Die Operatorenschar $\mathrm{L}(\lambda) = \lambda - \mathrm{A} + \mathrm{B}(\mathrm{D} - \lambda)^{-1}\mathrm{B}^*$ [*,†,‡]

Bernhard Bodenstorfer
Robert Kosik

22. November 1993

Zusammenfassung

Die rationale Operatorenschar $\mathrm{L}(\lambda) = \lambda - \mathrm{A} + \mathrm{B}(\mathrm{D} - \lambda)^{-1}\mathrm{B}^* : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$ ist zunächst nur auf $\rho(\mathrm{D})$ definiert. Dabei sind A und D stetige Operatoren auf Hilberträumen $\mathcal{H}_0$ beziehungsweise $\mathcal{H}_1$, und B bildet $\mathcal{H}_0$ stetig in $\mathcal{H}_1$ ab. Die Resolvente $\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$ kann mit dem selbstadjungierten Operator $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B}^* & \mathrm{D} \end{pmatrix}$, welcher $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ in sich abbildet, als Kompression $-\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)^{-1}\mathbf{Q}$ dargestellt werden. Der Operator $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^*$ ist die Einbettung von $\mathcal{H}_0$ in $\tilde{\mathcal{H}}$.

Zuerst untersuchen wir spektrale Zusammenhänge zwischen L und $\tilde{\mathbf{A}}$.

Im zweiten Kapitel charakterisieren wir die Eigenwerte λ_0 zu Eigenvektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $x \neq 0$ von $\tilde{\mathbf{A}}$ durch Bedingungen an das Verhalten von $\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$ nahe λ_0.

Zuletzt gehen wir von der Beobachtung aus, daß $-\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)^{-1}\mathbf{Q}$ die Operatorenschar $\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$ teilweise auch an Werten λ holomorph fortsetzt, wo $\mathrm{L}(\lambda)$ nicht definiert ist. So kommen wir zur Frage, wann $-\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)^{-1}\mathbf{Q}$ eine maximale holomorphe Fortsetzung ist. Darunter verstehen wir, daß es keine holomorphe echte Fortsetzung von $-\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)^{-1}\mathbf{Q}$ gibt. Wir geben eine hinreichende Bedingung für $\mathcal{H}_1$ an, unter der $-\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)^{-1}\mathbf{Q}$ in diesem Sinn maximal ist.

[*] Entstanden im Rahmen des Projektpraktikums aus Technischer Mathematik bei Prof. Heinz Langer an der TU Wien.

[†] Der größere Teil der Ergebnisse konnte vom ersten der Autoren (alias *B.Bodi*) gefunden werden.

[‡] Die Autoren danken Prof. Langer für die ausgezeichnete Betreuung.

Inhaltsverzeichnis

1 Die allgemeine Operatorenschar $\mathrm{L}(\lambda)$ und der Operator $\tilde{\mathrm{A}}$

In diesem Kapitel wird die Operatorenschar

$$\mathrm{L}(\lambda) = \lambda - \mathrm{A} + \mathrm{B}(\mathrm{D} - \lambda)^{-1}\mathrm{C} \quad : \quad \mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda)) \to \mathcal{E}_0 \tag{1}$$

betrachtet. Dabei seien

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &: \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_0 \\ \mathrm{B} &: \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0 \\ \mathrm{C} &: \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_1 \\ \mathrm{D} &: \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_1 \end{aligned}$$

beschränkte lineare Operatoren und $\mathcal{E}_0$ und $\mathcal{E}_1$ zwei komplexe Banachräume. Der Definitionsbereich[1] von $\mathrm{L}(\lambda)$ ist für $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda)) = \mathcal{D}((\mathrm{D} - \lambda)^{-1}\mathrm{C}) \subseteq \mathcal{E}_0. \tag{2}$$

Man beachte, daß etwa für $\lambda \in \sigma_p(\mathrm{D})$ der Operator $\mathrm{L}(\lambda)$ nicht definiert ist.

Ähnlich den Begriffen für Operatoren definieren wir:

Definition 1 Resolventenmenge $\rho(\mathrm{L})$ und Spektrum $\sigma(\mathrm{L})$ einer Operatorenschar $\mathrm{L}(\lambda)$ auf einem Banachraum $\mathcal{E}_0$. $\rho(\mathrm{L})$ enthält genau jene $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $\mathrm{L}(\lambda)$ stetig invertierbar ist. Unter stetig invertierbar wird hier verstanden, daß $\mathrm{L}(\lambda)$ auf ganz $\mathcal{E}_0$ definiert, als Abbildung $\mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_0$ bijektiv und $\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$ stetig ist.

Das Spektrum $\sigma(\mathrm{L})$ sei $\mathbb{C} \setminus \rho(\mathrm{L})$.

Wie bei linearen Operatoren zerlegt man auch das Spektrum der Schar $\mathrm{L}(\lambda)$ in einzelne Komponenten. Man muß aber im Auge behalten, daß $\mathrm{L}(\lambda)$ für manche λ nicht total, das heißt nicht auf ganz $\mathcal{E}_0$ definiert, ist.

Definition 2 Punktspektrum $\sigma_p(\mathrm{L})$, Residualspektrum $\sigma_r(\mathrm{L})$ und kontinuierliches Spektrum $\sigma_c(\mathrm{L})$ der Operatorenschar L auf dem Banachraum $\mathcal{E}_0$ seien:

$$\begin{aligned} \sigma_p(\mathrm{L}) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists x \in \mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda)) \setminus \{0\} \quad \mathrm{L}(\lambda)x = 0\} \\ \sigma_r(\mathrm{L}) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(\mathrm{L}) : \overline{\mathrm{L}(\lambda)\mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda))} \neq \mathcal{E}_0\} \\ \sigma_c(\mathrm{L}) &= \sigma(\mathrm{L}) \setminus (\sigma_p(\mathrm{L}) \cup \sigma_r(\mathrm{L})). \end{aligned}$$

Die Punkte $\lambda \in \sigma_p(\mathrm{L})$ heißen die Eigenwerte, die $x \in \mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda))$ mit $\mathrm{L}(\lambda)x = 0$ die zugehörigen Eigenvektoren von L.

[1] Wir sehen die Verkettung von Operatoren in der vorliegenden Arbeit als an x definiert an, wenn alle Zwischenergebnisse definiert sind. Phänomene, die beim vorübergehenden Zulassen von Mehrdeutigkeit entstünden, wurden also *stur* ignoriert.

Eine komplexe Zahl λ nennt man — wie für Operatoren üblich — einen approximativen Eigenwert[2] von L, wenn es eine Folge x_n in $\mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda))$ gibt mit $x_n \not\to 0$ und $\mathrm{L}(\lambda)x_n \to 0$ für $n \to \infty$. (λ muß damit natürlich in $\sigma(\mathrm{L})$ liegen.) Im folgenden wird eine solche Folge x_n als approximative Eigenfolge bezeichnet.[3] Für Operatorenscharen (analog für Operatoren) bezeichnen wir die Menge der approximativen Eigenwerte von L als das approximative Spektrum $\sigma_a(\mathrm{L})$.

Zum Unterschied von σ_p, σ_r und σ_c, die eine Partition von σ bilden, gilt

$$\begin{aligned} \sigma_p \cup \sigma_c &\subseteq \sigma_a \text{ und} && (3)\\ \sigma_a \cup \sigma_r &= \sigma. && (4) \end{aligned}$$

Bemerkung 1 Zum Unterschied von linearen Operatoren, kann man nicht automatisch mit dem Satz von der offenen Abbildung das kontinuierliche Spektrum auch als

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_p(\mathrm{L}) \cup \sigma_r(\mathrm{L})) : \mathrm{L}(\lambda)\mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda)) \neq \mathcal{E}_0\}$$

schreiben, weil unser $\mathrm{L}(\lambda)$ als Zusammensetzung von stetigen Operatoren mit einem zwar abgeschlossenen, aber eventuell unstetigen, selbst nicht mehr abgeschlossen sein muß.

1.1 Der Matrixeliminationskalkül

Zunächst sei eine in der vorliegenden Arbeit verwendete Technik vorgestellt. Es handelt sich hierbei um eine Verallgemeinerung der Rechentechnik mit Matrizen von $\mathbb{C}^{n\times n}$ auf Blockmatrizen, deren Elemente lineare Operatoren sind. Wir nennen solche Matrizen kurz Operatormatrizen. Will man eine Operatormatrix M invertieren, so schreibt man beim Invertieren durch Spaltentransformationen

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathrm{M} & \cdots & \mathrm{MX} & \cdots & \mathrm{MM}^{-1} = 1 \\ \hline 1 & \cdots & \mathrm{X} & \cdots & \mathrm{M}^{-1} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} \mathrm{M} & \cdots & \mathrm{XM} & \cdots & \mathrm{M}^{-1}\mathrm{M} = 1 \\ \hline 1 & \cdots & \mathrm{X} & \cdots & \mathrm{M}^{-1} \end{array},$$

wenn man Zeilentransformationen verwendet. X ist dabei die Transformations-Operatormatrix.

Zum Unterschied von gewöhnlichen Matrizen in $\mathbb{C}^{n\times n}$ muß man stets die Multiplikationsreihenfolge auch beim Multiplizieren der einzelnen Elemente einhalten, da hier im allgemeinen keine Kommutativität vorliegt. Außerdem muß man immer die Invertierbarkeit sicherstellen, wo sie im Laufe der Elimination nötig ist.

[2] Wir sehen gemäß dieser Definition, auch „echte“ Eigenwerte (z.B. mit konstanter x_n-Folge) als approximative an.

[3] Üblicherweise wird die Folge normiert vorausgesetzt statt $x_n \not\to 0$. Das ist aber immer erreichbar, da es durch $x_n \not\to 0$ stets eine Teilfolge x_{n_k} und ein $\varepsilon > 0$ gibt, mit $\|x_{n_k}\| \geq \varepsilon$. Die Folge $\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}$ bildet dann eine normierte approximative Eigenfolge. Die andernorts übliche Forderung nach Normiertheit störte in der vorliegenden Arbeit nur.

1.2 $(\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)^{-1}$ und $\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$

Die Operatormatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ auf

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_1$$

definieren wir

$$\tilde{\mathbf{A}} : \tilde{\mathcal{E}} \to \tilde{\mathcal{E}} : \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Einen wichtiger Zusammenhang zwischen $\tilde{\mathbf{A}}$ und $\mathrm{L}(\lambda)$ enthält folgender Satz:

Satz 1 *Mit*

$$\mathbf{P} \; : \; \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}_0 : \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{und} \tag{6}$$

$$\mathbf{Q} \; : \; \mathcal{E}_0 \to \tilde{\mathcal{E}} : \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

gilt auf $\rho(\mathrm{L}) \cap \rho(\mathrm{D})$

$$-\mathrm{L}^{-1}(\lambda) \;\; = \;\; \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)^{-1}\mathbf{Q}. \tag{8}$$

Beweis: Wir wenden den Kalkül zur Spaltenelimination auf $\tilde{\mathbf{A}}-\lambda$ an:

$$\begin{array}{c|c|} \tilde{\mathbf{A}}-\lambda = \begin{pmatrix} \mathrm{A}-\lambda & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D}-\lambda \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\mathrm{L}(\lambda) & \mathrm{B} \\ & \mathrm{D}-\lambda \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \\ -(\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{C} & 1 \end{pmatrix} \end{array} \to$$

$$\to \begin{array}{|c|} \begin{pmatrix} -\mathrm{L}(\lambda) & \\ & \mathrm{D}-\lambda \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{L}^{-1}(\lambda)\mathrm{B} \\ -(\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{C} & 1-(\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{C}\mathrm{L}^{-1}(\lambda)\mathrm{B} \end{pmatrix} \end{array} \to$$

$$\to \begin{array}{|c} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} -\mathrm{L}^{-1}(\lambda) & \mathrm{L}^{-1}(\lambda)\mathrm{B}(\mathrm{D}-\lambda)^{-1} \\ (\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{C}\mathrm{L}^{-1}(\lambda) & (\mathrm{D}-\lambda)^{-1}-(\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{C}\mathrm{L}^{-1}(\lambda)\mathrm{B}(\mathrm{D}-\lambda)^{-1} \end{pmatrix} \end{array} \tag{9}$$

Man beachte, daß obige Umformungen nur für solche λ durchführbar sind, wo $\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$ definiert ist. Das ist aber mit der Voraussetzung über λ gesichert. Da $\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)^{-1}\mathbf{Q}$ genau der Operator in der linken oberen Ecke von $(\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)^{-1}$ ist, ist der Satz bewiesen. ♡

Folgerung 1

$$\sigma(\mathrm{L}) \subseteq \sigma(\tilde{\mathbf{A}}) \subseteq \sigma(\mathrm{L}) \cup \sigma(\mathrm{D})$$

Beweis: Ist $\tilde{\mathbf{A}}-\lambda$ stetig invertierbar, so ist es nach Satz 1 auch $\mathrm{L}(\lambda)$. Sind umgekehrt $\mathrm{L}(\lambda)$ und $\mathrm{D}-\lambda$ stetig invertierbar, so enthält die Darstellung (9) nur totale, stetige Komponenten und ist also total und stetig. ♡

Bemerkung 2 Weiter unten wird der in der obigen Umformung auftretende Operator[4]

$$\mathbf{T} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \\ -(\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{C} & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

mit dem

$$(\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)\mathbf{T} \;=\; \begin{pmatrix} -\mathrm{L}(\lambda) & \mathrm{B} \\ & \mathrm{D}-\lambda \end{pmatrix} \tag{11}$$

gilt, bei der genaueren Untersuchung des Zusammenhangs zwischen den Spektren von $\mathrm{L}(\lambda)$ und $\tilde{\mathbf{A}}$ sehr nützlich sein.

Die Inverse $\mathbf{T}^{-1}$ schreibt sich als

$$\mathbf{T}^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \\ (\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{C} & 1 \end{pmatrix},. \tag{12}$$

Sie hat offensichtlich den gleichen Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(\mathbf{T}^{-1}) = \mathcal{D}(\mathbf{T}) = \mathcal{D}((\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{C}) \oplus \mathcal{E}_1 = \mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda)) \oplus \mathcal{E}_1 \subseteq \tilde{\mathcal{E}}. \tag{13}$$

1.3 Andere Darstellungen von $(\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)^{-1}$

Da die Darstellungen wiederum mit dem Inversionskalkül gefunden werden und die Umformungen ohne Überraschungen geradeheraus[5] durchgeführt werden können, seien hier nur die Ergebnisse angeführt, zumal sie für die weiteren Überlegungen nicht von großer Bedeutung sein werden.

In den Umformungen, die zu der Darstellung von $(\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)^{-1}$ bei Formel 9 führten, wurde der Operator $\mathrm{D}-\lambda$ invertiert. Wie zu erwarten ist, kann aber ebenso stattdessen $\mathrm{A}-\lambda$ invertiert werden, um zuerst B in der ersten Zeile zu eliminieren anstelle von C in der zweiten. Das naheliegende Endergebnis ist eine Darstellung, in der A und D beziehungsweise B und C ihre Rollen tauschen und die Matrix bezüglich ihrer Mitte zentral gespiegelt ist. Definiert man, um die Symmetrie zu betonen, eine Operatorenschar

$$\mathrm{L}_{\mathrm{A}}(\lambda) = \lambda - \mathrm{D} + \mathrm{C}(\mathrm{A}-\lambda)^{-1}\mathrm{B} \quad : \quad \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_1,$$

so ergibt sich mit analogem Eliminieren

$$\begin{pmatrix} (\mathrm{A}-\lambda)^{-1} - (\mathrm{A}-\lambda)^{-1}\mathrm{B}\mathrm{L}_{\mathrm{A}}^{-1}(\lambda)\mathrm{C}(\mathrm{A}-\lambda)^{-1} & (\mathrm{A}-\lambda)^{-1}\mathrm{B}\mathrm{L}_{\mathrm{A}}^{-1}(\lambda) \\ \mathrm{L}_{\mathrm{A}}^{-1}(\lambda)\mathrm{C}(\mathrm{A}-\lambda)^{-1} & -\mathrm{L}_{\mathrm{A}}^{-1}(\lambda) \end{pmatrix}$$

als andere Darstellung für $(\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)^{-1}$.

Interessanter ist da die Möglichkeit, $(\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)^{-1}$ durch Invertieren von B oder C darzustellen, da hier zum Unterschied von obigen Ergebnissen nur die Frage, ob 0 in der

[4] Freigelassene Elemente in den Operatormatrizen sind als mit 0-Operatoren aufgefüllt zu denken.
[5] Ich (=Bodi) kenne noch immer kein ordentliches deutsches Wort mit der Bedeutung von „straightforward“.

Resolventenmenge des jeweiligen Operators liegt, relevant ist. In diesem Fall hat man einen 1:1-Zusammenhang zwischen der Resolvente einer quadratischen Operatorenschar und $(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)^{-1}$ gefunden. Das ist insbesondere dann interessant, wenn man solche Effekte, wie sie durch die Resolventenbildung $(\mathrm{D} - \lambda)^{-1}$ in $\mathrm{L}(\lambda)$ auftreten, umgehen will.

Mit den quadratischen Operatorenscharen

$$\mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\lambda) = -\mathrm{C} + (\mathrm{D} - \lambda)\mathrm{B}^{-1}(\mathrm{A} - \lambda) \quad : \quad \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_1$$

und

$$\mathrm{L}_{\mathrm{C}}(\lambda) = -\mathrm{B} + (\mathrm{A} - \lambda)\mathrm{C}^{-1}(\mathrm{D} - \lambda) \quad : \quad \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0$$

ergeben sich die zwei weiteren Darstellungen für $(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{L}_{\mathrm{B}}^{-1}(\lambda)(\mathrm{D} - \lambda)\mathrm{B}^{-1} & -\mathrm{L}_{\mathrm{B}}^{-1}(\lambda) \\ \mathrm{B}^{-1} - \mathrm{B}^{-1}(\mathrm{A} - \lambda)\mathrm{L}_{\mathrm{B}}^{-1}(\lambda)(\mathrm{D} - \lambda)\mathrm{B}^{-1} & \mathrm{B}^{-1}(\mathrm{A} - \lambda)\mathrm{L}_{\mathrm{B}}^{-1}(\lambda) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \mathrm{C}^{-1}(\mathrm{D} - \lambda)\mathrm{L}_{\mathrm{C}}^{-1}(\lambda) & \mathrm{C}^{-1} - \mathrm{C}^{-1}(\mathrm{D} - \lambda)\mathrm{L}_{\mathrm{C}}^{-1}(\lambda)(\mathrm{A} - \lambda)\mathrm{C}^{-1} \\ -\mathrm{L}_{\mathrm{C}}^{-1}(\lambda) & \mathrm{L}_{\mathrm{C}}^{-1}(\lambda)(\mathrm{A} - \lambda)\mathrm{C}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Es braucht wohl nicht mehr ausdrücklich auf die Symmetrie der beiden Formen hingewiesen werden.

Man könnte nun meinen, daß noch weitere Darstellungen leicht gefunden werden könnten, indem man anstelle der bisher verwendeten *Spaltenelimination* auch noch viermal *Zeilenelimination* anwendet. Es stellt sich dabei jedoch heraus, daß so keine neuen Darstellungen mehr ermittelt werden.

1.4 Spektraler Zusammenhang zwischen $\mathrm{L}(\lambda)$ und $\tilde{\mathbf{A}}$

Hier wollen wir genauer auf die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Komponenten der Spektren der Operatorenschar L und des Operators $\tilde{\mathbf{A}}$ eingehen.

Zunächst zum Punktspektrum:

Behauptung 1 *Ist ein Vektor $x \in \mathcal{D}(\mathrm{L}) \setminus \{0\}$ Eigenvektor von* L *zum Eigenwert λ, dann ist $\mathbf{TQ}x$ Eigenvektor von $\tilde{\mathbf{A}}$ zum Eigenwert λ.*

Unter der Voraussetzung $\lambda \notin \sigma_p(\mathrm{D})$ gilt: Ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \tilde{\mathcal{E}} \setminus \{0\}$ Eigenvektor von $\tilde{\mathbf{A}}$, so ist x nichttrivialer Eigenvektor von L *zum Eigenwert λ. Außerdem ist dann natürlich $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{TQ}x$.*

Beweis: Zunächst zur ersten Aussage: Nach (2) ist $\mathrm{L}(\lambda)x$ genau dann definiert, wenn $(\mathrm{D} - \lambda)^{-1}\mathrm{C}x$ definiert ist. Sei $\mathrm{L}(\lambda)x = 0$. Darin ist bereits implizit enthalten, daß der Ausdruck definiert ist. Damit ist aber auch

$$\mathbf{TQ}x = \begin{pmatrix} x \\ -(\mathrm{D} - \lambda)^{-1}\mathrm{C}x \end{pmatrix} \tag{14}$$

erklärt. Mit Formel 11 ergibt das

$$(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)\mathbf{TQ}x \;=\; \begin{pmatrix} -\mathrm{L}(\lambda) & \mathrm{B} \\ & \mathrm{D} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{L}(\lambda)x \\ 0 \end{pmatrix},$$

und damit $(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)\mathbf{TQ}x = 0$. Es kann $\mathbf{TQ}x$ bei nichttrivialem x nicht 0 sein, weil aus (14) die Äquivalenz $x = 0 \Leftrightarrow \mathbf{TQ}x = 0$ folgt, womit die erste Aussage gezeigt ist.

Nun zur zweiten Aussage: Zuerst ist zu zeigen, daß $\mathrm{L}(\lambda)x$ überhaupt definiert ist. Aus

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; (\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathrm{A} - \lambda)x + \mathrm{B}y \\ \mathrm{C}x + (\mathrm{D} - \lambda)y \end{pmatrix}$$

folgt direkt

$$0 \;=\; \mathrm{C}x + (\mathrm{D} - \lambda)y \tag{15}$$

und daraus zunächst $x \neq 0$, weil sonst y nicht verschwindender Eigenvektor von D zum Eigenwert λ sein müßte, im Widerspruch zu $\lambda \notin \sigma_p(\mathrm{D})$. Aus (15) folgt aber wiederum, weil $\mathrm{D} - \lambda$ injektiv ist, daß

$$(\mathrm{D} - \lambda)^{-1}\mathrm{C}x \;=\; -y \tag{16}$$

und somit auch $\mathrm{L}(\lambda)x$ definiert ist.

Nun kann man wegen (13) $\mathbf{T}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bilden und natürlich darauf wieder $\mathbf{T}$ anwenden. Man erhält so

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= (\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)\mathbf{TT}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\mathrm{L}(\lambda) & \mathrm{B} \\ & \mathrm{D} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ (\mathrm{D} - \lambda)^{-1}\mathrm{C}x + y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\mathrm{L}(\lambda) & \mathrm{B} \\ & \mathrm{D} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus (16) folgt. Wegen $x \neq 0$ ergibt $-\mathrm{L}(\lambda)x = 0$ sofort, daß x Eigenvektor von L zum Eigenwert λ ist.

Die dritte Aussage, über die Gestalt der Eigenvektoren, erhält man jetzt entweder aus der ersten Aussage oder unmittelbar aus (16). ♡

Bemerkung 3 Behauptung 1 ist eigentlich eine genaue logische Äquivalenz: L hat Eigenvektoren $x \neq 0$ zu λ genau dann, wenn $\tilde{\mathbf{A}}$ Eigenvektoren zu λ mit erster Komponente x hat und $\lambda \notin \sigma_p(\mathrm{D})$ liegt, weil aus der Definiertheit von $\mathrm{L}(\lambda)x$ schon $\lambda \notin \sigma_p(\mathrm{D})$ folgt.

$x \neq 0$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{TQ}x \in \mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda)) \oplus \mathcal{E}_1$ erhält man dann „so nebenher“.

Wir wenden uns nun dem Residualspektrum zu: Hier erscheinen die nebenher nötigen Voraussetzungen schon weniger natürlich.

Behauptung 2 *Unter der Voraussetzung* $\lambda \notin \sigma_a(\mathrm{D})$ *gilt: Ist* $(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)(\mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda)) \oplus \mathcal{E}_1)$ *dicht in* $\tilde{\mathcal{E}}$*, dann ist auch* $\mathrm{L}(\lambda)\mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda))$ *dicht in* $\mathcal{E}_0$*.*

Umgekehrt gilt unter der Voraussetzung, daß $(\mathrm{D}-\lambda)\mathcal{E}_1$ *dicht in* $\mathcal{E}_1$ *liegt: Ist* $\mathrm{L}(\lambda)\mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda))$ *dicht in* $\mathcal{E}_0$*, so ist auch* $(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)(\mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda)) \oplus \mathcal{E}_1)$ *dicht in* $\tilde{\mathcal{E}}$*.*

Beweis: Zunächst die erste Aussage: Sei $x \in \mathcal{E}_0$ beliebig. Nach der Voraussetzung über $\tilde{\mathbf{A}}-\lambda$ unter Beachtung von (13) gibt es eine Folge von Vektoren $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathbf{T}^{-1})$ mit

$$(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da aber nach (11)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} &= \lim_{n\to\infty} (\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \lim_{n\to\infty} (\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} -\mathrm{L}(\lambda) & \mathrm{B} \\ & \mathrm{D}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ (\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{C}x_n + y_n \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

folgt, weil $(\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{C}x_n + y_n$ andernfalls im Widerspruch zur Voraussetzung eine approximative Eigenfolge von D zu λ wäre, aus der Konvergenz der zweiten Komponente gegen 0

$$(\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{C}x_n + y_n \quad \rightarrow \quad 0.$$

Wegen der Stetigkeit von B sieht man daraus

$$\mathrm{B}((\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{C}x_n + y_n) \quad \rightarrow \quad 0.$$

Damit muß aber, wie man an der ersten Komponente in (17) erkennt, $\mathrm{L}(\lambda)x_n \rightarrow x$ gelten, womit der erste Teil bewiesen ist.

Nun zur zweiten Aussage: Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \tilde{\mathcal{E}}$ beliebig. Nach der Voraussetzung über $\mathrm{D}-\lambda$ gibt es eine Folge y_n in $\mathcal{E}_1$ mit $(\mathrm{D}-\lambda)y_n \rightarrow y$. Da $\mathrm{L}(\lambda)\mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda))$ nun dicht in $\mathcal{E}_0$ ist, gilt

$$\forall n \geq 1 \quad \exists x_n \in \mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda)) \qquad \|{-\mathrm{L}(\lambda)}x_n + \mathrm{B}y_n - x\| \leq \frac{1}{n}.$$

Das bedeutet $-\mathrm{L}(\lambda)x_n + \mathrm{B}y_n \to x$. Damit ist eine Folge in $\mathcal{D}(\mathbf{T}) \subseteq \tilde{\mathcal{E}}$ gefunden (vgl. Formel 13), mit der man

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)\mathbf{T}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\mathrm{L}(\lambda) & \mathrm{B} \\ & \mathrm{D} - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\mathrm{L}(\lambda)x_n + \mathrm{B}y_n \\ (\mathrm{D} - \lambda)y_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

erreicht. Wegen (13) und $\mathcal{D}(\mathbf{T}) = \mathcal{D}(\mathbf{T}^2)$ ist auch $\mathbf{T}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ in $(\mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda)) \oplus \mathcal{E}_1)$, wie erwünscht. ♡

Leider kann man, weil Behauptung 2 nur über Dichtheit von $(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)(\mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda)) \oplus \mathcal{E}_1)$ und nicht über Dichtheit von $(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)\tilde{\mathcal{E}}$ Aussagen macht, nur mit der stärkeren Voraussetzung $\lambda \notin \sigma(\mathrm{D})$ in einer Richtung argumentieren, mit der dann ja $\mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda)) \oplus \mathcal{E}_1 = \tilde{\mathcal{E}}$ gilt. [6]

Folgerung 2 *Unter der Voraussetzung* $\lambda \notin \sigma(\mathrm{D})$ *gilt:*

$$\sigma_r(\mathrm{L}) \subseteq \sigma_r(\tilde{\mathbf{A}}).$$

Umgekehrt gilt unter der Voraussetzung, daß $(\mathrm{D} - \lambda)\mathcal{E}_1$ *dicht liegt in* $\mathcal{E}_1$*:*

$$\sigma_r(\tilde{\mathbf{A}}) \subseteq \sigma_r(\mathrm{L}).$$

<u>Beweis:</u> Aus dem ersten Teil von Behauptung 2 folgt zunächst wegen $(\mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda)) \oplus \mathcal{E}_1) = \tilde{\mathcal{E}}$ wegen $\lambda \notin \sigma(\mathrm{D})$ indirekt $\lambda \in \sigma_p(\tilde{\mathbf{A}}) \cup \sigma_r(\tilde{\mathbf{A}})$. Angenommen nun, λ wäre Eigenwert von $\tilde{\mathbf{A}}$ mit zugehörigem Eigenvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, so folgte aus (3) und Behauptung 1 dann, daß x ein nicht verschwindender Eigenvektor von L zum Eigenwert λ wäre. Das aber widerspräche $\lambda \in \sigma_r(\mathrm{L})$.

Für die zweite Aussage ist die eigentliche Arbeit schon in der zweiten Aussage von Behauptung 2 enthalten:

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma_r(\tilde{\mathbf{A}}) \quad &\Rightarrow \quad \overline{(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)\tilde{\mathcal{E}}} \neq \tilde{\mathcal{E}} \\ &\Rightarrow \quad \overline{(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)(\mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda)) \oplus \mathcal{E}_1)\tilde{\mathcal{E}}} \neq \tilde{\mathcal{E}} \\ &\Rightarrow \quad \overline{\mathrm{L}(\lambda)\mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda))} \neq \mathcal{E}_0.\end{aligned}$$

Es bleibt nur noch auszuschließen, daß λ im Punktspektrum von L liegt. Das kann aber wegen Behauptung 1 nicht sein, da λ sonst auch im Punktspektrum von $\tilde{\mathbf{A}}$ läge. ♡

[6] Man kann das auch so sehen, daß man zur sich aus Behauptung 2 direkt ergebenden Voraussetzung $\lambda \notin \sigma_a(\mathrm{D})$ noch $\overline{(\mathrm{D} - \lambda)\mathcal{E}_1}$ dicht in $\mathcal{E}_1$ dazunimmt, weil wegen der Stetigkeit der Operatoren D und $\tilde{\mathbf{A}}$ auch schon mit $\overline{(\mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda)) \oplus \mathcal{E}_1} = \tilde{\mathcal{E}}$ vernünftig zu arbeiten wäre. Aber (4) sagt, daß diese beiden Voraussetzungen ohnehin $\lambda \notin \sigma(\mathrm{D})$ gleichkommen.

Vor dem kontinuierlichen noch zum approximativen Spektrum, das zwar ziemlich analog dem Punktspektrum abgehandelt wird, doch sind stärkere Voraussetzungen nötig, auch weil beachtet werden muß, daß das betrachtete λ schon in σ_r oder σ_p enthalten sein kann:

Behauptung 3 *Ist x_n approximative Eigenfolge von L zum approximativen Eigenwert λ, so ist $\mathbf{TQ}x_n$ approximative Eigenfolge in $\mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda)) \oplus \mathcal{E}_1$ von $\tilde{\mathbf{A}}$ zum approximativen Eigenwert λ.*

Ist umgekehrt unter der Voraussetzung $\lambda \notin \sigma_a(\mathrm{D})$ die Vektorfolge $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ in $\mathcal{D}\mathrm{L}(\lambda) \oplus \mathcal{E}_1$ approximative Eigenfolge von $\tilde{\mathbf{A}}$ zum approximativen Eigenwert λ, so ist x_n approximative Eigenfolge von L zum approximativen Eigenwert λ.

Beweis: Zunächst zur ersten Aussage: Gelte $\mathrm{L}(\lambda)x_n \to 0$. Darin ist bereits implizit $x_n \in \mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda))$ enthalten, Damit ist aber auch

$$\mathbf{TQ}x_n = \begin{pmatrix} x_n \\ -(\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{C}x_n \end{pmatrix} \tag{18}$$

für alle n erklärt. Mit Formel 11 ergibt das

$$(\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)\mathbf{TQ}x_n = \begin{pmatrix} -\mathrm{L}(\lambda) & \mathrm{B} \\ & \mathrm{D}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{L}(\lambda)x_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $(\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)\mathbf{TQ}x_n \to 0$. Da mit $x_n \not\to 0$ gemäß (18) auch $\mathbf{TQ}x_n \not\to 0$, ist das eine approximative Eigenfolge, die, wie im Beweis von Behauptung 2 wieder wegen (13) und $\mathcal{D}(\mathbf{T}) = \mathcal{D}(\mathbf{T}^2)$ im gewünschten Raum liegt.

Nun zur zweiten Aussage: Es gilt $x_n \not\to 0$. Andernfalls wäre wegen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \lim_{n\to\infty} (\tilde{\mathbf{A}}-\lambda) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} (\mathrm{A}-\lambda)x_n + \mathrm{B}y_n \\ \mathrm{C}x_n + (\mathrm{D}-\lambda)y_n \end{pmatrix} \\ &= \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \mathrm{B}y_n \\ (\mathrm{D}-\lambda)y_n \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{19}$$

y_n approximative Eigenfolge von D zum approximativen Eigenwert λ wäre, im Widerspruch zur Voraussetzung $\lambda \notin \sigma_a(\mathrm{D})$. y_n könnte ja nicht gegen 0 streben, weil sonst überhaupt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to 0$ ginge, also keine approximative Eigenfolge wäre. Da $\mathrm{L}(\lambda)x_n$ definiert vorausgesetzt ist, kann man wegen (13) $\mathbf{T}^{-1}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ bilden, und natürlich darauf wieder $\mathbf{T}$ anwenden. Man erhält so:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \lim_{n\to\infty} (\tilde{\mathbf{A}}-\lambda) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} -\mathrm{L}(\lambda) & \mathrm{B} \\ & \mathrm{D}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ (\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{C}x_n + y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da andernfalls $(\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{C}x_n + y_n$ eine approximative Eigenfolge von D zu λ wäre, im Widerspruch zur Voraussetzung, folgt — wie beim Beweis von Behauptung 2 —

$$(\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{C}x_n + y_n \quad \to \quad 0$$

und daraus $\mathrm{B}((\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{C}x_n + y_n) \to 0$. Wegen $x_n \not\to 0$ sieht man aus $-\mathrm{L}(\lambda)x_n \to 0$ direkt, daß x_n approximative Eigenfolge von L zu λ ist. ♡

Soviel zum approximativen Spektrum. Es kann auch — unter stärkeren Voraussetzungen[7] — daraus eine Aussage über die Korrespondenz der kontinuierlichen Spektren gewonnen werden:

Folgerung 3 *Unter der Voraussetzung, daß* $(\mathrm{D}-\lambda)\mathcal{E}_1$ *dicht in* $\mathcal{E}_1$ *ist, gilt*

$$\sigma_c(\mathrm{L}) \subseteq \sigma_c(\tilde{\mathbf{A}}).$$

Umgekehrt gilt unter der Voraussetzung $\lambda \notin \sigma(\mathrm{D})$*:*

$$\sigma_c(\tilde{\mathbf{A}}) \subseteq \sigma_c(\mathrm{L}).$$

Beweis: Zur ersten Aussage: Aus (3) und aus Behauptung 3 erhält man zunächst $\lambda \in \sigma_a(\tilde{\mathbf{A}})$.[8] λ kann nicht in $\sigma_p(\tilde{\mathbf{A}})$ liegen, sonst läge es ja gemäß Behauptung 1 in $\sigma_p(\mathrm{L})$. In $\sigma_r(\tilde{\mathbf{A}})$ kann es ebenfalls nicht sein, sonst läge es aufgrund der Folgerung 2 in $\sigma_r(\mathrm{L})$. Es bleibt also nur mehr $\lambda \in \sigma_c(\tilde{\mathbf{A}})$ übrig.

Die zweite Aussage nun: Wegen $\lambda \notin \sigma(\mathrm{D})$ gilt wieder[9] $\mathcal{D}(\mathrm{L}(\lambda)) \oplus \mathcal{E}_1 = \tilde{\mathcal{E}}$, weshalb wir uns nicht um eingeschränkte Definitionsbereiche kümmern müssen. Zuerst wendet man nun (3 und Behauptung 3 an und erhält $\lambda \in \sigma_a(\mathrm{L})$. Aus Behauptung 1 folgt, wie gehabt, indirekt $\lambda \notin \sigma_p(\mathrm{L})$. Aus dem ersten Teil von Folgerung 2 erhält man dann, weil $\lambda \notin \sigma_p(\tilde{\mathbf{A}}) \cup \sigma_r(\tilde{\mathbf{A}})$, wieder indirekt, auch $\lambda \notin \sigma_r(\mathrm{L})$, wobei man wieder $\lambda \notin \sigma(\mathrm{D})$ verwendet. und die zweite Aussage kann mit (4), da nun nur mehr $\sigma_c(\mathrm{L})$ übrigbleibt, gefolgert werden. ♡

Bemerkung 4 Alle ziemlich verworrenen Voraussetzungen über D und Definiertheit von $\mathrm{L}(\lambda)$, die in den Behauptungen 1,2 und 3 sowie in den Folgerungen 2 und 3 gemacht wurden, kann man durch die einfachere, aber stärkere Voraussetzung $\lambda \in \rho(\mathrm{D})$ ersetzen.

Bemerkung 5 Man sieht an den Behauptungen 1,2 und 3 und den Folgerungen 2 und 3 die Tendenz, daß sich Singularitäten von $\tilde{\mathbf{A}}$ fast immer in solchen von L niederschlagen. Definiert man auf den Spektren $\sigma(\mathrm{L})$ und $\sigma(\tilde{\mathbf{A}})$ die ganzzahligen Funktionen s_{L} und $s_{\tilde{\mathbf{A}}}$, die die jeweilige Resolventenmenge ρ in $\{0\}$, σ_c in $\{1\}$, σ_r in $\{2\}$ und σ_p in $\{3\}$ abbilden, so gilt $s_{\tilde{\mathbf{A}}} \geq s_{\mathrm{L}}$. Anschaulich kann man diese Funktionen s deuten als Grad der Singularität an einer Stelle λ. Dann kann man obige Ungleichung als „$\tilde{\mathbf{A}}$ ist an λ stets mindestens so stark singulär wie L“ lesen.

[7]Vergleiche die Gedanken vor Folgerung 2, deren Auswirkungen auch hier spürbar werden.

[8]Man könnte stattdessen auch über Folgerung 1 gehen, um $\lambda \in \sigma(\tilde{\mathbf{A}})$ zu erhalten, was an dieser Stelle ausreicht.

[9]Wie bei Folgerung 2.

1.5 Die Operatorenschar $\mathrm{L}_n(\lambda) = \lambda - \mathrm{A} - \sum_{i=1}^n \mathrm{B}_i(\mathrm{D}_i - \lambda)^{-1}\mathrm{C}_i$

In diesem Abschnitt wird die Operatorenschar

$$\mathrm{L}_n(\lambda) \;=\; \lambda - \mathrm{A} - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{B}_i(\mathrm{D}_i - \lambda)^{-1}\mathrm{C}_i \quad \text{mit} \tag{20}$$

$$\mathrm{A} : \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_0 \qquad \mathrm{B}_i : \mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_0 \tag{21}$$

$$\mathrm{C}_i : \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_i \qquad \mathrm{D}_i : \mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_i \tag{22}$$

betrachtet, wobei wieder alle $\mathcal{E}_i$ Banachräume sind. Ihr entspricht die Operatormatrix

$$\tilde{\mathbf{A}}_n : \bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{E}_i \to \bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{E}_i \tilde{\mathbf{A}}_n = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B}_1 & \cdots & \mathrm{B}_i & \cdots & \mathrm{B}_n \\ \mathrm{C}_1 & \mathrm{D}_1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \mathrm{C}_i & & & \mathrm{D}_i & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ \mathrm{C}_n & & & & & \mathrm{D}_n \end{pmatrix}, \tag{23}$$

wie man sich leicht überzeugen kann, indem man das Problem auf das zuvor behandelte (1), (5) zurückführt. Hiezu setzt man einfach:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_1 & \cdots & \mathrm{B}_n \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{C}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{C}_n \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \mathrm{D}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{D}_n \end{pmatrix}.$$

Man könnte aber auch stattdessen den Matrixeliminationskalkül anwenden, erhielte dann analog zu den im Beweis von Satz 1 durchgeführten Umformungen in einem Zwischenschritt einen Operator $\mathbf{T}_n$, mittels dessen man alle Überlegungen wiederholen kann.

Andere Darstellungen für $\mathrm{L}^{-1}{}_n(\lambda)$ werden jedoch wesentlich komplizierter, weil unnötig Nulloperatoren „überschrieben“ werden und dann diese Einträge extra eliminiert werden müssen[10].

2 Aussagen über $\tilde{\mathbf{A}}$ aus der Asymptotik von $\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$

2.1 Spezialisierung der Operatorenschar $\mathrm{L}(\lambda)$

Ab diesem Kapitel werden weitere Forderungen an die in $\mathrm{L}(\lambda)$ auftretenden Operatoren gestellt. Von nun an seien

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{H}_0 \quad , \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{H}_1, \quad \text{Hilberträume mit inneren Produkten} \quad \langle\cdot,\cdot\rangle_0 \ \text{ und } \ \langle\cdot,\cdot\rangle_1 \,.$$

[10]Numeriker sprechen vom *Fill-in.*

Weiters gelte

$$\begin{aligned} \mathrm{A} = \mathrm{A}^* \quad , \quad \mathrm{D} = \mathrm{D}^* \quad \text{und} \\ \mathrm{C} = \mathrm{B}^*. \end{aligned}$$

Damit schreibt sich $\mathrm{L}(\lambda)$ als

$$\mathrm{L}(\lambda) = \lambda - \mathrm{A} + \mathrm{B}(\mathrm{D} - \lambda)^{-1}\mathrm{B}^*, \tag{24}$$

und die zugehörige Operatormatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ im Raum $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ mit dem inneren Produkt

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\rangle_\oplus = \langle x_0, x_1 \rangle_0 + \langle y_0, y_1 \rangle_1 \tag{25}$$

wird der selbstadjungierte Operator

$$\tilde{\mathbf{A}} \quad : \quad \tilde{\mathcal{H}} \to \tilde{\mathcal{H}} : \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B}^* & \mathrm{D} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Nach dem Spektralsatz für selbstadjungierte beschränkte Operatoren hat er eine Zerlegung $\tilde{\mathbf{E}}(t)$ der Einheit. Diese ist das wesentliche Hilfsmittel in diesem und — leicht ergänzt — im folgenden Kapitel 3. $\tilde{\mathbf{E}}$ wird in der Folge oft als operatorwertiges Maß aufgefaßt, um die Schreibweise zu vereinfachen.

Bemerkung 6 Außerdem kann man, weil für den selbstadjungierten Operator D immer $\sigma(\mathrm{D}) \subseteq \mathbb{R}$ gilt, sicher sein, daß $\mathrm{L}(\lambda)$ für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ definiert ist. Ebenso hat $\tilde{\mathbf{A}}$ nur Spektrum in $\mathbb{R}$. Man sieht so unter Berücksichtigung der Bemerkung 4 aus Folgerung 1, daß auch $\sigma(\mathrm{L}) \subseteq \mathbb{R}$ gewährleistet ist.

2.2 Charakterisierung der Eigenwerte von $\tilde{\mathbf{A}}$ zu Eigenvektoren mit nichttrivialer erster Komponente

In diesem Kapitel erhalten wir ein Kriterium, wann $\tilde{\mathbf{A}}$ einen Eigenwert λ_0 mit zugehörigem Eigenvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $x \neq 0$ hat. Die Charakterisierung dieser Eigenwerte erfolgt durch Aussagen über das lokale Verhalten von $\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$ nahe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Da die entscheidenden Aussagen solche über die Asymptotik von an $\mathbb{R}$ nichttangentialen Grenzübergängen gegen λ_0 sind, kommt es nur auf das Verhalten von $\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$ auf Gebieten, die $\mathbb{R}$ in λ_0 nichttangential berühren, an.

Wenn ein Grenzwert gegen λ_0 nichttangential an $\mathbb{R}$ gemeint ist, schreiben wir

$$\lambda \widehat{\to} \lambda_0 \quad \text{beziehungsweise} \quad \lambda_n \widehat{\to} \lambda_0$$

Des weiteren werden wir Grenzwerte in den betrachteten Hilberträumen und Grenzwerte von Operatoren in anderen Topologien als der vom inneren Produkt induzierten Hilbertraumtopologie und der ihr entsprechenden Operatortopologie bilden. Den

Grenzübergang in der starken Topologie auf dem Raum der stetigen linearen Operatoren bezeichnen wir mit:

$$\mathrm{X}_n \rightarrow^s \mathrm{X}.$$

Den Grenzübergang in der schwachen Topologie auf einem Hilbertraum sowie auf dem Raum der stetigen linearen Operatoren bezeichnen wir mit:

$$x_n \rightarrow^w x \quad \text{beziehungsweise} \mathrm{X}_n \rightarrow^w \mathrm{X}.$$

Das wesentliche Hilfsmittel in diesem Kapitel ist die Zerlegung $\tilde{\mathbf{E}}(t)$ der Einheit zu $\tilde{\mathbf{A}}$. Die Resolvente $(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)^{-1}$ kann man mittels $\tilde{\mathbf{E}}(t)$ schreiben als

$$(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)^{-1} = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{E}}(t)}{t - \lambda}. \tag{27}$$

Daraus erhält man den wichtigen

Hilfssatz 1

$$\lambda \widehat{\rightarrow} \lambda_0 \Rightarrow (\lambda - \lambda_0)(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)^{-1} \rightarrow^s -\tilde{\mathbf{E}}(\{\lambda_0\})$$

Beweis: Mit (27) ergibt sich für $\lambda \neq \lambda_0$

$$\begin{aligned}
(\lambda - \lambda_0)(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)^{-1} &= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\lambda - \lambda_0}{t - \lambda} \mathrm{d}\tilde{\mathbf{E}}(t) \\
&= \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0 - \lambda} \tilde{\mathbf{E}}(\{\lambda_0\}) + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda_0\}} \frac{\lambda - \lambda_0}{t - \lambda} \mathrm{d}\tilde{\mathbf{E}}(t) \\
&= -\tilde{\mathbf{E}}(\{\lambda_0\}) + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda_0\}} \frac{\lambda - \lambda_0}{t - \lambda} \mathrm{d}\tilde{\mathbf{E}}(t). \qquad (28)
\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt also noch, daß das Integral in (28) stark gegen 0 strebt. Zerlege $\tilde{\mathcal{H}}$ orthogonal in

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}} &= \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0^\infty} \mathcal{N}_i \quad \text{mit} \\
\mathcal{N}_0 &= \tilde{\mathbf{E}}(\mathbb{R} \setminus [\lambda_0 - 1, \lambda_0 + 1])\tilde{\mathcal{H}}, \\
\mathcal{N}_i &= (\tilde{\mathbf{E}}([\lambda_0 - \frac{1}{i}, \lambda_0 - \frac{1}{i+1})) + \tilde{\mathbf{E}}((\lambda_0 + \frac{1}{i+1}, \lambda_0 + \frac{1}{i}]))\tilde{\mathcal{H}} \\
\text{für} &\quad i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\
\mathcal{N}_\infty &= \tilde{\mathbf{E}}(\{\lambda_0\})\tilde{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Ein beliebiges $\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{H}}$ kann dann geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \sum_{i \in \mathbb{N}_0^\infty} \mathbf{x}_i \quad \text{mit} \qquad (29) \\
\mathbf{x}_i &\in \mathcal{N}_i.
\end{aligned}$$

Setzt man dieses $\mathbf{x}$ nun in (28) ein, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
& -\tilde{\mathbf{E}}(\{\lambda_0\}) \sum_{i\in\mathbb{N}_0^\infty} \mathbf{x}_i + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda_0\}} \frac{\lambda-\lambda_0}{t-\lambda}\mathrm{d}\tilde{\mathbf{E}}(t) \sum_{i\in\mathbb{N}_0^\infty} \mathbf{x}_i \\
= & -\tilde{\mathbf{E}}(\{\lambda_0\})\mathbf{x}_\infty + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda_0\}} \frac{\lambda-\lambda_0}{t-\lambda}\mathrm{d}\tilde{\mathbf{E}}(t) \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \mathbf{x}_i, \qquad (30)
\end{aligned}
$$

weil

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{E}}(\{\lambda_0\})\mathcal{N}_i &= \{0\} \quad \text{für} \quad i \neq \infty \quad \text{und} \\
\tilde{\mathbf{E}}(\mathrm{M})\mathcal{N}_\infty &= \{0\} \quad \text{für} \quad \lambda_0 \notin \mathrm{M} \subseteq \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Da die Summe orthogonal ist, ergibt sich aus der Besselschen Ungleichung

$$
\left\| \sum_{i\in\mathbb{N}_0\wedge i\geq N} \mathbf{x}_i \right\| \to 0 \quad \text{für} \quad N\to\infty.
$$

Mit

$$
\left| \frac{\lambda-\lambda_0}{t-\lambda} \right| \leq \frac{1}{\cos\alpha} = C \quad \text{für} \quad t\in\mathbb{R},
$$

wobei der Winkel $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ den Winkelraum, in dem $\lambda \widehat{\to} \lambda_0$ geht, begrenzt, erhält man für das Integral in (30), wenn man beachtet, auf welchen Räumen $\mathcal{N}_i$ die Zerlegung der Einheit $\tilde{\mathbf{E}}$ intervallweise konstant bleibt,

$$
\begin{aligned}
& \left\| \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda_0\}} \frac{\lambda-\lambda_0}{t-\lambda}\mathrm{d}\tilde{\mathbf{E}}(t) \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \mathbf{x}_i \right\| \\
\leq & \left\| \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda_0\}} \frac{\lambda-\lambda_0}{t-\lambda}\mathrm{d}\tilde{\mathbf{E}}(t) \sum_{i=0}^{N} \mathbf{x}_i \right\| + \left\| \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda_0\}} \frac{\lambda-\lambda_0}{t-\lambda}\mathrm{d}\tilde{\mathbf{E}}(t) \sum_{i\in\mathbb{N}_0\wedge i\geq N+1} \mathbf{x}_i \right\| \\
\leq & \left\| \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[\lambda_0-\frac{1}{N},\lambda_0+\frac{1}{N}]} \frac{\lambda-\lambda_0}{t-\lambda}\mathrm{d}\tilde{\mathbf{E}}(t) \sum_{i=0}^{N} \mathbf{x}_i \right\| + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda_0\}} C \left\| \mathrm{d}\tilde{\mathbf{E}}(t) \right\| \left\| \sum_{i\in\mathbb{N}_0\wedge i\geq N+1} \mathbf{x}_i \right\|.
\end{aligned}
$$

Wegen (31) wird der zweite Ausdruck für hinreichend großes N beliebig klein. Für ein so gewähltes nun festes N geht der erste gegen 0 für $\lambda \to \lambda_0$. ♡

Bemerkung 7 Hilfssatz 1 gilt für jeden selbstadjungierten Operator in einem Hilbertraum. Daß hier $\tilde{\mathcal{H}}$ und $\tilde{\mathbf{A}}$ verwendet wurde, dient nur der Vermeidung überflüssiger neuer Bezeichnungen.

Folgerung 4

$$\lambda \widehat{\Rightarrow} \lambda_0 \Rightarrow (\lambda - \lambda_0)\mathrm{L}^{-1}(\lambda) \rightarrow^s -\mathbf{P}\tilde{\mathbf{E}}(\{\lambda_0\})\mathbf{Q}$$

<u>Beweis:</u> Folgt direkt aus Satz 1 und Hilfssatz 1. ♡

Hilfssatz 2 *Sei* $\mathbf{R}$ *orthogonaler Projektor in* $\tilde{\mathcal{H}}$*. Dann gilt*

$$\mathbf{Rx} \perp \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{Rx} = 0.$$

<u>Beweis:</u>

$$\langle \mathbf{Rx}, \mathbf{x} \rangle_\oplus = \left\langle \mathbf{R}^2 \mathbf{x}, \mathbf{x} \right\rangle_\oplus = \langle \mathbf{Rx}, \mathbf{Rx} \rangle_\oplus$$

Da $\langle \cdot, \cdot \rangle_\oplus$ positiv definit ist, gilt die Aussage. ♡

Auch dieser Hilfssatz gilt allgemeiner als nur in $\tilde{\mathcal{H}}$ (vgl. Bemerkung 7). Die nächste Folgerung jedoch ist auf $\tilde{\mathcal{H}}$ zugeschnitten.

Folgerung 5 *Sei* $\mathbf{R}$ *orthogonaler Projektor in* $\tilde{\mathcal{H}}$*. Dann gilt*

$$\mathbf{R} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \{0\} \oplus \mathcal{H}_1 \Leftrightarrow \mathbf{R} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

<u>Beweis:</u> Direkt aus Hilfssatz 2 und (25). ♡

Behauptung 4 $\tilde{\mathbf{A}}$ *hat einen Eigenvektor mit erster Komponente* $x \neq 0$ *zum Eigenwert* λ_0 *genau dann, wenn gilt:*

$$\exists x_0 \in \mathcal{H}_0 \quad (\lambda \widehat{\Rightarrow} \lambda_0 \Rightarrow (\lambda - \lambda_0)\mathrm{L}^{-1}(\lambda) x_0 \rightarrow x' \neq 0).$$

<u>Beweis:</u> $\Rightarrow$: Habe $\tilde{\mathbf{A}}$ einen Eigenvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $x \neq 0$ zu λ_0. Es folgt mit diesem x aus Folgerung 4

$$(\lambda - \lambda_0)\mathrm{L}^{-1}(\lambda) x \quad \rightarrow \quad -\mathbf{P}\tilde{\mathbf{E}}(\{\lambda_0\})\mathbf{Q}x = x'.$$

Wäre $x' = 0$, so gälte für

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}x &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{E}}(\{\lambda_0\})\mathbf{Q}x &\perp \mathbf{Q}x. \end{aligned}$$

Da aber $\tilde{\mathbf{E}}(\{\lambda_0\})$ orthogonaler Projektor ist, sähe man aus Folgerung 5 für $\mathbf{Q}x$ sofort $x = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Wählt man daher $x_0 = x$, so folgt $x' \neq 0$.

$\Leftarrow$: Nach Hilfssatz 1 ist x' die erste Komponente eines Eigenvektors$\neq 0$ von $\tilde{\mathbf{A}}$. Es gibt also einen Eigenvektor zu λ mit erster Komponente $x = x' \neq 0$. ♡

Aus Behauptung 4 ergibt sich sofort

Folgerung 6 *Hat der Operator* $\tilde{\mathbf{A}}$ *einen Eigenvektor* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *zum Eigenwert* λ_0 *mit* $x \neq 0$*, so gibt es eine holomorphe Vektorschar*

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{x}(\lambda) & : & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathcal{H}_0 & \textit{mit} \\ \mathrm{x}(\lambda) \to x' \neq 0 & \textit{und} & & \\ \mathrm{L}(\lambda)\mathrm{x}(\lambda) & = & O(\lambda - \lambda_0) & \\ & \textit{für} & \lambda \widehat{\to} \lambda_0. & \end{array}$$

<u>Beweis:</u> Man betrachtet die Funktion

$$\mathrm{x}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\mathrm{L}^{-1}(\lambda)x$$

aus Behauptung 4. Diese erfüllt dann das Gewünschte. ♡

Das nächste Ziel ist es, Folgerung 6 umzukehren. Das heißt, bei gegebener Vektorschar $\mathrm{x}(\lambda)$ auf das Vorhandensein von Eigenvektoren von $\tilde{\mathbf{A}}$ zu schließen. Man kann sagen, an einem starken Wachstum von $\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$ an einer Singularität λ_0 — mindestens wie $\frac{1}{\lambda - \lambda_0}$ — Eigenvektoren von $\tilde{\mathbf{A}}$ zu erkennen.

Um ein geeignetes x konstruieren zu können, verwenden wir

Hilfssatz 3 *Die abgeschlossene Einheitskugel in einem Hilbertraum* $\mathcal{H}$ *ist schwach folgenkompakt.*[11]

<u>Beweis:</u> Sei x_i Folge in $\mathcal{H}$. Es sei

$$\mathcal{H}' = \overline{\langle \{x_i : i \in \mathbb{N}\} \rangle_{\mathrm{lin}}}$$

deren abgeschlossene lineare Hülle. Auch der gefundene Grenzwert wird darin liegen. $\mathcal{H}'$ hat eine höchstens abzählbare Hilbertbasis $\{e_j : j < \nu\}$, $\nu \leq \aleph_0$.

Aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung folgt mit $\|x_i\| \leq 1$ und $\|e_j\| = 1$, daß auch $|\langle x_i, e_j \rangle| \leq 1$. Nach Heine-Borel hat somit $\langle x_i, e_1 \rangle$ eine konvergente Teilfolge $\langle x_{1,i}, e_1 \rangle$. Aus den $x_{1,i}$ wählt man wieder eine Teilfolge $x_{2,i}$, sodaß auch $\langle x_{2,i}, e_2 \rangle$ konvergiert und so fort für alle e_j. Wie beim Diagonalverfahren üblich, verwendet man dann die Folge $x_{i,i}$, für die $\langle x_{i,i}, e_j \rangle$ für alle $j < \nu$ konvergiert. Es gilt also

$$\langle x_{i,i}, e_j \rangle \to c_j \quad \text{für} \quad i \to \infty. \tag{31}$$

Sei nun

$$x = \sum_{j<\nu} c_j e_j.$$

Diese Reihe konvergiert, da

$$\left\| \sum_{j<\min(N,\nu)} c_j e_j \right\|^2 = \sum_{j<\min(N,\nu)} |c_j|^2 \leq 1,$$

[11] Das Auswahlaxiom wird *nicht* gebraucht!

was wiederum indirekt erkannt wird, denn sonst müßte, weil es eine endliche Summe ist und wegen (31), ja für ein i

$$1 < \sum_{j<\min(N,\nu)} |\langle x_{i,i}, e_j\rangle|^2 \leq \|x_{i,i}\|^2$$

gelten im Widerspruch zu $x_{i,i}$ in der Einheitskugel.

Zu zeigen bleibt noch, daß das so gefundene x tatsächlich schwacher Grenzwert einer Teilfolge, naheliegenderweise der $x_{i,i}$, ist. Sei

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{H} &= \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}'^{\perp} \\ y &= \sum_{j<\nu} a_j e_j + y_\perp \quad \text{mit} \\ a_j = \langle y, e_j\rangle \quad \text{und} &\quad y_\perp \in \mathcal{H}'^{\perp}. \end{aligned}$$

Dann gilt wegen $(x - x_{i,i}) \perp y_\perp$

$$\begin{aligned} |\langle x - x_{i,i}, y\rangle| &= \left|\left\langle x - x_{i,i}, \sum_{j<\nu} a_j e_j \right\rangle\right| \\ &\leq \left|\left\langle x - x_{i,i}, \sum_{j<\min(N,\nu)} a_j e_j \right\rangle\right| + \left|\left\langle x - x_{i,i}, \sum_{N\leq j<\nu} a_j e_j \right\rangle\right| \\ &\leq \left|\left\langle x - x_{i,i}, \sum_{j<\min(N,\nu)} a_j e_j \right\rangle\right| + \|x - x_{i,i}\| \left\|\sum_{N\leq j<\nu} a_j e_j\right\| \\ &\leq \left|\left\langle x - x_{i,i}, \sum_{j<\min(N,\nu)} a_j e_j \right\rangle\right| + 2\left\|\sum_{N\leq j<\nu} a_j e_j\right\| \end{aligned}$$

Zuerst wählt man N hinreichend groß, sodaß der zweite Term$< \frac{\varepsilon}{2}$ wird. Dann wählt man i so groß, daß auch der erste Term$< \frac{\varepsilon}{2}$ wird. Damit erhält man $\langle x - x_{i,i}, y\rangle \to 0$ für $i \to \infty$, was den Hilfssatz beweist. ♡

Trivial erhält man — mittels Anwendung von geeigneten Multiplukationen mit Skalaren — aus Hilfssatz 3 die

Folgerung 7 *Jede beschränkte Folge in einem Hilbertraum besitzt eine schwach konvergente Teilfolge.*

Nun zur Umkehrung des Sachverhaltes aus Folgerung 6:

Behauptung 5 *Gibt es eine Folge* $\lambda_n \widehat{\Rightarrow} \lambda_0$ *in* $\mathbb{C}$ *mit* $\lambda_n \neq \lambda_0$ *und eine zumindest auf* $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ *definierte vektorwertige Funktion* $\mathrm{x}(\lambda)$ *mit*

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(\lambda_n) \to x' \neq 0 \quad &\textit{und} \\ \mathrm{L}(\lambda_n)\mathrm{x}(\lambda_n) &= O(\lambda_n - \lambda_0) \\ &\textit{für} \quad \lambda \widehat{\Rightarrow} \lambda_0, \end{aligned}$$

so hat der Operator $\tilde{\mathbf{A}}$ *einen Eigenvektor* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *zum Eigenwert* λ_0 *mit* $x \neq 0$.

Beweis: Wegen der Voraussetzung über die Konvergenzgeschwindigkeit bleibt die Folge

$$x_n = \frac{\mathrm{L}(\lambda_n)\mathrm{x}(\lambda_n)}{\lambda_n - \lambda_0} \tag{32}$$

beschränkt und besitzt daher wegen Folgerung 7 eine schwach konvergente Teilfolge; o.B.d.A. sei x_n selbst schwach konvergent gegen $x_0 \in \mathcal{H}_0$. Damit gilt

$$\begin{aligned} 0 \neq x' &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{x}(\lambda_n) = \lim_{n\to\infty} (\lambda_n - \lambda_0)\mathrm{L}^{-1}(\lambda_n)x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big((\lambda_n - \lambda_0)\mathrm{L}^{-1}(\lambda_n)(x_n - x_0) + (\lambda_n - \lambda_0)\mathrm{L}^{-1}(\lambda_n)x_0 \Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\lambda_n - \lambda_0)\mathrm{L}^{-1}(\lambda_n)(x_n - x_0) - \mathbf{P}\tilde{\mathbf{E}}(\{\lambda_0\})\mathbf{Q}x_0. \end{aligned} \tag{33}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus der starken Konvergenz des zweiten Summanden gemäß Folgerung 4 und der starken Konvergenz des Gesamtausdrucks. Zu zeigen bleibt nunmehr lediglich, daß der erste Summand gegen 0 geht. Dann folgt die Existenz eines Eigenvektors aus (33) und Behauptung 4.

Hinreichend dafür ist, daß 0 schwacher Grenzwert des ersten Summanden ist. Setzen wir

$$\mathrm{X}_n = (\lambda_n - \lambda_0)\mathrm{L}^{-1}(\lambda_n),$$

so ergibt sich daraus und aus $\mathrm{L}^{-1*}(\lambda) = \mathrm{L}^{-1}(\overline{\lambda})$, daß

$$\mathrm{X}_n^* = \overline{(\lambda_n - \lambda_0)}\mathrm{L}^{-1}(\overline{\lambda_n}) \to^s -\mathbf{P}\tilde{\mathbf{E}}(\{\lambda_0\})\mathbf{Q} \tag{34}$$

wegen Folgerung 4. So gilt für jedes $u \in \mathcal{H}_0$:

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{X}_n(x_n - x_0), u\rangle_0 &= \langle x_n - x_0, \mathrm{X}_n^* u\rangle_0 \\ &= \Big\langle x_n - x_0, (\mathrm{X}_n^* + \mathbf{P}\tilde{\mathbf{E}}(\{\lambda_0\})\mathbf{Q})u \Big\rangle_0 \\ &\quad + \Big\langle x_n - x_0, -\mathbf{P}\tilde{\mathbf{E}}(\{\lambda_0\})\mathbf{Q}u \Big\rangle_0 \end{aligned}$$

Der erste der beiden Summanden kann mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung abgeschätzt werden und strebt gegen 0, weil $x_n - x_0$ beschränkt ist und (34) gilt. Der zweite strebt wegen der schwachen Konvergenz $x_n \to^w x_0$ gegen 0. Damit ist alles gezeigt. ♡

Bemerkung 8 Behauptung 5 kann auch etwas anders recht originell bewiesen werden:

Beweis: Wir betrachten

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{x}(\lambda_n), \mathrm{x}(\lambda_n)\rangle_0 &= \Big\langle \mathrm{L}(\lambda_n)\mathrm{x}(\lambda_n), \mathrm{L}^{*-1}(\lambda_n)\mathrm{x}(\lambda_n)\Big\rangle_0 = \Big\langle \mathrm{L}(\lambda_n)\mathrm{x}(\lambda_n), \mathrm{L}^{-1}(\bar{\lambda}_n)\mathrm{x}(\lambda_n)\Big\rangle_0 \\ &= \left\langle \frac{\mathrm{L}(\lambda_n)\mathrm{x}(\lambda_n)}{\lambda_n - \lambda_0}, \mathrm{L}^{-1}(\bar{\lambda}_n)\mathrm{x}(\lambda_n)(\bar{\lambda}_n - \lambda_0)\right\rangle_0 \end{aligned}$$

Nach den Voraussetzungen geht obiges Produkt nicht gegen 0 und $\left\| \frac{\mathrm{L}(\lambda_n)\mathrm{x}(\lambda_n)}{\lambda_n - \lambda_0} \right\|$ bleibt beschränkt. Nach der Schwarzschen Ungleichung kann dann aber $\|\mathrm{L}^{-1}(\bar\lambda_n)\mathrm{x}(\lambda_n)(\bar\lambda_n - \lambda_0)\|$ auch nicht gegen 0 gehen. Zur weiteren Argumentation benötigen wir eine einfache Hilfsüberlegung:

Hilfssatz 4 *Es gelte* $\mathrm{X}_n \rightarrow^s \mathrm{X}$ *und* $x_n \to x$, *wobei* X *und alle* X_n *stetige Operatoren sein sollen. Dann gilt:* $\mathrm{X}_n x_n \to \mathrm{X}x$.

Beweis: Nach dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit sind die Normen der X_n beschränkt. Damit erhalten wir:

$$\mathrm{X}_n x_n - \mathrm{X}x \quad = \quad \mathrm{X}_n(x_n - x) + (\mathrm{X}_n - \mathrm{X})x$$

Beide Summanden auf der rechten Seite streben gegen 0. ♡

Setzen wir jetzt $\mathrm{X}_n := \mathrm{L}(\bar\lambda_n)(\bar\lambda_n - \lambda_0)$ und $x_n := \mathrm{x}(\lambda_n)$, dann erhalten wir mit Folgerung 4:

$$\begin{aligned} 0 \not\leftarrow (\bar\lambda_n - \lambda_0)\mathrm{L}^{-1}(\bar\lambda_n)\mathrm{x}(\lambda_n) \quad &\to \quad -\mathbf{P}\tilde{\mathbf{E}}(\{\lambda_0\})\mathbf{Q}x \\ &\Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{E}}(\{\lambda_0\}) \neq 0 \end{aligned}$$

♡

Aus den Ergebnissen dieses Kapitels erhält man zusammenfassend die folgende Charakterisierung der Eigenwerte zu Eigenvektoren mit nicht verschwindender erster Komponente:

Folgerung 8 *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. λ_0 *ist Eigenwert von* $\tilde{\mathbf{A}}$ *zu einem Eigenvektor mit nicht verschwindender erster Komponente.*

2. *Es gibt eine holomorphe Vektorschar*

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(\lambda) \quad &: \quad \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathcal{H}_0 \quad \textit{mit} \\ \mathrm{x}(\lambda) \to x' \neq 0 \quad &\textit{und} \\ \mathrm{L}(\lambda)\mathrm{x}(\lambda) \quad &= \quad O(\lambda - \lambda_0) \\ &\textit{für} \quad \lambda \widehat{\rightarrow} \lambda_0. \end{aligned}$$

3. *Es gibt eine eine Folge* $\lambda_n \widehat{\rightarrow} \lambda_0$ *in* $\mathbb{C}$ *mit* $\lambda_n \neq \lambda_0$ *und eine zumindest auf der Menge* $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ *definierte vektorwertige Funktion* $\mathrm{x}(\lambda)$ *mit*

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(\lambda_n) \to x' \neq 0 \quad &\textit{und} \\ \mathrm{L}(\lambda_n)\mathrm{x}(\lambda_n) \to 0 \quad &= \quad O(\lambda_n - \lambda_0) \\ &\textit{für} \quad \lambda \widehat{\rightarrow} \lambda_0. \end{aligned}$$

Beweis:

$1 \Rightarrow 2$ ist die Aussage von Folgerung 6.

$2 \Rightarrow 3$ ist trivial.

$3 \Rightarrow 1$ ist die Aussage von Behauptung 5.

♡

Daß die Charakterisierung durch Folgerung 8 nur solche Eigenvektoren betrifft, deren erste Komponente nicht verschwindet, veranschaulicht

Beispiel 1

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 &= \mathbb{C}, \quad \text{betragsnormiert.} \\ \mathrm{L}(\lambda) = \lambda - 0 + 0(1-\lambda^{-1})0 = \lambda \quad &, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)^{-1}$ ist an $\lambda = 1$ singulär, während $\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$ dorthin problemlos holomorph fortsetzbar ist durch λ^{-1}. Auch $\mathrm{L}(\lambda)$ ist offensichtlich dorthin fortsetzbar.

Von einer Asymptotik, die Eigenvektoren verhieße, ist überhaupt nichts zu bemerken! Auch in Behauptung 1 spielen nur Eigenvektoren, deren erste Komponente nicht 0 ist, eine Rolle. Diese Eigenschaft ergibt sich dort aus $\lambda \notin \sigma_p(\mathrm{D})$.

Definition 3 Ein Eigenvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ von $\tilde{\mathbf{A}}$ mit $x = 0$ heißt *sinnlos.*[12]

Behauptung 6 *Eigenvektoren von $\tilde{\mathbf{A}}$ zum Eigenwert λ sind sinnlos genau dann, wenn sie in $\{0\} \oplus (\mathcal{K}\mathrm{er}(\mathrm{B}) \cap \mathcal{K}\mathrm{er}(\mathrm{D}-\lambda))$ liegen.*

Beweis: Sei ein Eigenvektor in diesem Raum. Er ist dann klarerweise sinnlos.

Sei umgekehrt $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ sinnloser Eigenvektor von $\tilde{\mathbf{A}}$ zum Eigenwert λ. Dann gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathrm{B}y \\ (\mathrm{D}-\lambda)y \end{pmatrix} &= (\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow y &\in \mathcal{K}\mathrm{er}(\mathrm{B}) \cap \mathcal{K}\mathrm{er}(\mathrm{D}-\lambda). \end{aligned}$$

♡

3 Maximale holomorphe Fortsetzung von $\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$

Beispiel 2

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 &= \mathbb{C}, \quad \text{betragsnormiert.} \\ \mathrm{L}(\lambda) = \lambda - 0 + 1(-\lambda^{-1})1 = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} \quad &, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[12] Daß diese Bezeichnung treffend gewählt ist, erkennt man aus Folgerung 9 im nächsten Kapitel.

$\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$ kann mit $\mathrm{L}_{\max}^{-1}(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2-1}$ auch auf $\{0\} = \sigma(\mathrm{D})$ fortgesetzt werden, obwohl $\mathrm{L}(\lambda)$ dort nicht definiert ist.

In diesem Kapitel wird $\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$ maximal holomorph fortgesetzt. Das heißt, es wird eine auf einer offenen Menge in $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Fortsetzung von $\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$ gesucht, die ihrerseits nicht mehr weiter holomorph echt fortgesetzt werden kann. Im zweiten Abschnitt des Kapitels erreichen wir eine solche Fortsetzung, die sich als Kompression $-\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)^{-1}\mathbf{Q}$ schreiben läßt, indem wir vom Raum $\mathcal{H}_1$ zu einem geeigneten Unterraum $\mathcal{H}_1'$ übergehen und die Operatoren D und B geeignet einschränken.

Wegen der Holomorphie und der Übereinstimmung mit $\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ kann $\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$ durch Anwendung eines Kreiskettenverfahrens eindeutig maximal holomorph fortgesetzt werden. Die so erhaltene Fortsetzung bezeichnen wir mit $\mathrm{L}_{\max}^{-1}$. Man kann sie aber noch wesentlich genauer angeben. Die zwei wesentlichen Ideen, die zur expliziten Angabe solcher Fortsetzungen herangezogen worden sind, werden nach einem kleinen Exkurs in Abschnitt 3.1 in den beiden Abschnitten 3.2 und 3.3 abgehandelt.

3.1 Nevanlinnafunktionen

Das wesentliche Hilfsmittel des ganzen 3. Kapitels ist die Theorie der Nevanlinnafunktionen. In diesem Abschnitt wird die verwendete Terminologie erklärt, und die benützten Resultate aus der Theorie werden angeführt.

Definition 4 Die Menge $\mathcal{R}_0$ der Nevanlinnafunktionen ist die Menge der komplexen Funktionen f mit folgenden Eigenschaften:

- f holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,
- $\mathrm{Im}(z) > 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(f(z)) \geq 0$,
- $f(\bar{z}) = \bar{f}(z)$.

Für diese Funktionenmenge gelten zwei Resultate, die im folgenden angegeben sind:

Resultat 1
- *Jedes $f \in \mathcal{R}_0$ ist darstellbar als*

$$f(\lambda) = a + b\lambda + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-\lambda} - \frac{t}{1+t^2} \right) \mathrm{d}\tau(t),$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq 0$ sind und τ ein nichtnegatives reelles Maß auf $\mathbb{R}$ ist. Das Maß τ erfüllt

$$\int_{\mathit{Reelle}} \frac{\mathrm{d}\tau(t)}{1+t^2} < \infty.$$

- *Diese Darstellung ist eindeutig.*

Bemerkung 9 Der Term $-\frac{t}{1+t^2}$ dient nur der Konvergenzsicherung und kann bei geeigneten Maßen τ weggelassen werden, wobei a angepaßt werden muß. In dieser Arbeit werden nur Maße eine Rolle spielen, für die sowohl dieser Term weglaßbar ist als auch $a = b = 0$ gilt.

Resultat 2 *Eine Funktion $f \in \mathcal{R}_0$ ist genau dann auf ein offenes Intervall (a, b) der reellen Achse holomorph fortsetzbar, wenn $\tau((a, b)) = 0$.*

Die Theorie der Nevanlinnafunktionen läßt sich ausweiten:

Definition 5 Eine Operatorenschar $\mathrm{S}(\lambda)$ im Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt Nevanlinnafunktion, wenn für jedes $x \in \mathcal{H}$ die Funktion $\lambda \mapsto \langle \mathrm{S}(\lambda)x, x\rangle$ Nevanlinnafunktion ist.

Warum die ganze Theorie so nützlich ist, erahnt man aus

Hilfssatz 5 [13] *$(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)^{-1}$ ist Nevanlinnafunktion.*
<u>Beweis:</u> Mit (27) erhält man

$$\left\langle (\tilde{\mathbf{A}} - \lambda)^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x} \right\rangle_{\oplus} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\left\langle \tilde{\mathbf{E}}(t)\mathbf{x}, \mathbf{x} \right\rangle_{\oplus}}{t - \lambda}.$$

Da $\tilde{\mathbf{E}}(t)$ eine nichtfallende Familie orthogonaler Projektoren ist, fällt auch $\left\langle \tilde{\mathbf{E}}(t)\mathbf{x}, \mathbf{x} \right\rangle_{\oplus}$ nicht und bestimmt daher ein positives Maß. Der Rest folgt dann aus Resultat 1. ♡

3.2 Integraldarstellung von $\mathrm{L}_{\max}^{-1}(\lambda)$

Die Darstellung wird aus der Zerlegung $\tilde{\mathbf{E}}$ der Einheit von $\tilde{\mathbf{A}}$ gewonnen werden. Weil das nützlich sein wird, vereinbaren wir ab jetzt

$$\tilde{\mathbf{E}}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{00}(t) & \mathrm{E}_{01}(t) \\ \mathrm{E}_{10}(t) & \mathrm{E}_{11}(t) \end{pmatrix}.$$

Hilfssatz 6

$$-\mathrm{L}_{\int}^{-1}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\mathrm{E}_{00}(t)}{t - \lambda},$$

deren Definitionsbereich der Holomorphiebereich sei, ist eine Darstellung von $-\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$. Außerdem sind $-\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$ und $-\mathrm{L}_{\int}^{-1}(\lambda)$ Nevanlinnafunktionen.

[13] Wiederum (vgl. Bemerkung 7) wurde nur zur Einsparung neuer Symbole gleich der spezielle Operator $\tilde{\mathbf{A}}$ eingesetzt. Der Hilfssatz gilt genauso für beliebige (beschränkte) selbstadjungierte Operatoren auf Hilberträumen.

Beweis: Aus (27) erhält man vermittels Satz 1 die Darstellung

$$\begin{aligned}-\mathrm{L}^{-1}(\lambda) &= \mathbf{P}\int\limits_{\mathrm{I\!R}} \frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{E}}(t)}{t-\lambda}\mathbf{Q} = \int\limits_{\mathrm{I\!R}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}\tilde{\mathbf{E}}(t)\mathbf{Q}}{t-\lambda} \\ &= \int\limits_{\mathrm{I\!R}} \frac{\mathrm{dE}_{00}(t)}{t-\lambda}\end{aligned}$$

wegen der Stetigkeit von $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$. Um zu zeigen, daß das eine Nevanlinnafunktion ist, sei nun $x \in \mathcal{H}_0$. Daraus erhält man mit Satz 1 und (6) und (7)

$$\left\langle -\mathrm{L}^{-1}(\lambda)x, x\right\rangle_0 = \left\langle (\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)^{-1}\begin{pmatrix} x \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0\end{pmatrix}\right\rangle_{\oplus}.$$

Die Aussage für $-\mathrm{L}_{\int}^{-1}(\lambda)$ folgt dann aus Hilfssatz 5. Da $\mathrm{L}^{-1}(\lambda) = \mathrm{L}_{\int}^{-1}(\lambda)$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathrm{I\!R}$, ist auch $-\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$ Nevanlinnafunktion. ♡

Daß diese Darstellung maximal holomorph über den Definitionsbereich $\subseteq \mathbb{C}$ von L^{-1} hinausgeht, zeigt

Behauptung 7

$$\mathrm{L}_{\max}^{-1}(\lambda) = \mathrm{L}_{\int}^{-1}(\lambda)$$

Beweis: Sei $\mathrm{L}_{\max}^{-1}(\lambda)$ eine maximale holomorphe Fortsetzung von $\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$. Da $\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$, $\mathrm{L}_{\int}^{-1}(\lambda)$ und $\mathrm{L}_{\max}^{-1}(\lambda)$ auf $\mathbb{C}^+$ übereinstimmen, sind alle drei Nevanlinnafunktionen. Außerdem haben für festes $x \in \mathcal{H}_0$ damit $\left\langle -\mathrm{L}^{-1}(\lambda)x, x\right\rangle_0$, $\left\langle -\mathrm{L}_{\max}^{-1}(\lambda)x, x\right\rangle_0$ und $\left\langle -\mathrm{L}_{\int}^{-1}(\lambda)x, x\right\rangle_0$ nach Resultat 1 auch die gleiche Integraldarstellung. Wegen Hilfssatz 6 gilt für $\mathrm{L}_{\max}^{-1}(\lambda)$ somit für jedes $x \in \mathcal{H}_0$

$$\left\langle -\mathrm{L}_{\max}^{-1}(\lambda)x, x\right\rangle_0 = \int\limits_{\mathrm{I\!R}} \frac{\mathrm{d}\left\langle \mathrm{E}_{00}x, x\right\rangle_0(t)}{t-\lambda}.$$

Sei nun $\mathrm{L}_{\max}^{-1}(\lambda)$ auf dem offenen Intervall $(a,b) \subseteq \mathrm{I\!R}$ holomorph. Damit ist für festes $x \in \mathcal{H}_0$ wegen Resultat 2 $\langle \mathrm{E}_{00}x, x\rangle_0$ konstant auf (a,b). Der Hilfssatz ist gezeigt, wenn E_{00} selbst konstant ist auf (a,b), weil dann das Integral $\mathrm{L}_{\int}^{-1}(\lambda)$ dort konvergiert und holomorph ist. Seien c und d beliebig in diesem Intervall mit $a < c < d < b$. Betrachte nun $\Delta\mathrm{E}_{00} = \mathrm{E}_{00}(d) - \mathrm{E}_{00}(c)$ und den orthogonalen Projektor $\Delta\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}(d) - \tilde{\mathbf{E}}(c)$. Für festes $x \in \mathcal{H}_0$ gilt

$$\left\langle \Delta\tilde{\mathbf{E}}\begin{pmatrix} x \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0\end{pmatrix}\right\rangle_{\oplus} = \langle \Delta\mathrm{E}_{00}x, x\rangle_0 = 0.$$

Nach Hilfssatz 2 folgt daraus aber $\Delta\mathrm{E}_{00}x = 0$ für alle $x \in \mathcal{H}_0$ und damit wegen der freien Wahl von c und d die Konstanz von $\mathrm{E}_{00}(t)$ auf (a,b). ♡

3.3 Einschränkung von B und D auf $\mathcal{H}_1' \subseteq \mathcal{H}_1$

Bemerkung 10 Derartiges Einschränken ist etwa das probate Mittel, um den Operator aus Beispiel 1 zu bändigen. Man könnte $\mathcal{H}_1 = \{0\}$ setzen und hätte flugs die 1:1-Entsprechung zwischen L und $\tilde{\mathbf{A}}$.

Hier werden die Räume $\mathcal{H}_1' \subseteq \mathcal{H}_1$ und $\tilde{\mathcal{H}}' \subseteq \tilde{\mathcal{H}}$ definiert und verwendet.

Behauptung 8 *Mit*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1' &= \overline{\bigcup_{\lambda \in \rho(\mathrm{D})} (\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{B}^*\mathcal{H}_0} \quad \textit{und} \\ \tilde{\mathcal{H}}' &= \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1' \quad \textit{gilt:} \end{aligned}$$

$\tilde{\mathcal{H}}'$ ist $\tilde{\mathbf{A}}$-invariant. $\mathcal{H}_1'$ ist der kleinste zur Auswertung von $\mathrm{L}(\lambda)$ verwendbare[14] *abgeschlossene Unterraum von $\mathcal{H}_1$.*

Beweis: Zu zeigen ist zunächst für die $\tilde{\mathbf{A}}$-Invarianz:

1. $\mathrm{A}\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_0$: Das ist trivial.

2. $\mathrm{B}\mathcal{H}_1' \subseteq \mathcal{H}_0$: Das ist auch trivial.

3. $\mathrm{B}^*\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_1'$: Sei $x \in \mathcal{H}_0$. Betrachte die Schar $-\lambda(\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{B}^*x$ in $\mathcal{H}_1'$. Für $\lambda \to \infty$ gilt
$$-\lambda(\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{B}^*x \to \mathrm{B}^*x,$$
das daher in $\mathcal{H}_1'$ liegt.

4. $\mathrm{D}\mathcal{H}_1' \subseteq \mathcal{H}_1'$: Folgt wegen
$$\begin{aligned} \mathrm{D}(\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{B}^* &= \lambda(\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{B}^* + \mathrm{B}^* \quad \text{und} \\ \mathrm{B}^*\mathcal{H}_0 &\subseteq \mathcal{H}_1' \quad \text{über} \\ \mathrm{D} \bigcup_{\lambda \in \rho(\mathrm{D})} (\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{B}^*\mathcal{H}_0 &\subseteq \overline{\bigcup_{\lambda \in \rho(\mathrm{D})} (\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{B}^*\mathcal{H}_0} \end{aligned}$$
aus der Stetigkeit von D.

Nun zu $\mathrm{L}(\lambda)$:

- $\mathcal{H}_1'$ ist groß genug: Das folgt aus $\mathrm{B}^*\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_1'$ und $(\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{B}^*\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_1'$.
- $\mathcal{H}_1'$ ist der kleinste: Das ergibt sich, weil $(\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{B}^*\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_1'$ gelten und der Raum abgeschlossen sein soll.

♡

[14] Das heißt, er enthält alle Elemente, die als Zwischenergebnisse bei der Berechnung von $\mathrm{L}(\lambda)$ auftreten.

Bemerkung 11 Es gilt

$$\mathcal{H}_1' = \overline{\bigcup_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} (\mathrm{D} - \lambda)^{-1} \mathrm{B}^* \mathcal{H}_0}$$

<u>Beweis:</u> Die Inklusion $\supseteq$ ist trivial.
Sei also $y \in \mathcal{H}_1'$. Dann existiert eine Folge x_n in $\mathcal{H}_0$ und eine Folge λ_n in $\mathbb{C}$ mit

$$(\mathrm{D} - \lambda_n)^{-1} \mathrm{B}^* x_n \to y.$$

Weil $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt und die Scharen $(\mathrm{D} - \lambda)^{-1} \mathrm{B}^* x_n$ stetig sind als Funktionen in λ, kann man eine Folge μ_n aus $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ wählen, sodaß

$$\left\| (\mathrm{D} - \lambda_n)^{-1} \mathrm{B}^* x_n - (\mathrm{D} - \mu_n)^{-1} \mathrm{B}^* x_n \right\| \leq \frac{1}{n}.$$

Damit erreicht man dann $(\mathrm{D} - \mu_n)^{-1} \mathrm{B}^* x_n \to y$. ♡

Hilfssatz 7 *Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{K}\mathrm{er}(\mathrm{B})$ D-invariant. Dann gilt $\mathcal{U} \perp \mathcal{H}_1'$.*
<u>Beweis:</u> Zerlege $\mathcal{H}_1$

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp.$$

Da D als selbstadjungierter Operator normal ist, ist mit $\mathcal{U}$ auch $\mathcal{U}^\perp$ D-invariant, und B, D und B^* können bezüglich dieser Zerlegung geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \mathrm{B} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{B}_{\mathcal{U}^\perp} \end{pmatrix} \\ \mathrm{D} &= \begin{pmatrix} \mathrm{D}_{\mathcal{U}} & 0 \\ 0 & \mathrm{D}_{\mathcal{U}^\perp} \end{pmatrix} \\ \mathrm{B}^* &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{B}^*_{\mathcal{U}^\perp} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1' &= \overline{\bigcup_{\lambda \in \rho(\mathrm{D})} \begin{pmatrix} \mathrm{D}_{\mathcal{U}} - \lambda & 0 \\ 0 & \mathrm{D}_{\mathcal{U}^\perp} - \lambda \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{B}^*_{\mathcal{U}^\perp} \end{pmatrix} \mathcal{H}_0} \\ &= \overline{\bigcup_{\lambda \in \rho(\mathrm{D})} \begin{pmatrix} 0 \\ (\mathrm{D}_{\mathcal{U}^\perp} - \lambda)^{-1} \mathrm{B}^*_{\mathcal{U}^\perp} \end{pmatrix}} \mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{U}^\perp \end{aligned}$$

und daraus sofort $\mathcal{H}_1'^{\perp} \supseteq \mathcal{U}$. ♡

Aus diesem Hilfssatz und aus Behauptung 6 folgt direkt:

Folgerung 9 *Sinnlose Eigenvektoren sind eliminierbar, das heißt in $\mathcal{H}_1'^{\perp}$.*

Beobachtung 1 Durch die Stutzung von $\mathcal{H}_1$ auf $\mathcal{H}_1'$ können offenbar manche Singularitäten von $(\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)^{-1}$, die keine Singularitäten von $\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$ sind, eliminiert werden. Es stellt sich die Frage: „Vielleicht alle?“

Die Antwort, die sozusagen die **Krönung** der Arbeit bildet, liefert

Satz 2

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1' \Longrightarrow -\mathrm{L}_{\max}^{-1}(\lambda) = \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)^{-1}\mathbf{Q}$$

Beweis: Gezeigt wird $-\mathrm{L}_{\int}^{-1}(\lambda) = \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)^{-1}\mathbf{Q}$. Der Rest folgt dann aus Behauptung 7. Sei $\mathrm{L}_{\int}^{-1}(\lambda)$ holomorph definiert auf $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $\mathrm{E}_{00}(t)$ konstant auf (a,b). Zu zeigen ist, daß auch $\tilde{\mathbf{E}}(t)$ dann darauf konstant ist, weil dann die Integraldarstellung (27) von $(\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)^{-1}$ für jedes $\lambda \in (a,b)$ in der Operatortopologie konvergiert und $(\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)^{-1}$ daher wegen $(a,b) \subseteq \rho(\tilde{\mathbf{A}})$ klarerweise holomorph ist. Dann ist auch $\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)^{-1}\mathbf{Q}$ holomorph auf (a,b) und nach Satz 1 eine Fortsetzung von $-\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$. Man sieht so, daß die Holomorphiebereiche von $-\mathrm{L}_{\int}^{-1}(\lambda)$ und $\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}}-\lambda)^{-1}\mathbf{Q}$ gleich sind, weshalb auch letztere Fortsetzung von $-\mathrm{L}^{-1}(\lambda)$ wegen Behauptung 7 maximal ist. Die Gleichheit der Operatorenscharen folgt letztlich aus der Eindeutigkeit der maximalen Fortsetzung.

Um die Konstanz von $\tilde{\mathbf{E}}(t)$ auf (a,b) zu zeigen, seien c und d mit $a < c < d < b$ beliebig in diesem Intervall. Betrachte nun den orthogonalen Projektor

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\mathbf{E}} &= \begin{pmatrix} \Delta\mathrm{E}_{00} & \Delta\mathrm{E}_{01} \\ \Delta\mathrm{E}_{10} & \Delta\mathrm{E}_{11} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{E}}(d) - \tilde{\mathbf{E}}(c) \quad \text{mit} \\ \Delta\mathrm{E}_{00} &= 0 \quad \text{und} \\ \Delta\mathrm{E}_{10} &= \Delta\mathrm{E}_{01}^*. \end{aligned}$$

Da $\Delta\tilde{\mathbf{E}}$ ein Projektor sein soll, gilt

$$\begin{aligned} (\Delta\tilde{\mathbf{E}})^2 &= \Delta\tilde{\mathbf{E}} \quad \text{also} \\ \begin{pmatrix} \Delta\mathrm{E}_{01}\Delta\mathrm{E}_{01}^* & \Delta\mathrm{E}_{01}\Delta\mathrm{E}_{11} \\ \Delta\mathrm{E}_{11}\Delta\mathrm{E}_{01}^* & \Delta\mathrm{E}_{01}^*\Delta\mathrm{E}_{01} + (\Delta\mathrm{E}_{11})^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \Delta\mathrm{E}_{01} \\ \Delta\mathrm{E}_{01}^* & \Delta\mathrm{E}_{11} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus der linken oberen Ecke sieht man

$$\begin{aligned} \Delta\mathrm{E}_{01} &= 0 \quad \text{und damit} \\ \Delta\tilde{\mathbf{E}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta\mathrm{E}_{11} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\Delta\tilde{\mathbf{E}}$ projiziert also auf einen ganz in $\{0\} \oplus \mathcal{H}_1$ gelegenen $\tilde{\mathbf{A}}$-invarianten Unterraum $\{0\} \oplus \mathcal{U}$ von $\tilde{\mathcal{H}}$. Aus der $\tilde{\mathbf{A}}$-Invarianz folgt sofort

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &\subseteq \mathcal{K}\mathrm{er}(\mathrm{B}) \quad \text{und damit} \\ \mathrm{D}\mathcal{U} &\subseteq \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Mit Hilfssatz 7 ergibt das dann
$$\mathcal{U}\perp\mathcal{H}_1'$$
und wegen der Voraussetzung $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1'$ gilt $\mathcal{U} = \{0\}$. Das heißt aber, daß auch $\Delta \mathrm{E}_{11} = 0$ ist, womit insgesamt
$$\Delta\tilde{\mathbf{E}} = 0$$
und wegen der beliebigen Wahl von c und d die Konstanz von $\tilde{\mathbf{E}}(t)$ auf (a,b) folgt. ♡

3.4 Ein pathologisches Beispiel

Beim anfänglichen Versuch, ein Beispiel zu finden, das Satz 2 widerlegte, konstruierten wir eine Operatorenschar, die einem Gegenbeispiel recht ähnlich sieht, ohne freilich eines zu sein.

Beispiel 3 Im folgenden bezeichne e_1, ..., e_n, ... eine fix gewählte Orthonormalbasis für $\mathcal{H}_0$. In $\mathcal{H}_0$ definieren wir Diagonaloperatoren B und D durch

$$\begin{aligned} \mathrm{B}e_n &= \frac{1-i}{n}e_n \\ \mathrm{D}e_n &= \frac{1}{n}e_n \end{aligned}$$

Rechnet man jetzt naiv mit unendlichen Matrizen, so erhält man:

$$\mathrm{B}(\mathrm{D}-\lambda)^{-1}\mathrm{B}^*e_n = \frac{2}{n}\frac{1}{1-\lambda n}e_n$$

Dieser Diagonaloperator ist beschränkt für $\lambda = 0$. Wählen wir A als Diagonaloperator mit Diagonaleinträgen a_n, dessen Spektrum hinreichend weit von 0 entfernt liegt (etwa $\mathrm{A} = 4$), so wird

$$\mathrm{L}(0)e_n = \left(-a_n + \frac{2}{n}\right)e_n$$

Und dieser Operator ist invertierbar. Im Gegensatz dazu besitzt $\tilde{\mathbf{A}}$ auf $\tilde{\mathcal{H}}$ — wie man sich leicht überzeugt, gilt $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}'$ — keine stetige Inverse, denn: Sei

$$x_n = \begin{pmatrix} 0 \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\mathrm{D}+\frac{i}{n})^{-1}\mathrm{B}^*e_n \end{pmatrix} \in \tilde{\mathcal{H}}'$$

Dann ist $\|x_n\| = 1$ und
$$\tilde{\mathbf{A}}x_n = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{n}e_n \\ \frac{1}{n}e_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wo liegt der Hund begraben? — Antwort: Wir haben im ersten Teil unserer Argumentation formal mit unendlichen Matrizen gerechnet und eine Darstellung der Operatorenschar $\mathrm{L}(\lambda)$ für $\lambda = 0$ erhalten. Diese Fortsetzung mag zwar in einem gewissen Sinn

„natürlich“ sein. Eins ist aber nach dem „Königslemma“[15] ausgeschlossen: Daß sie in einer Umgebung von 0 holomorph ist. Satz 2 bezieht sich nämlich nur auf Fortsetzungen auf offene Teilmengen von $\mathbb{C}$.

Unsere Fortsetzung hat aber immerhin die folgende Eigenschaft: Die Operatorenschar $\mathrm{L}(\lambda)$ ist im Ursprung stark richtungsdifferenzierbar mit der Ableitung -2, außer entlang der reellen Achse.

Beweis: $\frac{\mathrm{L}(\lambda)-\mathrm{L}(0)}{\lambda}$ besitzt (als Matrix geschrieben) die Diagonalelemente $\frac{2}{1-\lambda n} = d_n$. Für $\lambda = t\alpha$, $t \in \mathbb{R}$, $t \to 0$ und $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ strebt dieser Ausdruck gegen 2, außerdem ist er beschränkt ($\exists C_\alpha$, unabhängig von t und n, $|d_n| < C_\alpha$). Diese beiden Bedingungen garantieren starke Konvergenz. ♡

[15] So nennen wir gerne Satz 2.