ eine Zusammenhangskomponente von G, dann gilt $\partial\Gamma \subseteq \partial G$. Denn ist $x \notin \partial G$, dann gilt entweder $x \notin \overline{G}$, womit auch $x \notin \overline{\Gamma}$ folgt, oder $x \in G^\circ = G$. Dann muss x in einer Zusammenhangskomponente $\Delta \subseteq G$ enthalten sein, und es gilt $x \notin \overline{\Delta} \setminus \Delta = \overline{\Delta} \setminus \Delta^\circ = \partial\Delta$. //

Wegen dem nächsten Lemma können wir im Folgenden o.B.d.A. G als zusammenhängend voraussetzen.

4.5 Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen mit $\partial G \neq \emptyset$ und $f : \partial G \to \mathbb{R}$. Weiters sei Γ eine Zusammenhangskomponente von G. Dann gilt*

$$\mathcal{O}^\Gamma_{(f|\partial\Gamma)} = (\mathcal{O}^G_f)\big|_\Gamma \quad \textit{und} \quad \mathcal{U}^\Gamma_{(f|\partial\Gamma)} = (\mathcal{U}^G_f)\big|_\Gamma,$$
$$\overline{H}^\Gamma_{(f|\partial\Gamma)} = (\overline{H}^G_f)\big|_\Gamma \quad \textit{und} \quad \underline{H}^\Gamma_{(f|\partial\Gamma)} = (\underline{H}^G_f)\big|_\Gamma.$$

Beweis. Wir zeigen die Gleichheit nur für die Oberlösungen, der Beweis für die Unterlösungen verläuft analog. Sei dazu $u \in \mathcal{O}^\Gamma_{(f|\partial\Gamma)}$. Wir definieren eine Funktion u^* durch

$$u^* := \begin{cases} u & \text{auf } \Gamma, \\ +\infty & \text{auf } G \setminus \Gamma. \end{cases}$$

Dann gilt $u^* \in \mathcal{O}^G_f$ und $u^*|_\Gamma = u$. Es folgt $u \in (\mathcal{O}^G_f)\big|_\Gamma := \{v|_\Gamma \,:\, v \in \mathcal{O}^G_f\}$ und daher $\mathcal{O}^\Gamma_{(f|\partial\Gamma)} \subseteq (\mathcal{O}^G_f)\big|_\Gamma$. Sei nun $u \in \mathcal{O}^G_f$. Wegen $\partial\Gamma \subseteq \partial G$ erhalten wir für $x \in \partial\Gamma$

$$\liminf_{y \to x,\; y \in \Gamma} u(y) \geq \liminf_{y \to x,\; y \in G} u(y) \geq f(x),$$

womit $u|_\Gamma \in \mathcal{O}^\Gamma_{(f|\partial\Gamma)}$ und schließlich $\mathcal{O}^\Gamma_{(f|\partial\Gamma)} = (\mathcal{O}^G_f)\big|_\Gamma$ folgt. Für die Oberlösungen erhalten wir damit

$$\overline{H}^\Gamma_{(f|\partial\Gamma)} = \inf \{u \,:\, u \in \mathcal{O}^\Gamma_{(f|\partial\Gamma)}\} = \inf \{u \,:\, u \in (\mathcal{O}^G_f)\big|_\Gamma\} = \inf \{u|_\Gamma \,:\, u \in \mathcal{O}^G_f\} = (\overline{H}^G_f)\big|_\Gamma.$$

❑

4.6 Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen mit nichtleerem Rand, $f : \partial G \to \mathbb{R}$ und $u \in \mathcal{O}_f$. Weiters sei $a \in G$ und $r > 0$, sodass $K_r(a) \subseteq G$.*

Wir definieren eine Funktion $u_{a,r} : G \to (-\infty, +\infty]$ durch

$$u_{a,r}(x) := \begin{cases} \int_{\partial U_r(a)} K_{r,a}(x,z) u(z)\, d\mu(z), & x \in U_r(a), \\ u(x), & x \in G \setminus U_r(a). \end{cases}$$

Dann gilt:

(i) $u_{a,r}|_{K_r(a)}$ *ist nach unten halbstetig,*

(ii) $u_{a,r}|_{U_r(a)}$ *ist harmonisch, falls* u *integrierbar ist und konstant* $+\infty$ *sonst,*

(iii) $u \geq u_{a,r}$ *auf* G *und*

(iv) $u_{a,r} \in \mathcal{O}_f$.

Beweis. Wir zeigen die Aussage nur für den Fall $a = 0$, $r = 1$. Der allgemeine Fall kann mittels geeigneter Transformation auf diesen Fall zurück geführt werden.

Die Funktion $x \mapsto K_{1,0}(x,z)$ ist für $x \in U_1(0)$ und $z \in \partial U_1(0)$ nach Beispiel 1.5 harmonisch und nichtnegativ, wir können daher die Ungleichung von Harnack (12) anwenden und erhalten für $y \in \partial U_1(0)$

$$\underbrace{K_{1,0}(0,y)}_{=1/S_p}|u(y)|\frac{1-\|x\|}{(1+\|x\|)^{p-1}} \leq K_{1,0}(x,y)|u(y)| \leq \underbrace{K_{1,0}(0,y)}_{=1/S_p}|u(y)|\frac{1+\|x\|}{(1-\|x\|)^{p-1}}.$$

Also ist u genau dann integrierbar, wenn $K_{1,0}(x,.)u$ für alle $x \in U_1(0)$ integrierbar ist. Die Integrierbarkeit von u hängt aber nicht von x ab. Also muss $u_{0,1}|_{U_1(0)}$ existieren oder konstant $+\infty$ sein, denn u ist nach unten beschränkt. Nach Lemma 3.9 existiert eine Folge von stetigen Funktionen $u_n : \partial U_1(0) \to \mathbb{R}$, die monoton wachsend punktweise gegen $u|_{\partial U_1(0)}$ konvergiert. Für $h_n : K_1(0) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$h_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \in \partial U_1(0), \\ \int_{\partial U_1(0)} K_{1,0}(x,z)u_n(z)\,d\mu(z), & x \in U_1(0), \end{cases}$$

folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz für $x \in U_1(0)$

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \int_{\partial U_1(0)} K_{1,0}(x,z)u(z)\,d\mu(z).$$

Nach Satz 2.3 ist die Funktion h_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig auf $K_1(0)$ und harmonisch auf $U_1(0)$. Wegen der Monotonie stimmt der Limes mit dem Supremum überein. Also folgt aus Lemma 3.7 die Halbstetigkeit nach unten auf $K_1(0)$. Aus dem Prinip von Harnack, Satz 3.23, folgt, dass die Grenzfunktion entweder harmonisch oder konstant $+\infty$ auf $U_1(0)$ ist.

Wir kommen zum Punkt *(iii)*. Auf $G \setminus U_1(0)$ gilt nach Definition von $u_{0,1}$ Gleichheit, also bleibt die Ungleichung nur auf $U_1(0)$ zu zeigen. Aus dem gerade bewiesenen wissen wir, dass für $x \in U_1(0)$ punktweise $h_n(x) \nearrow \int_{\partial U_1(0)} K_{1,0}(x,z)u(z)d\mu(z)$ gilt. Weil alle u_n stetig sind und $u_n \nearrow u|_{\partial U_1(0)}$ gilt, folgt

$$u|_{\partial U_1(0)} - h_n|_{\partial U_1(0)} = u|_{\partial U_1(0)} - u_n \geq 0.$$

Die Funktion $u - h_n$ ist auf $U_1(0)$ superharmonisch und auf $K_1(0)$ nach unten halbstetig, also folgt aus Lemma 3.14, dass sie nichtnegativ ist. Wir erhalten also

$$u|_{U_1(0)} - h_n|_{U_1(0)} \geq 0.$$

Da diese Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, bleibt sie auch für die Grenzfunktion erhalten. Diese entspricht aber genau $u_{0,1}|_{U_1(0)}$.

Bleibt noch *(iv)* zu zeigen. Die Randbeziehung bleibt erhalten, denn auf ∂G stimmt $u_{1,0}$ mit u überein. Auch die Beschränktheit nach unten bleibt erhalten, denn auf $K_1(0)$ ist die

Funktion nach unten halbstetig und daher nach Lemma 3.8 nach unten beschränkt, und auf $G \setminus U_1(0)$ stimmt $u_{0,1}$ mit dem nach unten beschränkten u überein. Sowohl $u_{0,1}|_{K_1(0)}$ als auch $u_{0,1}|_{G\setminus U_1(0)} = u|_{G\setminus U_1(0)}$ sind nach unten halbstetig. Auf $K_1(0) \cap (G \setminus U_1(0)) = K_1(0) \setminus U_1(0)$ stimmen $u_{0,1}|_{K_1(0)}$ und $u_{0,1}|_{G\setminus U_1(0)}$ überein. Nach Lemma 3.5 ist die Zusammensetzung $u_{0,1}$ nach unten halbstetig auf G. Sei nun $b \in G \setminus U_1(0)$ und $\rho > 0$, sodass $K_\rho(b) \subseteq G$. Dann gilt unter anderem wegen *(iii)*

$$u_{0,1}(b) = u(b) \geq \frac{1}{S_p r^{p-1}} \int_{\partial U_\rho(b)} u(z)\, d\mu(z) \geq \frac{1}{S_p r^{p-1}} \int_{\partial U_\rho(b)} u_{0,1}(z)\, d\mu(z).$$

Ist $b \in U_1(0)$ und $\rho > 0$, sodass $K_\rho(b) \subseteq U_1(0)$, so gilt wegen der Harmonizität von $u_{0,1}|_{U_1(0)}$ und Satz 3.16 bzw. wegen $u_{0,1}|_{U_1(0)} \equiv +\infty$

$$u_{0,1}(b) = \frac{1}{S_p r^{p-1}} \int_{\partial U_\rho(b)} u_{0,1}(z)\, d\mu(z).$$

Also ist $u_{0,1}$ hyperharmonisch und somit ein Element von $\mathcal{O}_f$. ❑

4.7 Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und zusammenhängend. Gilt $\mathcal{O}_f = \{+\infty\}$ so ist $\overline{H}_f = +\infty$ auf G. Ansonsten ist $\overline{H}_f$ entweder harmonisch oder konstant $-\infty$. Eine analoge Aussage gilt für $\underline{H}_f$.*

Beweis. Aus $\mathcal{O}_f = \{+\infty\}$ folgt unmittelbar $\overline{H}_f = \sup\{+\infty\} = +\infty$. Sei also $\mathcal{O}_f$ eine echte Obermenge von $\{+\infty\}$. Sei $a \in G$ und $r > 0$ mit $K_r(a) \subseteq G$. Für $u \in \mathcal{O}_f$ definiere $u_{a,r}$ wie in Lemma 4.6.

Aus Lemma 4.6 folgt, dass $u_{a,r} \in \mathcal{O}_f$ und $u \geq u_{a,r}$ auf G. Deshalb gilt

$$\overline{H}_f = \inf\big\{u \,:\, u \in \mathcal{O}_f\big\} = \inf\big\{u_{a,r} \,:\, u \in \mathcal{O}_f\big\}.$$

Nach Lemma 3.12 ist das Minimum zweier superharmonischer Funktionen wieder superharmonisch. Aus $\liminf_{y\to x} u_{1,2}(y) \geq f(x)$ folgt selbige Eigenschaft auch für das Minimum von u_1 und u_2, und das Minimum zweier nach unten beschränkter Funktionen ist wieder nach unten beschränkt. Daher folgt aus $u_1, u_2 \in \mathcal{O}_f$ auch $\min(u_1, u_2) \in \mathcal{O}_f$, womit $(\mathcal{O}_f, \geq)$ eine gerichtete Menge ist. Da $(u_{a,r})_{u\in\mathcal{O}_f}$ ein monoton fallendes Netz ist, gilt

$$\overline{H}_f = \lim_{u\in\mathcal{O}_f} u_{a,r}.$$

Betrachtet man dieses Netz eingeschränkt auf $U_r(a)$, so ist nach Lemma 4.6 $(u_{a,r}|_{U_r(a)})_{u\in\mathcal{O}_f}$ ein monoton fallendes Netz harmonischer Funktionen. Aus dem Prinzip von Harnack, Satz 3.23, folgt, dass $\overline{H}_f|_{U_r(a)}$ entweder konstant $-\infty$ oder harmonisch ist. Daraus folgt, dass sowohl die Menge

$$A := \big\{a \in G \,:\, \text{für alle } r > 0 \text{ mit } K_r(a) \subseteq G \text{ gilt } \overline{H}_f|_{U_r(a)} \equiv -\infty\big\}$$

als auch die Menge

$$G \setminus A = \big\{a \in G \,:\, \text{es existiert ein } r > 0 \text{ sodass } \overline{H}_f|_{U_r(a)} \text{ harmonisch ist}\big\}$$

offen sind. Weil G zusammenhängend ist, muss entweder $A = G$ oder $A = \emptyset$ gelten, was bedeutet, dass entweder $\overline{H}_f \equiv -\infty$ auf G oder $\overline{H}_f$ harmonisch auf G ist. ❑

4.8 Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und beschränkt. Ist $u \in \mathcal{U}_f$ und $o \in \mathcal{O}_f$, so gilt $u \leq o$. Als Folge gilt $\underline{H}_f \leq \overline{H}_f$.*

Beweis. Sei o.B.d.A. G zusammenhängend. Ist o nicht superharmonisch oder u nicht subharmonisch, so ist $o = +\infty$ oder $u = -\infty$ und damit $u \leq o$ erfüllt. Ist o superharmonisch und u subharmonisch, so ist die Differenz $o-u$ als Summe zweier superharmonischer Funktionen wieder superharmonisch. Für $x \in \partial G$ betrachten wir 3 Fälle:

(i) $f(x) \in \mathbb{R}$: Dann gilt

$$\liminf_{y\to x, y\in G}(o-u)(y) \geq \liminf_{y\to x, y\in G} o(y) - \limsup_{y\to x, y\in G} u(y) \geq f(x) - f(x) = 0.$$

(ii) $f(x) = +\infty$: Dann gilt $\liminf_{y\to x, y\in G} o(y) = +\infty$ und weil u nach oben beschränkt ist

$$\liminf_{y\to x, y\in G}(o-u)(y) \geq 0.$$

(iii) $f(x) = -\infty$: Dann gilt $\limsup_{y\to x, y\in G} u(y) = -\infty$ und weil o nach unten beschränkt ist

$$\liminf_{y\to x, y\in G}(o-u)(y) \geq 0.$$

In jedem Fall gilt $\liminf_{y\to x, y\in G}(o-u)(y) \geq 0$ für $x \in \partial G$. Aus Lemma 3.14 folgt $o - u \geq 0$ auf ganz G. ❑

4.9 Definition. Falls $\overline{H}_f = \underline{H}_f$ und diese Funktion harmonisch ist, so nennt man f *resolutiv*. In diesem Fall heißt $H_f := \overline{H}_f = \underline{H}_f$ *Dirichlet Lösung*.

4.10 Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und beschränkt, f eine reellwertige Randfunktion auf ∂G und h harmonisch auf G mit $\lim_{y\to x} h(y) = f(x)$ für alle $x \in \partial G$. Dann ist f resolutiv und $H_f = h$.*

Beweis. Nach Lemma 2.1 ist die Funktion $\overline{h}$, welche auf G mit h und auf ∂G mit f übereinstimmt, stetig auf $\overline{G}$. Also ist $\overline{h}$ auf dem Kompaktum $\overline{G}$ beschränkt, und insbesondere auch die Einschränkung $\overline{h}|_G = h$. Es folgt $h \in \mathcal{U}_f$ und $h \in \mathcal{O}_f$. Wir erhalten

$$\overline{H}_f = \inf_{u\in\mathcal{O}_f} u \leq h \leq \sup_{u\in\mathcal{U}_f} u = \underline{H}_f,$$

und wegen $\underline{H}_f \leq \overline{H}_f$ sogar $\underline{H}_f = \overline{H}_f = h$. Weil h harmonisch ist, ist f resolutiv, und die Dirichlet Lösung H_f stimmt mit h überein. ❑

4.11 Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und beschränkt, f und g reellwertige Funktionen auf ∂G und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

(i) Gilt $f = c$ auf ∂G, so ist f resolutiv und $H_f = c$ auf G.

(ii) $\overline{H}_{f+c} = \overline{H}_f + c$ und $\underline{H}_{f+c} = \underline{H}_f + c$. Ist f resolutiv, so ist $f+c$ resolutiv mit $H_{f+c} = H_f + c$.

(iii) Für $c > 0$ gilt $\overline{H}_{cf} = c\overline{H}_f$ und $\underline{H}_{cf} = c\underline{H}_f$. Ist f resolutiv, so ist cf resolutiv mit $H_{cf} = cH_f$.

(iv) $\overline{H}_{-f} = -\underline{H}_f$ und $\underline{H}_{-f} = -\overline{H}_f$. Ist f resolutiv, so ist $-f$ resolutiv mit $H_{-f} = -H_f$.

(v) *Für* $f \leq g$ *gilt* $\overline{H}_f \leq \overline{H}_g$ *und* $\underline{H}_f \leq \underline{H}_g$.

(vi) $\overline{H}_{f+g} \leq \overline{H}_f + \overline{H}_g$ *und* $\underline{H}_{f+g} \geq \underline{H}_f + \underline{H}_g$. *Sind* f *und* g *resolutiv, so ist* $f+g$ *resolutiv mit* $H_{f+g} = H_f + H_g$.

(vii) *Für* $c \leq f$ *gilt* $c \leq \underline{H}_f$ *und für* $c \geq f$ *gilt* $c \geq \overline{H}_f$. *Insbesondere gilt*

$$-\|f\|_\infty \leq \underline{H}_f \leq \overline{H}_f \leq \|f\|_\infty.$$

Beweis.

(i) Folgt unmittelbar aus Lemma 4.10 angewandt auf die konstante Funktion c.

(ii) Aus der Definition der Oberklasse erkennt man sofort, dass $u \in \mathcal{O}_{f+c}$ genau dann gilt, wenn $u - c \in \mathcal{O}_f$. Es folgt

$$\begin{aligned}\overline{H}_{f+c} &= \inf\{u : u \in \mathcal{O}_{f+c}\} = \inf\{u : u - c \in \mathcal{O}_f\} = \inf\{u + c : u \in \mathcal{O}_f\} \\ &= \inf\{u : u \in \mathcal{O}_f\} + c = \overline{H}_f + c.\end{aligned}$$

Eine analoge Argumentation zeigt $\underline{H}_{f+c} = \underline{H}_f + c$. Ist f resolutiv, so ist $H_f = \overline{H}_f = \underline{H}_f$ harmonisch und damit auch $H_f + c = \overline{H}_f + c = \underline{H}_f + c$ harmonisch. In diesem Fall gilt

$$\overline{H}_{f+c} = \overline{H}_f + c = H_f + c = \underline{H}_f + c = \underline{H}_{f+c}.$$

Also ist $f + c$ resolutiv mit $H_{f+c} = H_f + c$.

(iii) Aus der Definition der Oberklasse erkennt man sofort, dass $u \in \mathcal{O}_{cf}$ genau dann gilt, wenn $\frac{u}{c} \in \mathcal{O}_f$, wobei hier $c > 0$ wesentlich eingeht. Wie in (ii) folgert man die Behauptung, wobei auch hier wieder $c > 0$ eingeht.

(iv) Aus der Definition der Ober- und Unterklasse erkennt man sofort, dass $u \in \mathcal{O}_{-f}$ genau dann gilt, wenn $-u \in \mathcal{U}_f$. Es folgt

$$\begin{aligned}\overline{H}_{-f} &= \inf\{u : u \in \mathcal{O}_{-f}\} = \inf\{u : -u \in \mathcal{U}_f\} = \inf\{-u : u \in \mathcal{U}_f\} \\ &= -\sup\{u : u \in \mathcal{U}_f\} = -\underline{H}_f.\end{aligned}$$

Eine analoge Argumentation zeigt $\underline{H}_{-f} = -\overline{H}_f$. Ist nun f resolutiv, so ist $H_f = \overline{H}_f = \underline{H}_f$ harmonisch und damit auch $-H_f = -\overline{H}_f = -\underline{H}_f$ harmonisch. In diesem Fall gilt

$$\overline{H}_{-f} = -\underline{H}_f = -H_f = -\overline{H}_f = \underline{H}_{-f}.$$

Also ist $-f$ resolutiv mit $H_{-f} = -H_f$.

(v) Sei $f \leq g$. Für ein $u \in \mathcal{O}_g$ gilt wegen $f \leq g$ auch $u \in \mathcal{O}_f$, also $\mathcal{O}_g \subseteq \mathcal{O}_f$. Analog gilt für $u \in \mathcal{U}_f$ wegen $f \leq g$ auch $u \in \mathcal{U}_g$, also $\mathcal{U}_f \subseteq \mathcal{U}_g$. Es folgt

$$\begin{aligned}\overline{H}_f &= \inf\{u : u \in \mathcal{O}_f\} \leq \inf\{u : u \in \mathcal{O}_g\} = \overline{H}_g, \\ \underline{H}_f &= \sup\{u : u \in \mathcal{U}_f\} \leq \sup\{u : u \in \mathcal{U}_g\} = \underline{H}_g.\end{aligned}$$

(vi) Wir zeigen zunächst $\mathcal{O}_{f+g} \supseteq \mathcal{O}_f + \mathcal{O}_g$: sei $v \in \mathcal{O}_f$, $w \in \mathcal{O}_g$ und $u := v + w$. Dann ist u wieder hyperharmonisch, für $x \in \partial G$ gilt

$$\liminf_{y \to x, y \in G} u(y) = \liminf_{y \to x, y \in G} v(y) + w(y) \geq \liminf_{y \to x, y \in G} v(y) + \liminf_{y \to x, y \in G} w(y) \geq f(x) + g(x),$$

und mit v und w ist auch u nach unten beschränkt, womit die Inklusion gezeigt ist. Damit und mit dem Lemma vom Iterierten Infimum erhalten wir

$$\begin{aligned} \overline{H}_{f+g} &= \inf \{u : u \in \mathcal{O}_{f+g}\} \leq \inf \{u : u \in \mathcal{O}_f + \mathcal{O}_g\} \\ &= \inf \{u : u \in \mathcal{O}_f\} + \inf \{u : u \in \mathcal{O}_g\} = \overline{H}_f + \overline{H}_g. \end{aligned}$$

$\underline{H}_{f+g} \geq \underline{H}_f + \underline{H}_g$ zeigt man analog.

Sind f und g resolutiv, dann gilt mit dem soeben gezeigten

$$\overline{H}_{f+g} \leq \overline{H}_f + \overline{H}_g = H_f + H_g = \underline{H}_f + \underline{H}_g \leq \underline{H}_{f+g}.$$

Zusammen mit Lemma 4.8 folgt $H_{f+g} = \overline{H}_{f+g} = \underline{H}_{f+g} = H_f + H_g$.

(vii) Folgt unmittelbar aus (i) und (v).

❑

4.12 Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und beschränkt. Weiters sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge resolutiver Randfunktionen, die gleichmäßig gegen eine Randfunktion f konvergiert. Dann ist f resolutiv und $(H_{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen H_f.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, sodass für jedes $x \in \partial G$ und $n \geq N$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, d.h.

$$f_n(x) - f(x) < \epsilon \text{ und } f(x) - f_n(x) < \epsilon.$$

Daraus folgt $f_n(x) - \epsilon < f(x) < f_n(x) + \epsilon$ für $x \in \partial G$. Zusammen mit Lemma 4.11 folgt

$$\overline{H}_{f_n} - \epsilon = \overline{H}_{f_n - \epsilon} \leq \overline{H}_f \leq \overline{H}_{f_n + \epsilon} = \overline{H}_{f_n} + \epsilon \quad \text{auf } G.$$

Weil H_{f_n} für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\overline{H}_{f_n}$ übereinstimmt, schließt man daraus

$$\left\| \overline{H}_f - H_{f_n} \right\|_\infty = \left\| \overline{H}_f - \overline{H}_{f_n} \right\|_\infty \leq \epsilon,$$

was heißt, dass H_{f_n} gleichmäßig gegen $\overline{H}_f$ konvergiert. Analog zeigt man dass H_{f_n} gleichmäßig gegen $\underline{H}_f$ konvergiert, woraus man wegen der Eindeutigkeit von Grenzwerten auf $\overline{H}_f = \underline{H}_f$ schließt. Nach Lemma 3.20 ist $\overline{H}_f = \underline{H}_f$ als gleichmäßiger Grenzwert harmonischer Funktionen wieder harmonisch. Also ist f resolutiv und $H_f = \overline{H}_f = \underline{H}_f = \lim_{n \to \infty} H_{f_n}$. ❑

4.13 Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, zusammenhängend und beschränkt und sei u eine beschränkte und superharmonische Funktion auf G. Weiters existiere $\lim_{y \to x,\ y \in G} u(y)$ für alle $x \in \partial G$. Dann ist*

$$f : \begin{cases} \partial G & \to \quad \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \quad \lim_{y \to x, y \in G} u(y) \end{cases}$$

eine resolutive Randfunktion.

Beweis. Die Funktion u ist nach Voraussetzungen ein Element von $\mathcal{O}_f$. Also ist $\overline{H}_f$ nach Lemma 4.7 entweder konstant $-\infty$ oder harmonisch. Da die Funktion f nach unten beschränkt ist, gilt für alle Funktionen $o \in \mathcal{O}_f$ mit einem festen $C \in \mathbb{R}$

$$\liminf_{y \to x,\ y \in G} o(y) \geq f(x) \geq C > -\infty.$$

Aus Lemma 3.14 folgt $o \geq C$. Damit ist auch $\overline{H}_f$ nach unten mit C beschränkt und kann nicht konstant $-\infty$ sein. Also ist $\overline{H}_f$ harmonisch. Wegen $u \in \mathcal{O}_f$ gilt $\overline{H}_f \leq u$ und somit für $x \in \partial G$

$$\limsup_{y \to x,\ y \in G} \overline{H}_f(y) \leq \limsup_{y \to x,\ y \in G} u(y) = f(x).$$

Also ist $\overline{H}_f$ ein Element von $\mathcal{U}_f$, woraus $\overline{H}_f \leq \underline{H}_f$ folgt. Da die umgekehrte Ungleichung nach Lemma 4.8 immer gilt, folgt $\overline{H}_f = \underline{H}_f$. ❑

4.14 Lemma. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^p$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Weiters sei $\epsilon > 0$ und U eine offene, K umfassende Kugel. Dann existieren zwei stetige und superharmonische Funktionen v, w auf U, für deren Differenz $u := v - w$ gilt $\sup_{x \in K} |u(x) - f(x)| < \epsilon$.*

Beweis. Nach dem Satz von Stone Weierstrass, siehe z.B. [KM, Satz 13.2.5], existiert ein Polynom u in p Variablen, für das $\sup_{x \in K} |u(x) - f(x)| < \epsilon$ gilt. Wir definieren auf U die stetige Funktion w mittels $w(x) := -\lambda \|x\|^2 = -\lambda(x_1^2 + \cdots + x_p^2)$ mit $\lambda \geq 0$. Damit gilt

$$\Delta w(x) = -\lambda(2 + \cdots + 2) = -2p\lambda \leq 0.$$

Nach Lemma 3.17 ist w superharmonisch. Wählt man nun $\lambda \geq 0$ so groß, dass $\Delta(u + w) \leq 0$ auf U, so ist auch $v := u + w$ stetig und superharmonisch und es gilt $u = v - w$. ❑

4.15 Satz (Perron-Wiener-Brelot). *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ eine offene und beschränkte Menge und sei $f : \partial G \to \mathbb{R}$ eine stetige Randfunktion. Dann ist f resolutiv.*

Beweis. Zuerst sei bemerkt, dass ∂G kompakt ist. Für eine offene Kugel $U \supseteq \partial G$ existieren nach Lemma 4.14 Funktionen u, v, w auf U wobei v, w stetig und superharmonisch sind, $u = v - w$ gilt und $u|_{\partial G}$ die Funktion f gleichmäßig approximiert. Außerdem sind $v|_{\partial G}, w|_{\partial G}$ nach Lemma 4.13 resolutiv. Damit ist wegen Lemma 4.11 auch $u|_{\partial G} = v|_{\partial G} - w|_{\partial G}$ resolutiv. Weil $u|_{\partial G}$ eine gleichmäßige Approximation an f ist, folgt aus Lemma 4.12, dass auch f resolutiv ist. ❑

Wir können nun jeder stetigen Randfunktion einer beschränkten Menge eine harmonische Funktion im Inneren zuweisen. Allerdings wissen wir noch nichts über den Zusammenhang zwischen Randverhalten der harmonischen Funktion und Randfunktion. Auf dieses Randverhalten wollen wir im nun Folgenden näher eingehen.

4.16 Definition. Ein Punkt $x \in \partial G$ heißt *regulärer Randpunkt* der Menge G, falls

$$\lim_{y \to x, y \in G} H_f(y) = f(x) \quad \text{für alle } f \in C(\partial G), \tag{16}$$

andernfalls *irregulärer Randpunkt.* Man spricht von einer *regulären Menge*, falls jeder Randpunkt der Menge regulär ist.

4.17 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge, $x \in \partial G$ und U eine offene Umgebung von x. Eine Funktion $w : U \cap G \to \mathbb{R}$ heißt *Barriere* bei $x \in \partial G$, wenn

(i) $w > 0$ auf $U \cap G$,

(ii) w superharmonisch auf $U \cap G$ und

(iii) $\lim_{y \to x, y \in U \cap G} w(y) = 0$.

4.18 Satz (Bouligand). *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ eine offene und beschränkte Menge. Es existiere eine Barriere w bei $x \in \partial G$. Dann existiert eine auf ganz G definierte, positive und harmonische Funktion h, die folgende Eigenschaften erfüllt:*

(i) $\lim_{y \to x, y \in G} h(y) = 0$,

(ii) $\liminf_{y \to z, y \in G} h(y) > 0$ *für alle* $z \in \partial G \setminus \{x\}$ *und*

(iii) $\inf \{h(y) \,:\, y \in G \setminus U_x\} > 0$ *für alle offenen Umgebungen* U_x *von* x.

Die Funktion h ist insbesondere wieder eine Barriere bei $x \in \partial G$.

Beweis. Wir definieren eine Funktion

$$m : \begin{cases} \partial G & \to & \mathbb{R}, \\ y & \mapsto & \|y - x\|^2, \end{cases}$$

und zeigen, dass $h := H_m$ die gewünschten Eigenschaften hat. Nach Satz 4.15 existiert H_m und ist harmonisch, da m stetig ist. Die Funktion

$$m_G : \begin{cases} G & \to & \mathbb{R}, \\ y & \mapsto & \|y - x\|^2, \end{cases}$$

ist zweimal stetig differenzierbar und erfüllt $\Delta m_G(y) = 2p > 0$ für jedes $y \in G$. Nach Lemma 3.17 ist m_G subharmonisch. Außerdem gilt $\limsup_{y \to z, y \in G} m_G(y) = m(z)$ für $z \in \partial G$ und m_G ist nach oben beschränkt. Damit ist m_G ein Element von $\mathcal{U}_m$ und deshalb $H_m \geq m_G$. Hieraus folgt $h = H_m \geq m_G > 0$ auf G,

$$\liminf_{y \to z, y \in G} h(y) \geq \liminf_{y \to z, y \in G} m_G(y) = \|z - x\| > 0 \quad \text{für } z \in \partial G \setminus \{x\}$$

und

$$\inf \{h(y) \,:\, y \in G \setminus U_x\} \geq \inf \{m_G(y) \,:\, y \in G \setminus U_x\} > 0$$

für alle offenen Umgebungen U_x von x. Es bleibt noch $\liminf_{y \to x, y \in G} h(y) = 0$ zu zeigen.

Weil w eine Barriere bei x ist, existiert ein $r > 0$, sodass w auf $U_r(x) \cap G$ positiv und superharmonisch ist und $\lim_{y \to x, y \in U_r(x) \cap G} w(y) = 0$ gilt. Sei nun $\rho \in (0, r)$ beliebig und $U := U_\rho(x)$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $\partial U \cap G = \emptyset$. In diesem Fall gilt [5]

$$\begin{aligned} \partial(U \cap G) &= \overline{U \cap G} \setminus (U \cap G)^\circ = \overline{U \cap G} \cap (U \cap G)^{\circ c} \subseteq \overline{U} \cap \overline{G} \cap (U^\circ \cap G^\circ)^c \\ &= (\overline{U} \cap \overline{G} \cap U^{\circ c}) \cup (\overline{U} \cap \overline{G} \cap G^{\circ c}) = (\overline{G} \cap \partial U) \cup (\overline{U} \cap \partial G) = \overline{U} \cap \partial G, \end{aligned} \tag{17}$$

[5] Es sei an folgende Regeln für zwei Mengen A, B erinnert: $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ und $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

wobei letzte Gleichheit gilt, da

$$\overline{G} \cap \partial U = \underbrace{(G \cap \partial U)}_{=\emptyset} \cup (\partial G \cap \partial U) \subseteq \partial G \cap \overline{U}.$$

Für ein $u \in \mathcal{U}_m$ und $y \in \partial(U \cap G) \subseteq \partial G \cap \overline{U}$ gilt

$$\limsup_{\eta \to y, \eta \in U \cap G} u(\eta) \le \limsup_{\eta \to y, \eta \in G} u(\eta) \le m(y) \le \rho.$$

Weil u subharmonisch ist folgt zusammen mit Lemma 3.14 $u \le \rho$ auf $U \cap G$. Da $u \in \mathcal{U}_m$ beliebig war, gilt auch $H_m \le \rho$ auf $U \cap G$.

2. Fall: $\partial U \cap G \neq \emptyset$. Wir definieren $M := \sup\left\{ \|y - x\|^2 \; : \; y \in \partial G \right\}$, wählen eine abgeschlossene Menge $F \subseteq \partial U \cap G$ mit $\mu((\partial U \cap G) \setminus F) < \frac{\rho^p S_p}{M}$ und definieren schließlich $k := \inf\left\{ w(y) \; : \; y \in F \right\} > 0$. Weiters definieren wir eine Funktion

$$f : \begin{cases} \partial U & \to \quad \mathbb{R}, \\ \quad y & \mapsto \quad \begin{cases} M, & y \in (\partial U \cap G) \setminus F, \\ 0, & \mathit{sonst}. \end{cases} \end{cases}$$

Für ein $u \in \mathcal{U}_m$ definieren wir eine Funktion

$$v : \begin{cases} U \cap G & \to \quad \mathbb{R}, \\ \qquad y & \mapsto \quad u(y) - \rho - \frac{M}{k} w(y) - \int_{\partial U} K_{\rho,x}(y,z) f(z) \, d\mu(z). \end{cases}$$

Die Funktion v ist als Zusammensetzung subharmonischer Funktionen wieder subharmonisch. Als nächsten Schritt wollen wir $\limsup_{\eta \to y, \eta \in U \cap G} v(\eta) \le 0$ für alle $y \in \partial(U \cap G)$ zeigen. Zunächst gilt wegen (17) und $F \subseteq \partial U \cap G$

$$\partial(U \cap G) \subseteq (\partial U \cap G) \cup (\overline{U} \cap \partial G) = ((\partial U \cap G) \setminus F) \cup F \cup (\overline{U} \cap \partial G). \tag{18}$$

Wir schätzen nun v getrennt nach Summanden ab:

- u: Nach Definition von m und M gilt $m \le M$ auf ∂G, was zusammen mit $u \in \mathcal{U}_m$ auf

$$\limsup_{\eta \to y, \eta \in U \cap G} u(\eta) \le m(y) \le M \quad \text{für alle } y \in \partial G \tag{19}$$

  führt. Aus Lemma 3.14 folgt $u \le M$ auf G; insbesondere gilt also

$$\limsup_{\eta \to y, \eta \in U \cap G} u(\eta) \le M \quad \text{für alle } y \in \partial U \cap G. \tag{20}$$

  Außerdem folgt aus (19)

$$\limsup_{\eta \to y, \eta \in U \cap G} u(\eta) \le m(y) \le \rho \quad \text{für alle } y \in (\overline{U} \cap \partial G) \cap \partial(U \cap G). \tag{21}$$

- w: Wegen $w > 0$ auf $U \cap G$ gilt $\liminf_{\eta \to y, \eta \in U \cap G} w(\eta) \ge 0$ für $y \in \partial(U \cap G)$. Das ist äquivalent zu

$$\limsup_{\eta \to y, \eta \in U \cap G} -w(\eta) = - \liminf_{\eta \to y, \eta \in U \cap G} w(\eta) \le 0 \quad \text{für alle } y \in \partial(U \cap G). \tag{22}$$

  w ist nach unten halbstetig, daher gilt $\liminf_{\eta \to y, \eta \in U \cap G} w(\eta) \ge w(y) \ge k$ für $y \in F$, was äquivalent ist zu $- \liminf_{\eta \to y, \eta \in U \cap G} w(\eta) \le -w(y) \le -k$ für $y \in F$ bzw.

$$\limsup_{\eta \to y, \eta \in U \cap G} -w(\eta) \le -k \quad \text{für alle } y \in F. \tag{23}$$

- $\int_{\partial U} K(\eta,.)f\,d\mu$: Für $y \in \partial(U \cap G)$ gilt $\liminf_{\eta\to y,\eta\in U\cap G} \int_{\partial U} \underbrace{K(\eta,z)}_{\geq 0}\underbrace{f(z)}_{\geq 0}\,d\mu(z) \geq 0$. Das ist äquivalent zu
$$\limsup_{\eta\to y,\eta\in U\cap G} -\int_{\partial U} K(\eta,z)f(z)\,d\mu(z) \leq 0. \tag{24}$$
Auf $(\partial U \cap G)\setminus F$ ist f stetig, also gilt wegen Satz 2.3
$$\lim_{\eta\to y,\eta\in U\cap G} \int_{\partial U} K(\eta,z)f(z)\,d\mu(z) = f(y) = M \quad \text{für alle } y \in (\partial U \cap G)\setminus F. \tag{25}$$

Setzt man nun alles zusammen, so erhält man für $y \in \partial(U \cap G)$ und

- $y \in (\partial U \cap G)\setminus F$ mit (20), (22) und (25)
$$\limsup_{\eta\to y,\eta\in U\cap G} v(y) \leq M - \rho - \frac{M}{k}0 - M = -\rho \leq 0,$$
- $y \in F$ mit (20), (23) und (24)
$$\limsup_{\eta\to y,\eta\in U\cap G} v(y) \leq M - \rho - \frac{M}{k}k - 0 = -\rho \leq 0,$$
- $y \in \overline{U} \cap \partial G$ mit (21), (22) und (24)
$$\limsup_{\eta\to y,\eta\in U\cap G} v(y) \leq \rho - \rho - \frac{M}{k}0 - 0 = 0.$$

Aus Lemma 3.14 folgt nun, dass $v \leq 0$ auf ganz $U \cap G$ gelten muss. Weil $u \in \mathcal{U}_m$ beliebig war, gilt $H_m \leq \rho + \frac{M}{k}w + \int_{\partial U} K(\eta,.)f\,d\mu$ auf $U \cap G$. Weiters gilt
$$\begin{aligned}\int_{\partial U} K(x,z)f(z)\,d\mu(z) &= \int_{\partial U_\rho(x)} \frac{1}{\rho^{p-1}S_p} f(z)\,d\mu(z) = \frac{1}{\rho^{p-1}S_p}\int_{(\partial U_\rho(x)\cap G)\setminus F} M\,d\mu(z)\\ &\leq \frac{M}{\rho^{p-1}S_p}\frac{\rho^p S_p}{M} = \rho.\end{aligned}$$
Weil $x \mapsto \int_{\partial U} K(x,.)f\,d\mu$ auf U stetig ist, gilt auch $\limsup_{y\to x,y\in U\cap G}\int_{\partial U} K(y,.)f\,d\mu \leq \rho$. Weil w eine Barriere ist, gilt $\lim_{y\to x,y\in U\cap G} w(y) = 0$, womit
$$0 \leq \limsup_{y\to x,y\in G} m_G(y) \leq \limsup_{y\to x,y\in G} H_m(y) \leq \rho + \limsup_{y\to x,y\in G} \frac{M}{k}w(y) + \limsup_{y\to x,y\in G}\int_{\partial U} K(y,.)f(.)\,d\mu \leq 2\rho$$
folgt. Insgesamt gilt daher sowohl in Fall 1 als auch in Fall 2 $\limsup_{y\to x,y\in G} h(y) \leq 2\rho$ und weil $\rho \in (0,r)$ beliebig war, gilt schließlich $\limsup_{y\to x,y\in G} h(y) = 0$. ❑

4.19 Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und beschränkt. Weiters sei $f : \partial G \to \mathbb{R}$ eine Randfunktion und es existiere eine Barriere bei $x \in \partial G$. Ist f nach oben beschränkt, so gilt*
$$\limsup_{y\to x,y\in G} \overline{H}_f(y) \leq \limsup_{y\to x,y\in\partial G} f(y).$$
Ist f nach unten beschränkt, so gilt
$$\liminf_{y\to x,y\in G} \underline{H}_f(y) \geq \liminf_{y\to x,y\in\partial G} f(y).$$

Beweis. Sei zuerst f nach oben beschränkt. Wegen Satz 4.18 existiert nach den Voraussetzungen eine Barriere $w : G \to \mathbb{R}$ bei x mit $\inf\{w(y) : y \in G \setminus U_x\} > 0$ für jede offene Umgebung U_x von x und $w > 0$ auf G. Sei $L := \limsup_{y \to x, y \in \partial G} f(y)$ und $\epsilon > 0$. Dann existiert eine Umgebung U von x mit $f(y) < L + \epsilon$ für alle $y \in \partial G \cap U$. Weil $\inf_{y \in G \setminus U} w(y)$ positiv und f nach oben beschränkt ist, gibt es ein $c > 0$, sodass $L + \epsilon + c \cdot \inf_{y \in G \setminus U} w(y) > \sup_{y \in \partial G} f(y)$. Definiert man nun eine Funktion u auf G durch $u = L + \epsilon + c \cdot w$, so ist diese Funktion, weil w positiv ist, superharmonisch und nach unten beschränkt. Für $z \in \partial G \setminus U$ gilt $\liminf_{y \to z, y \in G} w(y) \geq \inf_{y \in G \setminus U} w(y)$ und damit

$$\liminf_{y \to z, y \in G} u(y) \geq L + \epsilon + c \cdot \liminf_{y \to z, y \in G} w(y) \geq L + \epsilon + c \cdot \inf_{y \in G \setminus U} w(y) > \sup_{y \in \partial G} f(y) \geq f(z).$$

Ist $z \in \partial G \cap U$, so gilt wegen der Wahl von U

$$\liminf_{y \to z, y \in G} u(y) \geq L + \epsilon + c \cdot \liminf_{y \to z, y \in G} w(y) \geq L + \epsilon > f(z).$$

Damit ist gezeigt, dass u ein Element der Oberklasse $\mathcal{O}_f$ ist, und daher $\overline{H}_f \leq u$ auf G gilt. Daraus folgt

$$\limsup_{y \to x, y \in G} \overline{H}_f(y) \leq \limsup_{y \to x, y \in G} u(y) \leq L + \epsilon + c \cdot \limsup_{y \to x, y \in G} w(y) = L + \epsilon.$$

Weil $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\limsup_{y \to x, y \in G} \overline{H}_f(y) \leq L = \limsup_{y \to x, y \in \partial G} f(y)$.

Ist nun f nach unten beschränkt, so ist $-f$ nach oben beschränkt. Aus dem bisher bewiesenen und Lemma 4.11 folgt

$$\limsup_{y \to x, y \in G} -\underline{H}_f(y) = \limsup_{y \to x, y \in G} \overline{H}_{-f}(y) \leq \limsup_{y \to x, y \in \partial G} -f(y),$$

was äquivalent ist zu $-\liminf_{y \to x, y \in G} \underline{H}_f(y) \leq -\liminf_{y \to x, y \in \partial G} f(y)$ bzw. $\liminf_{y \to x, y \in G} \underline{H}_f(y) \geq \liminf_{y \to x, y \in \partial G} f(y)$. ❑

4.20 Korollar. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und beschränkt. Weiters sei $f : \partial G \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Randfunktion, die stetig bei $x \in \partial G$ ist, und es existiere eine Barriere bei x. Dann gilt*

$$\lim_{y \to x, y \in G} \overline{H}_f(y) = \lim_{y \to x, y \in G} \underline{H}_f(y) = f(x).$$

Beweis. Wegen $\underline{H}_f \leq \overline{H}_f$, Lemma 4.19 und der Tatsache dass f stetig ist bei x, folgt

$$\begin{aligned}\limsup_{y \to x, y \in G} \underline{H}_f(y) &\leq \limsup_{y \to x, y \in G} \overline{H}_f(y) \leq \limsup_{y \to x, y \in G} f(y) = f(x) = \liminf_{y \to x, y \in G} f(y) \leq \liminf_{y \to x, y \in G} \underline{H}_f(y) \\ &\leq \liminf_{y \to x, y \in G} \overline{H}_f(y),\end{aligned}$$

wovon man auf $\lim_{y \to x, y \in G} \overline{H}_f(y) = \lim_{y \to x, y \in G} \underline{H}_f(y) = f(x)$ schließt. ❑

4.21 Satz. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und beschränkt. Ein Punkt $x \in \partial G$ ist genau dann ein regulärer Randpunkt, wenn eine Barriere bei x existiert.*

Beweis. "$\Rightarrow$": Sei $x \in \partial G$ ein regulärer Randpunkt. Wie im Beweis von Satz 4.18 definieren wir eine Funktion $m : \partial G \to \mathbb{R}$ mit $m(y) = \|y - x\|^2$ und wissen, dass $H_m > 0$ auf G gilt. Weil m stetig auf ∂G ist, wissen wir aus Satz 4.15 außerdem, dass H_m harmonisch ist auf G. Weil x regulär ist, gilt zudem $\lim_{y\to x, y\in G} H_m(y) = m(x) = 0$. Somit ist H_m eine Barriere bei x.

"$\Leftarrow$": Sei f eine stetige Funktion auf ∂G. Wegen der Kompaktheit von ∂G ist f darauf beschränkt. Existiert nun eine Barriere bei $x \in \partial G$, so wissen wir aus Korollar 4.20, dass $\lim_{y\to x, y\in G} \overline{H}_f(y) = \lim_{y\to x, y\in G} \underline{H}_f(y) = f(x)$. Weil nach Satz 4.15 $\overline{H}_f = \underline{H}_f = H_f$ gilt, erhalten wir $\lim_{y\to x, y\in G} H_f(y) = f(x)$. ❑

4.22 Korollar. *Ist $x \in \partial G_0$ regulärer Randpunkt einer offenen beschränkten Menge $G_0 \subseteq \mathbb{R}^p$ und ist $G \subseteq G_0$ mit $x \in \partial G$, so ist x auch regulärer Randpunkt von G.*

Beweis. Ist x regulärer Randpunkt von G_0, so existiert eine Barriere bei x auf $U \cap G_0$ für eine offene Umgebung U von x. Diese Barriere eingeschränkt auf G ist dann eine Barriere bei x auf $U \cap G$. Also ist x auch regulärer Randpunkt von G. ❑

4.23 Satz (Poincare)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ eine offene beschränkte Menge und $x \in \partial G$. Existieren ein $y \in \mathbb{R}^p$ und $r > 0$ mit $U_r(y) \cap G = \emptyset$ und $x \in \partial U_r(y)$, so ist x ein regulärer Randpunkt von G.*

Beweis. Es sei daran erinnert, dass nach Beispiel 1.4 die Funktion u_y auf $\mathbb{R}^p \setminus \{y\}$ harmonisch ist. Daher ist die Funktion $w : G \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$w(x) = \begin{cases} \ln\|x - y\| - \ln r, & p = 2, \\ r^{2-p} - \|x - y\|^{2-p}, & p > 2, \end{cases}$$

harmonisch auf G. Außerdem ist sie nach Konstruktion positiv auf G, denn für $x \in G$ gilt $\|x - y\| > r$, da $U_r(y) \cap G = \emptyset$. Die Funktion ist zudem so konstruiert, dass sie auf $\partial U_r(y)$ verschwindet, es gilt also $\lim_{\eta\to x, \eta\in G} w(\eta) = 0$. Damit ist w eine Barriere bei x und nach Satz 4.21 ist x ein regulärer Randpunkt von G. ❑

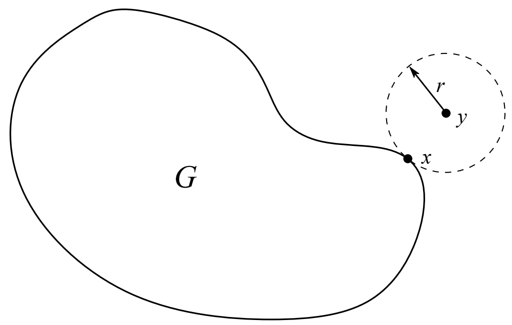

Abbildung 1: Veranschaulichung von Satz 4.23 im $\mathbb{R}^2$.

Satz 4.23 zeigt, dass insbesondere alle offenen, beschränkten und konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^p$ reguläre Mengen sind. Abschließend wollen wir dieses Resultat verallgemeinern. Dafür benötigen wir den Begriff eines Kreiskegels. Für $x \in \mathbb{R}^p$ und $\alpha > 0$ ist

$$C_x := \left\{\xi \in \mathbb{R}^p \, : \, (\xi_1 - x_1)^2 + \cdots + (\xi_{p-1} - x_{p-1})^2 \le \alpha^2(\xi_p - x_p)^2, \ \xi_p \ge x_p\right\}$$

ein abgeschlossener Kreiskegel im $\mathbb{R}^p$ mit Spitze in x und Kreisradius α auf Höhe 1, dessen Drehachse entlang der p-ten Koordinatenrichtung liegt. Ist $C_x^h := C_x \cap K_h(x)$ und $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ eine lineare und orthogonale Abbildung, so ist $D(C_x^h) := T(C_x^h - x) + x$ ein abgeschnittener Kreiskegel mit Spitze x, dessen Drehachse beliebig im $\mathbb{R}^p$ liegt.

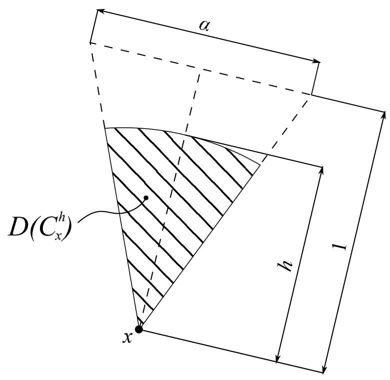

Abbildung 2: Beispiel von $D(C_x^h)$ im $\mathbb{R}^2$.

4.24 Bemerkung. Sei $x \in \mathbb{R}^p$, $h > 0$ und $D(C_x^h)$ ein Kreiskegel wie oben. Weiters sei $m : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, $m(y) = 2y - x$, $\Omega := U_h(x) \setminus D(C_x^h)$ und $\Omega_2 := \{m(y) \,:\, y \in \Omega\} = m(\Omega)$ eine Vergrößerung von Ω um den Faktor 2. Dann gilt $\Omega \subseteq \Omega_2$.

Um dies einzusehen, zeigen wir zunächst $U_h(x) \setminus C_x^h \subseteq m\big(U_h(x) \setminus C_x^h\big)$. Dafür müssen wir zeigen, dass für ein $y \in U_h(x) \setminus C_x^h$ ein $z \in U_h(x) \setminus C_x^h$ existiert mit $y = m(z)$. Das ist genau dann der Fall, wenn $z = \frac{y+x}{2}$ wieder ein Element von $U_h(x) \setminus C_x^h$ ist. Sei also $y \in U_h(x) \setminus C_x^h$. Dann gilt $\|y - x\| < h$ und damit

$$\left\| \frac{y+x}{2} - x \right\| = \left\| \frac{y + x - 2x}{2} \right\| = \frac{1}{2} \|y - x\| < \frac{h}{2}.$$

Weiters gilt $(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_{p-1} - x_{p-1})^2 > \alpha^2 (y_p - x_p)^2$ und damit

$$\frac{1}{4}(y_1 - x_1)^2 + \cdots + \frac{1}{4}(y_{p-1} - x_{p-1})^2 > \frac{1}{4}\alpha^2 (y_p - x_p)^2,$$

was äquivalent ist zu

$$(\frac{y_1 + x_1 - 2x_1}{2})^2 + \cdots + (\frac{y_{p-1} + x_{p-1} - 2x_{p-1}}{2})^2 > \alpha^2 (\frac{y_p + x_p - 2x_p}{2})^2$$

und

$$(\frac{y_1 + x_1}{2} - x_1)^2 + \cdots + (\frac{y_{p-1} + x_{p-1}}{2} - x_{p-1})^2 > \alpha^2 (\frac{y_p + x_p}{2} - x_p)^2,$$

womit $\frac{y+x}{2} \in U_h(x) \setminus C_x^h$ gezeigt ist.

Als nächsten Schritt zeigen wir, dass m mit D kommutiert:

$$\begin{aligned} m(D(z)) &= m\big(T(z - x) + x\big) = 2T(z - x) + 2x - x = T(2z - 2x) + x = T(m(z) - x) + x \\ &= D(m(z)). \end{aligned}$$

Schließlich folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned} \Omega &= U_h(x) \setminus D(C_x^h) = D(U_h(x) \setminus C_x^h) \subseteq D\big(m(U_h(x) \setminus C_x^h)\big) = m\big(D(U_h(x) \setminus C_x^h)\big) \\ &= m\big(U_h(x) \setminus D(C_x^h)\big) = \Omega_2. \end{aligned}$$

//

4.25 Satz (Zaremba)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ eine offene beschränkte Menge und $x \in \partial G$. Existiert ein abgeschnittener Kreiskegel mit Spitze in x und leerem Schnitt mit G, so ist x ein regulärer Randpunkt von G.*

Beweis. Sei $h > 0$ und $D(C_x^h)$ ein abgeschnittener Kreiskegel mit $D(C_x^h) \cap G = \emptyset$. Weiters sei $G_0 := G \cup \big(U_h(x) \setminus D(C_x^h)\big)$. Dann gilt $x \in \overline{G_0}$ und $x \notin G_0$, d.h. $x \in \partial G_0$. Wir werden nun zeigen, dass x ein regulärer Randpunkt von G_0 ist. Dann folgt aus Lemma 4.22, dass x auch regulärer Randpunkt von $G \subseteq G_0$ ist.

Um dies zu beweisen, zeigen wir, dass eine Barriere bei x auf $\Omega := U_h(x) \setminus D(C_x^h)$ existert, welche dann auch eine Barriere auf G_0 ist. Wir müssen also eine positive, superharmonische Funktion w auf Ω mit $\lim_{y \to x, y \in \Omega} w(y) = 0$ finden.

Zunächst sei bemerkt, dass nach Satz 4.23 alle Randpunkte von Ω regulär sind, außer eventuell der Punkt x. Sei nun Ω_2 eine Vergrößerung von Ω um den Faktor 2, also

$$\Omega_2 := \big\{2y - x \,:\, y \in \Omega\big\} \supseteq \Omega.$$

Weiters definieren wir eine Funktion $m : \partial\Omega_2 \to \mathbb{R},\ m(y) = \|y - x\|^2$. Diese Funktion ist auf Ω_2 stetig, daher existiert nach Satz 4.15 die Dirichlet Lösung H_m und ist harmonisch. Wie im Beweis von 4.18 sehen wir zudem, dass $H_m(y) \geq \|y - x\|^2 > 0$ für $y \in \Omega_2$. Um zu zeigen, dass H_m eine solche Barriere w ist, nach der wir suchen, benötigen wir noch den Nachweis von $\lim_{y \to x, y \in \Omega} H_m(y) = 0$. Wir definieren eine Funktion

$$u : \begin{cases} \overline{\Omega_2} \setminus \{x\} & \to \quad \mathbb{R}, \\ \qquad\quad y & \mapsto \quad \begin{cases} H_m(y), & y \in \Omega_2, \\ m(y), & y \in \partial\Omega_2 \setminus \{x\}, \end{cases} \end{cases}$$

und eine Funktion

$$v : \begin{cases} \overline{\Omega} \setminus \{x\} & \to \quad \mathbb{R}, \\ \qquad y & \mapsto \quad u(x + 2(y - x)). \end{cases}$$

Diese Funktionen sind auf ihren Definitionsmengen stetig. Wir wollen nun zeigen, dass $u < v$ auf $\partial\Omega \cap \partial U_h(x)$ gilt. Zunächst gilt $m(z) \leq 2h$ und somit auch $\liminf_{y \to z, y \in \Omega_2} 2h = 2h \geq m(z)$ für $z \in \partial\Omega_2$. Die Konstante Funktion $2h$ ist außerdem nach unten beschränkt und superharmonisch, woraus $2h \in \mathcal{O}_m$ und schließlich $u = H_m = \inf_{o \in \mathcal{O}_m} o \leq 2h$ auf Ω_2 folgt. Zudem ist u auf Ω_2 harmonisch und nicht konstant, denn ansonsten wäre auch $z \mapsto \lim_{y \to z, y \in \Omega_2} u(y) = m(z)$ konstant für $z \in \partial\Omega_2 \setminus \{x\}$, was aber nicht der Fall ist.

Nach Lemma 3.13 nimmt u sein Maximum nicht in Ω_2 an, also gilt $u < 2h$ auf Ω_2 und insbesondere auf $\Omega_2 \cap \partial\Omega \cap \partial U_h(x)$. Weil $v = 2h$ auf $\Omega_2 \cap \partial\Omega \cap \partial U_h(x)$ gilt, folgt auf selbiger Menge $u < v$. Um $u < v$ auf ganz $\partial\Omega \cap \partial U_h(x)$ zu zeigen, fehlen noch Punkte $z \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \cap \partial U_h(x)$. Diese Punkte sind allerdings reguläre Randpunkte von Ω_2, woraus $\lim_{y \to z, y \in \Omega_2 \cap \partial\Omega \cap \partial U_h(x)} u(y) = m(z) = h$ und somit $u(z) = h < 2h = v(z)$ folgt.

Es gilt also $u < v$ auf $\partial\Omega \cap \partial U_h(x)$, was $\frac{u}{v} < 1$ auf selbiger Menge impliziert. Da $\frac{u}{v}$ stetig auf der kompakten Menge $\partial\Omega \cap \partial U_h(x)$ ist, ist sogar das Maximum von $\frac{u}{v}$ kleiner 1. Somit existiert ein $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, sodass $u < \alpha v$ auf $\partial\Omega \cap \partial U_h(x)$. Auf dem Rest von $\partial\Omega \setminus \{x\}$ gilt $u(z) = m(z) = \|z - x\|^2$ und $v(z) = m(x + 2(z - x)) = \|2z - 2x\|^2$, daher $u = \frac{1}{4}v$ und somit auch $u < \alpha v$ auf $\partial\Omega \setminus \{x\}$.

Weil u und v stetig sind, gilt auch $\lim_{y\to z, y\in\Omega}(\alpha v(y) - u(y)) \geq 0$ für $z \in \partial\Omega \setminus \{x\}$. Wählt man nun $\epsilon > 0$ und $c \in \mathbb{R}$, sodass $u_x + c \geq 0$ auf $\overline{\Omega} \setminus \{x\}$ mit der fundamentalen harmonischen Funktion u_x aus Beispiel 1.4, so gilt

$$\liminf_{y\to z, y\in\Omega}(\alpha v(y) - u(y) + \epsilon(u_x(y) + c)) \geq \begin{cases} 0, & z \in \partial\Omega \setminus \{x\} \\ +\infty, & z = x. \end{cases}$$

Aus Lemma 3.14 folgt $\alpha v - u + \epsilon(u_x + c) \geq 0$ auf Ω, und weil $\epsilon > 0$ beliebig war, sogar $\alpha v - u \geq 0$. Daraus folgt

$$\limsup_{y\to x, y\in\Omega} u(y) \leq \alpha \limsup_{y\to x, y\in\Omega} v(y) = \alpha \limsup_{y\to x, y\in\Omega} u(x + 2(y - x)).$$

Es gilt jedoch $\limsup_{y\to x, y\in\Omega} u(y) = \limsup_{y\to x, y\in\Omega} u(x + 2(y - x))$. Also muss $\limsup_{y\to x, y\in\Omega} u(y) = 0$ gelten. Weil u nichtnegativ ist, gilt $0 \leq \liminf_{y\to x, y\in\Omega} u(y)$ und daher $\lim_{y\to x, y\in\Omega} u(y) = 0$. Auf Ω stimmt u mit H_m überein, womit letztendlich

$$\lim_{y\to x, y\in\Omega} H_m(y) = 0.$$

❑

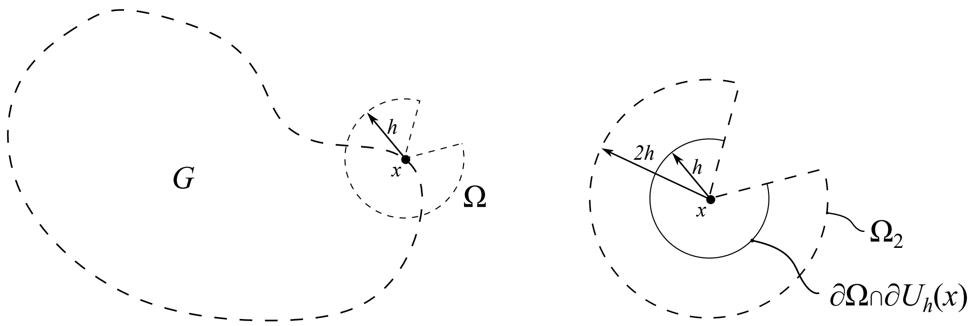

Abbildung 3: Veranschaulichung zum Beweis von Satz 4.25 im $\mathbb{R}^2$.

Literatur

[ABR] Sheldon Axler, Paul Bourdon und Wade Ramey: *Harmonic Function Theory*, Springer-Verlag, New York 1992

[E] Lawrence Evans: *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998

[H] Lester L. Helms: *Potential Theory*, Springer-Verlag, London 2009

[HK] W.K. Hayman and P.B. Kennedy: *Subharmonic Functions*, Academic Press, London 1976

[KM] Michael Kaltenbäck: *Analysis 3*, Vorlesungsskriptum Version WS 2015/2016

[KN] Norbert Kusolitsch: *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2014