B A C H E L O R A R B E I T

Ein Alternativer Zugang zu Bochner-Intergralen

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.

Michael Kaltenbäck

durch

Katerina Uncovska
Matrikelnummer: 1427514

Wien, am 14. April 2020

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Thema dieser Arbeit ist ein alternativer Zugang zu Bochner-Integralen. Im ersten Kapitel werden Resultate präsentiert, auf denen unser Konstrukt später aufbauen wird. Zunächst hält es sich sehr nahe an [Rud91], Kapitel 3, und befasst sich, aufbauend auf dem Satz von Banach-Alaoglu, mit der *Metrisierbarkeit* der dualen Einheitskugel.
Das zweite Kapitel wiederholt die Konzepte der signierten Maße, der Hahn-Zerlegung, der komplexen Maße und der Variation, bekannt aus [WKB16], [Kal13], [Rud87] und [Kus14]. Ziele sind ein Satz für komplexe Maße, der dem Satz von Fubini ähnelt, und der Darstellungssatz von Riesz-Markov.
Das dritte Kapitel befasst sich mit Begriffen der *Messbarkeit* aus [Sch17] und [Wer07]. Zuletzt werden im vierten Kapitel das Integral hergeleitet und im fünften dessen Eigenschaften diskutiert.

1. Resultate aus der Banachraumtheorie

Wir wollen zunächst an einige Resultate aus der Banachraumtheorie erinnern, die wir im Verlauf dieser Arbeit benötigen werden.

Sei im Folgenden $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ein hilfreiches Werkzeug wird für uns die *Metrisierbarkeit* topologischer Räume sein.

Definition 1.1 Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *metrisierbar*, wenn es eine Metrik d auf X derart gibt, dass die von dieser Metrik erzeugte Topologie $\mathcal{T}(d)$ mit $\mathcal{T}$ übereinstimmt.

Lemma 1.2 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktetrennende Familie stetiger reellwertiger Funktionen auf X. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar.*

Beweis. Da stetige Funktionen auf Kompakta beschränkt sind, können wir durch Skalierung $\|f_n\|_\infty \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Definiere für $x, y \in X$

$$d(x,y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \left| f_n(x) - f_n(y) \right|. \tag{1.1}$$

Die Summe konvergiert, denn sie hat die Majorante $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-(n-1)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.
Da nur über Beträge summiert wird, gilt $d(x,y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$. Außerdem ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktetrennend, woraus für $x \neq y$ folgt, dass $d(x,y) > 0$.
Zudem gelten Symmetrie und Dreiecksungleichung, da $(\xi, \eta) \mapsto |\xi - \eta|$ diese Eigenschaften hat. Also ist d eine Metrik.

Die f_n sind stetig und (1.1) konvergiert nach dem Weierstraß-Kriterium [vgl. [Kal14], Korollar 6.7.4] gleichmäßig. Also ist d auf $X \times X$, versehen mit der Produkttopologie, stetig [vgl. [Kal14], Korollar 6.6.13]. Für $x \in X$ ist dann auch $y \mapsto d(x,y)$ stetig.
Dementsprechend sind, laut Definition der Stetigkeit, alle bezüglich d offenen Kugeln $U_\epsilon(x) = \{y \in X | d(x,y) < \epsilon\}$ in $\mathcal{T}$ enthalten. Wir haben somit $\mathcal{T}(d) \subseteq \mathcal{T}$ gezeigt.

Um Gleichheit zu zeigen, betrachten wir $id_X \colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}(d))$. Wenn wir zeigen können, dass id_X ein Homöomorphismus ist, wird $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}$ folgen. Offensichtlich ist id_X bijektiv und wegen $\mathcal{T}(d) \subseteq \mathcal{T}$ stetig. Für die Stetigkeit von $id_X^{-1} : (X, \mathcal{T}(d)) \to (X, \mathcal{T})$ weisen wir nach, dass das Urbild unter id_X^{-1} einer in $(X, \mathcal{T})$ abgeschlossenen Menge in $(X, \mathcal{T}(d))$ abgeschlossen ist. Eine solche Menge $A \subseteq X$ ist als abgeschlossene Menge des kompakten Raumes $(X, \mathcal{T})$

selber kompakt [vgl. [Kal15] Lemma 12.11.7 (i)] und wegen der Stetigkeit von id_X auch

$$(id_X^{-1})^{-1}(A) = id_X(A) \subseteq X.$$

Da $(X, \mathcal{T}(d))$ von einer Metrik erzeugt wird und in Folge Hausdorff ist, erhalten wir die Abgeschlossenheit bzgl. $\mathcal{T}(d)$ [vgl. [Kal15] Lemma 12.11.7 (iii)].

□

Ein topologischer Vektorraum [vgl. [WKB16], Kapitel 2.1] heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare, dichte Teilmenge gibt. Wir bezeichnen mit X' den *topologischen Dualraum* von X, also den Vektorraum aller Funktionen $x' \colon X \to \mathbb{C}$, die linear und stetig sind. Mit $(X')^*$ bezeichnen wir den algebraischen Dualraum von X', also den Vektorraum aller linearen Abbildungen von X' nach $\mathbb{C}$.

Betrachte die lineare Abbildung $\iota \colon X \to (X')^*$ definiert durch

$$\iota(x) \colon \begin{cases} X' \to \mathbb{C} \\ \iota(x)(x') = x'(x). \end{cases}$$

Die *schwach-* Topologie* $\sigma(X', X)$ ist definiert als die gröbste (initiale) Topologie auf X', so dass alle $x'' \in \iota(X)$ stetig auf X' sind.

Mithilfe von Lemma 1.2 lässt sich das folgende Lemma beweisen.

Lemma 1.3 *Sei X ein separabler topologischer Vektorraum und $K \subseteq X'$ schwach*- kompakt. Dann ist $(K, \sigma(X', X)|_K)$ metrisierbar.*

Beweis. Da X separabel ist, gibt es eine dichte abzählbare Teilmenge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ von X. Wir definieren durch $f_n(x') := x'(x_n)$ Funktionen $f_n \colon X' \to \mathbb{C}$. Nach Definition der schwach*-Topologie ist jedes f_n stetig. Falls $f_n(x') = f_n(y')$, also $x'(x_n) = y'(x_n)$, für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt wegen der Dichteeigenschaft der $\{x_n\}$ und der Stetigkeit $x' = y'$. Also ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine punktetrennende, abzählbare Folge stetiger Funktionen. Aus dem vorigen Lemma angewandt auf $(f_n|_K)$ folgt schließlich die Metrisierbarkeit.

□

Wir wenden uns zuletzt Banachräumen zu. Die abgeschlossene Einheitskugel $K_1^{X'}(0)$ in X' ist nach dem Satz von Banach-Alaoglu bezüglich der schwach-* Topologie kompakt [[WKB16], Satz 5.5.5]. Wir bringen ein wichtiges Resultat zum Zusammenhang von X und $K_1^{X'}(0)$.

Satz 1.4 *Sei X ein Banachraum und $\psi \colon X \to C(K_1^{X'}(0), \mathbb{C})$ jene Funktion, die x auf $\iota(x)|_{K_1^{X'}(0)}$ abbildet. Dann ist ψ isometrisch und $\psi(X)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $C(K_1^{X'}(0), \mathbb{C})$.*

Beweis. Mit [[WKB16], Korollar 5.2.4] erhalten wir

$$\begin{aligned}\|\psi(x)\|_\infty = \left\|\iota(x)|_{K_1^{X'}(0)}\right\|_\infty &= \sup\{|\iota(x)(x')| : x' \in K_1^{X'}(0)\} \\ &= \sup\{|x'(x)| : x' \in K_1^{X'}(0)\} = \|x\|\,.\end{aligned}$$

Da ψ offenbar linear ist, bildet $\psi(X)$ einen Unterraum von $C(K_1^{X'}(0), \mathbb{C})$ der wegen der soeben gezeigten Isometrieeigenschaft ein Banachraum ist. Somit folgt die Abgeschlossenheit von $\psi(X)$.

□

Zuletzt erinnern wir noch an ein Resultat aus [Kal16] über die Stetigkeit von Parameterintegralen.

Lemma 1.5 *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, (T, d) ein metrischer Raum, $t_0 \in T$ und $F\colon \Omega \times T \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ eine Funktion derart, dass*

(i) $\omega \mapsto F(\omega, t)$ für alle $t \in T$ integrierbar ist,

(ii) $t \mapsto F(\omega, t)$ stetig in t_0 für fast alle $\omega \in \Omega$ ist,

(iii) es eine offene Kugel $U_\delta(t_0)$ um t_0 und eine auf Ω integrierbare Funktion $h\colon \Omega \to [0, +\infty]$ derart gibt, dass für alle $t \in U_\delta(t_0)$ die Ungleichung

$$|F(\cdot, t)| \leq h$$

μ-fast überall gilt.

Dann ist die Funktion $G(t) := \int_\Omega F(\cdot, t)\, d\mu$ bei t_0 stetig.

Beweis. Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T$ eine beliebige, gegen t_0 konvergente Folge. Ab einem Index n_0 gilt $t_n \in U_\delta(t_0)$. Ist N die Vereinigung der Ausnahmenullmengen aus der zweiten und der dritten Voraussetzung zu den Funktionen $F(\cdot, t_0)$ sowie $F(\cdot, t_{n_0}), F(\cdot, t_{n_0+1}), \ldots$, so folgt $\mu(N) = 0$. Für $n \geq n_0$ und $\omega \in \Omega \backslash N$ gilt

$$|F(\omega, t_n) - F(\omega, t_0)| \leq 2h(\omega)$$

und

$$\lim_{n\to\infty} |F(\omega, t_n) - F(\omega, t_0)| = 0.$$

Wegen des Satzes von der beschränkten Konvergenz folgt

$$|G(t_0) - G(t_n)| = \left|\int F(\cdot, t_n) - F(\cdot, t_0)\, d\mu\right| \leq \int |F(\cdot, t_n) - F(\cdot, t_0)|\, d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

2. Resultate aus der Maßtheorie

Wir wollen zunächst an den Begriff des signierten Maßes und die Hahn-Zerlegung erinnern.

Definition 2.1 Eine Mengenfunktion ν auf einem Messraum $(\Omega, \mathfrak{A})$ wird als ein *signiertes Maß* bezeichnet, wenn gilt

1. $\nu\colon \mathfrak{A} \to (-\infty, \infty]$ oder $\nu\colon \mathfrak{A} \to [-\infty, \infty)$,
2. $\nu(\emptyset) = 0$,
3. $\nu\big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$ für alle Folgen disjunkter Mengen A_n aus $\mathfrak{A}$.

Das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$ wird ein *signierter Maßraum* genannt.

Ein $A \in \mathfrak{A}$ wird als ν-positiv bezeichnet, wenn $\nu(B) \geq 0$ für alle Teilmengen $B \in \mathfrak{A}$ von A. Analog ist A ν-negativ, wenn $\nu(B) \leq 0$, und eine ν-Nullmenge, wenn $\nu(B) = 0$, für alle $B \in \mathfrak{A}$ mit $B \subseteq A$.

Eine *Hahn-Zerlegung* ist eine Zerlegung $\{P, P^c\}$ von Ω, bei der P ν-positiv und P^c ν-negativ ist.

Eine *Jordan-Zerlegung* ist die Zerlegung eines signierten Maßes ν in $\nu = \nu_+ - \nu_-$ derart, dass ν_+ und ν_- nichtnegative Maße und *singulär* zu einander sind, also dass es eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ gibt, für die $\nu_+(A) = 0$ und $\nu_-(\Omega \backslash A) = 0$, gilt.

Bemerkung 2.2 Laut dem *Hahnschen Zerlegungssatz* gibt es zu jedem signierten Maß ν auf einem Messraum $(\Omega, \mathfrak{A})$ eine Hahn-Zerlegung $\{P, P^c\}$. Darauf aufbauend besagt der *Zerlegungssatz von Jordan*, dass jedes signierte Maß ν genau eine Jordan-Zerlegung besitzt. Diese erhält man durch $\nu_+(A) := \nu(A \cap P)$ und $\nu_-(A) := \nu(A \cap P^c)$ für beliebige $A \in \mathfrak{A}$.

Wir wollen auch komplexe Mengenfunktionen studieren.

Definition 2.3 Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum. Eine Funktion $\mu\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ heißt *komplexes Maß*, wenn für alle paarweise disjunkten Folgen A_n, $n \in \mathbb{N}$, von Mengen aus $\mathfrak{A}$

$$\mu\Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

gilt.

Die Menge aller komplexen Maße $\mu\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ bezeichnet man mit $M(\Omega, \mathfrak{A})$. Endliche nichtnegative Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ sind nach Definition spezielle komplexe Maße. Auf der anderen Seite sind reellwertige komplexe Maße signierte Maße.

Für ein komplexes Maß μ wird durch $(A \in \mathfrak{A})$

$$|\mu|(A) := \sup\{\sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(A_n)| : A_k \in \mathfrak{A}, k \in \mathbb{N}, \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n = A\}$$

eine nichtnegative Mengenfunktion $|\mu| : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ definiert, die als *Variation* von μ bezeichnet wird. Nach Lemma 2.4 ist es das kleinste nichtnegative Maß ν auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $|\mu(A)| \leq \nu(A)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$.

Lemma 2.4 *Die Variation $|\mu|$ ist ein nichtnegatives Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.*

Beweis. Offensichtlich ist $|\mu|(\emptyset) = 0$. Für σ-Additivität können wir die Variation in beide Richtungen abschätzen.

Sei $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Zerlegung von A, also $A = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Seien weiter t_n nichtnegative Zahlen derart, dass

$$t_n < |\mu|(A_n).$$

Dann hat jedes A_n nach Definition der Variation von μ eine weitere disjunkte Zerlegung $\{A_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$, für die

$$t_n \leq \sum_{m\in\mathbb{N}} |\mu(A_{n,m})|$$

gilt. Betrachtet man $\{A_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ als Zerlegung von A, so folgt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} t_n \leq \sum_{m,n\in\mathbb{N}} |\mu(A_{n,m})| \leq |\mu|(A).$$

Da die t_n beliebig waren, gilt die Gleichung auch, wenn wir links zum Supremum übergehen, womit

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu|(A_n) \leq |\mu|(A).$$

Für die andere Ungleichung sei eine disjunkte Zerlegung $\{B_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ von A gegeben. Für festgehaltenes m ist dann $\{A_n \cap B_m\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zerlegung von B_m und für festes n ist $\{A_n \cap B_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine Zerlegung von A_n, womit

$$\begin{aligned} \sum_{m\in\mathbb{N}} |\mu(B_m)| &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \cap B_m) \right| \leq \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(A_n \cap B_m)| \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} |\mu(A_n \cap B_m)| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu|(A_n). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Da diese Gleichung für jede Partition $\{B_m\}$ von A gilt, folgt

$$|\mu|(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu|(A_n).$$

Es sei noch angemerkt, dass das Vertauschen der Summen in (2.1) möglich ist, wenn man Fubini verwendet und die Summen als Integral mit Zählmaß auffasst.

Insgesamt ist $|\mu|$ also σ-additiv.

$\square$

Bemerkung 2.5 Ist μ schon nichtnegativ, so folgt unmittelbar $\mu = |\mu|$.

Wir wollen auch zeigen, dass $|\mu|$ ein endliches Maß ist.

Bemerkung 2.6 Sind $\nu_j, j = 1,\dots,4$, endliche und nichtnegative Maße in dem aus der Maßtheorie bekannten Sinne, so ist klarerweise $\nu_1 - \nu_2 + i(\nu_3 - \nu_4)$ ein komplexes Maß. Die Voraussetzung, dass es sich hier um endliche Maße handelt, ist wesentlich, da sonst undefinierte Ausdrücke wie $\infty - \infty$ auftreten könnten.
Ist umgekehrt μ ein komplexes Maß, so ist sicher auch $\overline{\mu}$, definiert durch $\overline{\mu}(A) = \overline{\mu(A)}$, ein komplexes Maß und infolge auch Re $\mu = \frac{\mu+\overline{\mu}}{2}$ sowie Im $\mu = \frac{\mu-\overline{\mu}}{2i}$. Die beiden letzten Maße sind offensichtlich reellwertig, womit Re μ und Im μ $\mathbb{R}$-wertige signierte Maße darstellen.

Nach dem Zerlegungssatz von Jordan gilt Re $\mu = \mu_{r,+} - \mu_{r,-}$, Im $\mu = \mu_{i,+} - \mu_{i,-}$ und daher $\mu = \mu_{r,+} - \mu_{r,-} + i(\mu_{i,+} - \mu_{i,-})$ mit nichtnegativen Maßen $\mu_{r,+}, \mu_{r,-}, \mu_{i,+}, \mu_{i,-} : \mathfrak{A} \to [0, +\infty)$, wobei diese Zerlegungen von Re μ, Im μ eindeutig sind, wenn man verlangt, dass $\mu_{r,+}$ und $\mu_{r,-}$, bzw. $\mu_{i,+}$ und $\mu_{i,-}$ singulär zu einander sind.

Lemma 2.7 *Für die Variation von μ gilt $|\mu|(\Omega) < +\infty$.*

Beweis. Schreiben wir ein komplexes Maß μ mit Hilfe der Hahnschen Zerlegung wie in Bemerkung 2.6 als $\mu = \mu_{r,+} - \mu_{r,-} + i(\mu_{i,+} - \mu_{i,-})$, so folgt

$$\begin{aligned}
|\mu|(\Omega) &= \sup\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| : A_k \in \mathfrak{A}, k \in \mathbb{N}, \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n = \Omega \Big\} \\
&\leq \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_{r,+}(A_n) + \mu_{r,-}(A_n) + \mu_{i,+}(A_n) + \mu_{i,-}(A_n)) : A_k \in \mathfrak{A}, k \in \mathbb{N}, \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n = \Omega \Big\} \\
&= \mu_{r,+}(\Omega) + \mu_{r,-}(\Omega) + \mu_{i,+}(\Omega) + \mu_{i,-}(\Omega) < +\infty.
\end{aligned}$$

$\square$

Wegen Lemma 2.4 und Lemma 2.7 erhalten wir

Korollar 2.8 *Für jedes komplexe Maß μ ist $|\mu|$ ein endliches, nichtnegatives Maß.*

Definition 2.9 Für ein komplexes Maß μ auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ bezeichnen wir mit $\|\mu\| := |\mu|(\Omega)$ die *Totalvariation* von μ.

Bemerkung 2.10 Die Abbildung $\mu \mapsto \|\mu\|$ ist in der Tat eine Norm auf dem komplexen Vektorraum $M(\Omega, \mathfrak{A})$ aller komplexen Maße. Mit dieser Norm ist $M(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Banachraum.

Genauso wie nach signierten Maßen lassen sich Funktionen auch nach komplexen Maßen integrieren. Betrachtet man ein Doppelintegral mit einem komplexen Maß, so lässt sich ein zum Satz von Fubini ähnliches Resultat formulieren.

Satz 2.11 (Satz von Fubini angepasst für komplexe Maße). *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maß-, $(Y, \mathcal{L})$ ein Messraum und $\phi\colon \Omega \times Y \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion. Sei weiters $\nu \in M(Y, \mathcal{L})$ ein komplexes Maß und gelte $\phi^{-1}(\mathbb{C}\backslash\{0\}) \subseteq A \times Y$ mit σ-endlichem $A \subseteq \Omega$.*

Ist ϕ integrierbar bezüglich $\mu \otimes |\nu|$, so folgt

$$\int_\Omega \int_Y \phi(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) = \int_Y \int_\Omega \phi(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y).$$

Beweis. Nach Definition ist ν absolut stetig bezüglich $|\nu|$. Laut dem Satz von Radon-Nikodym [[Kus14], vgl. Satz 11.19] gibt es eine Funktion $f\colon Y \to \mathbb{C}$, die Dichte von ν bezüglich $|\nu|$, sodass $\nu(L) = \int_L f\, d|\nu|$ und $\int_Y g\, d\nu = \int_Y g \cdot f\, d|\nu|$ für alle $L \in \mathcal{L}$ und alle messbaren und bezüglich $|\nu|$ integrierbaren $g : Y \to \mathbb{C}$. Für die Dichte gilt $|\nu|$-f.ü. $|f| = 1$, vgl. [[Kal13], Korollar 3.2.7].

Betrachten wir $\phi \cdot (f \circ \pi_Y)$, wobei $\pi_Y\colon \Omega \times Y \to Y$ die Projektion auf die zweite Komponente bezeichnet, erkennt man, dass wegen $|f| = 1$ und der Integrierbarkeit von ϕ dieser Ausdruck nach $|\nu|$ integrierbar ist. Wegen $\phi^{-1}(\mathbb{C}\backslash\{0\}) \subseteq A \times Y$ lässt sich der Satz von Fubini anwenden und wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_Y \phi(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) &= \int_\Omega \int_Y \phi(x,y) \cdot f(y)\, d|\nu|(y)\, d\mu(x)\\ &= \int_Y \int_\Omega \phi(x,y) \cdot f(y)\, d\mu(x)\, d|\nu|(y)\\ &= \int_Y \int_\Omega \phi(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y).\end{aligned}$$

□

Definition 2.12 Trage Ω nun eine Hausdorffsche und lokalkompakte Topologie $\mathcal{T}$ und seien die Elemente von $\mathfrak{A}$ die Borelmengen, also sei $\mathfrak{A}$ die von $\mathcal{T}$ erzeugte σ-Algebra. Ein Maß $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ heißt Borelmaß, falls $\mu(K) < +\infty$ für alle kompakten $K \subseteq \Omega$.

Weiters heißt ein solches Maß *regulär*, falls für alle $A \in \mathfrak{A}$

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ ist kompakt}\}$$

und

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) : O \supseteq A, O \text{ ist offen}\}.$$

Ein $\mu \in M(\Omega, \mathfrak{A})$ heißt regulär, falls $|\mu|$ regulär ist. Wir schreiben $\mu \in M_{reg}(\Omega)$ dafür.

Sehr wichtig in dieser Arbeit wird folgender grundlegender Satz sein, der hier aber aufgrund seiner Länge nicht bewiesen wird. Der Beweis kann in [[Rud87], Theorem 2.14, Theorem 6.19] nachgelesen werden.

Satz 2.13 (Darstellungssatz von Riesz-Markov).
Ist L ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, so gilt $C_0(L, \mathbb{C})' \cong M_{reg}(L)$.
Genauer ist die Abbildung $\Phi : M_{reg}(L) \to C_0(L, \mathbb{C})'$, die einem regulären komplexen Borelmaß μ das durch

$$\Phi(\mu)f := \int_L f \, d\mu, \;\; f \in C_0(L, \mathbb{C}),$$

definierte lineare Funktional $\Phi(\mu)$ zuordnet, ein isometrischer Isomorphismus von $M_{reg}(L)$ auf $C_0(L)'$.

3. Messbarkeit

Um Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ zu integrieren, kommt man für gewöhnlich mit $\mathbb{R}$- bzw. $\mathbb{C}$-wertigen Lebesgue-Integralen aus, indem man die Integrale komponentenweise berechnet. Thema dieser Arbeit sind jedoch Funktionen, die von einem abstrakten Maßraum in einen beliebigen Banachraum X abbilden.
In diesem Kontext genügt die übliche Definition von Messbarkeit nicht mehr. Eine strengere Definition der Messbarkeit - der *μ-starken Messbarkeit* - ist nötig. Sei im weiteren X ein Banachraum über $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon \Omega \to X$ eine zu integrierende Funktion.

Bekannterweise ist die Borelalgebra $\mathcal{B}(X)$, die von den offenen Teilmengen von X erzeugte σ-Algebra. Ihre Elemente nennen wir *Borelmengen*. Eine Funktion $f\colon \Omega \to X$ ist *$\mathfrak{A}$-$\mathcal{B}(X)$-messbar*, wenn die Urbilder von Borelteilmengen von X in $\mathfrak{A}$ liegen.
Sei Y ein weiterer Banachraum und $g\colon X \to Y$ $\mathcal{B}(X)$-$\mathcal{B}(Y)$-messbar. Ist $f\colon \Omega \to X$ eine messbare Funktion wie oben, dann ist die Verkettung $g \circ f\colon \Omega \to Y$ messbar bezüglich $\mathfrak{A}$. Zuletzt sei noch angemerkt, dass jede stetige Funktion $g\colon X \to Y$ Borel-messbar ist, da die Urbilder eines Erzeugers von $\mathcal{B}(Y)$, nämlich die Menge aller offenen Teilmengen, in $\mathcal{B}(X)$ liegen.

Definition 3.1 Seien X ein Banachraum und $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(i) Eine *Treppenfunktion* ist eine Funktion auf Ω mit Werten in X der Form $\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} x_i$, mit $A_i \in \mathfrak{A}$, $x_i \in X$.

(ii) Eine Funktion $f\colon \Omega \to X$ heißt *stark messbar*, wenn es eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen derart gibt mit $f(\omega) = \lim_{n\to\infty} g_n(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.

(iii) Eine *μ-Treppenfunktion* ist eine Treppenfunktion $\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} x_i$ mit $\mu(A_i) < +\infty$ für alle $i \in 1, ..., n$.

(iv) Wir bezeichnen die Funktion $f\colon \Omega \to X$ als *μ-stark messbar*, wenn es eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von μ-Treppenfunktionen derart gibt, dass $f(\omega) = \lim_{n\to\infty} g_n(\omega)$ für μ-fast alle $\omega \in \Omega$.

(v) Eine Funktion $f\colon \Omega \to X$ heißt *schwach messbar,* wenn für jedes $x' \in X'$ die Funktion $x' \circ f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ messbar im klassischen Sinne, also bzgl. der σ-Algebren $\mathfrak{A}$ und $\mathcal{B}(\mathbb{C})$, ist.

(vi) Eine Funktion $f\colon \Omega \to X$ hat *μ-f.ü. separables Bild*, wenn für eine gewisse μ-Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ die Menge $f(\Omega \backslash N)$ separabel ist.

Bemerkung 3.2 Für jede Treppenfunktion existiert eine *Standardform* $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} x_i$, mit nichtleeren und paarweise disjunkten Mengen A_i und paarweise verschiedenen x_i. Mit Hilfe dieser Standardform sieht man, dass jede Treppenfunktion $g = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} x_i$ stets messbar ist:

$$g^{-1}(B) = \bigcup_{\substack{i=1,\\ x_i \in B}}^{n} A_i \in \mathfrak{A} \text{ für alle } B \in \mathcal{B}(x).$$

Für Satz 3.4 benötigen wir folgendes Resultat über Separabilität.

Lemma 3.3 *Sei X ein normierter Raum.*

(i) Ist $M \subseteq X$ separabel (bzgl. der Spurtopologie) und $N \subseteq M$, dann ist auch N separabel.

(ii) Ist $M \subseteq X$ separabel, so gibt es eine Folge $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ bestehend aus normierten Funktionalen aus X' mit $\|y\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle y, x_n'\rangle|$ für alle $y \in M$.

(iii) Ist $M \subseteq X$ separabel, so ist auch die abgeschlossene lineare Hülle von M separabel.

Beweis.
(i) Nach [[Kal15], Proposition 12.14.7] ist für einen metrischen Raum die Separabilität äquivalent zur Existenz einer abzählbaren Basis der zugeordneten Topologie. Teilmengen von X sind klarerweise wieder metrische Räume, sodass die Aussage daraus folgt, dass sich das zweite Abzählbarkeitsaxiom auf Teilräume überträgt.

(ii) Sei $\{y_m : m \in \mathbb{N}\}$ dicht in M. Nach dem Satz von Hahn-Banach, vgl. [[WKB16], Korollar 5.2.4], gilt $\|x\| = \sup\{|\langle x, x'\rangle| : x' \in X', \|x'\| = 1\}$ für alle $x \in X$. Ist $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge aus positiven Zahlen, dann gibt es für alle $(m,k) \in \mathbb{N}^2$ ein $x'_{m,k} \in X'$ mit

$$\left\|x'_{m,k}\right\| = 1 \text{ und } \left|\langle y_m, x'_{m,k}\rangle\right| \geq (1-\epsilon_k)\left\|y_m\right\|.$$

Seien $y \in M$ und $\delta \in (0,1)$ gegeben. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\epsilon_{k_0} \leq \delta$ und ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\|y - y_j\| \leq \delta$, wodurch

$$\begin{aligned}(1-\delta)\|y\| &\leq (1-\epsilon_{k_0})\|y\| \leq (1-\epsilon_{k_0})\|y_j\| + (1-\epsilon_{k_0})\|y-y_j\| \leq \left|\langle y_j, x'_{j,k_0}\rangle\right| + \delta \\ &\leq \left|\langle y, x'_{j,k_0}\rangle\right| + \left|\langle y_j - y, x'_{j,k_0}\rangle\right| + \delta \leq \sup_{(m,k)\in\mathbb{N}^2} \left|\langle y, x'_{m,k}\rangle\right| + 2\delta.\end{aligned}$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, folgt $\|y\| \leq \sup_{(m,k)\in\mathbb{N}^2} \left|\langle y, x'_{m,k}\rangle\right|$. Die Ungleichung $\sup_{(m,k)\in\mathbb{N}^2} \left|\langle y, x'_{m,k}\rangle\right| \leq \|y\|$ gilt offensichtlich auch. Ist $(m(n),k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Durchnummerierung von $\mathbb{N}^2$ und definieren wir $x'_n :\, = x'_{m(n),k(n)}$, so folgt das Gewünschte.

(iii) Die lineare Hülle von M ist nach Definition dicht in der abgeschlossenen lineare Hülle. Es gilt also zu zeigen, dass es eine abzählbare, dichte Teilmenge der linearen Hülle von M gibt. Ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ eine abzählbare in M dichte Menge, so zeigt man leicht, dass

$$H := \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i | n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{Q}\},$$

dicht in der linearen Hülle von M ist. Da sowohl $\mathbb{Q}$ als auch $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ abzählbare Mengen sind, ist H abzählbar.

$\square$

Einen Zusammenhang zwischen starker-, schwacher-, bzw. Messbarkeit stellt der Satz von Pettis dar.

Satz 3.4 (Messbarkeitssatz von Pettis, 1. Fassung). *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum und $f\colon \Omega \to X$ eine Funktion. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent.*

(i) f ist stark messbar.

(ii) f ist messbar und hat separables Bild.

(iii) f ist schwach messbar und hat separables Bild.

Beweis.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Seien f_n Treppenfunktionen, die punktweise gegen f konvergieren. Da $\mathcal{B}(X)$ von den offenen Mengen erzeugt wird, folgt die Messbarkeit von f, wenn wir $f^{-1}(O) \in \mathfrak{A}$ für alle offenen $O \subseteq X$ zeigen können. Dazu definiere für $r > 0$ die Mengen $O_r := \{y \in X : d(y, O^c) > r\}(\subseteq O)$, wobei d in diesem Kontext für den Abstand zwischen Element und Menge steht. Da die O_r als offene Mengen in $\mathcal{B}(X)$ enthalten und die f_n messbar sind, genügt es,

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} f_k^{-1}(O_{\frac{1}{m}}) \tag{3.1}$$

zu zeigen.
In der Tat folgt aus $f_k(\omega) \in O_{1/m}$ für alle $k \geq n$, dass $f(\omega) \in \overline{O}_{\frac{1}{m}} \subseteq O_{\frac{1}{2m}} \subseteq O$, also $\omega \in f^{-1}(O)$. Ist andererseits ω im Komplement der rechten Seite enthalten, dann gibt es für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ein $k(m,n) \geq n$ mit $d(f_{k(m,n)}(\omega), O^c) \leq \frac{1}{m}$. Nun ist $(f_{k(n,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ein Teilnetz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aus $f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_{k(n,n)}(\omega)$ folgt

$$d(f(\omega), O^c) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{d(f_{k(n,n)}(\omega), O^c)}_{\leq\frac{1}{n}} = 0.$$

Aus der Analysis ist bekannt, dass dies gleichbedeutend ist mit $f(\omega) \in \overline{O^c} = O^c$, sodass ω im Komplement der linken Seite von (3.1) enthalten ist. Weiters gilt $f(\Omega) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(\Omega) =: M$. Da jedes f_n endlichen Bildbereich hat, ist M separabel und nach Lemma 3.3(i) auch $f(\Omega)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Das folgt sofort aus der bekannten Tatsache, dass Verkettungen messbarer Funktionen wieder messbar sind, und daraus, dass die $x' \in X'$ als stetige Funktionen messbar sind.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sei $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge von $f(\Omega)$. Klarerweise ist auch $D := \{y_n - y_m : n, m \in \mathbb{N}\}$ abzählbar, sodass $M := \overline{D}$ ebenfalls separabel ist. M umfasst sicher $\{f(\omega) - y_m : \omega \in \Omega, m \in \mathbb{N}\}$. Nach Lemma 3.3(ii) gibt es eine Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von normierten Vektoren aus X' mit $\|z\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle z, x'_n\rangle|$ für alle $z \in M$. Mit den $\langle f, x'_n\rangle$ ist für festes $k \in \mathbb{N}$ auch

$$\omega \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle f(\omega) - y_k, x'_n\rangle| = \|f(\omega) - y_k\| \tag{3.2}$$

messbar. Um eine punktweise gegen f konvergente Folge von Treppenfunktionen zu finden, benötigen wir zunächst Hilfsfunktionen. Dazu sei für $\omega \in \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$

$$k(n, \omega) := \min\{k \in \{1, ..., n\} : \|f(\omega) - y_k\| = \underset{1\le j\le n}{min} \|f(\omega) - y_j\|\},$$

und $g_n(\omega) := y_{k(n,\omega)}$. Da $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $f(\Omega)$ ist, gilt $\lim_{n\to\infty} g_n(\omega) = f(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Jedes g_n nimmt nur endlich viele Werte an, da $g_n(\omega) \in \{y_1, \dots, y_n\}$. Es gilt nur noch zu zeigen, dass $g_n^{-1}(\{y_k\}) \in \mathfrak{A}$ für alle $1 \le k \le n$, was aber unmittelbar aus

$$\begin{aligned} g_n^{-1}(\{y_k\}) = \{\omega \in \Omega : \|f(\omega) - y_k\| = \min_{1\le j\le n} \|f(\omega) - y_j\|\} \\ \cap \bigcap_{1\le i<k} \{\omega \in \Omega : \|f(\omega) - y_i\| > \min_{1\le j\le n} \|f(\omega) - y_j\|\} \end{aligned}$$

und der Messbarkeit von (3.2) folgt. □

Lemma 3.5 *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Für eine Funktion $f : \Omega \to X$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.*

(i) Es gibt eine stark messbare Funktion $\tilde{f} : \Omega \to X$ mit $f = \tilde{f}$ μ-f.ü.

(ii) f ist μ-stark messbar.

Insbesondere ist jede Funktion f_0 μ-stark messbar, wenn es eine μ-stark messbare Funktion f mit $f = f_0$ μ-f.ü. gilt.

Beweis. Gilt $f = \lim_{n\to+\infty} g_n$ auf $\Omega \backslash N$ mit $\mu(N) = 0$ und μ-Treppenfunktionen g_n, so ist $\tilde{g}_n := \mathbb{1}_{N^c} \cdot g_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Treppenfunktion. Folglich ist $\lim_{n\to+\infty} \tilde{g}_n = \mathbb{1}_{N^c} \cdot f =: \tilde{f}$ stark messbar. Wegen $\mu(N) = 0$ gilt $f = \tilde{f}$ μ-f.ü.

Gelte umgekehrt $f = \tilde{f}$ μ-f.ü. und $\tilde{f} = \lim_{n\to+\infty} \tilde{g}_n$ punktweise mit Treppenfunktionen $\tilde{g}_n$. Wegen der σ-Endlichkeit gibt es eine monoton wachsende Folge messbarer Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$ und $\mu(A_n) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionen $g_n := \mathbb{1}_{A_n} \cdot \tilde{g}_n$ sind μ-Treppenfunktionen mit $\lim_{n\to+\infty} g_n = \tilde{f}$ punktweise, also $f = \lim_{n\to+\infty} g_n$ μ-f.ü.

□

Wir können jetzt auf die zweite Fassung des Messbarkeitssatzes von Pettis schließen. Wir erinnern an die Definition eines vollständigen Maßraumes: Für jede Menge $N \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(N) = 0$ liegen auch alle Teilmengen $A \subseteq N$ in $\mathfrak{A}$.

Satz 3.6 (Messbarkeitssatz von Pettis, 2. Fassung). *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher, μ-vollständiger Maßraum und $f\colon \Omega \to X$ eine Funktion. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(i) f ist μ-stark messbar,

(ii) f ist messbar und hat μ-f.ü. separables Bild,

(iii) f ist schwach messbar und hat μ-f.ü. separables Bild.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Nach Lemma 3.5 gibt es ein stark messbares $\tilde{f}$ mit $f = \tilde{f}$ μ-f.ü., das wegen Fassung 1 des Pettis'schen Messbarkeitssatzes, Satz 3.4, separables Bild hat. Gilt $f(\omega) = \tilde{f}(\omega)$ für $\omega \in \Omega\backslash N$ mit $\mu(N) = 0$, dann ist $f(\Omega\backslash N) = \tilde{f}(\Omega\backslash N) \subseteq \tilde{f}(\Omega)$ nach Lemma 3.3(i) separabel. Da $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ vollständig ist, überträgt sich die Messbarkeit von $\tilde{f}$ auf f.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Folgt wie im Beweis von Fassung 1.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Sei $N \in \mathfrak{A}$ eine μ-Nullmenge, für die $f(\Omega\backslash N) \subseteq X$ separabel ist. Die Funktion $\tilde{f} := \mathbb{1}_{N^c} \cdot f$ hat separables Bild, denn ist D für $N \neq \emptyset$ dicht in $f(\Omega\backslash N)$, so ist $D \cup \{0\}$ dicht in $\tilde{f}(\Omega)$. Zudem stimmt $\tilde{f}$ μ-f.ü. mit f überein, wodurch $\langle \tilde{f}, x' \rangle = \langle f, x' \rangle$ μ-f.ü. für alle $x' \in X'$. Wegen der Vollständigkeit ist $\tilde{f}$ daher schwach messbar. Nach Fassung 1 des Pettis'schen Messbarkeitssatzes, Satz 3.4, ist $\tilde{f}$ stark messbar, sodass aus Lemma 3.5 die μ-starke Messbarkeit von f folgt.

□

Korollar 3.7 *Ist X separabel und $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher, μ-vollständiger Maßraum, so sind μ-starke Messbarkeit, Messbarkeit und schwache Messbarkeit äquivalent.*

Lemma 3.8 *Für eine schwach messbare Funktion $f\colon \Omega \to X$ mit separablem Bild ist die Abbildung $\omega \mapsto \|f(\omega)\|$ messbar.*

Beweis. Nach Lemma 3.3(iii) gibt es einen abgeschlossenen und separablen Unterraum Y von X mit $Y \supseteq f(\Omega)$. Wir wissen bereits, dass $K_1^{Y'}(0)$ in der schwach-* Topologie kompakt und nach Lemma 1.3 metrisierbar ist. Sei d eine zugehörige Metrik. Für $\epsilon > 0$ besitzt wegen der Kompaktheit die Überdeckung

$$\bigcup_{x' \in K_1^{Y'}(0)} \{y' \in K_1^{Y'}(0) : d(x', y') < \epsilon\}$$

eine endliche Teilüberdeckung. Es existieren also zu $n \in \mathbb{N}$ endlich viele $x_1'^n, ..., x_{m(n)}'^n \in K_1^{Y'}(0)$ mit $K_1^{Y'}(0) = \bigcup_{j=1}^{m(n)} \{y' \in K_1^{Y'}(0) : d(x_j'^n, y') < \frac{1}{n}\}$. Infolge ist die abzählbare Menge $D = \{x_j'^n : 1 \leq k \leq m(n), n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $K_1^{Y'}(0)$ und daher

$$\|f(\omega)\|_X = \sup_{x' \in K_1^{Y'}(0)} |x'(f(\omega))| = \sup_{x' \in D} |x'(f(\omega))| \, .$$

Bekanntlich ist das Supremum über einer abzählbaren Menge messbarer Funktionen messbar [vgl. [Kus14], Satz 7.20]. Da f schwach messbar ist, folgt die Aussage.

$\square$

4. Herleitung eines Integrals

Wir kommen zur zentralen Aussage dieser Arbeit. Die Funktion $\|f\|$ im folgenden Satz ist gemäß Satz 3.8 messbar.

Satz 4.1 *Seien X ein separabler Banachraum, $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \colon \Omega \to X$ eine schwach messbare Funktion mit $\int_\Omega \|f\| \; d\mu < +\infty$. Dann gibt es genau ein $y \in X$ mit*

$$\int_\Omega x'(f(\omega)) \, d\mu(\omega) = x'(y) \quad \textit{für alle} \;\; x' \in X'.$$

Dabei gilt $\|y\| \leq \int_\Omega \|f\| \; d\mu$.

Bemerkung 4.2 Es sei angemerkt, dass die Bedingung von schwacher Messbarkeit nach Satz 3.7 äquivalent ist zur (starken) Messbarkeit, da wir X als separabel angenommen haben.

Für den Beweis dieser Aussage betrachten wir wieder $K := K_1^{X'}(0)$ und die isometrische und lineare Funktion $\psi \colon X \to C(K, \mathbb{C})$ mit $x \mapsto \iota(x)|_K$ wie in Satz 1.4. Zudem definieren wir

$$F \colon \begin{cases} \Omega \times K \to \mathbb{C} \\ (\omega, x') \mapsto (\psi \circ f(\omega))(x') = x'(f(\omega)). \end{cases}$$

Betrachten wir das Parameterintegral dieser Funktion, erhalten wir folgende Aussage.

Lemma 4.3 *Die Funktion*

$$G \colon \begin{cases} K \to \mathbb{C} \\ x' \mapsto \int_\Omega F(\omega, x') \, d\mu(\omega) \end{cases}$$

ist stetig.

Beweis. Sei an dieser Stelle an Lemma 1.5 erinnert. Wir können es auf K anwenden, da K nach Lemma 1.3 metrisierbar ist. Wir wollen die Voraussetzungen für F nachprüfen.

(i) Für den ersten Punkt ist zu zeigen, dass die Funktion $\omega \mapsto F(\omega, x') = x'(f(\omega))$ für alle $x' \in K$ integrierbar ist. In der Tat ist diese Funktion messbar nach Voraussetzung. Zudem gilt

$$\int_\Omega |x'(f(\omega))| \; d\mu(\omega) \leq \int_\Omega \|x'\| \, \|f(\omega)\| \; d\mu(\omega) \leq \int_\Omega \|f(\omega)\| \; d\mu(\omega) < +\infty.$$

(ii) Als nächstes müssen wir zeigen, dass $x' \mapsto F(\omega, x')$ bezüglich der schwach-* Topologie stetig ist. Dazu bemerken wir, dass der rechte Ausdruck für alle $x' \in K$ mit $\psi(f(\omega))(x') = \iota(f(\omega))(x')$ übereinstimmt. Nach der Definition der schwach-* Topologie folgt die Behauptung.

(iii) Für den letzten Punkt wähle $h := \|f\|$, welche voraussetzungsgemäß integrierbar ist. Dabei gilt $|F(x', \cdot)| \leq \|x'\| \, \|f\| \leq \|f\| = h$ für alle $x' \in K$.

Somit ist die Funktion $G(x') = \int_\Omega F(\omega, x') \; d\mu(\omega)$ nach Lemma 1.5 in allen $x' \in K$ stetig, also $G \in C(K, \mathbb{C})$.

□

Lemma 4.4 *Die Funktion G aus Lemma 4.3 ist im Bildraum von ψ enthalten.*

Beweis. Wir wissen bereits, dass G in $C(K, \mathbb{C})$ enthalten ist und dass $\psi(X)$ darin abgeschlossen ist, siehe Satz 1.4. Nach dem Bipolarsatz [vgl. [WKB16], Satz 5.4.6] gilt $\psi(X) = {}^\perp(\psi(X)^\perp)$, womit es genügt $G \in {}^\perp(\psi(X)^\perp)$ nachzuweisen. Nach Definition ist

$$\psi(X)^\perp = \{\eta \in C(K, \mathbb{C})' : \eta(g) = 0 \text{ für alle } g \in \psi(X)\}$$

und

$$^\perp(\psi(X)^\perp) = \{f \in C(K, \mathbb{C}) : \eta(f) = 0 \text{ für alle } \eta \in \psi(X)^\perp\}.$$

Es gilt also $\eta(G) = 0$ für alle $\eta \in \psi(X)^\perp$ zu zeigen.

Nach dem Darstellungssatz von Riesz-Markov, Satz 2.13, ist die Forderung

$$\eta(G) = 0 \text{ für alle } \eta \in \psi(X)^\perp$$

äquivalent zu

$$\int_K G \; d\nu = 0 \text{ für alle } \nu \in M_{reg}(K) \text{ mit } \Phi(\nu) \in \psi(X)^\perp.$$

Dabei sei angemerkt, dass K ein kompakter Hausdorff-Raum ist. Der linke Ausdruck existiert, da G stetig und auf dem Kompaktum K beschränkt ist.
Setzt man die Definition der Funktion ein, dann erhalten wir

$$\int_K \int_\Omega F(\omega, x') \; d\mu(\omega) \; d\nu(x').$$

Wir überprüfen die Voraussetzungen für den Satz von Fubini, Satz 2.11.

Um Messbarkeit von $(\omega, x') \mapsto F(\omega, x')$ einzusehen, werden wir diese Funktion als Grenzwert einer Folge messbarer Funktionen darstellen.

Da K versehen mit der schwach-* Topologie kompakt und gemäß Lemma 1.3 metrisierbar durch eine Metrik d ist, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine Überdeckung

$$K = \bigcup_{j=1}^{N(\epsilon)} K_j^\epsilon \text{ mit } d(K_j^\epsilon) < \epsilon \text{ für } j = 1, \ldots, N(\epsilon),$$

wobei $d(K_j^\epsilon) = \sup\{d(x,y) : x, y \in K_j^\epsilon\}$. Definiert man

$$M_j^\epsilon := K_j^\epsilon \backslash \big(K_1^\epsilon \cup \cdots \cup K_{j-1}^\epsilon\big),$$

so erhalten wir sogar eine paarweise disjunkte Überdeckung $K = \dot{\bigcup}_{j=1}^{N(\epsilon)} M_j^\epsilon$.

Wir wählen für alle $j = 1, \ldots, N(\epsilon)$ ein beliebiges $x'_{\epsilon,j} \in M_j^\epsilon$ und definieren Funktionen $F_n \colon \Omega \times K \to \mathbb{C}$ durch

$$F_n(\omega, x') = \sum_{j=1}^{N(\frac{1}{n})} x'_{\frac{1}{n},j}(f(\omega)) \cdot \mathbb{1}_{M_j^{\frac{1}{n}}}(x').$$

Diese sind messbar, wenn wir K mit $\mathcal{B}(K)$ und $\Omega \times K$ mit der Produkt-σ-Algebra versehen, da f schwach messbar und somit $(\omega, x') \mapsto x'_{\frac{1}{n},j}(f(\omega))$ auch messbar ist, und da $M_j^{\frac{1}{n}}$ als Differenz kompakter Mengen in $\mathcal{B}(K)$ liegt und daher $(\omega, x') \mapsto \mathbb{1}_{M_j^{\frac{1}{n}}}(\omega)$ auf $\Omega \times K$ messbar ist.

Weil die $M_j^{\frac{1}{n}}$ eine disjunkte Überdeckung von K bilden, gibt es zu jedem $x' \in K$ genau ein $j(x')$ mit $x' \in M_{j(x')}^{\frac{1}{n}}$, womit $d(x'_{\frac{1}{n},j(x')}, x') < \frac{1}{n}$; also $\lim_{n\to+\infty} x'_{\frac{1}{n},j(x')} = x'$. Da $x' \mapsto x'(f(\omega))$ auf K stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(\omega, x') = \lim_{n\to+\infty} x'_{\frac{1}{n},j(x')}(f(\omega)) = x'(f(\omega)) = F(\omega, x')$$

und infolge die Messbarkeit von F [vgl. [Kus14], Satz 7.20].

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\int_K \int_\Omega |F(\omega, x')| \; d\mu(\omega) d|\nu|(x') &\leq \int_K \int_\Omega \|x'\| \, \|f(\omega)\| \; d\mu(\omega) d|\nu|(x') \\
&\leq \int_K \int_\Omega \|f(\omega)\| \; d\mu(\omega) d|\nu|(x') \\
&= |\nu|(K) \int_\Omega \|f(\omega)\| \; d\mu(\omega) < +\infty.
\end{aligned}$$

Zuletzt müssen wir noch zeigen, dass $F^{-1}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$ Teilmenge von Mengen $A \times K$ mit einem σ-endlichen $A \subseteq \Omega$ ist. Betrachte dazu

$$A_n := \{\omega \in \Omega : \|f(\omega)\| \geq \frac{1}{n}\}.$$

Aus $\int_\Omega \|f\| \ d\mu < +\infty$ folgt $A_n < +\infty$, womit

$$A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\omega \in \Omega : \|f(\omega)\| > 0\}$$

σ-endlich ist. Schließlich gilt $F^{-1}(\mathbb{C}\backslash\{0\}) = \{(\omega, x') \in \Omega \times K : \|F(\omega, x')\| = \|x'(f(\omega))\| > 0\} \subseteq A \times K$.

Also können wir Satz 2.11 anwenden, um die Integrale zu vertauschen, und erhalten

$$\int_K \int_\Omega F(\omega, x') \ d\mu(\omega) d\nu(x') = \int_\Omega \int_K F(\omega, x') \ d\nu(x') \ d\mu(\omega) = \int_\Omega \int_K [\psi(f(\omega))](x') \ d\nu(x') \ d\mu(\omega).$$

Wegen $\psi(f(\omega)) \in \psi(X)$ und $\Phi(\nu) \in \psi(X)^\perp$ folgt

$$\int_\Omega \int_K x'(\psi(f(\omega))) \ d\nu(x') \ d\mu(\omega) = \int_\Omega 0 \ d\mu(\omega) = 0.$$

□

Somit haben wir alle nötigen Werkzeuge, um unseren Hauptsatz zu beweisen.

Beweis.[von Satz 4.1] Nach Lemma 4.4 gilt $G \in \psi(X)$. Dementsprechend gibt es genau ein $y \in X$ mit $\psi(y) = G$. Jetzt gilt für alle $x' \in X$

$$\frac{x'}{\|x'\|}(y) = \psi(y)(\frac{x'}{\|x'\|}) = G(\frac{x'}{\|x'\|}) = \int_\Omega (\psi \circ f)(\frac{x'}{\|x'\|}) \ d\mu = \int_\Omega \frac{x'}{\|x'\|}(f(\omega)) \ d\mu(\omega).$$

Multipliziert man auf beiden Seiten mit $\|x'\|$, so erhält man die gewollte Gleichheit.

Um Eindeutigkeit zu zeigen, wählen wir ein $\tilde{y} \in X$ so, dass $x'(\tilde{y}) = \int_\Omega x'(f(\omega)) \ d\mu(\omega)$ für alle $x' \in X'$ gilt. Also haben wir die Gleichheit $x'(\tilde{y}) = x'(y)$ für alle $x' \in X'$. Da X' auf X punktetrennend operiert, stimmen y und $\tilde{y}$ überein.

Zuletzt gilt noch die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|y\| = \sup_{x'\in K} |x'(y)| = \sup_{x'\in K} \left| \int_\Omega x'(f(\omega)) \ d\mu(\omega) \right| \le \sup_{x'\in K} \int_\Omega |x'(f(\omega))| \ d\mu(\omega) \\ \le \int_\Omega \sup_{x'\in K} |x'(f(\omega))| \ d\mu(\omega) = \int_\Omega \|f\| \ d\mu. \end{aligned}$$

□

Definition 4.5 Für das y aus Satz 4.1 schreiben wir $\int_\Omega f(\omega) \ d\mu(\omega)$.

Bemerkung 4.6 Die Forderung nach Separabilität von X ist im Satz 4.1 eigentlich noch zu stark. Es reicht, wenn man ein μ-f.ü. separables Bild verlangt oder äquivalent dazu die

μ-starke Messbarkeit von f, vgl. 2. Satz von Pettis (3.6).

Satz 4.7 *Seien X ein Banachraum, $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon \Omega \to X$ eine schwach messbare Funktion so, dass für eine Menge $N_0 \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(N_0) = 0$ $f(\Omega \backslash N_0)$ separabel ist und $\int_{\Omega \backslash N_0} \|f\| \; d\mu < +\infty$ gilt. Dann gibt es genau ein $y \in X$ mit*

$$\int_{\Omega \backslash N} x'(f(\omega)) \; d\mu(\omega) = x'(y)$$

für alle $x' \in X'$ und alle $N \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(N) = 0$ und $f(\Omega \backslash N)$ separabel. Dieses y ist in der abgeschlossenen linearen Hülle von $f(\Omega \backslash N)$ enthalten und es gilt die Abschätzung

$$\|y\| \leq \int_{\Omega \backslash N} \|f\| \, d\mu.$$

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von $f(\Omega \backslash N_0)$. Die abgeschlossene lineare Hülle Y von $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach Satz 3.3(iii) auch separabel, wobei Y auch die abgeschlossene lineare Hülle von $f(\Omega \backslash N_0)$ ist. Das Integral lässt sich gemäß Satz 4.1 und Definition 4.5 definieren durch

$$\int_{\Omega} f \; d\mu := \int_{\Omega \backslash N} f \; d\mu.$$

Offensichtlich ist dann $\int_{\Omega} f \; d\mu$ in der abgeschlossenen linearen Hülle von $f(\Omega \backslash N)$ enthalten. Nach Satz 4.1 gilt die geforderte Abschätzung $\| \int_{\Omega} f \; d\mu\| \leq \int_{\Omega \backslash N} \|f\| \, d\mu$.
Um die Eindeutigkeit dieser Definition zu zeigen, seien $N_1 \neq N_2$ zwei Mengen derart, dass $f(\Omega \backslash N_1)$ und $f(\Omega \backslash N_2)$ separabel sind und $\mu(N_1) = 0 = \mu(N_2)$ gilt. Wie oben sei Y_j die abgeschlossene lineare Hülle von $f(\Omega \backslash N_j)$ für $j = 1, 2$. Betrachte das zugehörige Integral $\int_{\Omega \backslash N_j} f \; d\mu$ gemäß Satz 4.1 und definiere Y als die abgeschlossene lineare Hülle von $Y_1 \cup Y_2$ und $N := N_1 \cup N_2$. Für alle $x' \in X'$ gilt dann

$$\int_{\Omega \backslash N} x'(f(\omega)) \; d\mu(\omega) = \int_{\Omega \backslash N_1} x'(f(\omega)) \; d\mu(\omega) = \int_{\Omega \backslash N_2} x'(f(\omega)) \; d\mu(\omega).$$

Wegen der Eindeutigkeit in Satz 4.1 angewendet auf den separablen Banachraum Y folgt $\int_{\Omega \backslash N} f \; d\mu = \int_{\Omega \backslash N_1} f \; d\mu = \int_{\Omega \backslash N_2} f \; d\mu$ und somit die Unabhängigkeit von der gewählten Menge.

□

Definition 4.8 Seien X ein Banachraum, $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon \Omega \to X$ eine Funktion, welche die Voraussetzungen aus Satz 4.7 erfüllt.
Für das Element y aus Satz 4.7 schreiben wir $\int_{\Omega} f \; d\mu$.

5. Eigenschaften des Bochner-Integrals

Wir haben im vorherigen Kapitel das Lebesgue Integral auf Banachraum-wertige Funktionen ausgedehnt. Können wir auch ähnliche Aussagen über Eigenschaften davon treffen? Es stellt sich heraus, dass dies mit gewissen Einschränkungen durchaus möglich ist.

Lemma 5.1 *Seien X und Y Banachräume. Ist f wie in Satz 4.7, dann gilt für alle linearen und beschränkten Funktionen $T\colon X \to Y$*

$$T\left(\int_\Omega f\ d\mu\right) = \int_\Omega Tf\ d\mu.$$

Beweis. Laut Definition der schwachen Messbarkeit von f ist $x' \circ f$ für alle $x' \in X'$ messbar. Da für alle $y' \in Y'$ die Verkettung $y' \circ T$ in X' enthalten ist, folgt auch die Messbarkeit von $y' \circ T \circ f$, womit Tf schwach messbar ist. Aus $\int_{\Omega\setminus N} \|f\|\ d\mu < +\infty$ und der Beschränktheit von T erhalten wir auch $\int_{\Omega\setminus N} \|Tf\|\ d\mu < +\infty$.
Wir betrachten als nächstes die μ-Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$, sodass $f(\Omega\setminus N)$ separabel ist. Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine abzählbare, in $f(\Omega\setminus N)$ dichte Menge. Dann ist wegen der Beschränktheit von T auch $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ dicht in $(Tf)(\Omega\setminus N)$. Wir haben also alle Voraussetzungen von Satz 4.7 für Tf überprüft, womit $\int_\Omega Tf\ d\mu$ existiert. Aus Satz 4.7 sind außerdem folgende Gleichheiten bekannt:

$$\int_{\Omega\setminus N} (y' \circ T)(f(\omega))\ d\mu(\omega) = (y' \circ T)(\int_\Omega f(\omega)\ d\mu(\omega)) \text{ für alle } y' \in Y'$$

und

$$\int_{\Omega\setminus N} y'(T \circ f)(\omega)\ d\mu(\omega) = y'(\int_\Omega (T \circ f)(\omega))\ d\mu(\omega)) \text{ für alle } y' \in Y'.$$

Nach Definition und wegen der Eindeutigkeit unseres Integrals folgt die behauptete Gleichheit.

□

Lemma 5.2 *Das in 4.7 definierte Integral ist linear, also gilt für α, β aus dem zugrundeliegenden Skalarkörper und beliebige Funktionen $f, g\colon \Omega \to X$, welche die Voraussetzungen aus Satz 4.7 erfüllen, die Gleichheit*

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\ d\mu = \alpha \int_\Omega f\ d\mu + \beta \int_\Omega g\ d\mu.$$

Beweis. Offensichtlich ist mit f und g auch $\alpha f + \beta g$ schwach messbar. Sind N_f und N_g die zu f bzw. g gehörigen Nullmengen gemäß Satz 4.7 und $N = N_f \cup N_g$, so folgt die Separabilität von $(\alpha f + \beta g)(\Omega \backslash N) \subseteq \alpha f(\Omega \backslash N) + \beta g(\Omega \backslash N)$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt die Integrierbarkeit von $\|\alpha f + \beta g\|$. Laut Satz 4.7 ist das Integral $\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\, d\mu$ wohldefiniert und wegen der Linearität von x' und der des gewöhnlichen Integrals gilt

$$\begin{aligned} x'(\int_\Omega \alpha f + \beta g \, d\mu) &= \int_{\Omega \backslash N} \alpha x'(f) + \beta x'(g)\, d\mu = \alpha \int_{\Omega \backslash N} x'(f)\, d\mu + \beta \int_{\Omega \backslash N} x'(g)\, d\mu \\ &= \alpha x'(\int_\Omega f\, d\mu) + \beta x'(\int_\Omega g\, d\mu) = x'\big(\alpha \int_\Omega f\, d\mu + \beta \int_\Omega g\, d\mu\big) \end{aligned}$$

für alle $x' \in X'$. Es folgt die geforderte Gleichheit.

□

Satz 5.3 (von der beschränkten Konvergenz).
Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, X ein Banachraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge schwach messbarer Funktionen $f_n \colon \Omega \to X$ mit μ-f.ü. separablem Bild. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere punktweise μ-fast überall gegen eine Funktion f bezüglich $\|\cdot\|_X$. Ferner sei $g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine μ-integrierbare Funktion mit der Abschätzung $\|f_n\|_X \leq g$ für μ-fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es für f und alle f_n die in Satz 4.7 definierten Ausdrücke $\int_\Omega f\, d\mu$ und $\int_\Omega f_n\, d\mu$ wobei

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\|_X \, d\mu = 0,$$

und infolge $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu$.

Beweis. Um nachzuprüfen, dass f ein μ-f.ü. separables Bild hat, wähle für alle $n \in \mathbb{N}$ derartige Nullmengen N_n, dass $f_n(\Omega \backslash N_n)$ separabel ist. Definieren wir $N := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$, so sind auch alle $f_n(\Omega \backslash N)$ separabel und wegen der σ-Additivität von μ gilt $\mu(N) = 0$. Da die f_n gegen f konvergieren, gilt $f(\Omega \backslash N) \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(\Omega \backslash N)}$, womit auch $f(\Omega \backslash N)$ separabel ist.

Wegen $\|f_n(\omega)\| \leq g(\omega)$ und $\|f(\omega)\| = \lim_{n\to+\infty} \|f_n(\omega)\| \leq g(\omega)$ für μ- fast alle $\omega \in \Omega$ gelten $\int_{\Omega\backslash N} \|f\|_X \, d\mu < +\infty$ und $\int_{\Omega \backslash N} \|f_n\|_X \, d\mu < +\infty$. Die Funktion f ist schwach messbar, da die Grenzfunktion der messbaren Funktionen $x' \circ f_n$ für alle $x' \in X'$ messbar ist [[Kus14], vgl. 7.20].
Aus Satz 4.7 folgt dann Existenz der geforderten Integrale.

Wegen $\|f_n - f\| \leq 2g$ folgt aus dem klassischen Satz von der beschränkten Konvergenz $\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\backslash N} \|f_n - f\|_X \, d\mu = 0$. Für die Norm unseres Ausdruckes gilt

$$\left\| \int_\Omega \big(f_n - f\big)\, d\mu \right\|_X \leq \int_{\Omega \backslash N} \|f_n - f\|_X \, d\mu.$$

Wir erhalten also

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\int_\Omega (f_n-f)\,d\mu\right\| \le \lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega\setminus N}\|f_n-f\|_X\,d\mu = 0,$$

womit aus Lemma 5.2 $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu$ folgt.

□

Als nächstes wollen wir an die Definition von μ-Treppenfunktionen aus Definition 3.1(iii) erinnern; also Treppenfunktionen mit $\mu(A_i)<+\infty$ für alle $i\in 1,...,n$.

Lemma 5.4 *Sei $f=\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}x_i$ eine μ-Treppenfunktion mit paarweise disjunkten A_i von endlichem Maß. Dann ist f im Sinne von Satz 4.7 integrierbar, wobei*

$$\int_\Omega f\ d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)x_i.$$

Beweis. Offensichtlich ist jede μ-Treppenfunktion schwach messbar und besitzt mit $f(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$ ein separables Bild. Zudem gilt $\int_\Omega \|f\|\ d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)\|x_i\| < +\infty$.
Also erfüllt sie die Voraussetzungen von Satz 4.7, womit das Integral $\int_\Omega f\ d\mu$ existiert und $x'\big(\int_\Omega f\ d\mu\big) = \int_\Omega x'(f)\ d\mu$ gilt. Der Definition des Lebesgue-Integrals nach entspricht der rechte Ausdruck genau $\sum_{i=1}^n \mu(A_i)x'(x_i)$. Da x' linear ist, erhalten wir

$$x'\big(\int_\Omega f\ d\mu\big) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)x'(x_i) = x'\big(\sum_{i=1}^n \mu(A_i)x_i\big).$$

Wegen der Eindeutigkeit des Integrals aus Satz 4.7 folgt

$$\int_\Omega f\ d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)x_i.$$

□

Satz 5.5 *Seien X ein Banachraum, $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein vollständiger, σ-endlicher Maßraum und $f\colon\Omega\to X$ eine Funktion, welche die Voraussetzungen aus Satz 4.7 erfüllt.*
Dann gibt es eine gegen f konvergente Folge von μ-Treppenfunktionen $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit

$$g_m = \sum_{i=1}^{n(m)} \mathbb{1}_{A_i^m} x_i^m$$

und

$$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega \|f-g_m\|\ d\mu = 0.$$

Das in Satz 4.7 definierte Integral lässt sich als Grenzwert

$$\int_\Omega f\ d\mu = \lim_{m\to+\infty} \sum_{i=1}^{n(m)} \mu(A_i^m)x_i^m$$

darstellen.

Beweis. Sei f schwach messbar mit $\int_{\Omega\backslash N} \|f\|\ d\mu < +\infty$ für eine Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ mit separablem $f(\Omega\backslash N)$. Betrachte eine Folge von μ-Treppenfunktionen g_m, die gegen f konvergiert. Eine solche gibt es nach Satz 3.6. Wir definieren $B_m = \{\omega \in \Omega : \|g_m(\omega)\| \leq 2\|f(\omega)\|\}$ und $\tilde{g}_m = \mathbb{1}_{B_m} \cdot g_m$, wobei der letzte Ausdruck ebenso μ-fast überall gegen f konvergiert.
Nach Lemma 5.4 sind die Funktionen $\tilde{g}_m$ im Sinne von Satz 4.7 integrierbar, wobei $\int_\Omega \tilde{g}_m\ d\mu = \sum_{i=1}^{n(m)} \mu(A_i^m)x_i^m$ gilt.

Nach Definition gilt $\|\tilde{g}_m\| \leq 2\|f\|$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir können also an dieser Stelle den Satz von der beschränkten Konvergenz (Satz 5.3) anwenden.

□

Bemerkung 5.6 Der in Satz 5.5 verwendete Zugang über μ-Treppenfunktionen stimmt mit der klassischen Definition der Bochner-Integrale überein. Wir haben also in Satz 5.5 gezeigt, dass unser Zugang zur bekannten Definition äquivalent ist.

Beispiel 5.7 Wir betrachten das Zählmaß μ auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A})$, definiert durch

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ +\infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei f eine Funktion auf X, die die Voraussetzungen von Satz 4.7 erfüllt, also $\int_\Omega \|f\|\ d\mu = \sum_{\omega\in\Omega} \|f(\omega)\| < +\infty$ mit separablem $f(\Omega)$. Dann gibt es nach Satz 4.7 ein $y \in X$ mit

$$x'(y) = \int_\Omega x'(f(\omega))\ d\mu(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} x'(f(\omega))$$

für alle $x' \in X'$ gilt.

Da wir mit $\left\|\sum_{\omega\in\Omega} x'(f(\omega))\right\| \leq \sum_{\omega\in\Omega} \|f(\omega)\|$ eine konvergente Majorante für den rechten Ausdruck haben, konvergiert dieser unbedingt. Wegen der Linearität von x' können wir

$$\sum_{\omega\in\Omega} x'(f(\omega)) = x'\big(\sum_{\omega\in\Omega} f(\omega)\big)$$

schreiben und erhalten somit $y = \sum_{\omega\in\Omega} f(\omega)$.

Satz 5.8 (von Fubini angepasst für Banachraum-wertige Funktionen).
Seien zwei σ-endliche Maßräume $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ und ein Banachraum X gegeben. Betrachte den Produktraum $\Omega_1 \times \Omega_2$, versehen mit der Produkt-σ-Algebra $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$

und dem Produktmaß $\mu_1 \otimes \mu_2$. Sei weiters $f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to X$ eine Funktion, welche bezüglich $\mu_1 \otimes \mu_2$ die Bedingungen von Satz 4.7 erfüllt und somit integrierbar ist.
Dann existieren auch die iterierten Integrale $\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f \, d\mu_2 \, d\mu_1$, $\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f \, d\mu_1 \, d\mu_2$, wobei

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2) \, d\mu_2(x_2) \, d\mu_1(x_1) = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2) \, d\mu_1(x_1) \, d\mu_2(x_2).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz der Integrale, indem wir die einzelnen Bedingungen von Satz 4.7 nachprüfen.

Sei $N \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ mit $\mu_1 \otimes \mu_2(N) = 0$ derart, dass $\int_{(\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus N} \|f\| \, d\mu_1 \otimes \mu_2 < +\infty$ und dass $f((\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus N)$ eine separable Teilmenge von X ist. Nach Voraussetzung gibt es eine solche. Wegen

$$0 = \mu_1 \otimes \mu_2(N) = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_N \, d\mu_1 \, d\mu_2$$

(Fubini für nichtnegative Funktionen) gilt

$$0 = \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_N(x_1, x_2) \, d\mu_1(x_1) = \mu_1(N_{x_2})$$

für alle $x_2 \in \Omega_2 \setminus N_2$ für ein $N_2 \in \mathfrak{A}_2$ mit $\mu_2(N_2) = 0$. Hier steht N_{x_2} für $\{x_1 \in \Omega_1 : (x_1, x_2) \in N\}$.
Weiters können wir wegen

$$\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \|f\| \cdot \mathbb{1}_{N^c} \, d\mu_1 \, d\mu_2 = \int_{(\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus N} \|f\| \, d\mu_1 \otimes \mu_2 < +\infty$$

die Nullmenge N_2 nötigenfalls größer machen, so dass auch

$$\int_{\Omega_1} \|f(., x_2)\| \cdot \mathbb{1}_{N^c}(., x_2) \, d\mu_1 < +\infty$$

für alle $x_2 \in \Omega_2 \setminus N_2$ gilt.
Für $x_2 \in \Omega_2 \setminus N_2$ ist dann $f(\Omega_1 \setminus N_{x_2}, x_2) \subseteq f((\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus N)$ separabel, wobei

$$\int_{\Omega_1 \setminus N_{x_2}} \|f(., x_2)\| \, d\mu_1 = \int_{\Omega_1} \|f(\cdot, x_2)\| \cdot \mathbb{1}_{N^c}(., x_2) \, d\mu_1 < +\infty.$$

Da mit f auch $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ für $x_2 \in \Omega_2$ schwach messbar ist, ist $y(x_2) := \int_{\Omega_1} f(., x_2) \, d\mu_1$ als Element von X für $x_2 \in \Omega_2 \setminus N_2$ durch

$$x'(y(x_2)) = \int_{\Omega_1 \setminus N_{x_2}} x'(f(., x_2)) \, d\mu_1, \; x' \in X',$$

wohldefiniert. Gemäß Satz 4.7. liegt $y(x_2)$ wegen $f(\Omega_1 \setminus N_{x_2}, x_2) \subseteq f((\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus N)$ in der abgeschlossenen linearen Hülle Y von $f((\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus N)$.

Wegen

$$\int_{(\Omega_1\times\Omega_2)\setminus N} |x'(f(.))|\, d\mu_1 \otimes \mu_2 \leq \|x'\| \int_{(\Omega_1\times\Omega_2)\setminus N} \|f\|\, d\mu_1 \otimes \mu_2 < +\infty$$

ist nach der skalaren Version von Fubini $\Omega_2 \setminus N_2 \ni x_2 \mapsto \int_{\Omega_1\setminus N_{x_2}} x'(f(., x_2))\, d\mu_1 = x'(y(x_2))$ messbar und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2\setminus N_2} \|y(x_2)\|\, d\mu_2(x_2) &\leq \int_{\Omega_2\setminus N_2} \int_{\Omega_1\setminus N_{x_2}} \|f(x_1, x_2)\|\, d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2)\\ &= \int_{(\Omega_1\times\Omega_2)\setminus N} \|f\|\, d\mu_1 \otimes \mu_2 < +\infty.\end{aligned}$$

Also existiert nach Satz 4.7 $\int_{\Omega_2} y(x_2)\, d\mu_2(x_2) \in X$, wobei

$$\begin{aligned}x'(\int_{\Omega_2} y(x_2)\, d\mu_2(x_2)) &= \int_{\Omega_2\setminus N_2} x'(y(x_2))\, d\mu_2(x_2)\\ &= \int_{\Omega_2\setminus N_2} \int_{\Omega_1\setminus N_{x_2}} x'(f(., x_2))\, d\mu_1\, d\mu_2(x_2)\\ &= \int_{\Omega_2\setminus N_2} \int_{\Omega_1} x'(f(x_1, x_2)) \cdot \mathbb{1}_N(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)\, d\mu_2(x_2)\\ &= \int_{\Omega_1\times\Omega_2} x'(f(.))\, d\mu_1 \otimes \mu_2 = x'(\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f\, d\mu_1 \otimes \mu_2).\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit folgt aus der skalaren Version von Fubini und der Tatsache, dass N eine Nullmenge ist.

Also gilt $\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(., x_2) d\mu_1\, d\mu_2(x_2) = \int_{\Omega_2} y(x_2)\, d\mu_2(x_2) = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f\, d\mu_1 \otimes \mu_2$. Entsprechend zeigt man die Gleichheit mit dem anderen iterierten Integral.

□

Lemma 5.9 *Seien ein Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, ein metrischer Raum T und ein Banachraum Y gegeben. Sei $x_0 \in T$ fest und $F\colon \Omega \times T \to Y$ eine Funktion derart, dass*

(i) $\omega \mapsto F(\omega, x)$ für alle $x \in T$ integrierbar im Sinne von Satz 4.7 ist,

(ii) $x \mapsto F(\omega, x)$ stetig in x_0 für fast alle $\omega \in \Omega$ ist,

(iii) es eine offene Kugel $U_\delta(x_0)$ um x_0 und eine auf Ω integrierbare Funktion $h\colon \Omega \to [0, +\infty]$ derart gibt, dass für alle $x \in U_\delta(x_0)$ die Ungleichung

$$\|F(\cdot, x)\| \leq h$$

μ-fast überall gilt.

Dann ist die Funktion $G(x) \colon = \int_\Omega F(\cdot, x)\, d\mu$ bei x_0 stetig.

Beweis. Der Beweis erfolgt ähnlich wie in Lemma 1.5. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T$ eine gegen x_0 konvergente Folge. Dann gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U_\delta(x_0)$ für alle $n \geq n_0$. Ist N die Vereinigung der Ausnahmenullmengen aus der zweiten und der dritten Voraussetzung zu $F(\cdot, x_0),\ F(\cdot, x_{n_0}), F(\cdot, x_{n_0+1}), \ldots,$ so folgt $\mu(N) = 0$. Für $n \geq n_0$ und $\omega \in \Omega \backslash N$ gilt $\|F(\omega, x_n) - F(\omega, x_0)\| \leq 2h(\omega)$ und $\lim_{n\to+\infty} \|F(\omega, x_n) - F(\omega, x_0)\| = 0$. Wegen des Satzes von der beschränkten Konvergenz (Satz 5.3) folgt

$$\|G(x_0) - G(x_n)\| = \left\| \int F(\cdot, x_n) - F(\cdot, x_0)\, d\mu \right\| \leq \int \|F(\cdot, x_n) - F(\cdot, x_0)\|\ d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Lemma 5.10 *Seien ein Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und ein Banachraum Y gegeben. Sei $x_0 \in I$ fest und $F \colon \Omega \times I \to Y$ eine Funktion derart, dass*

(i) $\omega \mapsto F(\omega, x)$ für alle $x \in I$ im Sinne von Satz 4.7 integrierbar ist,

(ii) $x \mapsto F(\omega, x)$ differenzierbar in x_0 für fast alle $\omega \in \Omega$ ist,

(iii) es ein $\delta > 0$ und eine auf Ω integrierbare Funktion $h \colon \Omega \to [0, +\infty]$ derart gibt, dass für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I \backslash \{x_0\}$ die Ungleichung

$$\left\| \frac{F(\cdot, x) - F(\cdot, x_0)}{x - x_0} \right\| \leq h$$

μ-fast überall gilt.

Dann ist die Funktion $G(x) \colon = \int_\Omega F(\cdot, x)\, d\mu$ bei x_0 differenzierbar und es gilt

$$G'(x_0) = \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x}(\cdot, x_0)\, d\mu.$$

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T$ eine gegen x_0 konvergente Folge. Dann gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ für alle $n \geq n_0$. Ist N die Vereinigung der abzählbar vielen Ausnahmenullmengen aus der zweiten und der dritten Voraussetzung zu den Funktionen $\frac{F(\cdot,x_n) - F(\cdot,x_0)}{x_n - x_0}$, $n \geq n_0$, so folgt $\mu(N) = 0$. Für $n \geq n_0$ und $\omega \in \Omega \backslash N$ gilt $\left\| \frac{F(\cdot,x_n) - F(\cdot,x_0)}{x_n - x_0} \right\| \leq h(\omega)$ und $\lim_{n\to+\infty} \frac{F(\cdot,x_n) - F(\cdot,x_0)}{x_n - x_0} = \frac{\partial F}{\partial x}(\omega, x_0)$. Insbesondere ist die letzte Funktion messbar. Wegen des Satzes von der beschränkten Konvergenz (Satz 5.3) folgt

$$\frac{G(x_n) - G(x_0)}{x_n - x_0} = \int \frac{F(\cdot, x_n) - F(\cdot, x_0)}{x_n - x_0}\, d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int \frac{\partial F}{\partial x}(\omega, x_0)\, d\mu.$$

$\square$

Lemma 5.11 *Seien ein Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, $W \subset \mathbb{C}$ offen, Y ein Banachraum und $F\colon \Omega \times W \to Y$ eine Funktion derart, dass*

(i) $\omega \mapsto F(\omega, x)$ für alle $x \in W$ im Sinne von Satz 4.7 integrierbar ist,

(ii) $x \mapsto F(\omega, x)$ holomorph für alle $\omega \in \Omega \backslash N$ mit einer festen Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ ist,

(iii) es zu jeder kompakten Menge $K \subseteq W$ eine auf Ω integrierbare Funktion $h_K\colon \Omega \to [0, +\infty]$ derart gibt, dass für alle $x \in K$ und $\omega \in \Omega \backslash N$ die Abschätzung

$$\|F(\omega, x)\| \leq h_K(\omega)$$

gilt, wobei N die feste Nullmenge aus dem vorherigen Punkt ist.

Dann ist die Funktion $G(x)\colon = \int_\Omega F(\cdot, x)\, d\mu$ holomorph auf W und $\frac{\partial^n F}{\partial x^n}(\cdot, x)$ ist integrierbar für alle $x \in W$ und $n \in \mathbb{N}$, wobei

$$G^{(n)}(x) = \int_\Omega \frac{\partial^n F}{\partial x^n}(\cdot, x)\, d\mu. \tag{5.1}$$

Beweis. Ist $K_{2r}(w) \subseteq W$, so gibt es nach Voraussetzung ein integrierbares $h_{w,r}\colon \Omega \to [0, +\infty]$, derart dass $\|F(\omega, x)\| \leq h_{w,r}(\omega)$, $x \in K_{2r}(w)$, $\omega \in \Omega \backslash N$. Für $x_1, x_2 \in K_r(w)$, $x_1 \neq x_2$ gilt nach der Cauchyschen Integralformel Satz 11.8.9 in [Kal15] mit dem Weg $\gamma\colon [0, 2\pi] \to W$, $t \mapsto w + 2r \cdot \exp(it)$

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{F(\omega, x_1) - F(\omega, x_2)}{x_1 - x_2}\right\| &= \left\|\frac{1}{2\pi i (x_1 - x_2)} \int_\gamma \frac{F(\omega, \zeta)}{(\zeta - x_1)} - \frac{F(\omega, \zeta)}{(\zeta - x_2)}\, d\zeta\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(\zeta - x_2) F(\omega, \zeta) - (\zeta - x_1) F(\omega, \zeta)}{(x_1 - x_2)(\zeta - x_1)(\zeta - x_2)}\, d\zeta\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(\omega, \zeta)}{(\zeta - x_1)(\zeta - x_2)}\, d\zeta\right\| \\
&\leq \frac{2}{r}\, h_{w,r}(\omega).
\end{aligned}$$

Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige, gegen ein $w \in W$ konvergente Folge mit $x_n \neq w$ und o.B.d.A. $x_n \in K_r(w) \subseteq K_{2r}(w) \subseteq W$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt aus $\left\|\frac{F(\omega, x_n) - F(\omega, w)}{x_n - w}\right\| \leq \frac{2}{r} h_{w,r}(\omega)$ und $\frac{F(\omega, x_n) - F(\omega, w)}{x_n - w} \to \frac{\partial F}{\partial x}(\omega, w)$ für $\omega \in \Omega \backslash N$ gemäß dem Satz von der beschränkten Konvergenz (Satz 5.3) die Integrierbarkeit von $\frac{\partial F}{\partial x}(\omega, w)$ und

$$\frac{G(x_n) - G(w)}{x_n - w} = \int \frac{F(\omega, x_n) - F(\omega, w)}{x_n - w}\, d\mu \overset{n \to +\infty}{\to} \int \frac{\partial F}{\partial x}(\cdot, w)\, d\mu.$$

Also existiert $G'(w)$ und stimmt mit $\int \frac{\partial F}{\partial x}(\cdot, w)\, d\mu$ überein.
Insbesondere erfüllt auch $(x,t) \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)$ die erste Voraussetzung des aktuellen Lemma. Auch die zweite Voraussetzung ist erfüllt, da die komplexe Ableitung holomorpher Funktionen wieder holomorph ist. Wir wollen auch die dritte Voraussetzung nachweisen.
Dazu sei wieder $K_{2r}(w) \subseteq W$ und $h_{w,r} \colon \Omega \to [0, +\infty]$ integrierbar mit $\|F(\omega, x)\| \le h_{w,r}(\omega)$, $x \in K_{2r}(w)$, $\omega \in \Omega \backslash N$. Für $x \in K_r(w)$ folgt dann aus (11.33) in [Kal15] die Abschätzung

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x}(\omega, x) \right\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(\omega, \zeta)}{(\zeta - x)^2}\, d\zeta \right\| \le \frac{2}{r}\, h_{w,r}(\omega).$$

Ist $K \subseteq W$ kompakt, so wird K von endlich vielen Kreisen der Form $U_r(w)$ mit $w \in K$ und $K_{2r} \subseteq W$ überdeckt. Nimmt man das Maximum $h_K(\omega)$ der entsprechenden Funktionen $\frac{2}{r}\, h_{w,r}(\omega)$, so folgt $\left\|\frac{\partial F}{\partial x}(\omega, x)\right\| \le h_K(\omega)$, $x \in K$, $\omega \in \Omega \backslash N$. Also ist auch die dritte Voraussetzung des aktuellen Lemma für $(x,t) \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)$ nachgewiesen.
Mit allen Voraussetzungen des aktuellen Lemma erfüllt $w \mapsto G'(w) = \int \frac{\partial F}{\partial x}(\cdot, w)\, d\mu$ auch die von Lemma 5.9, womit $w \mapsto G'(w)$ stetig auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq W$ und in Folge auf ganz W ist. Gemäß Korollar 11.7.5 aus [Kal15] ist G holomorph. Wendet man das gezeigte auf $\frac{\partial F}{\partial x}$ an, so zeigt man schließlich induktiv (5.1) für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Literaturverzeichnis

[Kal14] Michael Kaltenbäck. *Analysis 1*. Vorlesungsskriptum Version WS2014/15.

[Kal15] Michael Kaltenbäck. *Analysis 2*. Vorlesungsskriptum Version SS2015.

[Kal16] Michael Kaltenbäck. *Analysis 3*. Vorlesungsskriptum Version WS2015/2016.

[Kal13] Michael Kaltenbäck. *Analysis und Maßtheorie auf Topologischen Räumen*. Vorlesungsskriptum Version SS2013.

[Kus14] Norbert Kusolitsch. *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie*, Eine Einführung. Springer-Lehrbuch. Springer Spektrum, Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 2014.

[Rud87] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, Singapore, 3.edition, 1987.

[Rud91] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, Singapore, 2.edition, 1991.

[Sch17] Clemens Schindler. *Messbarkeit und Integrierbarkeit in Banachräumen*. Seminararbeit aus Analysis SS2017.

[Wer07] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. Springer-Lehrbuch, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg, 6. Auflage, 2007.

[WKB16] Harald Woracek, Michael Kaltenbäck, und Martin Blümlinger. *Funktionalanalysis*. Vorlesungsskriptum Version SS2016 (11. Auflage).