

# Fixpunktsätze und ihre Anwendung in der Spieltheorie

Nikola Broussev

29. April 2008

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Motivation</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Einführung</b>	<b>5</b>
2.1	Fixpunkte . . . . .	5
2.2	Retrakte und Retraktionen . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Der Fixpunktsatz von Brouwer</b>	<b>8</b>
3.1	Simplices und baryzentrische Koordinaten . . . . .	8
3.2	Die Simpliciale Zerlegung und das Lemma von Sperner . . . . .	11
3.3	Der Fixpunktsatz von Brouwer . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Die Fixpunktsätze von Schauder and Kakutani</b>	<b>18</b>
4.1	Der Fixpunktsatz von Schauder . . . . .	18
4.2	Der Fixpunktsatz von Kakutani . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Anwendungen</b>	<b>22</b>
5.1	Arbeitslemma über den Brouwer-Fixpunktsatz . . . . .	22
5.2	Nash-Gleichgewicht über den Kakutani-Fixpunktsatz . . . . .	23

# 1 Motivation

**Definition 1.1** (Entscheidungsregeln). Eine *Entscheidungsregel* für Erich ist eine mengenwertige Funktion, die für jede Entscheidung von Franz eine Menge von Entscheidungen für Erich definiert:

$$C_E : F \rightarrow \mathcal{P}(E)$$

Analog ist eine *Entscheidungsregel* für Franz eine mengenwertige Funktion, die für jede Entscheidung von Erich eine Menge von Entscheidungen für Franz definiert:

$$C_F : E \rightarrow \mathcal{P}(F)$$

**Definition 1.2** (Konsistente Paaren von Entscheidungen). Ein Paar von Entscheidungen  $(\bar{x}, \bar{y}) \in E \times F$  wird *konsistent* genannt wenn

$$\bar{x} \in C_E(\bar{y}) \text{ und } \bar{y} \in C_F(\bar{x})$$

gilt. (Siehe Abbildung 1.)

*Bemerkung 1.3.* Falls wir folgende Funktion auf  $E \times F$  definieren

$$\mathbf{C} := \begin{cases} E \times F \rightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \times F) \\ \mathbf{C}(x, y) = C_E(y) \times C_F(x) \end{cases}$$

können wir die Konsistenz folgendermaßen formulieren.

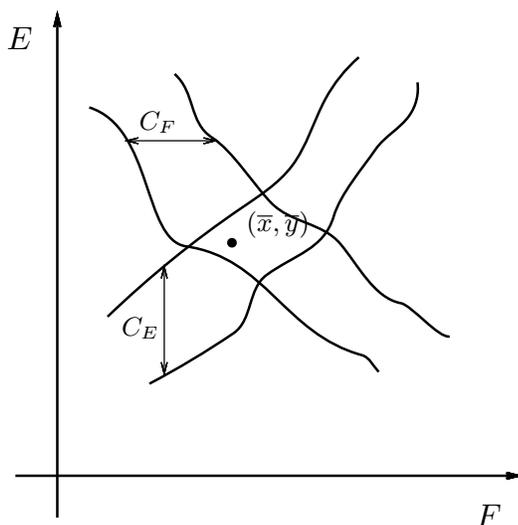
$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{C}(\bar{x}, \bar{y})$$

*Bemerkung 1.4.* Hier ist es ersichtlich die Wichtigkeit eines Satzes, der unter gewissen Bedingungen die Existenz eines Punktes  $z \in A$  sichert, so dass für mengenwertigen Funktionen  $G : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ , folgende Bedingung erfüllt ist

$$z \in G(z).$$

So ein Satz gäbe uns die Bedingungen die äquivalent zur Existenz eines konsistenten Paares von Entscheidungen sind. Im folgenden Kapiteln werden wir uns mit diesen, so genannten Fixpunktsätzen, beschäftigen.

Abbildung 1: Konsistente Paaren von Entscheidungen



*Bemerkung 1.5.* Bei endliche Mengen von Entscheidungen  $E = \{1, \dots, n\}$  können wir das so genannte *regulären  $(n - 1)$ -dimensionale Simplex* von  $\mathbb{R}^n$  betrachten

$$M^n := \{x \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$$

und  $E$  in  $M^n$  folgendermaßen einbetten

$$\delta := \begin{cases} E \rightarrow M^n \\ \delta(i) = e_i := (0, \dots, 1, \dots, 0). \end{cases}$$

Indem man  $x_i$  als die Wahrscheinlichkeit mit der Entscheidung  $i$  getroffen wird betrachtet, kann man  $x \in M^n \setminus E$  als eine nicht deterministische Entscheidung deuten. Da viele Behauptungen über Fixpunkte Konvexität verlangen und durch Zulassen von nicht deterministische Entscheidungen wir die ganze Menge  $M^n$ , die eine konvexe kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist, betrachten können, kann man stärkere Behauptungen über die Existenz von Fixpunkten zeigen.

## 2 Einführung

In diesem Kapitel werde ich zuerst formale Definitionen von Fixpunkt, Fixpunkt-Eigenschaft, Retrakt angeben. Danach werde ich die Übertragbarkeit von der Fixpunkt-Eigenschaft auf homöomorphe topologische Räume zeigen. Zum Schluss zeige ich, dass abgeschlossene konvexe Teilmengen Retrakte sind und dass Retrakte auch die Fixpunkt-Eigenschaft von dem Raum, in dem sie enthalten sind, vererben.

### 2.1 Fixpunkte

**Definition 2.1** (Fixpunkt). Sei  $X$  eine Menge und  $f : X \rightarrow X$  eine Abbildung. Ein Element  $x \in X$  heißt *Fixpunkt* von  $f$ , wenn  $f(x) = x$ .

**Definition 2.2** (Fixpunkt-Eigenschaft). Sei  $(X, \mathcal{X})$  ein topologischer Raum. Wir sagen  $(X, \mathcal{X})$  hat die *Fixpunkt-Eigenschaft*, wenn gilt:

$$\forall f : X \rightarrow X, f \text{ stetig} \Rightarrow f \text{ hat einen Fixpunkt.}$$

*Beispiel 2.3.* Das Intervall  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  hat die Fixpunkt-Eigenschaft. Dies sieht man, indem man für eine gegebene stetige Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  die neue Funktion  $g(x) := f(x) - x$  betrachtet. Dann gilt nämlich  $g(0) = f(0) \geq 0$  und  $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ , und nach dem Mittelwertsatz folgt die Existenz eines Punktes  $\xi \in [0, 1]$  mit  $0 = g(\xi) = f(\xi) - \xi$ , also  $f(\xi) = \xi$ .

**Proposition 2.4.** *Seien  $(X, \mathcal{X})$  und  $(Y, \mathcal{Y})$  homöomorphe topologische Räume. Hat  $(X, \mathcal{X})$  die Fixpunkt-Eigenschaft, dann hat auch  $(Y, \mathcal{Y})$  die Fixpunkt-Eigenschaft.*

*Beweis.* Sei  $h$  ein Homöomorphismus von  $X$  nach  $Y$ . Betrachten wir für eine stetige Funktion  $f : Y \rightarrow Y$ , die wohldefinierte stetige Funktion  $h^{-1} \circ f \circ h : X \rightarrow X$ . Diese hat laut Voraussetzung einen Fixpunkt den wir mit  $x \in X$  bezeichnen. Dann ist  $h^{-1}(f(h(x))) = x$ , also folgt  $f(h(x)) = h(x)$ , und für die Funktion  $f$  ist der Punkt  $y := h(x) \in Y$  ein Fixpunkt.  $\square$

*Beispiel 2.5.* Das Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  hat die Fixpunkt-Eigenschaft. Denn  $h(x) := (b - a)x + a$  ist ein Homöomorphismus von  $[0, 1]$  nach  $[a, b]$ , und das Intervall  $[0, 1]$  hat nach Beispiel 2.3 die Fixpunkt-Eigenschaft.

## 2.2 Retrakte und Retraktionen

**Definition 2.6** (Retrakt). Sei  $(X, \mathcal{X})$  ein topologischer Raum. Ein Unterraum  $(U, \mathcal{X}_U)$  heißt *Retrakt* von  $(X, \mathcal{X})$ , wenn es eine stetige Abbildung  $r : X \rightarrow U$  gibt, sodass

$$\forall x \in U : r(x) = x$$

Hier heißt  $r$  *Retraktion*.

**Proposition 2.7.** Sei  $(H, \|\cdot\|)$  ein Hilbertraum,  $M \subseteq H$  eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Menge. Dann gilt für die Konvexe Projektion  $\pi_M : H \rightarrow M$  Folgendes (siehe Abbildung 2)

1.  $\forall x \in H, \forall m \in M : \langle x - \pi_M(x), m - \pi_M(x) \rangle \leq 0$
2.  $\forall x, y \in H : \|\pi_M(x) - \pi_M(y)\| \leq \|x - y\|$

*Beweis.*

1. Angenommen  $\langle x - \pi_M(x), m - \pi_M(x) \rangle > 0$ . Das bedeutet wir können ein  $\lambda \in (0, 1)$  finden sodass

$$0 < \lambda < \frac{2\langle x - \pi_M(x), m - \pi_M(x) \rangle}{\|\pi_M(x) - m\|^2}$$

gilt. Sei jetzt  $m \in M$ . Wir haben

$$\begin{aligned} & \|x - (\lambda m + (1 - \lambda)\pi_M(x))\|^2 = \\ & = \|x - \pi_M(x)\|^2 - 2\lambda\langle x - \pi_M(x), m - \pi_M(x) \rangle + \lambda^2 \|\pi_M(x) - m\|^2 = \\ & = \|x - \pi_M(x)\|^2 - \lambda(2\langle x - \pi_M(x), m - \pi_M(x) \rangle - \lambda \|\pi_M(x) - m\|^2) < \\ & < \|x - \pi_M(x)\|^2 \end{aligned}$$

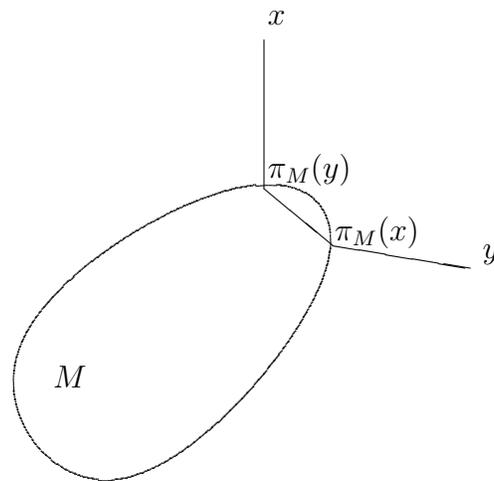
Was aber ein Widerspruch zu der Minimalität von  $\|x - \pi_M(x)\|$  ist da  $M$  kovex ist und damit  $\lambda m + (1 - \lambda)\pi_M(x) \in M$ .

2. Wir verwenden Behauptung 1. zweimal und bekommen

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 & = \|(x - \pi_M(x)) - (y - \pi_M(y)) + (\pi_M(x) - \pi_M(y))\|^2 = \\ & \|(x - \pi_M(x)) - (y - \pi_M(y))\|^2 + \|\pi_M(x) - \pi_M(y)\|^2 + \\ & \quad + 2\langle (x - \pi_M(x)) - (y - \pi_M(y)), \pi_M(x) - \pi_M(y) \rangle = \\ & = \|(x - \pi_M(x)) - (y - \pi_M(y))\|^2 + \|\pi_M(x) - \pi_M(y)\|^2 + \\ & = 2\langle x - \pi_M(x), \pi_M(x) - \pi_M(y) \rangle + 2\langle y - \pi_M(y), \pi_M(y) - \pi_M(x) \rangle \geq \\ & \geq \|\pi_M(x) - \pi_M(y)\|^2 \end{aligned}$$

□

Abbildung 2: Die Projektion auf einer konvexen Menge



**Proposition 2.8.** Sei  $(H, \| \cdot \|)$  ein Hilbertraum und  $C \subseteq D \subseteq H$ ,  $C \neq \emptyset$ ,  $C$  abgeschlossen und konvex. Dann ist  $C$  ein Retrakt von  $D$ .

*Beweis.* Betrachten wir die Konvexe Projektion  $\pi_C : D \rightarrow C$ , die nach dem Projektionssatz wohldefiniert ist und für die gilt  $\pi_C|_C = \text{id}_C$ . Nach der zweiten Behauptung von Proposition 2.7 folgt, dass die Abbildung lipschitzstetig mit Konstante 1 ist und damit auch stetig, also eine Retraktion. □

**Proposition 2.9.** Sei  $(U, \mathcal{X}_U)$  ein Retrakt von  $(X, \mathcal{X})$ . Hat  $(X, \mathcal{X})$  die Fixpunkt-Eigenschaft, dann hat auch  $(U, \mathcal{X}_U)$  die Fixpunkt-Eigenschaft.

*Beweis.* Da  $U$  ein Retrakt ist existiert eine stetige Abbildung  $r : X \rightarrow U$  für die gilt  $\forall u \in U : r(u) = u$ . Sei jetzt eine stetige Funktion  $g : U \rightarrow U$  gegeben und nehmen wir an sie hat keinen Fixpunkt also  $\forall x \in U : g(x) \neq x$ . Betrachten wir die stetige Abbildung  $g \circ r : X \rightarrow U \subseteq X$ . Für  $x \in U$  gilt  $g(r(x)) = g(x) \neq x$ . Für  $x \notin U$  gilt  $g(r(x)) \in U$  was bedeutet, dass auch

$g(r(x)) \neq x$ . Das ist aber ein Widerspruch da  $g \circ r$  eine stetige Abbildung von  $X$  nach  $X$  ist und einen Fixpunkt haben sollte. Das heißt  $g$  besitzt einen Fixpunkt.  $\square$

**Proposition 2.10.** *Sei  $(M, \rho)$  ein metrischer Raum. Seien Mengen  $A, C \subseteq M$  gegeben, wobei  $A$  abgeschlossen und  $C$  kompakt ist. Sei die Abbildung  $f : A \rightarrow C$  stetig. Weiters gelte*

$$\forall \epsilon > 0 \exists x_\epsilon \in A : \rho(f(x_\epsilon), x_\epsilon) < \epsilon.$$

*Dann hat  $f$  einen Fixpunkt.*

*Beweis.* Sei  $z_n := x_{\frac{1}{n}}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(f(z_n))$  eine Folge in  $C$  und besitzt daher eine in  $C$  konvergente Teilfolge  $f(z_{n_k}) \rightarrow y$  für  $k \rightarrow \infty$ . Es folgt

$$\rho(z_{n_k}, y) \leq \rho(z_{n_k}, f(z_{n_k})) + \rho(f(z_{n_k}), y) < 1/n_k + \rho(f(z_{n_k}), y) \rightarrow 0,$$

also  $z_{n_k} \rightarrow y$ . Da  $A$  abgeschlossen ist, folgt  $y \in A$ . Jetzt wegen der Stetigkeit von  $f$  ist auch  $f(z_{n_k}) \rightarrow f(y)$ . Zusammen mit  $f(z_{n_k}) \rightarrow y$  folgt  $f(y) = y$ .  $\square$

## 3 Der Fixpunktsatz von Brouwer

In diesem Kapitel fangen wir mit den Begriffen des Simplexes und die baryzentrische Koordinaten an. Dabei zeigen wir die Stetigkeit dieser Koordinaten-Projektion und dass der Simplex homöomorph zur Einheitskugel ist. Als Nächstes kommt das Lemma von Sperner als eine hilfreiche kombinatorische Überlegung. Danach kommt der eigentliche Beweis des Fixpunktsatzes von Brouwer. Er geht über den Begriff der Index-Menge und ein Paar Eigenschaften davon. Dann zeigt man die Existenz einer genügend feiner simplizialen Zerlegung und zum Schluss wird der Fixpunktsatz indirekt mittels des Lemmas von Sperner bewiesen.

### 3.1 Simplices und baryzentrische Koordinaten

**Definition 3.1** (Simplex). Seien  $p_0, \dots, p_n$  affin unabhängige Punkte im affinen Raum  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq n$ . Dann heißt die konvexe Hülle

$$\{\lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_n p_n : \lambda_i \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda_i \leq 1, \lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1\}$$

ein  $n$ -dimensionales Simplex  $\Sigma = \Delta(p_0, \dots, p_n)$  und  $p_0, \dots, p_n$  heißen die Ecken des Simplex. Wählt man  $d + 1$  Ecken  $p_{i_0}, \dots, p_{i_d}$  mit

$$0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_d \leq n, \quad d < n$$

aus, so heißt das davon erzeugte Simplex  $\Delta(p_{i_0}, \dots, p_{i_d})$  eine  $d$ -dimensionale Seite des Simplex  $\Sigma$ , die den nicht ausgewählten Ecken  $p_j$ ,  $j \neq i_k$ ,  $1 \leq k \leq d$  gegenüber liegt.

**Definition 3.2** (Baryzentrische Koordinaten). Die Zahlen  $x_0, \dots, x_n$  von der eindeutigen Darstellung jedes  $x \in \Sigma = \Delta(p_0, \dots, p_n)$

$$x = x_0 p_0 + \dots + x_n p_n$$

mit  $0 \leq x_i \leq 1$  und  $x_0 + \dots + x_n = 1$  nennen wir *baryzentrische Koordinaten* und schreiben  $\mathfrak{B}_i(x) := x_i$ .

**Proposition 3.3.** Die Abbildung  $x \rightarrow \mathfrak{B}_i(x)$  von  $\Sigma = \Delta(p_0, \dots, p_n)$  nach  $\mathbb{R}$  ist stetig.

*Beweis.* Seien  $x = x_0 p_0 + \dots + x_n p_n$  und  $y = y_0 p_0 + \dots + y_n p_n$  zwei Punkte in  $\Sigma$ . Wegen  $x_0 + \dots + x_n = 1$  und  $y_0 + \dots + y_n = 1$  können wir umschreiben

$$\begin{aligned} x &= p_n + x_0(p_0 - p_n) + \dots + x_{n-1}(p_{n-1} - p_n) \\ y &= p_n + y_0(p_0 - p_n) + \dots + y_{n-1}(p_{n-1} - p_n) \end{aligned}$$

und dann voneinander subtrahieren

$$y - x = (y_0 - x_0)(p_0 - p_n) + \dots + (x_{n-1} - y_{n-1})(p_{n-1} - p_n).$$

Da die Norm  $\|\cdot\|_2$  stetig bei 0 ist, folgt aus  $\|y - x\|_2 \rightarrow 0$ , dass  $y - x \rightarrow 0$ . Es gilt also

$$(y_0 - x_0)(p_0 - p_n) + \dots + (y_{n-1} - x_{n-1})(p_{n-1} - p_n) \rightarrow 0.$$

Zusammen mit der linearen Unabhängigkeit von  $p_0 - p_n, \dots, p_{n-1} - p_n$  folgt  $y_i - x_i \rightarrow 0$  für alle  $i < n$ . Das heisst aber auch

$$y_n - x_n = (x_0 - y_0) + \dots + (x_{n-1} - y_{n-1}) \rightarrow 0.$$

□

**Proposition 3.4.** Sei  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$  ein  $n$ -dimensionales Simplex. Dann ist  $\Sigma$  homöomorph zu der abgeschlossenen Einheitskugel

$$\overline{K}_n(0, 1) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

*Beweis.* Sei  $\Sigma = \Delta(p_0, \dots, p_n)$ . Dann ist der Schwerpunkt von  $\Sigma$  durch

$$b = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n p_i$$

gegeben. Für jedes  $x \in \Sigma \setminus \{b\}$  betrachten wir den Schnittpunkt  $y(x)$  des Strahles  $(1 - \mu)b + \mu x$  (von  $b$  durch  $x$ ) mit dem Rand  $\partial\Sigma$ . Jetzt definieren wir folgende Funktion:

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{\lambda(x)}{\|y(x)-b\|_2} (y(x) - b) = \frac{x-b}{\|y(x)-b\|_2} & x \neq b \\ 0 & x = b \end{cases}$$

wobei  $\lambda(x) \in [0, 1]$  die Zahl von der eindeutigen Darstellung von  $x$  als konvexe Kombination von  $b$  und  $y$  ist

$$x = (1 - \lambda(x))b + \lambda(x)y(x) \quad (1)$$

Man sieht, dass  $\lambda(x) = \frac{\|x-b\|_2}{\|y(x)-b\|_2}$  gilt. Die Funktion  $\varphi$  ist wohldefiniert und wirklich eine Abbildung in  $\overline{K}_n(0, 1)$  da  $\|\varphi(x)\|_2 = \left\| \frac{\lambda(x)}{\|y(x)-b\|_2} (y(x) - b) \right\|_2 = |\lambda(x)| \leq 1$ . Weiters können wir für  $\varphi$  folgenden Eigenschaften zeigen:

1. Für einen Punkt  $z_0 \in \overline{K}_n(0, 1) \setminus \{0\}$  betrachten wir den Schnittpunkt des Strahles  $b + \kappa z_0$  mit dem Rand  $\partial\Sigma$  und bezeichnen wir ihn mit  $y_0$ . Es gilt  $\frac{y_0-b}{\|y_0-b\|_2} = \frac{z_0}{\|z_0\|_2}$ . Jetzt definieren wir  $x_0 = (1 - \|z_0\|_2)b + \|z_0\|_2 y_0$ . Wir haben

$$\varphi(x_0) = \frac{\lambda(x_0)}{\|y(x_0)-b\|_2} (y(x_0) - b) = \frac{\|z_0\|_2}{\|y_0-b\|_2} (y_0 - b) = \frac{\|z_0\|_2}{\|z_0\|_2} z_0 = z_0$$

Also für jeden  $z_0$  können wir ein  $x_0$  finden, sodass  $\varphi(x_0) = z_0$ . Das zeigt die Surjektivität von  $\varphi$ .

2. Sei  $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ , dann gilt  $\|\varphi(x_1)\|_2 = \|\varphi(x_2)\|_2$  also  $\left\| \frac{\lambda(x_1)}{\|y(x_1)-b\|_2} (y(x_1) - b) \right\|_2 = \left\| \frac{\lambda(x_2)}{\|y(x_2)-b\|_2} (y(x_2) - b) \right\|_2$  womit folgt, dass  $\lambda(x_1) = \lambda(x_2)$  und  $\frac{y(x_1)-b}{\|y(x_1)-b\|_2} = \frac{y(x_2)-b}{\|y(x_2)-b\|_2}$ .

Angenommen  $\|y(x_1) - b\|_2 > \|y(x_2) - b\|_2$ . Da  $y(x_2) \in \partial\Sigma$  folgt, dass es ein  $i : 0 \leq i \leq n$  existiert, sodass  $\mathfrak{B}_i(x_2) = 0$ . Wegen

$$y(x_1) = \frac{\|y(x_1) - b\|_2}{\|y(x_2) - b\|_2} y(x_2) + \left(1 - \frac{\|y(x_1) - b\|_2}{\|y(x_2) - b\|_2}\right) b$$

wäre  $\mathfrak{B}_i(x_1) = \left(1 - \frac{\|y(x_1) - b\|_2}{\|y(x_2) - b\|_2}\right) \frac{1}{n+1} < 0$  also Widerspruch. Das heißt  $\|y(x_1) - b\|_2 = \|y(x_2) - b\|_2$  also  $y(x_1) - b = y(x_2) - b$  und damit auch  $y(x_1) = y(x_2)$ . Wegen (1) folgt jetzt schließlich  $x_1 = x_2$ . Damit ist die Injektivität von  $\varphi$  gezeigt.

3. Nach Gleichung (1) folgt  $\mathfrak{B}_i(x) = (1 - \lambda(x))\mathfrak{B}_i(b) + \lambda(x)\mathfrak{B}_i(y(x))$ . Da  $y(x) \in \partial\Sigma$  folgt, dass es ein  $i$  existiert, sodass  $\mathfrak{B}_i(x) = 0$ . Dies zusammen mit  $\mathfrak{B}_i(b) = \frac{1}{n+1}$  ergibt  $\mathfrak{B}_i(x) = (1 - \lambda(x))\frac{1}{n+1}$  also  $\lambda(x) = 1 - (n+1)\mathfrak{B}_i(x)$ . Da nach Proposition 3.3  $\mathfrak{B}_i(x)$  stetig ist, folgt, dass auch  $\lambda(x)$  stetig ist. Wieder von (1) bekommt man  $y(x) = \frac{1}{\lambda(x)}x + (1 - \frac{1}{\lambda(x)})b$  und da wie gezeigt  $\lambda(x)$  stetig ist, folgt das auch  $y(x)$  (sobald  $\lambda(x) \neq 0$ ) stetig ist. Das zusammen bedeutet aber, dass  $\varphi(x)$  stetig ist. Für den Fall  $y(x) \rightarrow 0$  ist offensichtlich, dass auch  $\varphi(x) \rightarrow 0$ .

Die gezeigten Eigenschaften bedeuten, dass  $\varphi$  ein Homöomorphismus von  $\Sigma$  nach  $\overline{K}_n(0, 1)$  ist und dadurch  $\Sigma$  und  $\overline{K}_n(0, 1)$  homöomorph sind.  $\square$

## 3.2 Die Simpliciale Zerlegung und das Lemma von Sperner

**Definition 3.5** (Simpliciale Zerlegung). Eine *Simpliciale Zerlegung* eines  $n$ -dimensionalen Simplex  $\Sigma = \Delta(p_0, \dots, p_n)$  ist eine endliche Menge von paarweise verschiedenen  $n$ -dimensionalen Simplexes  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$  sodass

1.  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_r$ .
2. Für  $j \neq k$  ist  $\Sigma_j \cap \Sigma_k = \emptyset$  oder eine Seite von  $\Sigma_j$  und  $\Sigma_k$ .

**Satz 3.6** (Lemma von Sperner). Sei  $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_r\}$  eine simpliciale Zerlegung eines  $n$ -dimensionalen Simplex  $\Sigma$ , und jedem Punkt, der als Ecke eines Simplex  $\Sigma_j$  auftritt, sei eine der Zahlen  $0, \dots, n$  als Marke so zugeordnet, dass gilt:

1. An den  $n + 1$  Ecken von  $\Sigma$  stehen  $0, \dots, n$  in irgendeiner bijektiven Zuordnung.
2. Ist eine Seite eines  $\Sigma_j$  in einer Seite  $F$  von  $\Sigma$  enthalten, so kommen an den Ecken von  $S$  nur Marken vor, die auch an den Ecken von  $F$  vorkommen.

Dann gibt es ein  $j$ , sodass die Ecken von  $\Sigma_j$  in einer bijektiven Zuordnung mit  $0, \dots, n$  stehen. (Siehe dazu Abbildung 3)

*Beweis.* Zuerst werden wir die Behauptung für Dimension  $n = 2$  zeigen und das Ergebnis dann induktiv verwenden.

Also wir haben  $n = 2$  und an den Ecken stehen  $0, 1$  oder  $2$ . Jetzt definieren wir einen Graph  $G$  folgendermaßen:

- Die Knoten von  $G$  sind genau alle  $r$  Simplexes  $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_r\}$  der simplizialen Zerlegung plus den Außenbereich  $O$ . Also eingestimmt  $r + 1$  Knoten.
- Zwei Knoten dieses Graphes sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn beide zugehörige Gebiete eine gemeinsame Seite mit den Marken  $0$  und  $1$  besitzen.

Da durch Teilen der  $0 - 1$  Seite des Simplexes man immer auf eine ungerade Anzahl von kleinere  $0 - 1$  Seiten kommt ist es klar, dass der Knoten  $O$  nur einen ungeraden Grad haben kann.

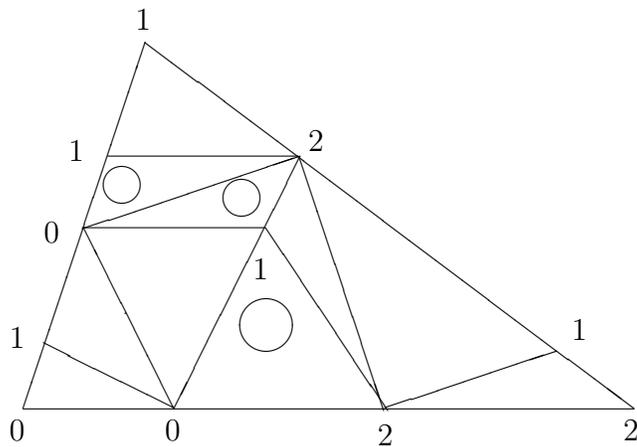
Da die Summe aller Graden der Knoten eines ungerichteten Graphes gerade ist, muss die Anzahl der Knoten mit ungeraden Graden eine gerade Zahl sein. Weil  $O$  einen ungeraden Grad hat, muss die Anzahl der Knoten aus der Menge  $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_r\}$  mit ungeraden Graden ungerade sein.

Die mögliche Grade für einen Knoten bei Dimension  $2$  sind  $0, 1$  oder  $2$ , wobei die einzige ungerade Zahl darunter  $1$  ist, was sich nur dann ergibt wenn wir ein  $0 - 1 - 2$  Simplex haben. Da aber die Anzahl solcher Knoten ungerade (also zumindest  $1$ ) ist, haben wir den Fall  $n = 2$  bewiesen.

Für die Dimension  $n + 1$  geht man analog vor. Man definiert wieder einen Graphen mit den Knoten  $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_r, O\}$  und eine Kante zwischen zwei Knoten genau dann, wenn beide Gebiete eine gemeinsame Seite mit den Marken  $0, 1, \dots, n$  besitzen. Durch die induktive Behauptung für die um  $1$  kleinere Dimension  $n$ , sieht man wie oben, dass der Grad von  $O$  ungerade ist. Ganz

analog folgt weiter, dass die Anzahl der Knoten aus  $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_r\}$  mit ungeraden Graden ungerade ist. Da aber die möglichen Graden der Innengebiete nur 0, 1 und 2 sind, wobei 1 die einzige ungerade Zahl darunter ist, die nur im Fall eines  $0 - 1 - \dots - (n + 1)$  Simplex möglich ist folgt die Behauptung auch für diese Dimension.  $\square$

Abbildung 3: Sperner-Lemma in Dimension 2 mit drei  $0 - 1 - 2$  Simplexes



*Bemerkung 3.7.* Das letzte Lemma besagt sogar mehr als die Existenz ein  $j$ , sodass die Ecken von  $\Sigma_j$  in einer bijektiven Zuordnung mit  $0, \dots, n$  stehen. Nämlich es besagt das es eine ungerade Anzahl von Simplexes gibt mit Ecken die in einer bijektiven Zuordnung mit  $0, \dots, n$  stehen.

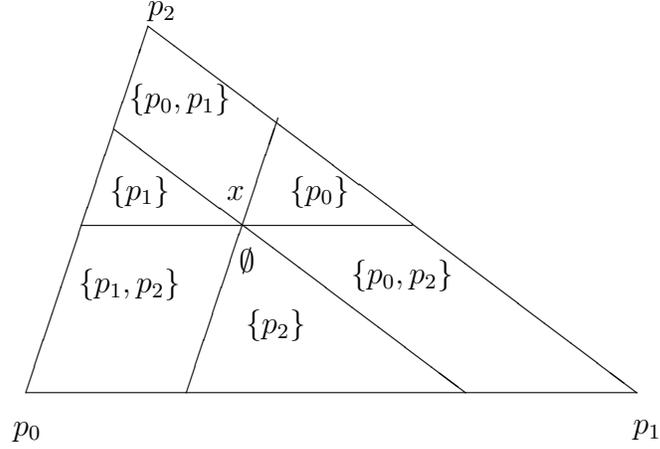
### 3.3 Der Fixpunktsatz von Brouwer

**Definition 3.8** (Index-Menge). Für eine Funktion  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  nennen wir die folgende Menge die *Index-Menge* des Punktes  $x$

$$M_f(x) := \{p_i : \mathfrak{B}_i(f(x)) < \mathfrak{B}_i(x)\} \subseteq \{p_0, \dots, p_n\}.$$

Analog definiert man für eine Menge  $A \subseteq \Sigma$ , folgende Index-Menge  $M_f(A) := \bigcup_{x \in A} M_f(x)$ .

Abbildung 4: Die Bereiche für den Bild  $f(x)$  mit verschiedene Index-Mengen



**Proposition 3.9.** Für eine Funktion  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  und einen Punkt  $x \in \Sigma$  ist  $M_f(x) = \emptyset$  äquivalent zu  $f(x) = x$ .

*Beweis.* Von  $\sum_i \mathfrak{B}_i(f(x)) = 1 = \sum_i \mathfrak{B}_i(x)$  folgt  $\sum_i (\mathfrak{B}_i(f(x)) - \mathfrak{B}_i(x)) = 0$ . Von  $M_f(x) = \emptyset$  folgt aber  $\mathfrak{B}_i(f(x)) - \mathfrak{B}_i(x) \geq 0$  für alle  $i$ . Eine Summe nicht negativen Zahlen ist nur dann 0 wenn alle Summanden 0 sind, also  $\mathfrak{B}_i(f(x)) - \mathfrak{B}_i(x) = 0$  für alle  $i$ . Das heißt  $f(x) = x$ .

Umgekehrt aus  $f(x) = x$  folgt  $\mathfrak{B}_i(f(x)) = \mathfrak{B}_i(x)$  also  $M_f(x) = \emptyset$ .  $\square$

**Proposition 3.10.** Aus  $x \in \Delta(p_{i_0}, \dots, p_{i_d}) \subseteq \Sigma$ ,  $d < n$  folgt  $M_f(x) \subseteq \{p_{i_0}, \dots, p_{i_d}\}$ .

*Beweis.* Aus  $x \in \Delta(p_{i_0}, \dots, p_{i_d})$  folgt  $\mathfrak{B}_j(x) = 0$  für alle  $j \notin \{i_0, \dots, i_d\}$ . Das heißt  $\mathfrak{B}_j(f(x)) \geq \mathfrak{B}_j(x) = 0$  für alle solche  $j$ . Das bedeutet  $p_j \notin M_f(x)$ , woraus man schließt, dass  $M_f(x) \subseteq \{p_{i_0}, \dots, p_{i_d}\}$ .  $\square$

**Proposition 3.11.** Sei  $x \in \Sigma$  und  $f(x) \neq x$ . Dann  $M_f(x) \subsetneq \{p_0, \dots, p_n\}$ .

*Beweis.* Sei  $f(x) \neq x$  und sei  $\mathfrak{B}_i(f(x)) \leq \mathfrak{B}_i(x)$  für alle  $i$ . Zusammen mit  $\sum_i (\mathfrak{B}_i(x) - \mathfrak{B}_i(f(x))) = 0$  würde daraus folgen  $\mathfrak{B}_i(x) - \mathfrak{B}_i(f(x)) = 0$  also

$\mathfrak{B}_i(x) = \mathfrak{B}_i(f(x))$  was aber zu  $f(x) \neq x$  ein Widerspruch ist. Das heißt, dass es ein  $k$  existiert, sodass  $\mathfrak{B}_k(f(x)) > \mathfrak{B}_k(x)$  also  $M_f(x) \neq \{p_0, \dots, p_n\}$ .  $\square$

**Proposition 3.12.** *Sei  $x \in \Sigma$  und  $f(x) \neq x$ . Dann gibt es ein  $\epsilon = \epsilon_x > 0$  und eine Menge  $N(x) \subsetneq \{p_0, \dots, p_n\}$ , sodass für alle  $y \in \Sigma$  mit  $\|y - x\|_2 < \epsilon_x$  gilt, dass  $M_f(y) \subseteq N(x)$ . Also für jeden Punkt der bei der Anwendung von  $f$  nicht fix bleibt, gibt es eine  $\epsilon$ -Umgebung dieses Punktes in der alle Punkte Index-Mengen besitzen, die Teilmengen einer echten Teilmenge von  $\{p_0, \dots, p_n\}$  sind.*

*Beweis.* Da  $f(x) \neq x$ , gibt es nach Proposition 3.11 ein  $k$ , sodass  $\mathfrak{B}_k(f(x)) > \mathfrak{B}_k(x)$ . Sei jetzt  $N(x) := \{p_0, \dots, p_n\} \setminus \{p_k\}$ . Die Funktion  $x \rightarrow \mathfrak{B}_k(f(x)) - \mathfrak{B}_k(x)$  ist wegen Proposition 3.3 unter Berücksichtigung der Stetigkeit von  $f$  auch stetig. Also von  $\mathfrak{B}_k(f(x)) - \mathfrak{B}_k(x) > 0$  folgt, dass es ein  $\epsilon_x$  existiert, sodass für alle  $y$  mit  $\|y - x\|_2 < \epsilon_x$  gilt  $\mathfrak{B}_k(f(y)) - \mathfrak{B}_k(y) > 0$ . Das heißt schließlich  $p_k \notin M_f(y)$  also  $M_f(y) \subseteq N(x)$ .  $\square$

**Definition 3.13** (Einfache Simpliciale Zerlegung). Für ein  $n$ -dimensionales Simplex  $\Sigma = \Delta(p_0, \dots, p_n)$  definieren wir rekursiv folgende simpliciale Zerlegung (siehe Abbildung 5).

**Dimension 1** Das Simplex  $\Sigma = \Delta(p_0, p_1)$  wird in  $\Delta(p_0, \frac{1}{2}(p_0 + p_1))$  und  $\Delta(\frac{1}{2}(p_0 + p_1), p_1)$  zerlegt.

**Dimension n+1** Das Simplex  $\Sigma = \Delta(p_0, \dots, p_{n+1})$  wird in den Simplex unterteilt die entstehen, wenn man den Schwerpunkt  $\frac{1}{n+1}(p_0 + \dots + p_{n+1})$  mit den Ecken der Simplex von den simplicialen Zerlegungen aller  $n$ -dimensionalen Seiten verbindet.

**Proposition 3.14.** *Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es eine simpliciale Zerlegung von  $\Sigma$  in Simplices  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$ , sodass  $\|y - x\|_2 < \epsilon$  für  $x, y \in \Sigma_j$ .*

*Beweis.* Man kann leicht sehen, dass für die einfache simpliciale Zerlegung von 3.13 folgendes

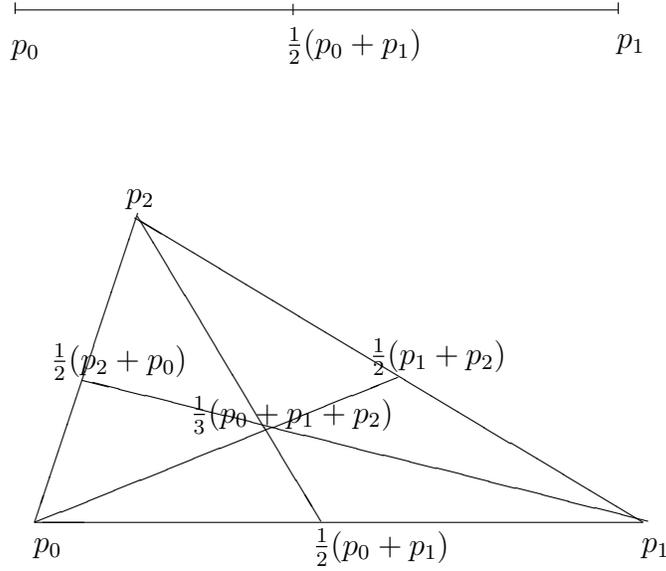
$$\max\{\|y - x\|_2 : x, y \in \Sigma_j\} \leq \frac{n}{n+1} \max\{\|y - x\|_2 : x, y \in \Sigma\}$$

gilt. Wenn wir also die Zerlegung  $k$  mal wiederholen, bekommen wir

$$\max\{\|y - x\|_2 : x, y \in \Sigma_{j_k}\} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \max\{\|y - x\|_2 : x, y \in \Sigma\}.$$

Das heißt  $\max\{\|y - x\|_2 : x, y \in \Sigma_{j_k}\} \rightarrow 0$ , wenn  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

Abbildung 5: Einfache simpliziale Zerlegung Dimension 1 und 2



**Proposition 3.15.** *Hat  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  keinen Fixpunkt, so gibt es eine simpliziale Zerlegung  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$ , sodass*

$$M_f(\Sigma_j) \neq \{p_0, \dots, p_n\} \quad \forall 1 \leq j \leq r.$$

*Beweis.* Mit  $\epsilon_x$  aus Proposition 3.12 ist  $\{K(x, \frac{\epsilon_x}{2}) : x \in \Sigma\}$  eine offene Überdeckung von  $\Sigma$ . Da  $\Sigma$  kompakt ist können wir eine endliche Überdeckung daraus wählen:

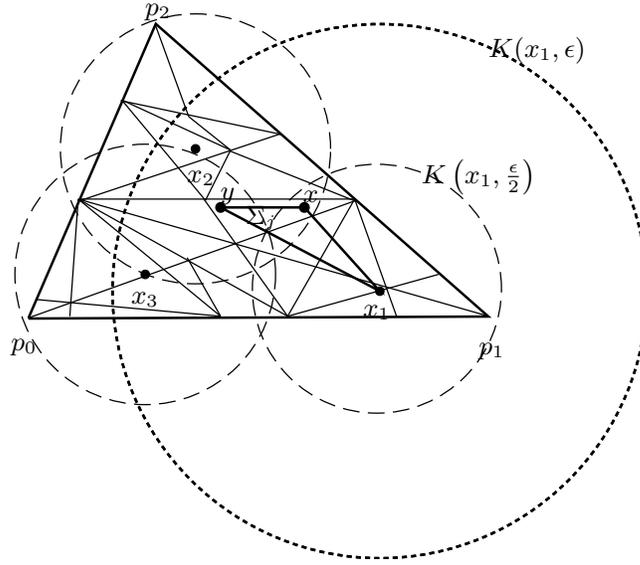
$$\Sigma \subseteq K\left(x_1, \frac{\epsilon_{x_1}}{2}\right) \cup \dots \cup K\left(x_s, \frac{\epsilon_{x_s}}{2}\right)$$

Sei  $\epsilon < \min(\epsilon_{x_1}, \dots, \epsilon_{x_s})$  und  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_r$  eine simpliziale Zerlegung mit  $\|y - x\| < \frac{\epsilon}{2}$  für  $x, y \in \Sigma_j$  (Proposition 3.14). Von  $\emptyset \neq \Sigma_j \subseteq \Sigma$  folgt, dass für alle  $\Sigma_j$  ein  $x_i$  existiert, sodass  $K(x_i, \frac{\epsilon_{x_i}}{2}) \cap \Sigma_j \neq \emptyset$ . Für  $x \in \Sigma_j \cap K(x_i, \frac{\epsilon_{x_i}}{2})$  und  $y \in \Sigma_j$  folgt

$$\|x_i - y\| \leq \|x_i - x\| + \|x - y\| < \frac{\epsilon_{x_i}}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon_{x_i}$$

, also für alle  $y \in \Sigma_j$  gilt  $\|x_i - y\| < \epsilon_{x_i}$ . Das heißt  $\Sigma_j \subseteq K(x_i, \epsilon_{x_i})$  (siehe Abb. 7). Jetzt nach Proposition 3.12 folgt  $M_f(\Sigma_j) = \bigcup_{y \in \Sigma_j} M_f(y) \subseteq N(x_i) \neq \{p_0, \dots, p_n\}$ .  $\square$

Abbildung 6: Die Überdeckung und die simpliziale Zerlegung



**Satz 3.16** (Fixpunktsatz von Brouwer). *Die abgeschlossene Einheitskugel*

$$\overline{K}_{n+1}(0, 1) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}, \quad n \geq 0$$

*hat die Fixpunkt-Eigenschaft.*

*Beweis.* Wegen Lemmata 2.4 und 3.4 müssen wir den Satz nur für eine Funktion  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma := \Delta(p_0, \dots, p_n)$  zeigen. Jetzt sei  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$  eine beliebige simpliziale Zerlegung und habe  $f$  keinen Fixpunkt. Ordnen wir jeder Ecke  $x$  der Zerlegung einen Index  $i$  zu, sodass  $p_i \in M_f(x)$ . Nach Proposition 3.10 gilt es  $M_f(p_j) \subseteq \{p_j\}$ , womit  $M_f(p_j) = \{p_j\}$  also  $j$  ist die Marke von  $p_j$ . Sei  $x \in \Delta(p_{i_0}, \dots, p_{i_d}) \subseteq \Sigma$  so folgt wieder nach Proposition 3.10, dass  $M_f(x) \subseteq \{p_{i_0}, \dots, p_{i_d}\}$ , womit die Marke von  $x$  in  $\{i_0, \dots, i_d\}$  liegt.

Jetzt sind die Bedingungen des Sperner Lemmas 3.6 erfüllt und es sollte ein  $j$  existieren, sodass die Ecken von  $\Sigma_j := \Delta(y_0, \dots, y_n)$  die Marken  $0, \dots, n$  haben. Das bedeutet:

$$\{p_0, \dots, p_n\} = \bigcup_{i=0}^n M_f(y_i) \subseteq \bigcup_{y \in \Sigma_j} M_f(y) =: M_f(\Sigma_j)$$

Da die umgekehrte Inklusion offensichtlich ist folgt die Gleichheit.

$$\{p_0, \dots, p_n\} = M_f(\Sigma_j)$$

Da dies für jede simpliziale Zerlegung gelten soll folgt, dass  $f$  einen Fixpunkt haben soll, da sonst sich ein Widerspruch zu Proposition 3.15 ergibt.  $\square$

## 4 Die Fixpunktsätze von Schauder and Kakutani

In diesem Kapitel werden die Fixpunktsätze von Schauder and Kakutani mithilfe vom Brouwersche-Fixpunktsatz bewiesen.

### 4.1 Der Fixpunktsatz von Schauder

**Lemma 4.1.** *Sei  $(E, \|\cdot\|)$  ein  $n$ -dimensionaler normierter Raum über  $\mathbb{R}$ ,  $\emptyset \neq C \subseteq E$ ,  $C$  kompakt und konvex. Dann hat  $C$  die Fixpunkt-Eigenschaft.*

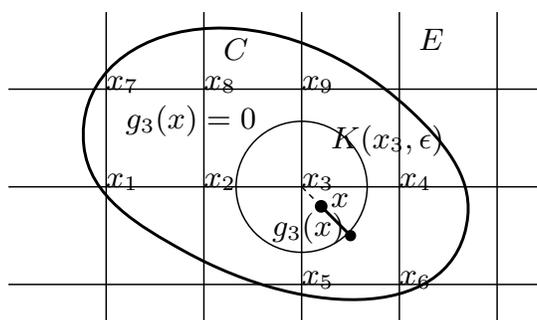
*Beweis.* Es existiert eine bijektive lineare Abbildung  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Also ist  $\varphi$  ein Homöomorphismus von  $(E, \|\cdot\|)$  nach  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ . Daraus folgt, dass  $\varphi(C)$  kompakt und konvex ist, da  $\varphi$  entsprechend stetig und linear ist. Da  $C$  zu  $\varphi(C)$  homöomorph ist, brauchen wir wegen Proposition 2.4 die Fixpunkt-Eigenschaft nur für  $\varphi(C)$  zeigen.

Von  $\varphi(C)$  kompakt folgt, dass es ein genug grosses  $a > 0$  existiert, sodass  $\varphi(C) \subseteq \overline{K}_n(0, a)$ . Da aber  $\overline{K}_n(0, a)$  homöomorph zu  $\overline{K}_n(0, 1)$  ist und  $\overline{K}_n(0, 1)$  die Fixpunkt-Eigenschaft hat folgt, dass auch  $\overline{K}_n(0, a)$  die Fixpunkt-Eigenschaft hat. Von der Tatsache, dass  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$  ein Hilbertraum ist und  $\varphi(C)$  kompakt und konvex ist folgt nach Proposition 2.8, dass  $\varphi(C)$  ein Retrakt von  $\overline{K}_n(0, a)$  ist. Schließlich nach Proposition 2.9 besitzt  $\varphi(C)$  die Fixpunkt-Eigenschaft.  $\square$

**Proposition 4.2** (Schauder-Projektion). Sei  $(E, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum,  $\emptyset \neq C \subseteq E$ ,  $C$  kompakt,  $\epsilon > 0$ , dann existieren  $x_1, \dots, x_n \in C$  und eine stetige Abbildung  $g : C \rightarrow \Delta(x_1, \dots, x_n)$ , sodass

$$\|g(x) - x\| < \epsilon \quad \forall x \in C.$$

Abbildung 7: Schauder-Projektion



*Beweis.* Da  $C$  kompakt ist folgt, dass  $C$  total beschränkt ist. Also es existiert ein  $\epsilon$ -Netz  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq C$ . Das heißt für alle  $x \in C$  existiert ein  $x_i$  mit  $\|x - x_i\| < \epsilon$ . Seien jetzt die Funktionen  $g_1, \dots, g_n : C \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch:

$$g_i(x) := \max\{0, \epsilon - \|x - x_i\|\}$$

Alle  $g_i$  sind offensichtlich stetig und es gilt

$$g_i(x) \neq 0 \Leftrightarrow x_i \in K(x, \epsilon)$$

Das bedeutet, dass die Abbildung  $g : C \rightarrow \Delta(x_1, \dots, x_n)$  definiert durch

$$g(x) := \frac{\sum_{i=1}^n g_i(x)x_i}{\sum_{i=1}^n g_i(x)}$$

(wegen  $g_i(x) \geq 0$  und  $\sum_{i=1}^n g_i(x) > 0$ ) stetig ist. Sie wird *Schauder-Projektion* genannt. Da  $g(x)$  eine konvexe Kombination über alle  $x_i$  mit  $g_i(x) \neq 0$  ist und alle solche  $x_i$  im  $K(x, \epsilon)$  liegen, liegt auch deren konvexe Kombination  $g(x)$  auch in  $K(x, \epsilon)$ . Das heißt aber  $\|g(x) - x\| < \epsilon$ .  $\square$

**Satz 4.3** (Fixpunktsatz von Schauder). *Sei  $(E, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum,  $K \subseteq E$ ,  $K$  konvex und abgeschlossen,  $\emptyset \neq C \subseteq K$ ,  $C$  kompakt,  $f : K \rightarrow C \Rightarrow f$  hat einen Fixpunkt.*

*Beweis.* Da  $C$  kompakt ist folgt, dass es Punkte  $x_1, \dots, x_n \in C$  und eine stetige Funktion  $g : C \rightarrow \Delta(x_1, \dots, x_n)$  existieren, sodass  $\|g(x) - x\| < \epsilon$ . Sei  $h = g \circ f : K \rightarrow K_0 = \Delta(x_1, \dots, x_n) \subseteq K$ . Da  $h$  stetig ist folgt nach Lemma 4.1, dass die Beschränkung von  $h$  auf  $K_0$ ,  $h|_{K_0}$  ( $K_0$  beschränkt im  $n$ -dimensionalen Raum erzeugt von  $x_1, \dots, x_n$ ), einen Fixpunkt  $z \in K_0$  hat. Wir haben also  $g(f(z)) = z$ . Damit bekommen wir  $\|f(z) - z\| = \|f(z) - g(f(z))\| < \epsilon$ . Das heisst, dass es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $z_\epsilon$  existiert, sodass  $\|f(z_\epsilon) - z_\epsilon\| < \epsilon$  und nach Proposition 2.10 folgt, dass  $f$  einen Fixpunkt hat.  $\square$

## 4.2 Der Fixpunktsatz von Kakutani

**Satz 4.4** (Fixpunktsatz von Kakutani). *Sei  $S$  eine nichtleere, konvexe, kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ ,  $F : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$  eine mengenwertige Funktion mit einem abgeschlossenen Graph  $\text{gph}(F) = \{(x, y) | x \in S, y \in F(x)\}$  und für jedes  $x \in S$  sei die Bildmenge  $F(x) \subseteq S$  nichtleer und konvex. Dann besitzt  $F$  einen Fixpunkt, also es gibt ein  $x \in S$ , so dass  $x \in F(x)$ .*

*Beweis.* Sei  $S$  die Einheitskreis  $K(0, 1)$ , und es gelte  $x \notin F(x)$  für alle  $x \in S$ . Nach dem Trennungssatz gibt es zu jedem  $x \in S$  ein  $z \in \mathbb{R}^n$  als Trennungsvektor für  $x$  und  $F(x)$ , also ein  $z$  mit  $t(z, x) := \inf\{\langle z, y - x \rangle | y \in F(x)\} > 0$ . Also ist  $\Omega(x) := \{z | t(z, x) > 0\}$  nie leer, wonach für  $\Omega^{-1}(z) := \{x | t(z, x) > 0\}$  Folgendes gilt

$$S \subseteq \bigcup_{z \in \mathbb{R}^n} \Omega^{-1}(z)$$

Gäbe es nämlich ein  $x \in S$  und  $x \notin \bigcup_{z \in \mathbb{R}^n} \Omega^{-1}(z)$  würde für alle  $z \in \mathbb{R}^n$  folgen  $t(z, x) \leq 0$  was ein Widerspruch wäre da  $\Omega(x)$  für alle  $x \in S$  nicht leer ist. Es gilt weiters

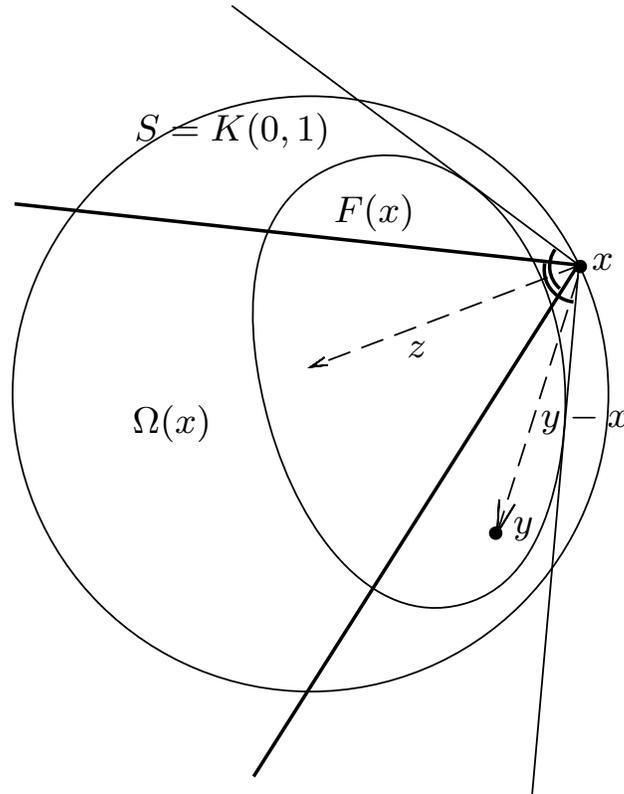
$$\Omega^{-1}(z) \text{ relativ offen in } S$$

Andernfalls gäbe es ein  $z \in \Omega(x)$  sowie eine Folge  $x_k \in S \setminus \Omega^{-1}(z)$  mit  $x_k \rightarrow x$ , was äquivalent zu

$$\inf\{\langle z, y - x_k \rangle | y \in F(x_k)\} \leq 0$$

wäre. Da  $F(x_k)$  kompakt ist, gibt es ein  $y_k \in F(x_k)$ , sodass  $\langle z, y_k - x_k \rangle \leq 0$ . Die Folge  $y_k$  besitzt eine konvergente Teilfolge, also es gilt o.B.d.A  $y_k \rightarrow y$ .

Abbildung 8: Zum Beweis des Fixpunktsatzes von Kakutani



Da aber  $\text{gph}(F)$  abgeschlossen ist und  $(x_k, y_k) \in \text{gph}(F)$  folgt auch  $(x, y) \in \text{gph}(F)$ , was aber zum Widerspruch  $\langle z, y - x \rangle \leq 0$  führt, weil  $z \in \Omega(x)$ .

Nach dem Überdeckungssatz folgt jetzt, dass es eine endliche Überdeckung von  $S$  gibt

$$S \subseteq \bigcup_{p \in \{1, \dots, n\}} \Omega^{-1}(z_p)$$

Dies zusammen mit der Abgeschlossenheit aller  $A_p = S \setminus \Omega^{-1}(z_p)$  ergibt für  $d_p(x) := \text{dist}(x, A_p)$ , dass  $d(x) := \sum_p d_p(x) > 0$  für alle  $x$ . Definieren wir

$$\lambda_p(x) := d_p(x)/d(x) \text{ und } z(x) := \sum_p \lambda_p(x) z_p$$

Man sieht, dass  $z(x) \in \Omega(x)$  und  $z(x) \neq 0$ . Die Funktion  $f(x) = \frac{z(x)}{\|z(x)\|}$  ist

daher stetig, erfüllt  $f(x) \in \Omega(x)$  und bildet die Kugel  $S$  stetig auf ihren Rand ab. Nach dem Fixpunktsatz von Brouwer hat  $f$  einen Fixpunkt:  $x^* = f(x^*) \in \Omega(x^*)$ . Es gilt  $\|x^*\| = \langle x^*, x^* \rangle = 1$  und  $0 < \inf\{\langle x^*, y - x^* \rangle \mid y \in F(x^*)\}$  (da  $x^* \in \Omega(x^*)$ ). Weiters  $\langle x^*, y \rangle > \langle x^*, x^* \rangle = 1$  für alle  $y \in F(x^*)$ . Daraus folgt  $F(x^*) \cap K(0, 1) = \emptyset$ , was ein Widerspruch zu  $\emptyset \neq F(x^*) \subseteq S$  ist. Damit ist die Annahme  $x \notin F(x)$  für alle  $x \in S$  falsch und die Behauptung für  $S = K(0, 1)$  gezeigt.

Analog zeigt man die Behauptung für den Kreis  $K(0, r)$ . Schließlich für beliebige konvexe, kompakte Mengen indem man  $r$  genug gross wählt so dass  $S \subseteq K(0, r)$  und die Funktion  $F \circ \pi : K(0, r) \rightarrow S \rightarrow \mathcal{P}(S)$  betrachtet, wobei  $\pi(x)$  die Projektion von  $x \in K(0, r)$  auf  $S$  ist. □

## 5 Anwendungen

Hier werden zwei spieltheoretische Behauptungen als Anwendung von entsprechend Brouwer- und Kakutani-Fixpunktsatz bewiesen.

### 5.1 Arbeitslemma über den Brouwer-Fixpunktsatz

**Lemma 5.1** (Arbeitslemma). *Sei  $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i = 1, x_i > 0\}$  das Einheits-simplex,  $F_i := \{x \in S \mid x_i = 0\}$  seine  $i$ -te Seite,  $X_i \subseteq S$  abgeschlossene Mengen mit  $F_i \subseteq X_i$ . Dann folgt von  $\bigcup_i X_i = S$ , dass  $\bigcap_i X_i \neq \emptyset$ .*

*Bemerkung 5.2.* Sei  $x_i$  die Arbeitsmenge die Person  $i$  zu erledigen hat,  $x \in S$  eine solche Aufteilung und  $S$  die Menge aller Aufteilungen der Arbeit. Seien weiters  $F_i$  die Mengen der Aufteilungen mit den Person  $i$  einverstanden ist. Die Bedingung  $\bigcup_i X_i = S$  besagt dass stets eine Person gibt die einverstanden ist. Die Behauptung des Lemmata besagt nun das es es eine Aufteilung gibt mit der alle einverstanden sind.

*Beweis.* Nehmen wir an  $\bigcap_i X_i = \emptyset$  und sei  $d_i := \text{dist}(x, X_i)$ . Dann ist  $d_i$  stetig und  $\sum_i d_i(x) > 0$ . Definieren wir die Funktion  $f : S \rightarrow S$  mit Komponenten

$$f_i(x) := \frac{d_i(x)}{\sum_i d_i(x)}.$$

Da  $\bigcup_i X_i = S$  gilt, liegt  $x$  in wenigsten einem  $X_i$ , also ist stets ein  $f_i(x) = 0$ . Daher bildet  $f$  sogar auf den Rand  $\delta S = \bigcup_i F_i$  von  $S$  ab. Wir haben auch, dass  $f(x) \in F_i$ , falls  $x \in F_i \subseteq X_i$ .

Sei  $g(x)$  der zu  $f(x)$  am Zentrum  $z := (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$  gespiegelten Punkt. Dieser Punkt ist durch

$$z = \lambda(x)g(x) + (1 - \lambda(x))f(x), \quad 0 < \lambda(x) < 1, \quad g(x) \in \delta S$$

beschrieben. Da auch  $f(x) \in \delta S$  folgt, dass  $g(x)$  und  $\lambda(x)$  stetige Funktionen sind. Also  $g(x) : S \rightarrow \delta S$  und wegen der Spiegelung, von  $x \in F_i$  folgt  $g(x) \notin F_i$ . Das heißt, dass für alle  $x \in \delta S$  gilt  $g(x) \neq x$ . Die Punkte vom Inneren von  $S$  können auch keine Fixpunkte sein da sie auf dem Rand abgebildet werden. Das heißt, dass die stetige Funktion  $g(x)$  keine Fixpunkte hat und das ist ein Widerspruch zum Brouwer-Fixpunktsatz. Damit haben wir gezeigt, dass die Annahme  $\bigcap_i X_i = \emptyset$  falsch ist und dadurch den Gegenteil bewiesen.  $\square$

## 5.2 Nash-Gleichgewicht über den Kakutani-Fixpunktsatz

**Definition 5.3** (Nash-Gleichgewicht). Es sei ein  $n$ -Personenspiel gegeben, wobei jeder Spieler eine nicht leere, kompakte Strategiemenge  $X_i \subseteq \mathbb{R}^m$  besitzt. Bei der Wahl  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  ist die Auszahlung des  $i$ -ten Spielers  $f_i(x_1, \dots, x_n)$ . Es ist keine Kooperation erlaubt. Der  $i$ -te Spieler ist mit der Situation  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  genau dann zufrieden, wenn

$$f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq f_i(x_1, \dots, x_n) \quad \forall x'_i \in X_i \quad (2)$$

Man redet bei  $x = (x_1, \dots, x_n)$  von einem *Nash-Gleichgewicht* (*Gleichgewichtssituation*) wenn (2) für alle  $i$  gilt.

**Satz 5.4.** *Seien alle  $f_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  stetig und in  $x_i$  konkav. Dann besitzt das Spiel mindestens ein Nash-Gleichgewicht.*

*Beweis.* Ordnen wir jedem  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  die Menge der Maximal-Punkte aus  $X_i$

$$F_i(x_1, \dots, x_n) := \operatorname{argmax}\{f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \mid x'_i \in X_i\} \subseteq X_i$$

Zeigen wir, dass für alle  $x$  und alle  $i$ ,  $F_i(x)$  eine konvexe Menge ist. Dafür betrachten wir die konvexe Kombination  $\alpha x'_i + \beta x''_i$  ( $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ ). Wenn  $x'_i, x''_i \in F_i(x)$  folgt

$$\begin{aligned} f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n) &\geq f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x''_i, x_{i+1}, \dots, x_n) &\geq f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

für alle  $x_i$ . Das zusammen mit der Konkavität von  $f_i$  haben wir

$$\begin{aligned} & f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha x'_i + \beta x''_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq \\ & \alpha f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + \beta f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x''_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq \\ & \alpha f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + \beta f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ & (\alpha + \beta) f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Das bedeutet  $\alpha x'_i + \beta x''_i \in F_i(x)$  also die Menge  $F_i(x)$  ist konvex.

Da alle  $f_i(x)$  stetig sind und  $X_i$  kompakt sind folgt, dass die  $F_i(x)$  nicht leer sind. Jetzt, betrachten wir die Funktion

$$F(x) := (F_1(x), \dots, F_n(x)).$$

Sie hat klarerweise auch konvexe nicht leere Bilder  $F(x)$ . Zeigen wir, dass sie einen abgeschlossenen Graph besitzt. Betrachten wir dafür die Folgen  $x^k := (x_1^k, \dots, x_n^k)$  aus  $X_1 \times \dots \times X_n$  und  $u^k := (u_1^k, \dots, u_n^k)$  aus  $F(x^k)$  und nehmen wir an

$$\begin{aligned} (x_1^k, \dots, x_n^k) & \rightarrow (x_1, \dots, x_n) \\ (u_1^k, \dots, u_n^k) & \rightarrow (u_1, \dots, u_n). \end{aligned}$$

Von  $(u_1^k, \dots, u_n^k) \in F(x^k) := (F_1(x^k), \dots, F_n(x^k))$  folgt

$$f_i(x_1^k, \dots, u_i^k, \dots, x_n^k) \geq f_i(x_1^k, \dots, \xi_i, \dots, x_n^k) \quad \forall i, \forall \xi_i \quad (3)$$

Wäre  $u_i \notin F(x_i)$ , also gäbe es ein  $u_i^0$ , sodass Folgendes gilt

$$f_i(x_1, \dots, u_i, \dots, x_n) < f_i(x_1, \dots, u_i^0, \dots, x_n).$$

Aus Stetigkeit-Gründen würde dann aber Folgendes

$$f_i(x_1^k, \dots, u_i^k, \dots, x_n^k) < f_i(x_1^k, \dots, u_i^0, \dots, x_n^k)$$

auch gelten. Das ist aber ein Widerspruch zu (3), womit die Annahme  $u_i \notin F(x_i)$  falsch ist. Also ist der Graph der Funktion  $F(x)$  abgeschlossen.

Das heißt wir können den Kakutani-Fixpunktsatz anwenden, der die Existenz eines  $x$  sichert, für das gilt  $x \in F(x)$ . Das heißt wir haben bewiesen, dass das Spiel mindestens ein Nash-Gleichgewicht besitzt.  $\square$

## Literatur

- [1] Jean-Pierre Aubin. *Optima and Equilibria: An introduction to Nonlinear Analysis*. Springer, 1984.
- [2] Georg Ch.Pflug. *Optimization of stochastic models*. Kluwer academic publishers, 1996.
- [3] Günther Eigenhaller. *Funktional Analysis I*, 2000.
- [4] Bernd Kummer. *Fixpunkte und anwendungen in optimierung und spieltheorie*, 2006.