Sturm-Liouville Differentialoperatoren

Jonathan Eckhardt

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Einleitung

Ist $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes oder unbeschränktes Intervall, so bezeichnen wir mit $\mathcal{M}((a,b);\mathbb{C})$ die Menge aller (borel)messbaren komplexwertigen Funktionen auf (a,b).

Für $p \in [1,\infty)$ und ein Borelmaß μ auf (a,b) bezeichnen wir die Menge aller (Äquivalenzklassen von) Funktionen $f \in \mathcal{M}((a,b);\mathbb{C})$, die absolut p-fach über (a,b) bezüglich des Maßes μ integrierbar sind mit $L^p((a,b);\mu)$. Der Einfachheit halber sagen wir für ein Teilintervall $(\alpha,\beta) \subseteq (a,b)$ und eine Funktion $f \in \mathcal{M}((a,b);\mathbb{C})$:

$$f \in L^p((\alpha,\beta);\mu) \quad \Leftrightarrow \quad f|_{(\alpha,\beta)} \in L^p((\alpha,\beta);\mu).$$

Wir sagen $f \in \mathcal{M}((a,b);\mathbb{C})$ ist lokal integrierbar bezüglich μ, falls für alle kompakten Teilintervalle $[\alpha,\beta] \subseteq (a,b)$, $f \in L^1((\alpha,\beta);\mu)$ gilt. Mit $L^1_{loc}((\alpha,\beta);\mu)$, bezeichnen wir den Raum der bezüglich μ lokal integrierbaren Funktionen.

Falls kein Maß angegeben wird, so meinen wir mit integrierbar, stets integrierbar bezüglich des Lebesguemaßes λ. Auch fast überall ist bezüglich des Lebesguemaßes zu verstehen, falls nichts anderes angegeben ist.

Stimmt eine Funktion $f \in \mathcal{M}((a,b);\mathbb{C})$ fast überall mit einer auf (a,b) absolut stetigen Funktion überein, so sagen wir f ist absolut stetig. Den Raum der absolut stetigen Funktionen bezeichnen wir mit $AC(a,b)$. Der Einfachheit halber sagen wir wieder für ein Teilintervall $(\alpha,\beta) \subseteq (a,b)$ und eine Funktion $f \in \mathcal{M}((a,b);\mathbb{C})$:

$$f \in AC(\alpha,\beta) \quad \Leftrightarrow \quad f|_{(\alpha,\beta)} \in AC(\alpha,\beta).$$

Wir sagen f ist lokal absolut stetig, falls für alle kompakten Teilintervalle $[\alpha,\beta] \subseteq (a,b)$, $f \in AC(\alpha,\beta)$ gilt. Den Raum der lokal absolut stetigen Funktionen bezeichnen wir mit $AC_{loc}(a,b)$.

Ist $f \in AC_{loc}(a,b)$, so ist f fast überall differenzierbar und wir bezeichnen die Ableitung mit f'. Die Ableitung ist lokal integrierbar und es gilt für $c \in (a,b)$

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(s)d\lambda(s), \quad x \in (a,b).$$

Falls $f' \in L^1((a,b);\lambda)$, so ist f sogar absolut stetig. Ist umgekehrt g lokal integrierbar, $c \in (a,b)$ und $f_c \in \mathbb{C}$, so ist die Funktion

$$f(x) = f_c + \int_c^x g(s)d\lambda(s), \quad x \in (a,b)$$

lokal absolut stetig und es gilt $f' = g$.

1.1. Sturm-Liouville Differentialausdrücke

DEFINITION 1.1.1. Sei (a,b) ein beschränktes oder unbeschränktes Intervall und p, q, r messbare komplexwertige Funktionen auf (a,b), sodass

$$r(x) \neq 0 \quad \text{und} \quad p(x) \neq 0 \quad \text{für fast alle } x \in (a,b).$$

Dann ist der durch diese Funktionen induzierte Sturm-Liouville Differentialausdruck τ auf (a,b) ein Differentialausdruck der Form

$$\tau f = \frac{1}{r}\Big(-\left(pf'\right)' + qf \Big), \quad f \in D_\tau,$$

wobei

$$D_\tau = \{ f \in \mathcal{M}((a,b);\mathbb{C}) | f \in AC_{loc}(a,b), pf' \in AC_{loc}(a,b)\}$$

der maximale Definitionsbereich von τ ist. Die Funktionen p, q, r nennen wir die Koeffizienten von τ.

Wir setzen im folgenden stets voraus, dass (a,b) ein beschränktes oder unbeschränktes Intervall ist und τ ein Sturm-Liouville Differentialausdruck auf (a,b) mit Koeffizienten p, q und r, die zusätzlich folgende Voraussetzungen erfüllen:

(SL 1) $p(x) \in \mathbb{R}$ für fast alle $x \in (a,b)$.
(SL 2) $q(x) \in \mathbb{R}$ für fast alle $x \in (a,b)$.
(SL 3) $r(x) \in \mathbb{R}$ und $r(x) > 0$ für fast alle $x \in (a,b)$.
(SL 4) $1/p,\ q,\ r \in L^1_{loc}((a,b);\lambda)$.

Die Voraussetzung, dass die Koeffizienten reell sind hat zur Folge, dass es sich bei τ um einen reellen Differentialausdruck handelt, womit wir meinen, dass

$$f \in D_\tau \quad \Rightarrow \quad \overline{f} \in D_\tau \quad \text{und} \quad \tau\overline{f} = \overline{\tau f} \quad \text{für } f \in D_\tau$$

gilt. Für Kapitel 1 sind die Voraussetzungen (SL 1) bis (SL 3) nicht notwendig. Sämtliche Aussagen (und Beweise) dieses Kapitels gelten auch ohne diese Voraussetzungen.

Die Voraussetzung (SL 4) sind die minimalen Anforderungen an die Koeffizienten, in dem Sinne, dass die Koeffizienten eines Sturm-Liouville Differentialausdrucks, für den Korollar 1.2.10 gilt, notwendigerweise die Voraussetzung (SL 4) erfüllen.

Der maximale Definitionsbereich D_τ ist ein linearer Teilraum der messbaren komplexwertigen Funktionen $\mathcal{M}((a,b);\mathbb{C})$ und besteht aus all jenen Funktionen f, für die τf sinnvoll fast überall definiert werden kann. Da dann τf messbar ist, ist τ eine Abbildung nach $\mathcal{M}((a,b);\mathbb{C})$ und als solche offensichtlich linear. Ist $f \in D_\tau$, so ist $\tau f r$ sogar lokal integrierbar.

Im Allgemeinen ist die Ableitung einer Funktion $f \in D_\tau$ nur lokal integrierbar, wohingegen das Produkt pf' lokal absolut stetig ist. Wir werden desshalb meistens pf' als Einheit betrachten und definieren desshalb für $f \in D_\tau$ die erste Quasiableitung $f^{[1]}$ als

$$f^{[1]} = pf'.$$

Wir sagen τ ist regulär bei a, falls ein $c \in (a,b)$ existiert, sodass

$$1/p,\ q,\ r \in L^1((a,c);\lambda).$$

Anderenfalls sagen wir τ sei singulär bei a. Entsprechendes sagen wir für den Randpunkt b. Ist τ regulär bei a und bei b, so sagen wir τ sei regulär. Anderenfalls sagen wir τ ist singulär. Man beachte dabei, dass ein regulärer Randpunkt nicht notwendigerweise endlich sein muss.

Oft ist es nützlich τ auf ein Teilintervall von (a, b) einzuschränken, womit wir folgendes meinen: Ist $\alpha, \beta \in [a, b]$, $\alpha < \beta$ so ist $\tau|_{(\alpha,\beta)}$ der Sturm-Liouville Differentialausdruck auf (α, β) zu den Koeffizienten $p|_{(\alpha,\beta)}$, $q|_{(\alpha,\beta)}$ und $r|_{(\alpha,\beta)}$. Offensichtlich erfüllt $\tau|_{(\alpha,\beta)}$ die Voraussetzungen (SL 1) bis (SL 4). Zusätzlich gilt, falls α, $\beta \in (a, b)$, dass $\tau|_{(\alpha,b)}$ regulär bei α, $\tau|_{(a,\beta)}$ regulär bei β und $\tau|_{(\alpha,\beta)}$ regulär ist.

1.2. Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Definition 1.2.1. Sei $f \in \mathcal{M}((a, b); \mathbb{C})$ und $z \in \mathbb{C}$. Unter einer Lösung der Gleichung $(\tau - z)u = f$ verstehen wir eine Funktion $u \in D_\tau$, die

$$(\tau - z)u = \tau u - zu = f$$

fast überall auf (a, b) erfüllt.

Um Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Lösungen zu erhalten, verwenden wir Existenz- und Eindeutigkeitssätze über Systeme gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung. Sei dazu für $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}((a, b); \mathbb{C}^n)$ der Raum der $\mathbb{C}^n$-wertigen messbaren Funktionen auf (a, b) und $\mathcal{M}((a, b); \mathbb{C}^{n\times n})$ der Raum der $\mathbb{C}^{n\times n}$-wertigen messbaren Funktionen auf (a, b). Wir bezeichnen mit $AC_{loc}((a, b), \mathbb{C}^n)$ den Raum der Funktionen $Y \in \mathcal{M}((a, b); \mathbb{C}^n)$, deren Komponenten lokal absolut stetig sind. Weiters sei im Folgenden in diesem Abschnitt $\|.\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{C}^n$. Die zugehörige Operatornorm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ bezeichnen wir ebenfalls mit $\|.\|$.

Definition 1.2.2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und Funktionen $M \in \mathcal{M}((a, b); \mathbb{C}^{n\times n})$ und $F \in \mathcal{M}((a, b); \mathbb{C}^n)$. Unter einer Lösung der Gleichung $Y' = MY + F$ verstehen wir eine Funktion $Y \in AC_{loc}((a, b), \mathbb{C}^n)$ die

$$Y' = MY + F$$

fast überall auf (a, b) erfüllt.

Für die Existenz von Lösungen genügt die lokale Integrierbarkeit von $\|M(.)\|$ und $\|F(.)\|$.

Satz 1.2.3. *Sei $n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathcal{M}((a, b); \mathbb{C}^{n\times n})$ und $F \in \mathcal{M}((a, b); \mathbb{C}^n)$, sodass $\|M(.)\|$, $\|F(.)\| \in L^1_{loc}((a, b); \lambda)$. Weiters sei $c \in (a, b)$ und $Y_c \in \mathbb{C}^n$. Dann existiert eine eindeutige Lösung von*

$$Y' = MY + F \quad mit \quad Y(c) = Y_c.$$

Sind M, F und Y_c reell, so ist auch die Lösung reell.

Beweis. Sei Y eine Lösung von $Y' = MY + F$ mit $Y(c) = Y_c$, dann sieht man durch Integration, dass Y auch die Integralgleichung

$$(*) \qquad Y(x) = Y_c + \int_c^x M(t)Y(t) + F(t)d\lambda(t), \quad x \in (a, b),$$

erfüllt. Ist umgekehrt eine Funktion Y Lösung von $(*)$, so ist Y als Integral von lokal integrierbaren Funktionen lokal absolut stetig und man sieht durch

Differenzieren von $(*)$ und Einsetzen des Wertes c, dass Y eine Lösung von $Y' = MY + F$ mit $Y(c) = Y_c$ ist.

Eine Funktion Y ist also genau dann eine Lösung von $Y' = MY + F$ mit $Y(c) = Y_C$, wenn sie Lösung der Integralgleichung $(*)$ ist. Es genügt daher die eindeutige Lösbarkeit der Integralgleichung zu zeigen.

Seien $\alpha,\ \beta \in (a,b)$, $\alpha < \beta$ mit $c \in [\alpha,\beta]$ und $B = C\left([\alpha,\beta];\mathbb{C}^n\right)$ der Raum der stetigen $\mathbb{C}^n$-wertigen Funktionen auf $[\alpha,\beta]$. Bezeichne für $Y \in B$ mit

$$\|Y\|_\infty = \sup_{x\in[\alpha,\beta]} \{\|Y(x)\|\}$$

die Supremumsnorm, die B zu einem Banachraum macht. Weiters definieren wir für $Y \in B$

$$\|Y\|_B = \sup_{x\in[\alpha,\beta]} \left\{ e^{-2\left|\int_c^x \|M(t)\| d\lambda(t)\right|} \|Y(x)\| \right\}.$$

Dann ist $\|.\|_B$ eine Norm auf B die wegen

$$e^{-2\int_\alpha^\beta \|M(t)\|dt}\|Y\|_\infty \le \|Y\|_B \le \|Y\|_\infty$$

B zu einem Banachraum macht. Sei $T : B \to B$ definiert durch

$$TY(x) = Y_c + \int_c^x M(s)Y(s) + F(s)d\lambda(s), \quad x \in [\alpha,\beta].$$

Da mit $Y \in B$ auch TY stetig auf $[\alpha,\beta]$ ist, ist T wohldefiniert. Für $Y, Z \in B$ gilt dann für $x \in [\alpha,\beta]$

$$\begin{aligned}
\|TY(x) - TZ(x)\| &= \left\| \int_c^x M(s)(Y(s) - Z(s))d\lambda(s) \right\| \\
&\le \left| \int_c^x \|M(s)\|\, \|Y(s) - Z(s)\|\, d\lambda(s) \right| \\
&\le \|Y - Z\|_B \left| \int_c^x \|M(s)\|\, e^{2\left|\int_c^s \|M(t)\|d\lambda(t)\right|} d\lambda(s) \right|
\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
&e^{-2\left|\int_c^x \|M(t)\|d\lambda(t)\right|}\ \|TY(x) - TZ(x)\| \\
&\qquad \le \|Y - Z\|_B \left| \int_c^x \|M(s)\| e^{-2\left|\int_s^x \|M(t)\|d\lambda(t)\right|} d\lambda(s) \right| \\
&\qquad = \|Y - Z\|_B \frac{1}{2} e^{-2\left|\int_c^x \|M(t)\|d\lambda(t)\right|} \\
&\qquad \le \frac{1}{2}\|Y - Z\|_B.
\end{aligned}$$

Bildet man das Supremum über alle $x \in [\alpha,\beta]$, so hat man

$$\|TY - TZ\|_B \le \frac{1}{2}\|Y - Z\|_B.$$

Also ist T eine Kontraktion und hat daher einen eindeutigen Fixpunkt der die Integralgleichung auf $[\alpha,\beta]$ erfüllt. Die Gleichung $Y' = MY + F$ mit $Y(c) = Y_c$ hat daher auf jedem Teilintervall (α,β) eine eindeutige Lösung und damit auch auf ganz (a,b).

Seien nun M, F, Y_c reell. Dann ist TY reell, falls nur Y reell ist. Startet man mit einem beliebigen reellen $Y \in B$ so ist T^nY eine Folge reeller

Funktionen die bezüglich $\|.\|_B$ und damit gleichmäßig auf $[\alpha, \beta]$ gegen die Lösung konvergiert, also ist die Lösung reell auf $[\alpha, \beta]$ und damit auch auf dem ganzen Intervall. $\square$

Sind $\|M(.)\|$ und $\|F(.)\|$ sogar bis nach a integrierbar, so können Lösungen stets stetig in a fortgesetzt werden.

Satz 1.2.4. *Sei $n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathcal{M}((a,b); \mathbb{C}^{n\times n})$ und $F \in \mathcal{M}((a,b); \mathbb{C}^n)$, sodass $\|M(.)\|$, $\|F(.)\| \in L^1((a,c); \lambda)$ für alle $c \in (a,b)$. Dann existiert für jede Lösung Y von $Y' = MY + F$ der Grenzwert*

$$Y(a) := \lim_{x\to a^+} Y(x)$$

und ist endlich.

Entsprechende Aussagen gelten für den Endpunkt b.

Beweis. Sei Y eine Lösung von $Y' = MY + F$. Wir zeigen zunächst, dass Y in einer Umgebung von a beschränkt ist. Sei $c \in (a,b)$ sodass $\int_a^c \|M(s)\| d\lambda(s) < 1/2$ was nach Voraussetzung möglich ist. Wäre Y nicht beschränkt auf $(a,c]$, so gäbe es eine monoton fallende Folge $x_n \in (a,c)$ mit $x_n \to a$ sodass für alle $x \in [x_n, c]$, $\|Y(x_n)\| \geq \|Y(x)\|$ gilt. Integriert man $Y' = MY + F$ so erhält man

$$Y(x_n) = Y(c) - \int_{x_n}^c M(s)Y(s) + F(s) d\lambda(s)$$

und daher

$$\begin{aligned}
\|Y(x_n)\| &\leq \|Y(c)\| + \int_{x_n}^c \|M(s)\|\|Y(s)\| + \|F(s)\| d\lambda(s) \\
&\leq \|Y(c)\| + \|Y(x_n)\| \int_a^c \|M(s)\| d\lambda(s) + \int_a^c \|F(s)\| d\lambda(s) \\
&\leq \|Y(c)\| + \frac{1}{2}\|Y(x_n)\| + \int_a^c \|F(s)\| d\lambda(s)
\end{aligned}$$

und damit

$$\|Y(x_n)\| \leq 2\|Y(c)\| + 2\int_a^c \|F(s)\| d\lambda(s).$$

Also ist Y in einer Umgebung von a beschränkt. Um die Behauptung zu zeigen, zeigen wir dass $Y(x)$ ein Cauchynetz ist für $x \to a$. Für die Lösung Y gilt für x_1, $x_2 \in (a,b)$

$$Y(x_1) = Y(x_2) - \int_{x_1}^{x_2} M(s)Y(s) + F(s) d\lambda(s)$$

und damit

$$\|Y(x_1) - Y(x_2)\| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} \|M(s)\|\|Y(s)\| + \|F(s)\| d\lambda(s) \right|.$$

Da der rechte Ausdruck beliebig klein wird, wenn man nur x_1 und x_2 nahe genug bei a wählt, ist $Y(x)$ ein Cauchynetz für $x \to a$ und daher konvergent. $\square$

SATZ 1.2.5. *Sei* $n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathcal{M}((a,b);\mathbb{C}^{n\times n})$ *und* $F \in \mathcal{M}((a,b);\mathbb{C}^n)$, *sodass* $\|M(.)\|$, $\|F(.)\| \in L^1((a,c);\lambda)$ *für alle* $c \in (a,b)$. *Dann existiert für jedes* $Y_a \in \mathbb{C}^n$ *eine eindeutige Lösung* Y *der Gleichung*

$$Y' = MY + F \quad \textit{mit} \quad Y(a) = Y_a.$$

Sind M, F *und* Y_a *reell, so ist auch die Lösung reell.*

Entsprechende Aussagen gelten für den Endpunkt b.

BEWEIS. Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis von Satz 1.2.3, wenn man $c = a$ setzt und für $\beta \in (a,b)$, für B den Raum der $\mathbb{C}^n$-wertigen stetigen beschränkten Funktionen auf $(a,\beta]$ nimmt. □

Wir übertragen diese Ergebnisse nun auf Sturm-Liouville Differentialausdrücke.

SATZ 1.2.6. *Sei* $z \in \mathbb{C}$ *und* $f \in \mathcal{M}((a,b);\mathbb{C})$ *sodass* $rf \in L^1_{loc}((a,b);\lambda)$. *Dann existiert für jedes* $c \in (a,b)$, d_1, $d_2 \in \mathbb{C}$ *eine eindeutige Lösung* u *von*

$$(\tau - z)u = f \quad \textit{mit} \quad u(c) = d_1 \quad \textit{und} \quad u^{[1]}(c) = d_2.$$

Sind p, q, r, f, d_1, d_2 *und* z *reell, so ist auch die Lösung reell.*

BEWEIS. Setzt man

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/p \\ q - zr & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ rf \end{pmatrix},$$

so gilt $\|M(.)\|$, $\|F(.)\| \in L^1_{loc}((a,b);\lambda)$. Es existiert also eine Lösung

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{von} \quad Y' = MY + F \quad \text{mit} \quad Y(c) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

y_1 ist eine Lösung von $(\tau - z)u = f$ mit $y_1(c) = d_1$ und $y_1^{[1]}(c) = d_2$, also existiert eine Lösung. Umgekehrt ist für jede Lösung u von $(\tau - z)u = f$ mit $u(c) = d_1$ und $u^{[1]}(c) = d_2$, die Funktion

$$Y = \begin{pmatrix} u \\ u^{[1]} \end{pmatrix} \quad \text{eine Lösung von} \quad Y' = MY + F \quad \text{mit} \quad Y(c) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

woraus die Eindeutigkeit folgt. Sind p, q, r, f, d_1, d_2 und z reell, so ist wegen Satz 1.2.3 auch die Lösung reell. □

Die Voraussetzung in Satz 1.2.6, dass rf lokal integrierbar ist, ist wesentlich, da für $u \in D_\tau$, $r(\tau - z)u$ lokal integrierbar ist.

DEFINITION 1.2.7. Für $f, g \in D_\tau$ definieren wir die (modifizierte) Wronskideterminante

$$W(f,g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f^{[1]}(x) & g^{[1]}(x) \end{vmatrix} = f(x)g^{[1]}(x) - f^{[1]}(x)g(x), \quad x \in (a,b).$$

Wir sammeln ein paar einfache Eigenschaften der Wronskideterminante.

PROPOSITION 1.2.8. *Es gilt für* $f, g \in D_\tau$:

(1) $W(f,g) \in AC_{loc}(a,b)$ *und* $W(f,g)' = (\tau f g - f \tau g) r$
(2) W *ist linear in beiden Argumenten.*
(3) W *ist antisymmetrisch, also* $W(f,g) = -W(g,f)$.

(4) *Sind u_1 und u_2 Lösungen von $(\tau - z)u = 0$, so ist $W(u_1, u_2)$ konstant und*

$$W(u_1, u_2) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_1, u_2 \text{ linear unabhängig.}$$

Beweis. Da Produkte und Summen von absolut stetigen Funktionen auf Kompakta wieder absolut stetig sind ist $W(f, g) \in AC_{loc}(a, b)$ weiters ist

$$\begin{aligned} W(f, g)' &= (f(pg') - (pf')g)' = f'pg' + f(pg')' - (pf')'g - pf'g' \\ &= g(-(pf')' + qf) - f(-(pg')' + qg) = (\tau fg - f\tau g)r \end{aligned}$$

was (1) zeigt. (2) und (3) sind offensichtlich. Um (4) einzusehen seien u_1, u_2 Lösungen von $(\tau - z)u = 0$. Dann ist wegen (1) $W(u_1, u_2)' = 0$ und daher $W(u_1, u_2)$ konstant. Seien nun u_1, u_2 linear abhängig. Ist $u_2 = 0$ so gilt offensichtlich $W(u_1, u_2) = 0$. Ist $u_2 \neq 0$, so ist für ein $C \in \mathbb{C}$, $u_1 = Cu_2$ und daher

$$W(u_1, u_2) = u_1 u_2^{[1]} - u_1^{[1]} u_2 = Cu_2 u_2^{[1]} - Cu_2^{[1]} u_2(x) = 0.$$

Sei umgekehrt $W(u_1, u_2) = 0$ und $c \in (a, b)$. Ist $u_2(c) = u_2^{[1]}(c) = 0$, so ist wegen der Eindeutigkeit von Lösungen $u_2 = 0$, also sind u_1, u_2 linear abhängig. Ist $(u_2(c), u_2^{[1]}(c)) \neq 0$, so existiert wegen

$$0 = W(u_1, u_2)(c) = \begin{vmatrix} u_1(c) & u_2(c) \\ u_1^{[1]}(c) & u_2^{[1]}(c) \end{vmatrix}$$

ein $C \in \mathbb{C}$ sodass $u_1(c) = Cu_2(c)$ und $u_1^{[1]}(c) = Cu_2^{[1]}(c)$. Da mit u_2 auch Cu_2 eine Lösung von $(\tau - z)u = 0$ ist folgt aus der Eindeutigkeit von Lösungen $u_1 = Cu_2$ also u_1, u_2 linear abhängig. □

Definition 1.2.9. Ist $z \in \mathbb{C}$ so nennen wir zwei linear unabhängige Lösungen u_1, u_2 der Gleichung $(\tau - z)u = 0$ ein Fundamentalsystem der Gleichung $(\tau - z)u = 0$.

Folgendes Korollar zeigt, dass Fundamentalsysteme stets existieren.

Korollar 1.2.10. *Für jedes $z \in \mathbb{C}$, $c \in (a, b)$ existiert ein Fundamentalsystem u_1, u_2 von $(\tau - z)u = 0$ mit*

$$u_1(c) = u_2^{[1]}(c) = 1 \quad \text{und} \quad u_1^{[1]}(c) = u_2(c) = 0,$$

und damit auch mit $W(u_1, u_2) = 1$. Ist $z \in \mathbb{R}$, so ist dieses Fundamentalsystem reell.

Beweis. Seien u_1 und u_2 Lösungen von $(\tau - z)u = 0$ mit

$$u_1(c) = u_2^{[1]}(c) = 1 \quad \text{und} \quad u_1^{[1]}(c) = u_2(c) = 0.$$

Wegen $W(u_1, u_2) = W(u_1, u_2)(c) = 1$ sind nach Proposition 1.2.8, u_1, u_2 linear unabhängig und daher ein Fundamentalsystem von $(\tau - z)u = 0$. Ist $z \in \mathbb{R}$ so sind auch die Lösungen reell. □

Mit Hilfe von Fundamentalsystemen kann man nun beliebige Lösungen von $(\tau - z)u = f$ darstellen.

PROPOSITION 1.2.11. *Sei $z \in \mathbb{C}$ und u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von $(\tau - z)u = 0$. Weiters sei $c \in (a,b)$, $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{M}((a,b);\mathbb{C})$ sodass $rf \in L^1_{loc}((a,b);\lambda)$. Dann existieren c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$, sodass die Lösung u von*

$$(\tau - z)u = f \quad \textit{mit} \quad u(c) = d_1 \quad \textit{und} \quad u^{[1]}(c) = d_2$$

gegeben ist, durch:

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \frac{u_1(x)}{W(u_1,u_2)} \int_c^x u_2 f r d\lambda - \frac{u_2(x)}{W(u_1,u_2)} \int_c^x u_1 f r d\lambda$$

$$u^{[1]}(x) = c_1 u_1^{[1]}(x) + c_2 u_2^{[1]}(x) + \frac{u_1^{[1]}(x)}{W(u_1,u_2)} \int_c^x u_2 f r d\lambda - \frac{u_2^{[1]}(x)}{W(u_1,u_2)} \int_c^x u_1 f r d\lambda$$

Ist u_1, u_2 ein Fundamentalsystem mit

$$u_1(c) = u_2^{[1]}(c) = 1 \quad \textit{und} \quad u_2(c) = u_1^{[1]}(c) = 0,$$

so ist $c_1 = d_1$ und $c_2 = d_2$.

BEWEIS. Seien c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$ und für $x \in (a,b)$ sei

$$\tilde{u}(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \frac{u_1(x)}{W(u_1,u_2)} \int_c^x u_2 f r d\lambda - \frac{u_2(x)}{W(u_1,u_2)} \int_c^x u_1 f r d\lambda.$$

Dann rechnet man unmittelbar nach, dass

$$\tilde{u}^{[1]}(x) = c_1 u_1^{[1]}(x) + c_2 u_2^{[1]}(x) + \frac{u_1^{[1]}(x)}{W(u_1,u_2)} \int_c^x u_2 f r d\lambda - \frac{u_2^{[1]}(x)}{W(u_1,u_2)} \int_c^x u_1 f r d\lambda$$

gilt und weiters dass $(\tau - z)\tilde{u} = f$ ist. Weiters ist

$$\tilde{u}(c) = c_1 u_1(c) + c_2 u_2(c) \quad \text{und} \quad \tilde{u}^{[1]}(c) = c_1 u_1^{[1]}(c) + c_2 u_2^{[1]}(c).$$

Da

$$\begin{pmatrix} u_1(c) \\ u_1^{[1]}(c) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} u_2(c) \\ u_2^{[1]}(c) \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, existieren c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$ sodass

$$\tilde{u}(c) = c_1 u_1(c) + c_2 u_2(c) = d_1 \quad \text{und} \quad \tilde{u}^{[1]}(c) = c_1 u_1^{[1]}(c) + c_2 u_2^{[1]}(c) = d_2.$$

Wegen der Eindeutigkeit von Lösungen gilt dann $u = \tilde{u}$.

Ist nun u_1, u_2 ein Fundamentalsystem mit

$$u_1(c) = u_2^{[1]}(c) = 1 \quad \text{und} \quad u_2(c) = u_1^{[1]}(c) = 0,$$

so ist

$$\begin{aligned} d_1 &= u(c) = c_1 u_1(c) + c_2 u_2(c) = c_1 \\ \text{und} \quad d_2 &= u^{[1]}(c) = c_1 u_1^{[1]}(c) + c_2 u_2^{[1]}(c) = c_2. \end{aligned}$$

□

KOROLLAR 1.2.12. *Für $z \in \mathbb{C}$ ist die Menge aller Lösungen der Gleichung $(\tau - z)u = 0$ ein zweidimensionaler linearer Teilraum von D_τ, d.h.:*

$$\dim \ker (\tau - z) = 2.$$

BEWEIS. Wegen Korollar 1.2.10 ist die Dimension mindestens 2 und wegen Proposition 1.2.11 ist sie genau 2. □

Die Aussagen von Satz 1.2.4 und Satz 1.2.5 übertragen sich durch Anwenden auf das äquivalente System, sofort auf Sturm-Liouville Differentialausdrücke.

Satz 1.2.13. *Sei τ regulär bei a, $z \in \mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{M}((a,b);\mathbb{C})$ sodass $rf \in L^1((a,c);\lambda)$ für alle $c \in (a,b)$. Dann existieren für Lösungen u der Gleichung $(\tau - z)u = f$ die Grenzwerte*

$$u(a) := \lim_{x\to a^+} u(x) \quad \text{und} \quad u^{[1]}(a) := \lim_{x\to a^+} u^{[1]}(x)$$

und sind endlich.

Seien $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$, dann existiert eine eindeutige Lösung u der Gleichung $(\tau - z)u = f$ mit $u(a) = d_1$ und $u^{[1]}(a) = d_2$. Sind p, q, r, f, d_1, d_2 und z reell, so ist auch die Lösung reell.

Entsprechende Aussagen gelten für den Randpunkt b.

Man sieht leicht, dass unter den Voraussetzungen von Satz 1.2.13, Korollar 1.2.10 und Proposition 1.2.11 auch für den Fall $c = a$ gültig sind.

KAPITEL 2

Sturm-Liouville Differentialoperatoren

Wir wollen τ als Operator in einem Hilbertraum realisieren. Der gewichtete Hilbertraum $L^2((a,b);r\lambda)$ stellt sich dabei als am natürlichsten heraus. Dabei ist $r\lambda$ das Borelmaß, definiert durch

$$r\lambda(B) = \int_B r d\lambda,$$

für eine Borelmenge B. Da r fast überall ungleich 0 ist, sind die Lebesguenullmengen genau die $r\lambda$-Nullmengen. Wir brauchen also nicht zwischen λ-fast überall und $r\lambda$-fast überall zu unterscheiden. Wir schreiben für das Skalarprodukt und die Norm in $L^2((a,b);r\lambda)$

$$(f,g) = \int_a^b f\overline{g} dr\lambda = \int_a^b f\overline{g} r d\lambda, \quad \text{für } f,g \in L^2((a,b);r\lambda)$$

$$\text{und} \quad \|f\| = \sqrt{(f,f)}, \quad \text{für } f \in L^2((a,b);r\lambda)$$

Die Konjugation $f \mapsto \overline{f}$ auf $L^2((a,b);r\lambda)$ bezeichnen wir als die natürliche Konjugation.

Ist T ein Operator in $L^2((a,b);r\lambda)$ so bezeichnen wir mit $\mathcal{D}(T)$ den Definitionsbereich von T.

2.1. Sturm-Liouville Differentialoperatoren

Definition 2.1.1. Der durch den Differentialausdruck τ induzierte maximale Operator $T_{\max}$ in $L^2((a,b);r\lambda)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{D}(T_{\max}) = \left\{ f \in L^2((a,b);r\lambda) | f \in D_\tau,\ \tau f \in L^2((a,b);r\lambda) \right\}$$

und $T_{\max} f = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$.

Definition 2.1.2. Der durch den Differentialausdruck τ induzierte präminimale Operator T_0 in $L^2((a,b);r\lambda)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{D}(T_0) = \{ f \in \mathcal{D}(T_{\max}) | \operatorname{supp} f \text{ kompakt in } (a,b) \}$$

und $T_0 f = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(T_0)$.

Da mit $f \in D_\tau$ auch $\overline{f}$ in D_τ liegt und $\tau\overline{f} = \overline{\tau f}$ erfüllt, sieht man, dass $T_{\max}$ reell bezüglich der natürlichen Konjugation ist. Da mit f auch $\overline{f}$ kompakten Träger hat ist auch T_0 reell bezüglich der natürlichen Konjugation.

Definition 2.1.3. Für eine Funktion $f \in \mathcal{M}((a,b);\mathbb{C})$ sagen wir, f liegt in $L^2((a,b);r\lambda)$ bei a, falls $f \in L^2((a,c);r\lambda)$ für alle $c \in (a,b)$. Für eine Funktion $f \in D_\tau$ sagen wir, f liegt in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a, falls f und τf in $L^2((a,b);r\lambda)$ bei a liegen.

Entsprechendes definieren wir für den Randpunkt b.

Offenbar liegt eine Funktion genau dann in $L^2((a,b);r\lambda)$, wenn sie in $L^2((a,b);r\lambda)$ bei a und bei b liegt. Liegt eine Funktion f in $L^2((a,b);r\lambda)$ bei einem Randpunkt, so liegt auch $\overline{f}$ in $L^2((a,b);r\lambda)$ bei diesem Randpunkt. Ist eine Funktion $f \in \mathcal{M}((a,b);\mathbb{C})$ sogar stetig, so liegt f genau dann in $L^2((a,b);r\lambda)$ bei a, wenn ein $c \in (a,b)$ existiert, sodass $f \in L^2((a,c);r\lambda)$. Weiters sieht man unmittelbar, dass eine Funktion genau dann in $\mathcal{D}(T_{\max})$ liegt, wenn sie $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a und bei b liegt. Liegt eine Funktion f in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei einem Randpunkt, so liegt auch $\overline{f}$ in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei diesem Randpunkt. Folgende Proposition zeigt, dass sich Funktionen, die in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei einem regulären Randpunkt liegen, stets stetig in diesen Randpunkt fortsetzen lassen.

PROPOSITION 2.1.4. *Sei τ regulär bei a und liege f in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a. Dann existieren die Grenzwerte*

$$f(a) := \lim_{x\to a^+} f(x) \quad \textit{und} \quad f^{[1]}(a) := \lim_{x\to a^+} f^{[1]}(x)$$

und sind endlich. Weiters ist f, $f^{[1]} \in AC(a,c)$ für alle $c \in (a,b)$. Entsprechendes gilt für den Endpunkt b.

Ist τ sogar regulär und $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$, so ist $f, f^{[1]} \in AC(a,b)$.

BEWEIS. Sei τ regulär bei a, f in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a und $g = \tau f$. Dann liegt g in $L^2((a,b);r\lambda)$ bei a und daher $g \in L^2((a,c);r\lambda)$ für alle $c \in (a,b)$. Da $r\lambda$ auf (a,c) ein endliches Maß ist, ist weiters $g \in L^1((a,c);r\lambda)$ und daher $rg \in L^1((a,c);\lambda)$. Da f Lösung der Gleichung $\tau f = g$ ist, folgt die stetige Fortsetzbarkeit aus Satz 1.2.13.

Wegen $\tau f = g \in L^1((a,c);r\lambda)$ gilt $-(pf')' + qf \in L^1((a,c);\lambda)$. Da $q \in L^1((a,c);\lambda)$ und f auf (a,c) beschränkt ist, ist $(pf')' \in L^1((a,c);\lambda)$ und daher $f^{[1]} \in AC(a,c)$. Wegen $\frac{1}{p} \in L^1((a,c);\lambda)$ und da pf' auf (a,c) beschränkt ist, ist $f' = \frac{1}{p}pf' \in L^1((a,c);\lambda)$ und damit $f \in AC(a,c)$. Analog beweist man die Behauptungen für den Endpunkt b. Ist τ regulär, so folgt die Behauptung unmittelbar aus dem bereits gezeigten. □

LEMMA 2.1.5. *Es gilt:*

(1) *Für f, $g \in D_\tau$ und α, $\beta \in (a,b)$, $\alpha < \beta$ gilt die Lagrange-Identität:*

$$\int_\alpha^\beta (\tau f\overline{g} - f\overline{\tau g}) r d\lambda = W(f,\overline{g})(\beta) - W(f,\overline{g})(\alpha)$$

(2) *Liegen f und g in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a, so existiert der Grenzwert*

$$W(f,\overline{g})(a) := \lim_{\alpha\to a^+} W(f,\overline{g})(\alpha)$$

und ist endlich. Entsprechendes gilt für den Randpunkt b.

(3) *Sind f, $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$ so gilt*

$$(T_{\max}f, g) - (f, T_{\max}g) = W(f,\overline{g})(b) - W(f,\overline{g})(a) =: W_a^b(f,\overline{g})$$

BEWEIS. Wegen Proposition 1.2.8 (1) ist

$$W(f,\overline{g})(\beta) - W(f,\overline{g})(\alpha) = \int_\alpha^\beta W(f,\overline{g})' d\lambda = \int_\alpha^\beta (\tau f\overline{g} - f\overline{\tau g}) r d\lambda,$$

was (1) zeigt.

Liegen nun f und g in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a, so existiert in der Gleichung aus (1) der Grenzwert für $\alpha \to a$. Also existiert auch der Grenzwert aus der Behauptung. Genauso sieht man die Behauptung für den Randpunkt b ein.

Sind nun f, $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$, so existieren die Grenzwerte aus (2). Lässt man in der Gleichung aus (1) α gegen a und β gegen b streben, so erhält man die Gleichung aus (3). □

Falls τ bei a regulär ist und f und g in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a liegen, so gilt für den Grenzwert

$$W(f,\overline{g})(a) = f(a)\overline{g^{[1]}(a)} - f^{[1]}(a)\overline{g(a)},$$

da f und g stetig nach a fortgesetzt werden können.

Wir werden im folgenden oft Funktionen aus $\mathcal{D}(T_{\max})$ mit speziellen Eigenschaften benötigen. Folgende Proposition stellt dann die Existenz solcher Funktionen sicher.

PROPOSITION 2.1.6. *Es gilt:*

(1) *Ist τ regulär und $d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{C}$, so existiert ein $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit $f(a) = d_1$, $f^{[1]}(a) = d_2$, $f(b) = d_3$ und $f^{[1]}(b) = d_4$.*
(2) *Sei τ regulär bei a und $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ dann existiert ein $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit $f(a) = d_1$ und $f^{[1]}(a) = d_2$. Entsprechende Aussage gilt für den Randpunkt b.*
(3) *Sei f_a in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a und f_b in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei b. Dann existiert ein $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit $f = f_a$ in einer Umgebung von a und $f = f_b$ in einer Umgebung von b.*

BEWEIS. Sei τ regulär und u_1, u_2 das Fundamentalsystem von $\tau u = 0$ mit $u_1(a) = u_2^{[1]}(a) = 0$ und $u_2(a) = u_1^{[1]}(a) = 1$. Da u_1 und u_2 nach Satz 1.2.13 auf (a,b) beschränkt sind und r integrierbar ist, liegen u_1 und u_2 in $L^2((a,b); r\lambda)$ und damit in $\mathcal{D}(T_{\max})$. Sei $(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$ die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} (u_1,u_1) & (u_2,u_1) \\ (u_1,u_2) & (u_2,u_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

So eine Lösung existiert, da die Determinante der Matrix wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung genau dann ungleich Null ist, wenn u_1, u_2 linear unabhängig sind, was der Fall ist. Sei $f = c_1 u_1 + c_2 u_2$ und v die Lösung von $\tau v = f$ mit $v(b) = v^{[1]}(b) = 0$. Dann ist v beschränkt (nach Satz 1.2.13), liegt also in $\mathcal{D}(T_{\max})$ und es gilt

$$\begin{aligned} v(a) &= W(v,\overline{u_1})(a) = W(v,\overline{u_1})(a) - W(v,\overline{u_1})(b) \\ &= (v, T_{\max}u_1) - (T_{\max}v, u_1) = -(f, u_1) \\ &= -c_1(u_1,u_1) - c_2(u_2,u_1) = d_1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v^{[1]}(a) &= -W(v,\overline{u_2})(a) = W(v,\overline{u_2})(b) - W(v,\overline{u_2})(a) \\ &= (T_{\max}v, u_2) - (v, T_{\max}u_2) = (f, u_2) \\ &= c_1(u_1,u_2) + c_2(u_2,u_2) = d_2. \end{aligned}$$

Analog konstruiert man eine Funktion $w \in \mathcal{D}(T_{\max})$ die bei a verschwindet und die geforderten Werte bei b annimmt. Die Funktion $v + w$ leistet dann das Gewünschte, womit (1) gezeigt ist.

Sei nun τ regulär bei a, dann ist für $c \in (a,b)$, $\tau|_{(a,c)}$ regulär. Wegen (1) existiert dann eine Funktion g auf (a,c), sodass

$$g, g^{[1]} \in AC(a,c), \quad g, \tau|_{(a,c)} g \in L^2((a,c); r\lambda),$$

$$g(a) = d_0, \quad g^{[1]}(a) = d_1, \quad g(c) = 0 \quad \text{und} \quad g^{[1]}(c) = 0$$

gilt. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{falls } x \leq c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist f, $f^{[1]} \in AC_{loc}(a,b)$ und f, $\tau f \in L^2((a,b); r\lambda)$ also $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$.

Um (3) einzusehen sei f_a in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a und f_b in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei b. Weiters sei α, $\beta \in (a,b)$, $\alpha < \beta$, sodass f_a, $\tau f_a \in L^2((a,\alpha); r\lambda)$ und f_b, $\tau f_b \in L^2((\beta,b); r\lambda)$. Wegen (1) existiert eine Funktion g auf (α,β), sodass

$$g, g^{[1]} \in AC(\alpha,\beta), \quad g, \tau|_{(\alpha,\beta)} g \in L^2((\alpha,\beta); r\lambda),$$

$$g(\alpha) = f_a(\alpha), \quad g^{[1]}(\alpha) = f_a^{[1]}(\alpha), \quad g(\beta) = f_b(\beta) \quad \text{und} \quad g^{[1]}(\beta) = f_b^{[1]}(\beta)$$

gilt. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} f_a(x) & \text{falls } x \leq \alpha \\ g(x) & \text{falls } \alpha < x < \beta \\ f_b(x) & \text{falls } \beta \leq x \end{cases}.$$

Dann ist f, $f^{[1]} \in AC_{loc}(a,b)$ und f, $\tau f \in L^2((a,b); r\lambda)$ also $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$. □

Wir wollen als nächstes zeigen, dass der präminimale und damit der maximale Operator dicht definiert sind.

SATZ 2.1.7. *Der präminimale Operator T_0 ist dicht definiert.*

BEWEIS. Für $\alpha, \beta \in (a,b)$, $\alpha < \beta$ betrachten wir den Teilraum

$$D_{\alpha,\beta} = \{f|_{(\alpha,\beta)} | f \in \mathcal{D}(T_0),\ \operatorname{supp} f \subseteq [\alpha,\beta]\} \subseteq L^2((\alpha,\beta); r\lambda)$$

von $L^2((\alpha,\beta); r\lambda)$. Wir werden zeigen, dass $D_{\alpha,\beta}$ dicht in $L^2((\alpha,\beta); r\lambda)$ ist. Sei dazu ein $h \in D_{\alpha,\beta}^{\perp} \subseteq L^2((\alpha,\beta); r\lambda)$ gegeben und f eine Lösung von $\tau|_{(\alpha,\beta)} f = h$. Da $r\lambda$ auf (α,β) endlich ist, ist $rh \in L^1((\alpha,\beta); \lambda)$. Da $\tau|_{(\alpha,\beta)}$ regulär ist, ist f stetig auf $[\alpha,\beta]$ fortsetzbar und daher $f \in L^2((\alpha,\beta); r\lambda)$. Sei weiters u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von $\tau|_{(\alpha,\beta)} u = 0$ mit

$$u_1(\alpha) = u_2^{[1]}(\alpha) = 1 \quad \text{und} \quad u_1^{[1]}(\alpha) = u_2(\alpha) = 0.$$

Da $\tau|_{(\alpha,\beta)}$ regulär ist, sind $u_1, u_2 \in L^2((\alpha,\beta); r\lambda)$. Wir zerlegen f in

$$f = f_1 + f_2 \quad \text{mit } f_1 \in \operatorname{span}\{u_1, u_2\} \quad \text{und} \quad f_2 \in \operatorname{span}\{u_1, u_2\}^{\perp}.$$

Ist g eine Lösung von $\tau|_{(\alpha,\beta)}g = f_2$ mit $g(\alpha) = 0$ und $g^{[1]}(\alpha) = 0$, so ist nach Proposition 1.2.11

$$g(x) = u_1(x)\int_\alpha^x u_2 f_2 r d\lambda - u_2(x)\int_\alpha^x u_1 f_2 r d\lambda.$$

Da f_2 orthogonal zu u_1 und u_2 ist, gilt $g(\beta) = 0$ und $g^{[1]}(\beta) = 0$. Setzt man g außerhalb von (α, β) mit Null fort, so liegt diese Fortsetzung in $\mathcal{D}(T_0)$ und daher g in $D_{\alpha,\beta}$. Dann ist

$$(f_2, f_2) = (f, f_2) = (f, \tau|_{(\alpha,\beta)}g) = (\tau|_{(\alpha,\beta)}f, g) = (h, g) = 0$$

und daher $f_2 = 0$. Also ist $h = \tau|_{(\alpha,\beta)}f = \tau|_{(\alpha,\beta)}f_1 = 0$ und daher $D_{\alpha,\beta}$ dicht in $L^2((\alpha, \beta); r\lambda)$.

Indem wir Funktionen aus $L^2((\alpha, \beta); r\lambda)$ mit 0 auf (a, b) fortsetzen, können wir $L^2((\alpha, \beta); r\lambda)$ isometrisch isomorph in $L^2((a, b); r\lambda)$ einbetten und damit als abgeschlossenen Teilraum von $L^2((a, b); r\lambda)$ auffassen. Da Funktionen mit kompakten Träger dicht in $L^2((a, b); r\lambda)$ sind, gilt dann

$$\overline{\mathcal{D}(T_0)} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_{\alpha_n,\beta_n}} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{D_{\alpha_n,\beta_n}}} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^2((\alpha_n, \beta_n); r\lambda)} = L^2((a, b); r\lambda),$$

falls $\alpha_n, \beta_n \in (a, b)$, $\alpha_n < \beta_n$ mit $\alpha_n \to a$ und $\beta_n \to b$ für $n \to \infty$. □

Als nächstes wollen wir die Adjungierte des präminimalen Operators bestimmen. Dazu benötigen wir die folgenden zwei Lemmata.

Lemma 2.1.8. *Sei $z \in \mathbb{C}$, dann ist*

$$\operatorname{ran}(T_0 - z) = \left\{ f \in L^2_{00}((a, b); r\lambda) \;\middle|\; \forall u \in \ker(\tau - \overline{z}) : \int_a^b f\overline{u} r d\lambda = 0 \right\},$$

wobei $L^2_{00}((a, b); r\lambda)$ der Raum aller Funktionen aus $L^2((a, b); r\lambda)$ mit kompaktem Träger ist.

Beweis. Ist $f \in \operatorname{ran}(T_0 - z)$, so existiert ein $g \in \mathcal{D}(T_0)$ mit $(\tau - z)g = f$. Da g außerhalb eines kompakten Intervalls $[\alpha, \beta] \subseteq (a, b)$ verschwindet, verschwindet auch f außerhalb von $[\alpha, \beta]$ fast überall. Also ist $f \in L^2_{00}((a, b); r\lambda)$. Sei $u \in \ker(\tau - \overline{z})$ dann gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f\overline{u} r d\lambda &= \int_\alpha^\beta f\overline{u} r d\lambda = \int_\alpha^\beta \tau g\overline{u} r d\lambda - \int_\alpha^\beta z g\overline{u} r d\lambda \\ &= \int_\alpha^\beta g\overline{\tau u} r d\lambda + \underbrace{W(u, g)(\beta) - W(u, g)(\alpha)}_{=0} - \int_\alpha^\beta \overline{u} z g r d\lambda \\ &= \int_\alpha^\beta \overline{(\tau - \overline{z})u} g r d\lambda = 0.\end{aligned}$$

Sei umgekehrt $f \in L^2_{00}((a, b); r\lambda)$, sodass für alle $u \in \ker(\tau - \overline{z})$,

$$\int_a^b \overline{u} f r d\lambda = 0$$

erfüllt ist. Weiters seien $\alpha, \beta \in (a, b)$, sodass $\operatorname{supp} f \subseteq [\alpha, \beta]$ und g die Lösung von $(\tau - z)g = f$ mit $g(\alpha) = 0$ und $g^{[1]}(\alpha) = 0$. Dann gilt wegen

Proposition 1.2.11

$$g(x) = u_1(x) \int_\alpha^x u_2 f r d\lambda - u_2(x) \int_\alpha^x u_1 f r d\lambda,$$

wobei u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von $(\tau - z)u = 0$ mit

$$u_1(\alpha) = u_2^{[1]}(\alpha) = 1 \quad \text{und} \quad u_1^{[1]}(\alpha) = u_2(\alpha) = 0$$

ist. Aus dieser Darstellung sieht man, dass g auf $(a, \alpha]$ verschwindet. Ist $x \in (\beta, b)$ so gilt

$$g(x) = u_1(x) \int_\alpha^\beta u_2 f r d\lambda - u_2(x) \int_\alpha^\beta u_1 f r d\lambda = 0.$$

Also verschwindet g außerhalb von $[\alpha, \beta]$, liegt also in $\mathcal{D}(T_0)$ und daher gilt $f \in \operatorname{ran}(T_0 - z)$. □

Lemma 2.1.9. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $F_1, \ldots, F_n, F \in V^*$, dann ist*

$$F \in \operatorname{span}\{F_1, \ldots, F_n\} \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^n \ker F_i \subseteq \ker F.$$

Beweis. Angenommen $\bigcap_{i=1}^n \ker F_i \subseteq \ker F$. Sei Φ definiert durch

$$\Phi : \begin{cases} V & \rightarrow \quad \mathbb{C}^n \\ v & \mapsto \quad (F_1(v), \ldots, F_n(v)) \end{cases}.$$

Wir definieren ein lineares Funktional g auf $\Phi(V)$ durch $g(\Phi(v)) = F(v)$. Da wegen der Annahme aus $\Phi(v_1) = \Phi(v_2)$ folgt, dass $F(v_1) = F(v_2)$ gilt, ist dieses Funktional wohldefiniert. Sei $G : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine lineare Fortsetzung von g. Dann existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, sodass

$$G(v_1, \ldots, v_n) = (v_1, \ldots, v_n) \cdot (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Für ein beliebiges $v \in V$ gilt dann

$$F(v) = G(\Phi(v)) = G(F_1(v), \ldots, F_n(v)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(v).$$

Also ist $F \in \operatorname{span}\{F_1, \ldots, F_n\}$. Die Umkehrung ist offensichtlich. □

Wir können nun die Adjungierte des präminimalen Operators bestimmen.

Satz 2.1.10. *Die Adjungierte des präminimalen Operators T_0 ist der maximale Operator $T_{\max}$.*

Beweis. Sei $f \in \mathcal{D}(T_0)$ und $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$ dann gilt wegen Lemma 2.1.5 und weil f und damit $W(f, \overline{g})$ nahe bei a und nahe bei b verschwindet

$$\begin{aligned}(T_0 f, g) - (f, T_{\max} g) &= W(f, \overline{g})(b) - W(f, \overline{g})(a) \\ &= \lim_{\beta \to b^-} W(f, \overline{g})(\beta) - \lim_{\alpha \to a^+} W(f, \overline{g})(\alpha) = 0.\end{aligned}$$

Es gilt also $T_{\max} \subseteq T_0^*$. Zu zeigen bleibt, dass $\mathcal{D}(T_0^*) \subseteq \mathcal{D}(T_{\max})$. Sei dazu ein $f \in \mathcal{D}(T_0^*)$ gegeben und g eine Lösung von $\tau g = T_0^* f$. Wir definieren ein lineares Funktional F auf $L^2_{00}((a,b);r\lambda)$ durch

$$F(k) = \int_a^b \overline{(f-g)} k r d\lambda \quad \text{für } k \in L^2_{00}((a,b);r\lambda).$$

Sei weiters u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von $\tau u = 0$ und F_1, F_2 lineare Funktionale auf $L^2_{00}((a,b);r\lambda)$ definiert durch

$$F_j(k) = \int_a^b \overline{u_j} k r d\lambda \quad \text{für } k \in L^2_{00}((a,b);r\lambda),\ j \in \{1,2\}.$$

Sei $h \in \ker F_1 \cap \ker F_2$, dann ist nach Lemma 2.1.8 auch $h \in \operatorname{ran} T_0$. Also existiert ein $k \in \mathcal{D}(T_0)$ mit $T_0 k = h$ und daher

$$\begin{aligned} F(h) &= \int_a^b \overline{(f-g)} T_0 k r d\lambda = (T_0 k, f) - \int_a^b k \overline{\tau g} r d\lambda \\ &= (k, T_0^* f) - \int_a^b k \overline{T_0^* f} r d\lambda = 0. \end{aligned}$$

Also ist $h \in \ker F$ und daher $\ker F_1 \cap \ker F_2 \subseteq \ker F$. Nach Lemma 2.1.9 ist also $F = c_1 F_1 + c_2 F_2$ mit geeigneten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ und damit

$$\int_a^b \overline{(f - g - c_1 u_1 - c_2 u_2)} k r d\lambda = 0 \quad \text{für alle } k \in L^2_{00}((a,b);r\lambda).$$

Dann gilt notwendigerweise $f = g + c_1 u_1 + c_2 u_2$ fast überall. Es ist also $f \in D_\tau$ und $\tau f = \tau g \in L^2((a,b);r\lambda)$, also $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$. □

Da $T_{\max}$ eine Erweiterung von T_0 ist, ist T_0 symmetrisch und damit abschließbar.

Definition 2.1.11. Der, durch den Differentialausdruck τ induzierte minimale Operator $T_{\min}$ in $L^2((a,b);r\lambda)$ ist der Abschluss des präminimalen Operators,

$$T_{\min} = \overline{T_0}.$$

Wir stellen nun einige Eigenschaften der Operatoren $T_{\min}$ und $T_{\max}$ in folgendem Korollar zusammen.

Korollar 2.1.12. *Es gilt:*

(1) *Der minimale Operator* $T_{\min}$ *ist dicht definiert, abgeschlossen und symmetrisch.*
(2) *Der maximale Operator* $T_{\max}$ *ist dicht definiert und abgeschlossen.*
(3) *Es gilt* $T_0 \subseteq T_{\min} \subseteq T_{\max} \quad T_{\max} = T_{\min}^*$ *und* $T_{\min} = T_{\max}^*$.
(4) *Für* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\operatorname{ran}(T_{\min} - z)^\perp = \ker(T_{\max} - \overline{z})$.

Beweis. Da $T_{\min}$ als Abschluss eines symmetrischen Operators dicht definiert, abgeschlossen und symmetrisch ist gilt (1). $T_{\max}$ ist dicht definiert, da er eine Erweiterung von T_0 ist und als Adjungierte des präminimalen Operators abgeschlossen. Offenbar gilt $T_0 \subseteq \overline{T_0} = T_{\min}$ und $T_0 \subseteq T_{\max}$ und da $T_{\max}$ abgeschlossen ist gilt auch $T_{\min} = \overline{T_0} \subseteq T_{\max}$. Weiters ist $T_{\min}^* = \overline{T_0}^* = T_0^* = T_{\max}$ und $T_{\min} = \overline{T_0} = T_0^{**} = T_{\max}^*$. (4) gilt, da allgemein für dicht definierte Operatoren T gilt $\operatorname{ran} T^\perp = \ker T^*$. □

Da der präminimale Operator reell bezüglich der natürlichen Konjugation ist, ist auch sein Abschluss $T_{\min}$ reell bezüglich der natürlichen Konjugation. Der minimale Operator kann auch explizit angegeben werden.

SATZ 2.1.13. *Es gilt:*

(1) *Der minimale Operator ist gegeben durch*

$$\mathcal{D}(T_{\min}) = \{f \in \mathcal{D}(T_{\max}) | \forall g \in \mathcal{D}(T_{\max}) : W(f,g)(a) = W(f,g)(b) = 0\}$$

und $T_{\min} f = \tau f$ *für* $f \in \mathcal{D}(T_{\min})$.

(2) *Ist* τ *regulär bei* a, *so gilt*

$$f(a) = f^{[1]}(a) = 0 \quad \textit{für alle } f \in \mathcal{D}(T_{\min}).$$

Entsprechende Aussage gilt für den Randpunkt b.

(3) *Ist* τ *regulär, so gilt*

$$\mathcal{D}(T_{\min}) = \{f \in \mathcal{D}(T_{\max}) | f(a) = f^{[1]}(a) = f(b) = f^{[1]}(b) = 0\}.$$

BEWEIS. Ist $f \in \mathcal{D}(T_{\min}) = \mathcal{D}(T_{\max}^*) \subseteq \mathcal{D}(T_{\max})$ so gilt

$$0 = (T_{\max} f, g) - (f, T_{\max} g) = W(f, \overline{g})(b) - W(f, \overline{g})(a)$$

für alle $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$. Ist ein $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$ gegeben, so existiert ein $g_a \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit $\overline{g_a} = g$ in einer Umgebung von a und $g_a = 0$ in einer Umgebung von b. Daraus folgt $W(f,g)(a) = W(f, \overline{g_a})(a) - W(f, \overline{g_a})(b) = 0$. Analog sieht man, dass $W(f,g)(b) = 0$ für alle $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$ gilt.

Ist umgekehrt $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$, sodass für alle $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$, $W(f,g)(a) = W(f,g)(b) = 0$ gilt, so ist auch

$$(T_{\max} f, g) - (f, T_{\max} g) = W(f, \overline{g})(b) - W(f, \overline{g})(a) = 0,$$

also ist $f \in \mathcal{D}(T_{\max}^*) = \mathcal{D}(T_{\min})$. Da $T_{\min}$ eine Einschränkung von $T_{\max}$ ist, ist damit (1) gezeigt.

Sei nun τ regulär bei a, $f \in \mathcal{D}(T_{\min})$ und $v, w \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit $v(a) = w^{[1]}(a) = 1$ und $v^{[1]}(a) = w(a) = 0$. Wegen $0 = W(f,v)(a) = f(a)$ und $0 = W(f,w)(a) = f^{[1]}(a)$ folgt (2). Analog zeigt man die Behauptung für den Randpunkt b. (3) folgt nun direkt aus (1) und (2). □

SATZ 2.1.14. *Die Defektzahlen des minimalen Operators* $T_{\min}$ *sind gleich und maximal* 2, *also*

$$n(T_{\min}) := \dim \ker (T_{\max} - i) = \dim \ker (T_{\max} + i) \leq 2.$$

BEWEIS. Da es nur 2 linear unabhängige Lösungen von $(\tau - i)u = 0$ bzw. von $(\tau + i)u = 0$ gibt, sind $\ker (T_{\max} - i)$ und $\ker (T_{\max} + i)$ höchstens zweidimensional. Weiters gilt

$$u \in \ker (T_{\max} - i) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{u} \in \ker (T_{\max} + i)$$

und da aus u_1, u_2 linear unabhängig folgt dass auch $\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$ linear unabhängig sind, folgt die Behauptung. □

Nach den von Neumannschen Formeln gilt

$$\mathcal{D}(T_{\max}) = \mathcal{D}(T_{\min}) \oplus \ker (T_{\max} - i) \oplus \ker (T_{\max} + i).$$

Der maximale Operator $T_{\max}$ ist also eine $2n(T_{\min})$-dimensionale Erweiterung von $T_{\min}$. Da die Defektzahlen von $T_{\min}$ gleich sind, existieren selbstadjungierte Erweiterungen von $T_{\min}$. Diese sind genau die $n(T_{\min})$-dimensionalen, symmetrischen Erweiterungen von $T_{\min}$.

2.2. Weylsche Alternative

Definition 2.2.1. Wir sagen τ ist bei a im Grenzkreisfall (GKF), falls für alle $z \in \mathbb{C}$, alle Lösungen von $(\tau - z)u = 0$ in $L^2((a,b);r\lambda)$ bei a liegen. Weiters sagen wir, τ ist bei a im Grenzpunktfall (GPF), falls für alle $z \in \mathbb{C}$, eine Lösung von $(\tau - z)u = 0$ nicht in $L^2((a,b);r\lambda)$ bei a liegt.

Entsprechend definiert man Grenzkreis- und Grenzpunktfall für den Randpunkt b.

Man sieht unmittelbar, dass sich Grenzkreis- und Grenzpunktfall gegenseitig ausschließen. Dass bei jedem Randpunkt stets einer der beiden Fälle vorliegt zeigt das folgende Lemma.

Lemma 2.2.2. *Existiert ein $z_0 \in \mathbb{C}$, sodass alle Lösungen der Gleichung $(\tau - z_0)u = 0$ in $L^2((a,b);r\lambda)$ bei a liegen, so ist τ bei a im Grenzkreisfall.*

Entsprechende Aussage gilt für den Randpunkt b.

Beweis. Sei $z \in \mathbb{C}$ und u eine Lösung von $(\tau - z)u = 0$. Ist u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von $(\tau - z_0)u = 0$ mit $W(u_1,u_2) = 1$, so liegen u_1 und u_2 nach Voraussetzung in $L^2((a,b);r\lambda)$ bei a. Es existiert daher ein $c \in (a,b)$, sodass für die Funktion $v = |u_1| + |u_2|$

$$|z - z_0| \int_a^c v^2 r d\lambda \leq 1/2$$

gilt. Da u Lösung der inhomogenen Gleichung $(\tau - z_0)u = (z - z_0)u$ ist, gilt nach Proposition 1.2.11 mit geeigneten Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, für $x \in (a,b)$

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + (z - z_0) \int_c^x \left(u_1(x)u_2(t) - u_2(x)u_1(t)\right) u(t) r(t) d\lambda(t).$$

Also hat man, mit $C = \max\left(|c_1|, |c_2|\right)$, für $x \in (a,c)$

$$|u(x)| \leq Cv(x) + |z - z_0| v(x) \int_x^c v(t)|u(t)|r(t)d\lambda(t),$$

und mit der Ungleichung $(d_1 + d_2)^2 \leq 2d_1^2 + 2d_2^2$ für d_1, $d_2 \in \mathbb{R}$, sowie der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|u(x)|^2 \leq 2C^2 v(x)^2 + 2|z - z_0|^2 v(x)^2 \int_x^c v(t)^2 r(t) d\lambda(t) \int_x^c |u(t)|^2 r(t) d\lambda(t).$$

Integriert man diese Ungleichung von $s \in (a,c)$ nach c, so erhält man

$$\begin{aligned} \int_s^c |u|^2 r d\lambda &\leq 2C^2 \int_a^c v^2 r d\lambda + 2|z - z_0|^2 \left(\int_a^c v^2 r d\lambda\right)^2 \int_s^c |u|^2 r d\lambda \\ &\leq 2C^2 \int_a^c v^2 r d\lambda + \frac{1}{2} \int_s^c |u|^2 r d\lambda \end{aligned}$$

und daher

$$\int_s^c |u|^2 r d\lambda \leq 4C^2 \int_a^c v^2 r d\lambda < \infty.$$

Weil $s \in (a, c)$ beliebig war, gilt auch

$$\int_a^c |u|^2 r d\lambda \leq 4C^2 \int_a^c v^2 r d\lambda < \infty.$$

Also liegt u in $L^2((a, b); r\lambda)$ bei a. □

Aus Lemma 2.2.2 folgt nun direkt die Weylsche Alternative.

SATZ 2.2.3 (Weylsche Alternative). *Bei jedem Randpunkt liegt entweder der Grenzkreisfall oder der Grenzpunktfall vor.*

PROPOSITION 2.2.4. *Ist τ regulär bei a, so liegt bei a der Grenzkreisfall vor. Entsprechende Aussage gilt für den Randpunkt b.*

BEWEIS. Ist τ regulär bei a und u eine Lösung von $\tau u = 0$. Dann ist u nach Satz 1.2.13 stetig in a fortsetzbar und damit beschränkt in einer Umgebung von a. Da r bis nach a integrierbar ist liegt u in $L^2((a, b); r\lambda)$ bei a. □

Liegt bei einem Randpunkt der Grenzkreisfall vor, so sagt man auch τ sei quasiregulär bei diesem Randpunkt. Proposition 2.2.4 rechtfertigt diese Bezeichnung.

LEMMA 2.2.5. *Ist $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, dann gibt es eine nichttriviale Lösung u von $(\tau - z)u = 0$, sodass u in $L^2((a, b); r\lambda)$ bei a liegt.*
Entsprechende Aussage gilt für den Randpunkt b.

BEWEIS. Sei zunächst vorausgesetzt, dass τ bei b regulär ist. Falls keine nichttriviale Lösung von $(\tau - z)u = 0$ in $L^2((a, b); r\lambda)$ bei a liegt, dann ist $\ker (T_{\max} - z) = \{0\}$ und daher $n(T_{\min}) = 0$, also $T_{\min} = T_{\max}$. Um den Widerspruch zu sehen betrachten wir Funktionen f, $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit

$$f(b) = g^{[1]}(b) = 1 \quad \text{und} \quad f^{[1]}(b) = g(b) = 0.$$

Wegen

$$W(f, \overline{g})(b) = f(b)g^{[1]}(b) - g(b)f^{[1]}(b) = 1 \neq 0$$

ist $f \notin \mathcal{D}(T_{\min})$, was ein Widerspruch zu $T_{\min} = T_{\max}$ ist.

Falls τ bei b nicht regulär ist betrachten wir für ein $c \in (a, b)$, den bei c regulären Differentialausdruck $\tau|_{(a,c)}$. Nach dem oben gezeigten und da die Lösungen von $(\tau|_{(a,c)} - z)u = 0$ genau die Lösungen von $(\tau - z)u = 0$ eingeschränkt auf (a, c) sind, existiert eine Lösung von $(\tau - z)u = 0$ die in $L^2((a, b); r\lambda)$ bei a liegt. □

KOROLLAR 2.2.6. *Ist $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und liegt bei a der Grenzpunktfall vor, so existiert eine (bis auf skalare Vielfache) eindeutige nichttriviale Lösung der Gleichung $(\tau - z)u = 0$, die in $L^2((a, b); r\lambda)$ bei a liegt.*
Entsprechend Aussage gilt für den Randpunkt b.

BEWEIS. Nach Lemma 2.2.5 liegt eine nichttriviale Lösung von $(\tau - z)u = 0$ in $L^2((a, b); r\lambda)$ bei a. Läge eine weitere linear unabhängige Lösung in $L^2((a, b); r\lambda)$ bei a, so würden bereits alle Lösungen in $L^2((a, b); r\lambda)$ bei a liegen, was nicht möglich ist, da bei τ bei a im Grenzpunktfall ist. □

Folgendes Lemma zeigt, dass man Grenzkreisfall und Grenzpunktfall auch mit Hilfe der Wronskideterminante charakterisieren kann.

Lemma 2.2.7. *τ ist bei a genau dann im Grenzpunktfall, wenn für alle f, $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$ gilt dass $W(f,g)(a) = 0$.*

τ ist bei a genau dann im Grenzkreisfall, wenn ein $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$ existiert, sodass $W(f,\overline{f})(a) = 0$ und $W(f,g)(a) \neq 0$ für ein $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$.

Entsprechende Aussagen gelten für den Randpunkt b.

Beweis. Sei τ bei a im Grenzkreisfall und u_1, u_2 ein reelles Fundamentalsystem der Gleichung $\tau u = 0$ mit $W(u_1,u_2) = 1$. u_1 und u_2 liegen in $L^2((a,b);r\lambda)$ bei a und damit auch in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a. Dann existieren f, $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit $f = u_1$ und $g = u_2$ nahe bei a und $f = g = 0$ nahe bei b. Es gilt dann

$$W(f,g)(a) = W(u_1,u_2)(a) = 1 \neq 0$$

und

$$W(f,\overline{f})(a) = W(u_1,\overline{u_1})(a) = 0$$

da u_1 reell ist.

Liege nun bei a der Grenzpunktfall vor. Sei zunächst angenommen, dass τ bei b regulär ist. Dann ist $T_{\max}$ eine 2-dimensionale Erweiterung von $T_{\min}$, da nach Korollar 2.2.6, $\dim\ker(T_{\max} - i) = 1$ gilt. Seien v, $w \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit $v = w = 0$ in einer Umgebung von a und

$$v(b) = w^{[1]}(b) = 1 \quad \text{und} \quad v^{[1]}(b) = w(b) = 0.$$

Dann ist

$$\mathcal{D}(T_{\max}) = \mathcal{D}(T_{\min}) + \operatorname{span}\{v,w\},$$

da v, w linear unabhängig sind und nicht in $\mathcal{D}(T_{\min})$ liegen. Seien nun f, $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$ dann existieren f_0, $g_0 \in \mathcal{D}(T_{\min})$, sodass $f = f_0$ und $g = g_0$ in einer Umgebung von a und daher

$$W(f,g)(a) = W(f_0,g_0)(a) = 0.$$

Falls nun τ bei b nicht regulär ist, betrachtet man für ein $c \in (a,b)$, den bei c regulären Differentialausdruck $\tau|_{(a,c)}$ und verwendet, dass für $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$, $f|_{(a,c)}$ im Definitionsbereich des maximalen von $\tau|_{(a,c)}$ induzierten Operators liegt. □

Liegt bei a und bei b der Grenzpunktfall vor, so zeigt Korollar 2.2.6, dass es für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ Lösungen von $(\tau - z)u = 0$ gibt, die in $L^2((a,b);r\lambda)$ bei a bzw. bei b liegen. Folgendes Lemma zeigt, dass es jedoch keine nichttrivialen Lösungen geben kann die in $L^2((a,b);r\lambda)$ liegen.

Lemma 2.2.8. *Sei τ bei a und bei b im Grenzpunktfall und $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Dann liegt keine nichttriviale Lösung von $(\tau - z)u = 0$ in $L^2((a,b);r\lambda)$.*

Beweis. Ist $u \in L^2((a,b);r\lambda)$ eine Lösung von $(\tau - z)u = 0$, so ist $\overline{u} \in L^2((a,b);r\lambda)$ eine Lösung von $(\tau - \overline{z})\overline{u} = 0$ und u und $\overline{u}$ liegen in $\mathcal{D}(T_{\max})$. Für $\alpha,\beta \in (a,b)$, $\alpha < \beta$ gilt dann wegen der Lagrange-Identität

$$W(u,\overline{u})(\beta) - W(u,\overline{u})(\alpha) = (z - \overline{z})\int_\alpha^\beta u\overline{u}r d\lambda = 2i\mathrm{Im}z\int_\alpha^\beta |u|^2 r d\lambda.$$

Wegen Lemma 2.2.7 konvergiert die linke Seite gegen 0 falls $\alpha \to a$ und $\beta \to b$. Da die rechte Seite dann gegen $2i\mathrm{Im}z\|u\|^2$ konvergiert, gilt $\|u\|^2 = 0$ und daher $u = 0$. □

SATZ 2.2.9. *Für die Defektzahlen des minimalen Operators $T_{\min}$ gilt:*

$$n(T_{\min}) = \begin{cases} 2 & \textit{falls } \tau \textit{ an beiden Randpunkten im GKF ist.} \\ 1 & \textit{falls } \tau \textit{ an genau einem Randpunkt im GKF ist.} \\ 0 & \textit{falls } \tau \textit{ an keinem Randpunkt im GKF ist.} \end{cases}$$

BEWEIS. Liegt bei a und bei b der Grenzkreisfall vor, so liegen die zwei linear unabhängigen Lösungen von $(\tau - i)u = 0$ in $L^2((a,b); r\lambda)$ bei a und bei b, daher auch in $L^2((a,b); r\lambda)$ und damit in $\mathcal{D}(T_{\max})$. Daher gilt also

$$n(T_{\min}) = \dim\ker(T_{\max} - i) = 2.$$

Liegt nun bei einem Randpunkt der Grenzkreisfall und beim anderen der Grenzpunktfall vor, so existiert nach Lemma 2.2.6 (bis auf skalare Vielfache) genau eine nichttriviale Lösung von $(\tau - i)u = 0$ die in $L^2((a,b); r\lambda)$ bei dem GPF-Endpunkt liegt und damit in $L^2((a,b); r\lambda)$ und daher auch in $\mathcal{D}(T_{\max})$. Es gilt daher $n(T_{\min}) = 1$.

Liegt an beiden Endpunkten der Grenzpunktfall vor, so ist wegen Lemma 2.2.8, $\ker(T_{\max} - i) = \{0\}$ und daher $n(T_{\min}) = 0$. □

2.3. Selbstadjungierte Realisierungen

DEFINITION 2.3.1. Ein Operator A in $L^2((a,b); r\lambda)$ heißt selbstadjungierte Realisierung von τ, falls er eine Einschränkung des maximalen Operators $T_{\max}$ und selbstadjungiert ist.

Jede selbstadjungierte Realisierung von τ ist notwendigerweise eine Erweiterung des minimalen Operators $T_{\min}$, wie folgende Proposition zeigt.

PROPOSITION 2.3.2. *Sei A eine selbstadjungierte Realisierung, dann gilt $T_{\min} \subseteq A \subseteq T_{\max}$.*

BEWEIS. Klarerweise gilt $A \subseteq T_{\max}$. Da für die Adjungierten die umgekehrte Inklusion gilt folgt $T_{\min} = T_{\max}^* \subseteq A^* = A$. □

Folgender Satz ist oft nützlich, um zu überprüfen, ob ein Operator eine selbstadjungierte Realisierung von τ ist. Man beachte, dass der Definitionsbereich des Operators nicht explizit angegeben wird.

SATZ 2.3.3. *Ein Operator A ist genau dann eine selbstadjungierte Realsisierung von τ wenn*

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in \mathcal{D}(T_{\max}) | \forall g \in \mathcal{D}(A) : W(f, \overline{g})(b) - W(f, \overline{g})(a) = 0\}$$

und $Af = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(A)$.

BEWEIS. Zur Abkürzung setzen wir

$$D = \{f \in \mathcal{D}(T_{\max}) | \forall g \in \mathcal{D}(A) : W(f, \overline{g})(b) - W(f, \overline{g})(a) = 0\}.$$

Sei A eine selbstadjungierte Realisierung von τ. Da A dann eine Einschränkung von $T_{\max}$ ist, reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{D}(A) = D$ gilt. Sei dazu $f \in \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(T_{\max})$ und $g \in \mathcal{D}(A)$. Dann gilt, da A selbstadjungiert ist und nach Lemma 2.1.5

$$0 = (Af, g) - (f, Ag) = (T_{\max} f, g) - (f, T_{\max} g) = W(f, \overline{g})(b) - W(f, \overline{g})(a)$$

und damit $f \in D$. Sei umgekehrt ein $f \in D$ gegeben, dann gilt für alle $g \in \mathcal{D}(A)$

$$0 = W(f, \overline{g})(b) - W(f, \overline{g})(a) = (T_{\max} f, g) - (f, T_{\max} g) = (Af, g) - (f, Ag).$$

Also ist f im Definitionsbereich der Adjungierten $A^* = A$.

Gelte umgekehrt $\mathcal{D}(A) = D$ und $Af = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(A)$. A ist eine Einschränkung von $T_{\max}$, es bleibt daher zu zeigen dass A selbstadjungiert ist. A ist symmetrisch da für alle $f, g \in \mathcal{D}(A)$ gilt, dass $(Af, g) = (f, Ag)$. Es bleibt also $\mathcal{D}(A^*) \subseteq \mathcal{D}(A)$ zu zeigen. Sei dazu $f \in \mathcal{D}(A^*)$. Da Funktionen aus $\mathcal{D}(T_{\min})$ auch in D und damit in $\mathcal{D}(A)$ liegen, ist A eine Fortsetzung von $T_{\min}$ und es gilt daher $A^* \subseteq T_{\min}^* = T_{\max}$, also $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$. Für Funktionen $g \in \mathcal{D}(A)$ gilt dann

$$0 = (Af, g) - (f, A^* g) = (T_{\max} f, g) - (f, T_{\max} g) = W(f, \overline{g})(b) - W(f, \overline{g})(a),$$

also ist $f \in D = \mathcal{D}(A)$. □

Wir wollen im folgenden die selbstadjungierten Realisierungen von τ bestimmen. Dabei ist der einfachste Fall der, wenn an beiden Randpunkten der Grenzpunktfall vorliegt.

SATZ 2.3.4. *Liegt bei a und bei b der Grenzpunktfall vor, so ist $T_{\min} = T_{\max}$ und damit $T_{\max}$ die einzige selbstadjungierte Realisierung von τ.*

BEWEIS. Nach Satz 2.2.9 ist in diesem Fall $T_{\min} = T_{\max}$, also ist $T_{\max}$ selbstadjungiert. Wegen Proposition 2.3.2 ist $T_{\max}$ die einzige selbstadjungierte Realisierung von τ. □

Als nächstes wollen wir die selbstadjungierten Realisierungen von τ bestimmen, falls τ bei einem Randpunkt im Grenzkreisfall und beim anderen Randpunkt im Grenzpunktfall ist. Wir sagen eine Funktion $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ erfüllt (2.1a), falls

$$W(v, \overline{v})(a) = 0 \quad \text{und} \quad W(h, \overline{v})(a) \neq 0 \quad \text{für ein } h \in \mathcal{D}(T_{\max}). \tag{2.1a}$$

Entsprechend sagen wir v erfüllt (2.1b), falls

$$W(v, \overline{v})(b) = 0 \quad \text{und} \quad W(h, \overline{v})(b) \neq 0 \quad \text{für ein } h \in \mathcal{D}(T_{\max}). \tag{2.1b}$$

τ ist bei a nach Lemma 2.2.7 genau dann im Grenzkreisfall, wenn ein $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ existiert, dass (2.1a) erfüllt. Ist τ bei a im Grenzkreisfall und bei b im Grenzpunktfall, so gilt (2.1a) genau dann, wenn $v \notin \mathcal{D}(T_{\min})$ und $W(v, \overline{v})(a) = 0$.

PROPOSITION 2.3.5. *Es gilt:*

(1) *Für $f_1, f_2, f_3, f_4 \in D_\tau$ gilt auf (a, b) die Plückersche Identität*

$$W(f_1, f_2)W(f_3, f_4) + W(f_1, f_3)W(f_4, f_2) + W(f_1, f_4)W(f_2, f_3) = 0.$$

(2) *Sei $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit (2.1a), dann gilt für $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$*

$$W(f, \overline{v})(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W(\overline{f}, \overline{v})(a) = 0.$$

(3) *Sei $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit (2.1a), dann gilt für $f, g \in \mathcal{D}(T_{\max})$*

$$W(f, \overline{v})(a) = W(g, \overline{v})(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(f, g)(a) = 0.$$

Entsprechende Aussagen gelten für den Randpunkt b.

Beweis. Die linke Seite in (1) ist gleich der Determinante

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_1^{[1]} & f_2^{[1]} & f_3^{[1]} & f_4^{[1]} \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_1^{[1]} & f_2^{[1]} & f_3^{[1]} & f_4^{[1]} \end{vmatrix}$$

die offensichtlich verschwindet, was (1) zeigt.

Sei nun $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit (2.1a). Dann existiert ein $h \in \mathcal{D}(T_{\max})$, sodass $W(h, \overline{v})(a) \neq 0$. Setzt man in (1) $f_1 = v$, $f_2 = \overline{v}$, $f_3 = h$ und $f_4 = \overline{h}$, so sieht man, dass dann auch $W(h, v)(a) \neq 0$ ist. (2) folgt nun aus (1) mit $f_1 = f$, $f_2 = v$, $f_3 = \overline{v}$, $f_4 = h$ und (3) folgt mit $f_1 = f$, $f_2 = g$, $f_3 = \overline{v}$, $f_4 = h$. □

Wir können nun die selbstadjungierten Realisierungen angeben, falls an einem Randpunkt der Grenzkreisfall und an dem anderen der Grenzpunktfall vorliegt.

Satz 2.3.6. *Ist τ bei a im Grenzkreisfall und bei b im Grenzpunktfall, so ist ein Operator A genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ, wenn ein $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit* (2.1a) *existiert, sodass*

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in \mathcal{D}(T_{\max}) | W(f, \overline{v})(a) = 0\}$$

und $Af = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(A)$.

Entsprechende Aussagen gelten falls τ bei a im Grenzpunktfall und bei b im Grenzkreisfall ist.

Beweis. Da in diesem Fall $n(T_{\min}) = 1$ ist, sind die selbstadjungierten Fortsetzungen von $T_{\min}$ genau die eindimensionalen, symmetrischen Fortsetzungen von $T_{\min}$. Man sieht also, dass ein Operator A genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ ist, wenn ein $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit (2.1a) existiert, sodass

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(T_{\min}) + \operatorname{span}\{v\}$$

und $Af = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(A)$. Es bleibt daher zu zeigen, dass

$$\mathcal{D}(T_{\min}) + \operatorname{span}\{v\} = \{f \in \mathcal{D}(T_{\max}) | W(f, \overline{v})(a) = 0\}$$

gilt. Dass der linke in dem rechten Teilraum enthalten ist, ist klar wegen Satz 2.1.13 und da $W(v, \overline{v})(a) = 0$ ist. Der rechte Teilraum kann aber auch nicht mehr sein, da er sonst gleich $\mathcal{D}(T_{\max})$ wäre, woraus mit Proposition 2.3.5 (3) folgen würde, dass $W(f, g)(a) = 0$ für alle $f, g \in \mathcal{D}(T_{\max})$, was ein Widerspruch dazu ist, dass τ bei a im Grenzkreisfall ist. □

Aus dem Beweis von Satz 2.3.6 ersieht man unmittelbar, dass zwei selbstadjungierte Realisierungen genau dann verschieden sind, wenn die entsprechenden Funktionen v aus Satz 2.3.6 linear unabhängig modulo $\mathcal{D}(T_{\min})$ sind. Die Funktion v kann stets so gewählt werden, dass v in einer Umgebung von a eine reelle Lösung von $(\tau - z)u = 0$ mit $z \in \mathbb{R}$ ist.

Mit Proposition 2.3.5 (2) sieht man, dass in diesem Fall jede selbstadjungierte Realisierung reell bezüglich der natürlichen Konjugation ist.

Als nächstes werden wir die selbstadjungierten Realisierungen von τ angeben, falls τ bei beiden Randpunkten im Grenzkreisfall ist.

SATZ 2.3.7. *Ist τ bei a und bei b im Grenzkreisfall, so ist ein Operator A genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ, wenn modulo $\mathcal{D}(T_{\min})$ linear unabhängige $v, w \in \mathcal{D}(T_{\max})$ existieren, die*

$$W_a^b(v, \overline{v}) = W_a^b(w, \overline{w}) = W_a^b(v, \overline{w}) = 0 \tag{2.2}$$

erfüllen, sodass

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{ f \in \mathcal{D}(T_{\max}) | W_a^b(f, \overline{v}) = W_a^b(f, \overline{w}) = 0 \Big\}$$

und $Af = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(A)$.

BEWEIS. Da in diesem Fall $n(T_{\min}) = 2$ ist, sind die selbstadjungierten Fortsetzungen von $T_{\min}$ genau die zweidimensionalen, symmetrischen Fortsetzungen von $T_{\min}$. Ein Operator A ist daher genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ, wenn modulo $\mathcal{D}(T_{\min})$ linear unabhängige $v, w \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit (2.2) existieren, sodass

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(T_{\min}) + \operatorname{span}\{v, w\}$$

und $Af = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(A)$. Es bleibt daher zu zeigen, dass

$$\mathcal{D}(T_{\min}) + \operatorname{span}\{v, w\} = \Big\{ f \in \mathcal{D}(T_{\max}) | W_a^b(f, \overline{v}) = W_a^b(f, \overline{w}) = 0 \Big\} = D$$

gilt, wobei wir den rechten Teilraum zur Abkürzung mit D bezeichnen. Dass der linke Teilraum in D enthalten ist, ist klar wegen Satz 2.1.13 und (2.2). Um zu sehen, dass D auch nicht größer sein kann, betrachten wir die linearen Funktionale F_v, F_w auf $\mathcal{D}(T_{\max})$, definiert durch

$$F_v(f) = W_a^b(f, \overline{v}) \quad \text{und} \quad F_w(f) = W_a^b(f, \overline{w}) \quad \text{für } f \in \mathcal{D}(T_{\max}).$$

Der Durchschnitt der Kerne dieser Funktionale ist genau D. Diese Funktionale sind linear unabhängig, denn sind $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ und $c_1 F_v + c_2 F_w = 0$, so ist für alle $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$

$$0 = c_1 F_v(f) + c_2 F_w(f) = c_1 W_a^b(f, \overline{v}) + c_2 W_a^b(f, \overline{w}) = W_a^b(f, c_1\overline{v} + c_2\overline{w}).$$

Da für jedes $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$ ein $\tilde{f} \in \mathcal{D}(T_{\max})$ existiert, dass bei a mit f übereinstimmt und bei b verschwindet, gilt auch

$$W(f, c_1\overline{v} + c_2\overline{w})(a) = 0 \quad \text{für alle } f \in \mathcal{D}(T_{\max}).$$

Da das gleiche auch für b gilt, ist nach Satz 2.1.13, $c_1\overline{v} + c_2\overline{w} \in \mathcal{D}(T_{\min})$. Da v, w linear unabhängig modulo $\mathcal{D}(T_{\min})$ sind, folgt $c_1 = c_2 = 0$, also sind F_v, F_w linear unabhängig. Aus Lemma 2.1.9 folgt nun

$$\ker F_v \not\subseteq \ker F_w \quad \text{und} \quad \ker F_w \not\subseteq \ker F_v.$$

Es existieren also $f_v, f_w \in \mathcal{D}(T_{\max})$ sodass $W_a^b(f_v, \overline{v}) = W_a^b(f_w, \overline{w}) = 0$ aber $W_a^b(f_v, \overline{w}) \neq 0$ und $W_a^b(f_w, \overline{v}) \neq 0$. f_v und f_w sind linear unabhängig und liegen nicht in D. D kann also höchstens eine zweidimensionale Erweiterung von $\mathcal{D}(T_{\min})$ sein, was die Behauptung zeigt. □

Falls τ bei beiden Randpunkten im Grenzkreisfall ist, so kann man die selbstadjungierten Realisierungen in zwei Kategorien einteilen.

DEFINITION 2.3.8. Sei τ bei a und bei b im Grenzkreisfall und A eine selbstadjungierte Realisierung von τ. Wir sagen A ist eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit getrennten Randbedingungen, falls ein $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit (2.1a) und ein $w \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit (2.1b) existiert, sodass

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in \mathcal{D}(T_{\max}) | W(f, \overline{v})(a) = W(f, \overline{w})(b) = 0\}$$

und $Af = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(A)$.

Anderenfalls sagen wir A ist eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit gekoppelten Randbedingungen.

Entsprechendes definieren wir, falls τ bei a im Grenzpunktfall und bei b im Grenzkreisfall ist.

Ist ein Operator A wie in Definition 2.3.8 gegeben, so sieht man mit Satz 2.3.6, dass A selbstadjungiert ist. Die selbstadjungierten Realisierungen von τ mit getrennten Randbedingungen sind also genau, die in Definition 2.3.8 angegebenen Operatoren.

Ist A eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit getrennten Randbedingungen, so ist A wegen Proposition 2.3.5 (2) reell bezüglich der natürlichen Konjugation. Im Fall von gekoppelten Randbedingungen müssen selbstadjungierte Realisierungen nicht reell bezüglich der natürlichen Konjugation sein.

2.4. Anfangszahlen

DEFINITION 2.4.1. Sei τ bei a im Grenzkreisfall, $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit

$$W(u_1, \overline{u_2})(a) = 1 \quad \text{und} \quad W(u_1, \overline{u_1})(a) = W(u_2, \overline{u_2})(a) = 0, \tag{2.3a}$$

dann sind die linearen Funktionale α_1, α_2 auf $\mathcal{D}(T_{\max})$, definiert durch

$$\alpha_1(f) = W(f, \overline{u_2})(a) \quad \text{und} \quad \alpha_2(f) = -W(f, \overline{u_1})(a) \quad \text{für } f \in \mathcal{D}(T_{\max})$$

die Anfangszahlen bezüglich u_1, u_2 bei a.

Entsprechend definiert man Anfangszahlen für den Randpunkt b.

Ist τ bei a im Grenzkreisfall, so existieren stets Funktionen u_1, u_2, welche die Bedingung (2.3a) erfüllen. Man nehme beispielsweise Funktionen u_1, u_2, die für ein $z \in \mathbb{R}$ in einer Umgebung von a mit einem reellen Fundamentalsystem von $(\tau - z)u = 0$, das $W(u_1, u_2) = 1$ erfüllt, übereinstimmen.

Die Anfangszahlen spielen im quasiregulären Fall eine ähnliche Rolle, wie die Punktauswertungen der Funktion und deren Quasiableitung im Randpunkt im regulären Fall.

PROPOSITION 2.4.2. *Ist τ regulär bei a, so existieren u_1, $u_2 \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit* (2.3a)*, sodass die Anfangszahlen α_1, α_2 bezüglich u_1, u_2*

$$\alpha_1(f) = f(a) \quad \textit{und} \quad \alpha_2(f) = f^{[1]}(a) \quad \textit{für } f \in \mathcal{D}(T_{\max})$$

erfüllen.

Entsprechende Aussage gilt für den Randpunkt b.

BEWEIS. Da τ bei a regulär ist, existieren Funktionen $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit

$$u_1(a) = u_2^{[1]}(a) = 1 \quad \text{und} \quad u_1^{[1]}(a) = u_2(a) = 0.$$

Dann ist offensichtlich (2.3a) erfüllt und für $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$ ist

$$\alpha_1(f) = W(f, \overline{u_2})(a) = f(a) \quad \text{und} \quad \alpha_2(f) = -W(f, \overline{u_1})(a) = f^{[1]}(a).$$

$\square$

Im folgenden seien in diesem Abschnitt stets $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit (2.3a) falls τ bei a im Grenzkreisfall ist, und

$$W(u_1, \overline{u_2})(b) = 1 \quad \text{und} \quad W(u_1, \overline{u_1})(b) = W(u_2, \overline{u_2})(b) = 0 \tag{2.3b}$$

falls τ bei b im Grenzkreisfall ist. Weiters seien α_1, α_2 die Anfangszahlen bezüglich u_1, u_2 bei a, falls τ bei a im Grenzkreisfall ist, und β_1, β_2 die Anfangszahlen bezüglich u_1, u_2 bei b, falls τ bei b im Grenzkreisfall ist.

Wir stellen einige Eigenschaften der Anfangszahlen in folgender Proposition zusammen.

Proposition 2.4.3. *Sei τ bei a im Grenzkreisfall und $f, g \in \mathcal{D}(T_{\max})$. Dann gilt*

$$\alpha_1(\overline{f}) = \overline{\alpha_1(f)} W(\overline{u_1}, \overline{u_2})(a), \quad \alpha_2(\overline{f}) = \overline{\alpha_2(f)} W(\overline{u_1}, \overline{u_2})(a)$$
$$\text{und} \quad W(f, g)(a) = \alpha_1(f)\alpha_2(g) - \alpha_2(f)\alpha_1(g).$$

Entsprechende Aussagen gelten für den Randpunkt b.

Beweis. Wendet man die Plückersche Identität auf

$$\overline{\alpha_1(f)} W(\overline{u_1}, \overline{u_2})(a) = \overline{W(f, \overline{u_2})(a)} W(\overline{u_1}, \overline{u_2})(a) = W(\overline{f}, u_2)(a) W(\overline{u_1}, \overline{u_2})(a)$$

an, so erhält man die erste Behauptung. Genauso sieht man die zweite Behauptung ein. Mit der Plückerschen Identität erhält man weiters

$$\begin{aligned} W(u_1, u_2)(a) W(\overline{u_1}, \overline{u_2})(a) &= -W(u_1, \overline{u_2})(a) W(u_2, \overline{u_1})(a) \\ &= W(u_1, \overline{u_2})(a) \overline{W(u_1, \overline{u_2})(a)} = 1 \end{aligned}$$

Zweimaliges Anwenden der Plückerschen Identität auf

$$W(f, g)(a) = W(f, g)(a) W(u_1, u_2)(a) W(\overline{u_1}, \overline{u_2})(a)$$

zeigt die dritte Behauptung. $\square$

Der erste Teil dieser Proposition zeigt, dass die Anfangszahlen einer reellen Funktion reell sind, falls nur $W(u_1, u_2)(a) = 1$ ist, was insbesondere dann der Fall ist, wenn u_1 oder u_2 reell ist.

Weiters zeigt diese Proposition, dass die Wronskideterminante bei a nur von den Anfangszahlen bei a abhängt. In Kombination mit Satz 2.3.6 werden wir eine Charakterisierung der selbstadjungierten Realisierungen von τ mit Hilfe der Anfangszahlen erhalten. Wie sich die Charakterisierung überträgt, zeigt folgendes Lemma.

Lemma 2.4.4. *Sei τ bei a im Grenzkreisfall. Ist $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit* (2.1a), *so existiert ein $\varphi_\alpha \in [0, \pi)$, sodass für alle $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$*

$$W(f, \overline{v})(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1(f)\cos\varphi_\alpha - \alpha_2(f)\sin\varphi_\alpha = 0 \quad \textit{gilt.}$$

Ist umgekehrt $\varphi_\alpha \in [0, \pi)$, so existiert ein $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit (2.1a), *sodass für alle $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$*

$$W(f, \overline{v})(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1(f)\cos\varphi_\alpha - \alpha_2(f)\sin\varphi_\alpha = 0 \quad \textit{gilt.}$$

Entsprechende Aussagen gelten für den Randpunkt b.

Beweis. Sei $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit (2.1a), also mit

$$W(v,\overline{v})(a) = 0 \quad \text{und} \quad W(g,\overline{v})(a) \neq 0 \quad \text{für ein } g \in \mathcal{D}(T_{\max}).$$

Dann ist wegen

$$W(g,\overline{v})(a) = W(\overline{u_1},\overline{u_2})(a)\left(\alpha_1(g)\overline{\alpha_2(v)} - \alpha_2(g)\overline{\alpha_1(v)}\right) \neq 0,$$

$(\alpha_1(v),\alpha_2(v)) \neq 0$ und wegen

$$\begin{aligned} 0 = W(v,\overline{v})(a) &= W(\overline{u_1},\overline{u_2})(a)\left(\alpha_1(v)\overline{\alpha_2(v)} - \alpha_2(v)\overline{\alpha_1(v)}\right) \\ &= W(\overline{u_1},\overline{u_2})(a)2i\mathrm{Im}(\alpha_1(v)\overline{\alpha_2(v)}) \end{aligned}$$

ist $\alpha_1(v)\overline{\alpha_2(v)}$ reell. Also ist

$$\overline{C_1}\begin{pmatrix}\alpha_1(v)\\ \alpha_2(v)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}, \quad \text{wobei } C_1 = \begin{cases}\alpha_2(v) & \text{falls } \alpha_2(v) \neq 0\\ \alpha_1(v) & \text{sonst}\end{cases}.$$

Da $C_1 \neq 0$ existiert ein $\varphi_\alpha \in [0,\pi)$ und ein $C_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, sodass

$$\begin{pmatrix}\alpha_1(v)\\ \alpha_2(v)\end{pmatrix} = C_2\begin{pmatrix}\sin\varphi_\alpha\\ \cos\varphi_\alpha\end{pmatrix}.$$

Für ein $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$ gilt dann

$$\begin{aligned} W(f,\overline{v})(a) &= W(\overline{u_1},\overline{u_2})(a)\left(\alpha_1(f)\overline{\alpha_2(v)} - \alpha_2(f)\overline{\alpha_1(v)}\right) \\ &= W(\overline{u_1},\overline{u_2})(a)\overline{C_2}\left(\alpha_1(f)\cos\varphi_\alpha - \alpha_2(f)\sin\varphi_\alpha\right), \end{aligned}$$

was die erste Behauptung zeigt.

Ist $\varphi_\alpha \in [0,\pi)$, so sei $v = \sin\varphi_\alpha u_1 + \cos\varphi_\alpha u_2$. Dann ist

$$W(v,\overline{v})(a) = \cos\varphi_\alpha\sin\varphi_\alpha\left(W(u_1,\overline{u_2})(a) + W(u_2,\overline{u_1})(a)\right) = 0$$

und wegen

$$W(u_1,\overline{v})(a) = \cos\varphi_\alpha \quad \text{und} \quad W(u_2,\overline{v})(a) = -\sin\varphi_\alpha$$

sieht man, dass (2.1a) gilt. Ist $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$, so ist

$$\begin{aligned} W(f,\overline{v})(a) &= \sin\varphi_\alpha W(f,\overline{u_1})(a) + \cos\varphi_\alpha W(f,\overline{u_2})(a) \\ &= \cos\varphi_\alpha\alpha_1(f) - \sin\varphi_\alpha\alpha_2(f) \end{aligned}$$

was die zweite Behauptung zeigt. □

Aus dem vorangehenden Lemma folgt zusammen mit Satz 2.3.6 unmittelbar folgende Charakterisierung der selbstadjungierten Realisierungen.

Satz 2.4.5. *Sei τ bei a im Grenzkreisfall und bei b im Grenzpunktfall. Dann ist ein Operator A genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ, wenn ein $\varphi_\alpha \in [0,\pi)$ existiert, sodass*

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in \mathcal{D}(T_{\max}) | \alpha_1(f)\cos\varphi_\alpha - \alpha_2(f)\sin\varphi_\alpha = 0\}$$

und $Af = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(A)$.

Aus Proposition 2.4.2 erhält man nun folgende Charakterisierung der selbstadjungierten Realisierungen falls τ bei a sogar regulär ist.

KOROLLAR 2.4.6. *Sei τ bei a regulär und bei b im Grenzpunktfall. Dann ist ein Operator A genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ, wenn ein $\varphi_\alpha \in [0,\pi)$ existiert, sodass*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_{\max}) | f(a)\cos\varphi_\alpha - f^{[1]}(a)\sin\varphi_\alpha = 0 \right\}$$

und $Af = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(A)$.

Wir wollen nun auch für den Fall, dass an beiden Randpunkten der Grenzkreisfall vorliegt, eine Charakterisierung der selbstadjungierten Realisierungen von τ mit Hilfe der Anfangszahlen angeben.

SATZ 2.4.7. *Sei τ bei a und bei b im Grenzkreisfall. Dann ist ein Operator A genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ, wenn Matrizen $B_a, B_b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit*

$$\operatorname{rg}(B_a|B_b) = 2 \quad \textit{und} \quad B_a J B_a^* = B_b J B_b^* \quad \textit{mit} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

existieren, sodass

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \,\middle|\, B_a \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \alpha_2(f) \end{pmatrix} = B_b \begin{pmatrix} \beta_1(f) \\ \beta_2(f) \end{pmatrix} \right\}$$

und $Af = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(A)$.

BEWEIS. Ist A eine selbstadjungierte Realisierung von τ, so existieren modulo $\mathcal{D}(T_{\min})$ linear unabhängige $v, w \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit

$$W_a^b(v,\overline{v}) = W_a^b(w,\overline{w}) = W_a^b(v,\overline{w}) = 0,$$

sodass

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_{\max}) | W_a^b(f,\overline{v}) = W_a^b(f,\overline{w}) = 0 \right\}$$

und $Af = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(A)$. Seien $B_a, B_b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ definiert durch

$$B_a = \begin{pmatrix} \alpha_2(\overline{v}) & -\alpha_1(\overline{v}) \\ \alpha_2(\overline{w}) & -\alpha_1(\overline{w}) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_b = \begin{pmatrix} \beta_2(\overline{v}) & -\beta_1(\overline{v}) \\ \beta_2(\overline{w}) & -\beta_1(\overline{w}) \end{pmatrix}.$$

Dann rechnet man unmittelbar nach, dass

$$B_a J B_a^* = B_b J B_b^* \quad \Leftrightarrow \quad W_a^b(v,\overline{v}) = W_a^b(w,\overline{w}) = W_a^b(v,\overline{w}) = 0.$$

Um zu sehen, dass $\operatorname{rg}(B_a|B_b) = 2$ ist, seien $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ und

$$0 = c_1 \begin{pmatrix} \alpha_2(\overline{v}) \\ -\alpha_1(\overline{v}) \\ \beta_2(\overline{v}) \\ -\beta_1(\overline{v}) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \alpha_2(\overline{w}) \\ -\alpha_1(\overline{w}) \\ \beta_2(\overline{w}) \\ -\beta_1(\overline{w}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2(c_1\overline{v} + c_2\overline{w}) \\ -\alpha_1(c_1\overline{v} + c_2\overline{w}) \\ \beta_2(c_1\overline{v} + c_2\overline{w}) \\ -\beta_1(c_1\overline{v} + c_2\overline{w}) \end{pmatrix}.$$

Also verschwinden alle Anfangszahlen von $c_1\overline{v} + c_2\overline{w}$ und damit wegen Proposition 2.4.3 auch $W(c_1\overline{v} + c_2\overline{w}, f)(a)$ und $W(c_1\overline{v} + c_2\overline{w}, f)(b)$ für alle $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$. Es gilt also $c_1\overline{v} + c_2\overline{w} \in \mathcal{D}(T_{\min})$ und daher, da $\overline{v}, \overline{w}$ linear unabhängig modulo $\mathcal{D}(T_{\min})$ sind, $c_1 = c_2 = 0$. Also hat $(B_a|B_b)$ Rang 2. Weiters rechnet man unmittelbar nach, dass für $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$

$$W_a^b(f,\overline{v}) = W_a^b(f,\overline{w}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B_a \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \alpha_2(f) \end{pmatrix} = B_b \begin{pmatrix} \beta_1(f) \\ \beta_2(f) \end{pmatrix}$$

gilt, was die geforderte Darstellung von A zeigt.

Seien umgekehrt B_a, $B_b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit den geforderten Eigenschaften gegeben. Dann existieren $v, w \in \mathcal{D}(T_{\max})$, sodass

$$B_a = \begin{pmatrix} \alpha_2(\overline{v}) & -\alpha_1(\overline{v}) \\ \alpha_2(\overline{w}) & -\alpha_1(\overline{w}) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_b = \begin{pmatrix} \beta_2(\overline{v}) & -\beta_1(\overline{v}) \\ \beta_2(\overline{w}) & -\beta_1(\overline{w}) \end{pmatrix}.$$

v und w sind linear unabhängig modulo $\mathcal{D}(T_{\min})$, denn sind $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ und $c_1 v + c_2 w \in \mathcal{D}(T_{\min})$, so ist

$$0 = \begin{pmatrix} \alpha_2(\overline{c_1 v} + \overline{c_2 w}) \\ -\alpha_1(\overline{c_1 v} + \overline{c_2 w}) \\ \beta_2(\overline{c_1 v} + \overline{c_2 w}) \\ -\beta_1(\overline{c_1 v} + \overline{c_2 w}) \end{pmatrix} = \overline{c_1} \begin{pmatrix} \alpha_2(\overline{v}) \\ -\alpha_1(\overline{v}) \\ \beta_2(\overline{v}) \\ -\beta_1(\overline{v}) \end{pmatrix} + \overline{c_2} \begin{pmatrix} \alpha_2(\overline{w}) \\ -\alpha_1(\overline{w}) \\ \beta_2(\overline{w}) \\ -\beta_1(\overline{w}) \end{pmatrix}$$

und da die Zeilen von $(B_a|B_b)$ linear unabhängig sind folgt $c_1 = c_2 = 0$. Da auch hier

$$B_a J B_a^* = B_b J B_b^* \quad \Leftrightarrow \quad W_a^b(v, \overline{v}) = W_a^b(w, \overline{w}) = W_a^b(v, \overline{w}) = 0$$

gilt, erfüllen v, w die Voraussetzungen aus Satz 2.3.7. Wie oben sieht man wieder, dass für $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$

$$B_a \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \alpha_2(f) \end{pmatrix} = B_b \begin{pmatrix} \beta_1(f) \\ \beta_2(f) \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad W_a^b(f, \overline{w}) = W_a^b(f, \overline{w}) = 0$$

gilt. Also ist A nach Satz 2.3.7 eine selbstadjungierte Realisierung von τ. $\square$

Satz 2.4.8. *Sei τ bei a und bei b im Grenzkreisfall. Dann ist ein Operator A genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit getrennten Randbedingungen, wenn $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in [0, \pi)$ existieren, sodass*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_1(f)\cos\varphi_\alpha - \alpha_2(f)\sin\varphi_\alpha = 0 \\ \beta_1(f)\cos\varphi_\beta - \beta_2(f)\sin\varphi_\beta = 0 \end{array} \right\}$$

und $Af = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(A)$.

Ein Operator A ist genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit gekoppelten Randbedingungen, wenn ein $\varphi \in [0, \pi)$ und ein $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det R = 1$ *existieren, sodass*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} \beta_1(f) \\ \beta_2(f) \end{pmatrix} = e^{i\varphi} R \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \alpha_2(f) \end{pmatrix} \right\}$$

und $Af = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(A)$.

Beweis. Nach Lemma 2.4.4 sind die selbstadjungierten Realisierungen mit getrennten Randbedingungen, genau die im Satz angegebenen Operatoren. Es bleibt also nur die zweite Behauptung zu zeigen. Ist A eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit gekoppelten Randbedingungen und Matrizen $B_a, B_b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ wie in Satz 2.4.7, so sind wegen (2.4) die Ränge von B_a und von B_b gleich und entweder 1 oder 2.

Wären die Ränge 1, so wäre für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$B_a \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (c_1 z_1 + c_2 z_2)\, w_a \quad \text{und} \quad B_b \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (d_1 z_1 + d_2 z_2)\, w_b$$

$$\text{mit geeigneten } \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, w_a, w_b \in \mathbb{C}^2 \backslash \{0\}.$$

Da w_a und w_b wegen $\operatorname{rg}(B_a|B_b) = 2$ linear unabhängig sind, gilt

$$B_a \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = B_b \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad B_a \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = B_b \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Insbesondere gilt

$$B_a J B_a^* = B_b J B_b^* \quad \Leftrightarrow \quad B_a J B_a^* = B_b J B_b^* = 0.$$

Sei nun $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit $\alpha_2(\overline{v}) = c_1$ und $\alpha_1(\overline{v}) = -c_2$. Dann rechnet man nach, dass

$$\begin{aligned} 0 = B_a J B_a^* &= (\overline{c_1} c_2 - c_1 \overline{c_2}) w_a \overline{w_a}^T \\ &= W(u_1, u_2)(a)(\alpha_1(v)\alpha_2(\overline{v}) - \alpha_2(v)\alpha_1(\overline{v})) w_a \overline{w_a}^T \\ &= W(u_1, u_2)(a) W(v, \overline{v})(a) w_a \overline{w_a}^T \end{aligned}$$

gilt. Also ist $W(v, \overline{v})(a) = 0$ und wegen $(\alpha_1(v), \alpha_2(v)) = (c_2, c_1) \neq 0$ erfüllt v (2.1a). Wegen

$$B_a \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \alpha_2(f) \end{pmatrix} = (\alpha_1(f)\alpha_2(\overline{v}) - \alpha_2(f)\alpha_1(\overline{v})) w_a = W(f, \overline{v})(a) w_a$$

gilt

$$B_a \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \alpha_2(f) \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W(f, \overline{v})(a) = 0.$$

Entsprechend erhält man eine Funktion $w \in \mathcal{D}(T_{\max})$, die (2.1b) erfüllt und für die gilt

$$B_b \begin{pmatrix} \beta_1(f) \\ \beta_2(f) \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W(f, \overline{w})(b) = 0.$$

Der Operator A wäre also keine selbstadjungierte Realisierung von τ mit gekoppelten Randbedingungen.

Die Ränge von B_a und B_b müssen daher 2. Setzt man $B = B_b^{-1} B_a$, so folgt aus $B_a J B_a^* = B_b J B_b^*$, dass $B = J(B^{-1})^* J^*$ gilt und daher $|\det B| = 1$, also $\det B = e^{i2\varphi}$ für ein $\varphi \in [0, \pi)$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} &= J(B^{-1})^* J^* = e^{i2\varphi} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{b_{22}} & -\overline{b_{21}} \\ -\overline{b_{12}} & \overline{b_{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= e^{i2\varphi} \begin{pmatrix} \overline{b_{11}} & \overline{b_{12}} \\ \overline{b_{21}} & \overline{b_{22}} \end{pmatrix} = e^{i2\varphi} \overline{B}. \end{aligned}$$

Setzt man $R = e^{-i\varphi} B$, so ist wegen

$$R - \overline{R} = e^{-i\varphi} B - e^{i\varphi} \overline{B} = e^{-i\varphi} e^{i2\varphi} \overline{B} - e^{i\varphi} \overline{B} = 0$$

$R \in \mathbb{R}^2$ und

$$\det R = \det e^{-i\varphi} B = e^{-i2\varphi} \det B = 1.$$

Wegen

$$B_a \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \alpha_2(f) \end{pmatrix} = B_b \begin{pmatrix} \beta_1(f) \\ \beta_2(f) \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \beta_1(f) \\ \beta_2(f) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \alpha_2(f) \end{pmatrix} = e^{i\varphi} R \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \alpha_2(f) \end{pmatrix}$$

hat A die geforderte Darstellung.

Ist nun umgekehrt ein Operator A wie in der zweiten Behauptung gegeben, so folgt aus Satz 2.4.7, dass A selbstadjungiert ist. Wäre A eine selbstadjungierte Realisierung mit getrennten Randbedingungen, so gäbe es ein $f \in \mathcal{D}(A) \backslash \mathcal{D}(T_{\min})$, dass in einer Umgebung von a verschwindet.

Dann würde auch $\beta_1(f) = \beta_2(f) = 0$ gelten und daher $f \in \mathcal{D}(T_{\min})$. Also kann A keine selbstadjungierte Realisierung mit getrennten Randbedingungen sein. $\square$

Mit Proposition 2.4.2 erhalten wir nun unmittelbar, folgende Darstellungen der selbstadjungierten Realisierungen, falls τ regulär ist.

KOROLLAR 2.4.9. *Ist τ regulär, so ist ein Operator A genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit getrennten Randbedingungen, wenn $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in [0, \pi)$ existieren, sodass*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \;\middle|\; \begin{array}{l} f(a)\cos\varphi_\alpha - f^{[1]}(a)\sin\varphi_\alpha = 0 \\ f(b)\cos\varphi_\beta - f^{[1]}(b)\sin\varphi_\beta = 0 \end{array} \right\}$$

und $Af = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(A)$.

Ein Operator A ist genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit gekoppelten Randbedingungen, wenn ein $\varphi \in [0, \pi)$ und ein $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det R = 1$ *existieren, sodass*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} f(b) \\ f^{[1]}(b) \end{pmatrix} = e^{i\varphi} R \begin{pmatrix} f(a) \\ f^{[1]}(a) \end{pmatrix} \right\}$$

und $Af = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(A)$.

Literaturverzeichnis

[1] Joachim Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen Teil 1: Grundlagen*, Teubner, 2000.

[2] ———, *Lineare Operatoren in Hilberträumen Teil 2: Anwendungen*, Teubner, 2003.

[3] Franz Rellich and Konrad Jörgens, *Eigenwerttheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Springer, 1976.

[4] Anton Zettl, *Sturm-Liouville theory*, American Mathematical Soc., 2005.