

# Introduction to Regularity Structures

## Kurzzusammenfassung

29. November 2020

## Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	1
2	Definitionen	2
3	Regularity Structure	3
4	Reconstruction Theorem	4
5	Ein Satz aus der harmonischen Analysis	6

Diese kurze Ausarbeitung ist eine Zusammenfassung des Papers [4]. Dieses Paper kann man auf ArXiv unter <https://arxiv.org/abs/1401.3014> finden.

## 1 Motivation

**Definition 1** Für  $\alpha \in [0, 1)$  definiere

$$\mathcal{C}^\alpha := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \forall K \subset \mathbb{R} \text{ kompakt } \exists C : \sup_{\substack{s, t \in K \\ s \neq t}} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|} \leq C\}$$

als den Raum der Hölder-stetigen Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ .

Wir möchten für eine Funktion  $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  das Integral  $\int_0^t B(s)dB(s)$  definieren. In vielen Anwendungen gilt aber nur  $B(s) \in \mathcal{C}^\alpha$  für ein  $\alpha \in (0, 1/2)$ . Eine Möglichkeit dieses Problem zu lösen, ist es eine Funktion

$$\mathbb{B}(s, t) \approx \int_s^t B(r) - B(s) dB(r)$$

zu postulieren. Sinnvolle Mindestanforderungen an  $\mathbb{B}$  sind

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(s, t) - \mathbb{B}(s, u) - \mathbb{B}(u, t) &= (B(u) - B(s))(B(t) - B(u)) \\ |\mathbb{B}(s, t)| &\leq C|t - s|^{2\alpha}. \end{aligned}$$

In [2] wird gezeigt, dass so eine Funktion  $\mathbb{B}$  existiert.

Falls eine weitere Funktion  $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  für kompakte Mengen  $K \subseteq \mathbb{R}$  und  $t, s \in K$  erfüllt, dass

$$Y(t) = Y(s) + Y'(s)(B(t) - B(s)) + \mathcal{O}(|t - s|^{2\alpha}),$$

dann kann man sogar  $\int_0^t Y(s) dB(s)$  definieren.  $Y'$  entspricht hier zwar "moralisch" der Ableitung von  $Y$ , kann jedoch im Allgemeinen NICHT mittels des Differenzenquotienten berechnet werden.

Wichtig für die Definition von  $\int_0^t Y(s) dB(s)$  war einerseits die Definition von  $\mathbb{B}$  und andererseits die Tatsache, dass  $Y$  eine "Taylorentwicklung" bezüglich  $B$  besitzt. Das bringt uns schließlich zur Idee von Regularity Structures, nämlich die Verallgemeinerung von Taylorentwicklungen.

## 2 Definitionen

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Ab jetzt (sofern nicht anders spezifiziert) betrachten wir Funktionen  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Für eine Multiindex  $k \in \mathbb{N}_0^d$  definiere  $|k| := k_1 + \dots + k_d$  und  $\partial^k f = f^{(k)} := \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1}} \dots \frac{\partial^{k_d}}{\partial x_d^{k_d}} f$ . Für glatte  $f$  und  $m \in \mathbb{N}$  definiere

$$\|f\|_{C^m} := \sum_{\substack{|k| \leq m \\ k \in \mathbb{N}_0^d}} \|\partial^k f\|_{\infty}$$

Für  $\alpha \in [0, 1)$  definiere

$$\|f\|_{C^\alpha} := \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^d \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Bemerke, dass  $\|f\|_{C^0} = \|f\|_{\infty}$ . Für  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  schränke man obige Normen ebenfalls auf  $K$  ein.

Definiere für  $\alpha, m$  wie oben den Raum

$$C^{m+\alpha} := \{f : \|f|_K\|_{C^m} + \sum_{\substack{|k|=m \\ k \in \mathbb{N}_0^d}} \|\partial^k f|_K\|_{C^\alpha} < \infty \forall K \text{ kompakt}\}$$

mit der Norm  $\|f\|_{m+\alpha} := \|f\|_{C^m} + \sum_{\substack{|k|=m \\ k \in \mathbb{N}_0^d}} \|\partial^k f\|_{C^\alpha}$ . Manchmal schreiben wir  $\|\cdot\|_r := \|\cdot\|_{C^r}$  für  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r \geq 0$ . Außerdem sei  $C_c^r := \{f : f \in C^r, \text{supp}(f) \text{ kompakt}\}$ .

Bezeichne

$$C_c^\infty := \{\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \in C^k \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } \text{supp}(\varphi) \text{ kompakt}\}$$

den Raum der Testfunktionen.

Mit  $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  bezeichnen wir den Raum der (Schwartz-) Distributionen auf  $\mathbb{R}^d$ . Eine lineare Abbildung  $\eta : C_c^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Distribution, falls für alle Kompakta  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  ein  $m \in \mathbb{N}$  und  $C > 0$  existieren, sodass

$$\eta(\varphi) \leq C \|\varphi\|_m \quad \forall \varphi : \text{supp}(\varphi) \subset K.$$

Bemerke, dass lokal integrierbare Funktionen  $f$  als Distribution aufgefasst werden können, vermittelt  $f(\varphi) := \int f\varphi dx$ . Sollte eine Distribution  $\eta$  als Funktion aufgefasst werden können, ergibt  $\eta(x)$  Sinn.

Für  $r \in \mathbb{N}$  definiere

$$\mathcal{B}^r := \{\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty : \|\varphi\|_r \leq 1 \text{ und } \text{supp}(\varphi) \subseteq K_1^{\mathbb{R}^d}(0)\}.$$

Für  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$  und  $\lambda > 0$  definiere  $\varphi_x^\lambda(y) = \lambda^{-d}\varphi(\lambda^{-1}(y-x))$

Für  $\alpha > 0$  definiere den Raum  $\mathcal{C}^{-\alpha}$  so, dass eine Distribution  $\eta \in \mathcal{D}'$  in  $\mathcal{C}^{-\alpha}$  ist, falls  $\eta \in (\mathcal{C}_c^r)'$  ( $'$  bezeichne den Dualraum) für alle  $r \in \mathbb{N}$  und außerdem für alle  $K$  kompakt gelte, dass es eine Konstante  $C$  gibt mit  $|\eta(\varphi_x^\lambda)| \leq C\lambda^{-\alpha}$  für alle  $\varphi \in \mathcal{B}^r$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  und  $x \in K$ . Das kleinste  $C$ , sodass diese Ungleichung gilt, definiert eine Seminorm  $\|\eta\|_K$ . Zur Vorstellung denke man  $\mathcal{C}^{-\alpha} \approx (\mathcal{C}^\alpha)'$ .

Schließlich bezeichnen wir für  $k \in \mathbb{N}_0^d$  Polynome mit  $X^k := X_1^{k_1} \dots X_d^{k_d}$ . Wir nehmen an, dass  $X_1, \dots, X_d$  kommutieren.

### 3 Regularity Structure

Wir wollen Taylorentwicklung verallgemeinern und betrachten als Motivation die Taylorentwicklung bis zur 2. Stufe. Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion, so kann man für  $x, z \in \mathbb{R}^d$  schreiben

$$f(z) = f(x) + f'(x)(z-x) + \frac{1}{2}f''(x)(z-x)^2 + \mathcal{O}((z-x)^3).$$

Wir können also eine Funktion  $f$  mit ihrer Taylorentwicklung  $F \equiv (f, f'X, f''X^2)$  identifizieren. Es gibt eine Menge  $A$ , die angibt, welche Ableitungen wir benötigen, in diesem Fall  $A = \{0, 1, 2\}$ . Jede unserer Ableitungen nimmt Werte in einem Banachraum  $T_k$  an, der hier  $\mathbb{R}$  bzw., noch besser:  $\text{span}\{X^k\}$  entspricht. Schließlich sei bemerkt, dass man Polynome umentwickeln kann, also

$$(x-z)^k = \sum_{m=1}^k \binom{k}{m} (y-z)^m (x-y)^{k-m}. \quad (1)$$

Betrachtet man den Operator  $\Gamma_h$ , mit  $\Gamma_h X^k := (X-h)^k$ , so ist  $\Gamma_h X^k - X^k$  ein Polynom mit Grad  $< k$ . Dies motiviert folgende Definition.

**Definition 2** Sei  $A \subset \mathbb{R}$  nach unten beschränkt und ohne Häufungspunkt. Sei  $T = \bigoplus_{\alpha \in A} T_\alpha$  ein Vektorraum, wobei  $T_\alpha$  ein Banachraum mit Norm  $\|\cdot\|_\alpha$  ist. Sei  $G$  eine Gruppe stetiger Operatoren auf  $T$ , sodass

$$\forall \alpha \in A, \forall \Gamma \in G, \forall \tau \in T_\alpha : \Gamma\tau - \tau \in \bigoplus_{\beta < \alpha} T_\beta.$$

Dann heißt das Tripel  $\mathcal{T} := (A, T, G)$  **Regularity Structure** mit Modellraum  $T$  und Strukturgruppe  $G$ .

Wir setzen voraus, dass  $0 \in A$ ,  $T_0 \approx \mathbb{R}$  und dass  $T_0$  invariant unter  $G$  ist. Falls  $|A| = \infty$ , so ist  $\tau \in T$ , falls  $\tau = \sum_{\alpha \in A} \tau_\alpha$ , wobei nur endlich viele  $\tau_\alpha$  ungleich 0 sind. Außerdem bezeichne  $\|\tau\|_\alpha = \|\tau_\alpha\|_\alpha$ .

Wir haben nun eine Struktur, aber es fehlt noch die Operation des Taylorentwickelns. Da wir in einem abstrakten Setting sind, müssen wir leider zulassen, dass unsere Taylorentwicklung Werte in einem abstrakten Raum annehmen kann, in diesem Fall dem Raum der Distributionen.

**Definition 3** Sei  $\mathcal{T} = (T, A, G)$  eine Regularity Structure,  $d \geq 1$ . Ein **Modell** für  $\mathcal{T}$  besteht aus Abbildungen

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{R}^d &\rightarrow L_b(T, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)), \quad x \mapsto \Pi_x \\ \Gamma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\rightarrow G, \quad (x, y) \mapsto \Gamma_{xy}, \end{aligned}$$

sodass  $\Gamma_{xy}\Gamma_{yz} = \Gamma_{xz}$  und  $\Pi_x\Gamma_{xy} = \Pi_y$ . Man stelle sich vor, dass  $\Pi_x$  der Auswertung am Entwicklungspunkt  $x$  entspricht und  $\Gamma$  den Entwicklungspunkt verschiebt. Außerdem gelte für  $r > |\inf(A)|$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , jede kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^d$  und alle  $\gamma > 0$ , dass es eine Konstante  $C$  gibt, sodass für alle  $\varphi \in \mathcal{B}^r$ ,  $x, y \in K$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $\tau \in T_\alpha$  mit  $\alpha \leq \gamma$  und alle  $\beta < \alpha$ :

1.  $|(\Pi_x\tau)(\varphi_x^\lambda)| \leq C\lambda^\alpha\|\tau\|_\alpha$
2.  $\|\Gamma_{xy}\tau\|_\beta \leq C|x - y|^{\alpha-\beta}\|\tau\|_\alpha$ .

Man bemerke, dass die Ungleichung bei 1. auf einer dichten Menge von  $U_1^{C^r}$  gilt, weshalb man  $\Pi_x\tau$  auf  $C^r$  fortsetzen kann. Der 1. Punkt besagt, dass ich Terme in  $T_\alpha$  mit Ordnung  $\alpha$  approximieren kann. 2. entspricht (1).

**Beispiel 4** Wir betrachten den *Polynomraum* mit  $A = \{0, 1, 2\}$ . Wir setzen  $T_0 = \mathbb{R}$ ,  $T_1 = \text{span}\{X\}$  und  $T_2 = \text{span}\{X^2\}$ . Damit ist  $T = T_0 \oplus T_1 \oplus T_2$ . Definiere die Gruppe  $G = \{\Gamma_h : h \in \mathbb{R}\}$  mit  $\Gamma_h X^k := (X - h)^k$ . Da  $\Gamma_h X^k - X^k \in \bigoplus_{j < k} T_j$  ist dies wirklich eine Struktur.

Definieren wir nun das Modell:  $\Pi_x X^k := y \mapsto (y - x)^k \in L_{loc}^1 \subseteq \mathcal{D}'$ .  $\Gamma_{xy} := \Gamma_{y-x}$ . Man rechne nach, dass dies wirklich ein Modell ist.

Das selbe können wir für  $A = \mathbb{N}_0$  und  $d \geq 1$  machen. Hier ist  $T = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]$  der Raum der (endlichen) Polynome in  $d$  kommutierenden Variablen. Definiere wieder  $G = \{\Gamma_h : h \in \mathbb{R}^d\}$  sodass  $\Gamma_h P(X) = P(X - h)$  für Polynome  $P$ . Es gilt nun  $T_\alpha \approx \mathbb{R}^{k(\alpha)}$ , da  $T_\alpha = \text{span}\{X^k : |k| = \alpha\}$ . Hier ist  $T$  also mehrdimensional. Definiert man das selbe Modell wie oben (mit  $x, y \in \mathbb{R}^d$ ), so rechnet man nach, dass auch dieses Modell die Definition erfüllt. Wir werden dieses Polynommodell später noch verwenden.

## 4 Reconstruction Theorem

Wir motivieren nun die nächste Definition: Sei  $\alpha \in (0, 1)$  und  $f \in \mathcal{C}^{2+\alpha}$ . Sei  $(T, A, G)$  unsere Polynomstruktur mit  $A = \{0, 1, 2\}$  und  $F : \mathbb{R} \rightarrow T$ . Wir können  $f(y)$  mit seiner Taylorentwicklung identifizieren, also  $f(y) \approx F(y) \equiv (f(y), f'(y)X, f''(y)X^2)$ . Und umgekehrt: Sei  $F = (F_0, F_1X, F_2X^2)$  gegeben, dann definiere  $f(y) := F_0(y)$ . Es gilt nun, dass  $|f(y) - (\Pi_x F(x))(y)| = |f(y) - f(x) - f'(x)(y - x) - 1/2 f''(x)(y - x)^2| \leq \mathcal{O}(|x - y|^\alpha)$ . Wir wollen nun einen Raum, definieren, der diese Hölderstetigkeit verallgemeinern kann.

**Definition 5** Sei  $\mathcal{T}$  eine Regularity Structure mit Modell  $M = (\Pi, \Gamma)$  über  $\mathbb{R}^d$ . Definiere  $\mathcal{D}_M^\gamma \equiv \mathcal{D}_M^\gamma(\mathcal{T})$  als den Raum aller Funktionen  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \bigoplus_{\alpha < \gamma} T_\alpha$  sodass für alle  $K \subset \mathbb{R}$  kompakt und alle  $\alpha < \gamma$  es eine Konstante  $C$  gibt, sodass

$$\|f(x) - \Gamma_{xy}f(y)\|_\alpha \leq C|x - y|^{\gamma - \alpha} \quad \forall x, y \in K \quad (2)$$

Man kann hier sogar eine Seminorm definieren:  $\|f\|_{M, \gamma, K} := \inf\{C : (2) \text{ gilt}\}$ .

**Bemerkung 6** Sei  $\mathcal{T}$  das Polynomialmodell mit  $A = \mathbb{N}_0$  und dem kanonischen Modell  $(\Pi, \Gamma)$ . Dann gilt für  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ , dass  $\mathcal{C}^\gamma \approx \mathcal{D}_M^\gamma$ .

Wir kommen nun zum fundamentalsten Resultat der Theorie. Es besagt, dass man  $\gamma$ -Hölderstetige Funktionen approximieren kann. Also: Für  $f \in \mathcal{D}_M^\gamma$  mit  $\gamma > 0$  gibt es  $\mathcal{R}f$ , sodass  $\forall x \in \mathbb{R}^d$ :  $\mathcal{R}f \approx \Pi_x(f(x))$  in der Nähe von  $x$ . Wir möchten das natürlich präzisieren.

**Satz 7 (Reconstruction Theorem)** Sei  $M = (\Pi, \Gamma)$  ein Modell für eine Regularity Structure  $\mathcal{T}$  auf  $\mathbb{R}^d$ . Sei  $f \in \mathcal{D}_M^\gamma(\mathcal{T})$  mit  $\gamma > 0$ . Dann gibt es einen eindeutigen linearen Operator  $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}_M : \mathcal{D}_M^\gamma \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ , sodass für alle  $K \subset \mathbb{R}$  eine Konstante  $C$  existiert mit

$$|(\mathcal{R}f - \Pi_x(f(x)))(\psi_x^\lambda)| \leq C\lambda^\gamma \quad \forall \psi \in \mathcal{B}^r, \lambda \in (0, 1), x \in K.$$

Den Beweis werden wir später skizzieren. Zunächst ein paar Bemerkungen.

**Bemerkung 8**  $\mathcal{D}_M^\gamma$  hängt stark vom Modell  $M$  ab.  $\mathcal{D}_M^\gamma$  ist ein Frechet Raum (definiere Seminorm als kleinste Konstante sodass die Ungleichung der Definition erfüllt ist), aber  $\mathcal{M} := \{M : M \text{ Modell}\}$  ist im Allgemeinen nicht einmal ein Vektorraum. Man kann den gesamten Raum als  $\mathcal{M} \times \mathcal{D}^\gamma := \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \{M\} \times \mathcal{D}_M^\gamma$  definieren und mit einer Topologie versehen. Dies geschieht folgendermaßen: Für Kompakte Mengen  $K$  sagen wir, dass  $\rho = d_K((\Pi, \Gamma, f), (\tilde{\Pi}, \tilde{\Gamma}, \tilde{f}))$  genau dann, wenn  $\rho$  minimal ist, sodass

1.  $\|f(x) - \tilde{f}(x) - \Gamma_{xy}f(y) + \tilde{\Gamma}_{xy}\tilde{f}(y)\|_\alpha \leq \rho|x - y|^{\gamma - \alpha}$
2.  $|(\Pi_x\tau - \tilde{\Pi}_x\tau)(\psi_x^\lambda)| \leq \rho\lambda^\alpha\|\tau\|_\alpha$ ,
3.  $\|\Gamma_{xy}\tau - \tilde{\Gamma}_{xy}\tau\|_\beta \leq \rho|x - y|^{\alpha - \beta}\|\tau\|_\alpha$ .

und zwar soll das für alle  $x, y \in K$ ,  $\alpha \in A$ ,  $\beta < \alpha$ ,  $\tau \in T_\alpha$  und  $\psi \in \mathcal{B}^r$  gelten.

Man kann zeigen, dass mit dieser Topologie gilt, dass  $\mathcal{R} : \mathcal{R} \times \mathcal{D}^\gamma \rightarrow \mathcal{D}'$  stetig ist! Man kann außerdem zeigen, dass  $\mathcal{R} : \mathcal{D}_M^\gamma \rightarrow \mathcal{C}^{-\alpha}$  für  $\alpha = -\min(A)$ .

Falls  $\Pi_x\tau$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $\tau \in T$  stetig ist, dann ist auch  $\mathcal{R}f$  stetig und man kann einfach  $(\mathcal{R}f)(x) = (\Pi_x(f(x)))(x)$  setzen. Im Allgemeinen ergibt diese Definition jedoch keinen Sinn!

Bevor wir Satz 7 beweisen, benötigen wir noch ein Resultat aus der Wavelet-Theorie.

**Satz 9** Sei  $r \in \mathbb{N}$  beliebig, dann gibt es eine Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass

1.  $\varphi \in \mathcal{C}^r$  und hat kompakten Träger,
2. Für alle Polynome  $P$  mit Grad  $r$  gibt es ein Polynom  $\hat{P}$  mit Grad  $r$ , sodass für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt, dass  $\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \hat{P}(y) \varphi(x - y) = P(x)$ ,
3. Es gilt  $\int \varphi(x) \varphi(x - y) dx = \delta_{y,0}$  für alle  $y \in \mathbb{Z}^d$
4. Es gibt Koeffizienten  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ , sodass  $2^{-d/2} \varphi(x/2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \varphi(x - k)$ .

Einen Beweis findet man beispielsweise in [1]

Wir beweisen nun Satz 7

**Beweis:** Wir werden den Beweis hier nur sehr kurz skizzieren. Interessierte Leserinnen und Leser seien auf [4] und [3]. verwiesen

Eindeutigkeit zeigt man, indem man mit einer geeigneten Funktion faltet.

Für die Existenz definiert man, im Gegensatz zu vorher,  $\varphi_y^n(x) := 2^{nd/2} \varphi(2^n(x - y))$ . Definiere  $\Lambda^n := 2^{-n} \mathbb{Z}^d$  und die endlichdimensionalen Räume  $V_n := \text{span}\{\varphi_y^n : y \in \Lambda^n\}$ . Sei außerdem  $\hat{V}_n$  das  $L^2$  orthogonale Komplement von  $V_{n-1}$  in  $V_n$ , sodass  $V_n = V_0 \oplus \hat{V}_1 \oplus \dots \oplus \hat{V}_n$ . Definiere eine Folge von Operatoren  $\mathcal{R}^n : \mathcal{D}^\gamma \rightarrow \mathcal{C}^r$  mittels

$$(\mathcal{R}^n f)(y) = \sum_{x \in \Lambda^n} (\Pi_x f(x)) (\varphi_x^n) \varphi_x^n(y).$$

Man zeigt, dass diese Folge konvergiert. Hierbei verwendet man, dass es eine endliche Familie  $\Phi$  gibt, sodass  $\{\hat{\varphi}_x^n\}_{x \in \Lambda^n, \hat{\varphi} \in \Phi}$  eine Basis von  $\hat{V}_{n+1}$  ist. Es folgt sogar, dass  $\int \hat{\varphi}(x) P(x) dx = 0$  für alle Polynome mit Grad  $r$  und alle  $\hat{\varphi} \in \Phi$

Für die Abschätzung definiert man für eine gegebene Distribution  $\eta$  die Ausdrücke

$$\mathcal{P}_n \eta := \sum_{x \in \Lambda^n} \eta(\varphi_x^n) \varphi_x^n, \quad \hat{\mathcal{P}}_n \eta := \sum_{\hat{\varphi} \in \Phi} \sum_{x \in \Gamma^n} \eta(\hat{\varphi}_x^n) \hat{\varphi}_x^n.$$

Damit kann man nämlich folgende Aufteilung machen:

$$\mathcal{R}f - \Pi_x f(x) = (\mathcal{R}f - \mathcal{P}_n \Pi_x f(x)) + \sum_{m \geq n} (\hat{\delta} \mathcal{R}^m f - \hat{\mathcal{P}}_m \Pi_x f(x)) + \sum_{m \geq n} \delta \mathcal{R}^m f.$$

Durch Abschätzen der drei Terme folgt die Behauptung. □

## 5 Ein Satz aus der harmonischen Analysis

Abschließend geben wir noch eine sehr schöne Anwendung dieser Theorie an. Der nachfolgende Satz ist ein "klassisches" Resultat aus der harmonischen Analysis.

**Satz 10** Sei  $\beta > \alpha > 0$ . Dann gibt es eine stetige, bilineare Abbildung  $B : \mathcal{C}^\beta \times \mathcal{C}^{-\alpha} \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ , sodass  $B(f, g) = fg$ , falls  $f$  und  $g$  stetig sind.

**Beweis:** Auch diesen Beweis wollen wir nur skizzieren. Definiere eine Regularity Structure  $\mathcal{T} = (T, A, G)$ : Setze  $A := \mathbb{N}_0 \cup (\mathbb{N}_0 - \alpha)$ .  $T := V \oplus W$ , wobei  $V$  und  $W$  Kopien des Polynom-Modells über  $\mathbb{N}_0$  sind.  $G := \{\Gamma_h : h \in \mathbb{R}^d\}$ .

Wir beschreiben nun die Elemente und Operationen: Sei  $k \in \mathbb{N}_0$  beliebig.  $X^k \in V$ ,  $\Xi X^k \in W$ ,  $X^k \in T_{|k|}$ ,  $\Xi X^k \in T_{|k|-\alpha}$ .  $\Gamma_h X^k := (X - h)^k$  und  $\Gamma_h \Xi X^k := \Xi(X - h)^k$ .

Sei  $\xi \in \mathcal{C}^{-\alpha}$  beliebig, definiere das Modell  $(\Pi^\xi, \Gamma)$  mittels  $(\Pi_x^\xi X^k)(y) := (y - x)^k$  und  $(\Pi_x^\xi \Xi X^k)(y) := (y - x)^k \xi(y)$ , falls  $\xi$  stetig, beziehungsweise  $(\Pi_x^\xi \Xi X^k)(y) := \varphi \mapsto \xi(\varphi(\cdot)(\cdot - x)^k)$ . Außerdem setze  $\Gamma_{xy} := \Gamma_{y-x}$ . Man rechnet nach, dass dies wirklich ein Modell ist.

Damit kann man  $\mathcal{D}_M^\beta$  definieren. Achtung:  $\mathcal{D}_M^\beta$  hängt von  $\xi$  ab, aber man kann trotzdem zeigen, dass  $\mathcal{C}^\beta \subseteq \mathcal{D}_M^\beta$  für alle  $\xi$  (vergleiche dazu auch die Bemerkung von vorher). Nach Satz 7 gibt es nun den Reconstruction Operator  $\mathcal{R}^\xi$ . Definiere schließlich

$$B(f, \xi) := \mathcal{R}^\xi(\Xi F),$$

wobei  $F$  die Identifikation von  $f$  bezüglich  $\mathcal{D}_M^\beta$  ist. Wegen den Bemerkungen nach Satz 7 ist  $B$  in beiden Argumenten stetig und falls  $\xi$  und  $f$  stetig sind, gilt wegen den selben Bemerkungen

$$B(f, \xi) = \mathcal{R}^\xi(\Xi F) = \Pi_x^\xi F(x) = \xi(x)F(x).$$

□

**Bemerkung 11** Aus den Bemerkungen von Satz 7 folgt sogar, dass  $B(\cdot, \cdot) : \mathcal{C}^\beta \times \mathcal{C}^{-\alpha} \rightarrow \mathcal{C}^{-\alpha}$

## Literatur

- [1] Ingrid Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. II. Variations on a theme. *SIAM J. Math. Anal.*, 24(2):499–519, 1993.
- [2] M. Gubinelli. Controlling rough paths. *J. Funct. Anal.*, 216(1):86–140, 2004.
- [3] M. Hairer. A theory of regularity structures. *Invent. Math.*, 198(2):269–504, 2014.
- [4] Martin Hairer. Introduction to regularity structures. *Braz. J. Probab. Stat.*, 29(2):175–210, 2015.