Beweis der Bieberbachschen Vermutung

Philipp Grohs
Projektpraktikum aus Technischer Mathematik
Betreut von Ao. Prof. Michael Kaltenbäck

29. Juni 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Geschichte

Die Bieberbachsche Vermutung besagt, dass für eine konforme Abbildung

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

von der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ in die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ die folgende Abschätzung gilt:

$$(BV) \qquad\qquad |a_n| \leq n|a_1|.$$

Diese Vermutung wurde von Bieberbach im Jahre 1916 aufgestellt und für $n = 2$ bewiesen. Löwner hat dann 1923, indem er das Problem auf gewisse einfachere Funktionen zurückführte, (BV) für $n = 3$ bewiesen, und Nehari konnte mit derselben Methode 1973 (BV) für $n = 4, 5, 6$ bewiesen. Milin hat 1971 eine Folge von Funktionalen

$$log\left(\frac{f(z)}{f'(0)z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\gamma_n z^n,$$

$$I_n := \sum_{m=0}^{n-1} (n-m)\left(m|\gamma_n| - \frac{1}{m}\right)$$

gefunden, deren Nichtpositivität die Bieberbachsche Vermutung impliziert. Die Nichtpositivität dieser Funktionale ist als die Milinsche Vermutung bekannt.

$$(MV) \qquad\qquad I_n(f) \leq 0.$$

Im Jahre 1984 konnte Louis de Branges (MV) und somit auch (BV) beweisen (siehe [1]). Er benutzte dafür die Theorie der Löwner Familien gemeinsam mit einigen anderen (z.T. Operatortheoretischen) Hilfsmitteln.

In dieser Arbeit behandle ich einen vereinfachten Beweis der Bieberbachschen Vermutung. Meiner Meinung nach ist die hier präsentierte Version des Beweises übersichtlicher als die bisher (z. B. in [4]) präsentierte. Gleichzeitig gehe ich auf eine gruppentheoretische Interpretation gewisser im Beweis auftretender Funktionen ein, die eng mit der Theorie der sphärischen Funktionen auf Gelfandpaaren verwoben ist (siehe auch [2]).

1.2 Einige Definitionen

Definition 1.2.1 *Die folgenden Definitionen werden benötigt:*

- $f : G \to \mathbb{C}$, G *Gebiet heißt konform (univalent), falls* f *holomorph und injektiv ist.*
- f *heißt Riemannabbildung, falls f konform ist und* $G = \mathbb{D}$ *gilt.*
- *Eine Riemannabbbildung* f *heißt normalisiert, falls* $f'(0) = 1$.
- $\mathcal{R} := \{f : \ f \ \ \text{normalisierte Riemannabb.}\}$.
- $\mathcal{B} := \{f \in \mathcal{R} : \ f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}\}$.

Bemerkung 1.2.2 *Es gilt:*

- *Die Ableitung einer konformen Abbildung verschwindet in keinem Punkt.*
- *Falls* $B \in \mathcal{B}$ *ist, so gilt wegen des Lemmas von Schwartz* $B'(0) < 1$.
- *Sei* G *ein einfach zusammenhängendes Gebiet und* $a \in G$. *Dann kann man in eindeutiger Weise eine Riemannabbildung finden, sodass die Einheitskreisscheibe auf* G *und* 0 *auf* a *abgebildet wird und die Ableitung dieser Funktion positiv ist. (Riemannscher Abbildungssatz)*

2 Die Milinsche Vermutung

Die Milinsche Vermutung lautet:

Sei $f \in \mathcal{R}$ und seien $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$log\left(\frac{f(z)}{zf'(0)}\right) = 2\gamma_1 z + 2\gamma_2 z^2 + \cdots \tag{2.1}$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$n\cdot 1|\gamma_1|^2 + (n-1)\cdot 2|\gamma_2|^2 + \cdots + 1\cdot n|\gamma_n|^2 \leq$$

$$n\cdot 1\frac{1}{1^2} + (n-1)\cdot 2\frac{1}{2^2} + \cdots 1\cdot n\frac{1}{n^2}.$$

Wir zeigen, dass aus der Milinschen Vermutung die Bieberbachsche Vermutung folgt. Dazu benötigen wir den folgenden Satz über formale Potenzreihen, der als Lebedev-Milin Ungleichung bekannt ist:

Satz 2.0.3 *Seien $(A_n)_{n\geq 1}$ und $(D_n)_{n\geq 0}$ komplexe Folgen mit $D_0 = 1$, sodass (als formale Potenzreihen aufgefasst) die folgende Relation gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n z^n = exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n\right). \tag{2.2}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ und für

$$\Theta_n := \left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}|D_j|^2\right) exp\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(n-m)(\frac{1}{m} - m|A_m|^2)\right)$$

gilt

$$\Theta_n \leq 1,$$

und

$$\Theta_{n+1} \leq \Theta_n.$$

Beweis:
Wenn man auf (2.2) den formalen Ableitungsoperator $\frac{d}{dz}$ anwendet, so erhält man

$$\sum_{m=0}^{\infty} mD_m z^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} D_m z^m \left(\sum_{m=1}^{\infty} mA_m z^{m-1}\right)$$

Koeffizientenvergleich ergibt für $n \geq 1$

$$nD_n = \sum_{m=1}^{n} mA_m D_{n-m} = \langle (mA_m)_{m=1}^{n}, (D_{n-m})_{m=1}^{n} \rangle \,,$$

wobei $< \cdot,\cdot >$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^{n-1}$ bezeichet. Aus der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung folgt daher:

$$n^2|D_n|^2 \leq \left(\sum_{m=1}^{n} |mA_m|^2\right)\left(\sum_{m=0}^{n-1} |D_m|^2\right).$$

Daraus folgt für $\tau_n := \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} |mA_m|^2$:

$$|D_n|^2 \leq \frac{\tau_n}{n}\sum_{m=0}^{n-1} |D_m|^2$$

Wir wollen zeigen, dass $\frac{\Theta_{n+1}}{\Theta_n} \leq 1, \quad n \geq 1$. Es gilt:

$$\frac{\Theta_{n+1}}{\Theta_n} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{\sum_{m=0}^{n-1}|D_m|^2 + |D_n|^2}{\sum_{m=0}^{n-1}|D_m|^2}\right) \times$$

$$\times exp\left(\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n+1}(n+1-m)\left(\frac{1}{m} - m|A_m|^2\right) - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(n-m)\left(\frac{1}{m} - m|A_m|^2\right)\right) \tag{2.3}$$

Aus den obigen Überlegungen folgt

$$\frac{\sum_{m=0}^{n-1}|D_m|^2 + |D_n|^2}{\sum_{m=0}^{n-1}|D_m|^2} \leq 1 + \frac{\tau_n}{n}.$$

Wegen

$$\sum_{m=1}^{n+1}(n+1-m)\left(\frac{1}{m} - m|A_m|^2\right) = \sum_{m=1}^{n}(n+1-m)\left(\frac{1}{m} - m|A_m|^2\right)$$

kann man das Argument von *exp* in (2.3) wie folgt umschreiben:

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n+1}(n+1-m)\left(\frac{1}{m} - m|A_m|^2\right) - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(n-m)\left(\frac{1}{m} - m|A_m|^2\right)\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m} - m|A_m|^2 - \frac{1}{n+1} + \frac{m^2}{n+1}|A_m|^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{m} + m|A_m|^2 + \frac{1}{n} - \frac{m^2}{n}|A_m|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{m=1}^{n} |mA_m|^2 = \frac{1}{n+1} - \frac{\tau_n}{n+1}.$$

Setzt man diese Ergebnisse in (2.3) ein, so erhält man

$$\frac{\Theta_{n+1}}{\Theta_n} \leq \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{\tau_n}{n}\right) exp\left(\frac{1}{n+1} - \frac{\tau_n}{n+1}\right). \tag{2.4}$$

Definiert man nun

$$x_n := \frac{1}{n+1} - \frac{\tau_n}{n+1},$$

so schreibt sich (2.4) als

$$\frac{\Theta_{n+1}}{\Theta_n} \leq (1 - x_n)e^{x_n},$$

und wie eine elementare Kurvendiskussion zeigt ist die rechte Seite kleiner oder gleich 1. Schließlich gilt

$$\Theta_n \leq \Theta_{n-1} \leq \cdots \leq \Theta_1 = 1.$$

□

Damit kann bewiesen werden, dass aus der Milinschen Vermutung die Bieberbachsche Vermutung folgt:

Satz 2.0.4 *Die Milin'sche Vermutung impliziert die Bieberbach'sche Vermutung*

Beweis:
Sei $f(z) \in \mathcal{R}$. Wir fordern o.B.d.A., dass $f'(0) = 1$. Zu zeigen ist, dass, wenn man die Milinsche Vermutung als gegeben voraussetzt, für die Taylorkoeffizienten f_n von f gilt:

$$|f_n| \leq n.$$

Definiere

$$g(z) := \left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + D_1 z + D_2 z^2 + \cdots$$ [1]

Dann gilt

$$zg(z)^2 = f(z),$$

also

$$f_n = \sum_{m=0}^{n-1} D_m D_{n-1-m}.$$

Aus der Cauchy-Schwartz-Ungleichung folgt

$$|f_n| \leq \sum_{m=0}^{n-1} |D_m|^2. \tag{2.5}$$

[1] Die Existenz von $g(z)$ folgt aus der Tatsache, dass $f(z) = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ und dem Monodromiesatz.

Außerdem gilt (siehe (2.1))

$$log(g(z)) = \frac{1}{2} log\left(\frac{f(z)}{z}\right) = \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \cdots.$$

Aus der Milin-Lebedev-Ungleichung und aus (2.5) folgt

$$\frac{1}{n}|f_n| \leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}|D_j|^2 \leq exp\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(n-m)\left(m|\gamma_m|^2 - \frac{1}{m}\right)\right).$$

Die Milinsche Vermutung besagt aber nichts anderes, als

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(n-m)\left(m|\gamma_m|^2 - \frac{1}{m}\right) \leq 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{n}|f_n| \leq 1.$$

□

3 Beweis der Milinschen Vermutung

3.1 Löwnerfamilien

Es ist nicht nötig, die Milinsche Vermutung für alle Funktionen in $\mathcal{R}$ zu zeigen. Es genügt (MV) für gewisse Elemente in $\mathcal{B}$, nämlich genau für die Elemente einer zu einer Löwnerfamilie[1] assoziierten Halbgruppe, zu verifizieren.

Definition 3.1.1 *Seien f, g analytisch auf $\mathbb{D}$.*

- *f heißt von g dominiert (subordinate), wenn es ein $B \in \mathcal{B}$ gibt, sodass gilt: $f = g \circ B$. Man schreibt dann $f \prec g$.*
- *Eine maximale Kette auf der Halbordnung $(\mathcal{R}, \prec)$ heißt Löwnerfamilie*

Bemerkung 3.1.2 *Die folgenden Eigenschaften sind wichtig:*

- *$(\mathcal{R}, \prec)$ ist eine Halbordnung, denn es gilt:*

$$f \prec g \Leftrightarrow f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D}).$$

  In diesem Fall ist $f'(0) \leq g'(0)$, und es gilt Gleichheit genau dann, wenn $f'(0) = g'(0)$.

- *Nach dem Lemma von Zorn existiert zu jeder Kette (also auch zu jeder Funktion $\in \mathcal{R}$) eine Löwnerfamilie, die die Kette enthält.*
- *Aus obigem folgt, dass, wenn $\mathfrak{L}$ eine Löwnerfamilie ist, die Abbildung*

$$\kappa : \begin{cases} \mathfrak{L} & \rightarrow & (0, \infty) \\ f & \mapsto & f'(0) \end{cases}$$

  injektiv ist.

- *Mit einem Argument aus der geometrischen Funktionentheorie (Konvergenzsatz von Caratheodory) kann man zeigen, dass die Abbildung κ auch surjektiv ist.*
- *Insbesondere kann man jede Löwnerfamilie $\mathfrak{L}$ so parametrisieren, dass*

$$\mathfrak{L} = \{f(t, z)\}_{0<t<\infty}$$

  und

$$f(t, z) = tz + f_2(t)z^2 + \cdots.$$

[1] Die Beweise für die in diesem Kapitel gemachten Aussagen findet man z.B. in [4]

Ist nun eine Löwnerfamilie $\mathfrak{L} = \{f(t,z)\}_{0<t<\infty}$ gegeben und ist $0 < a \le b < \infty$, so gibt es definitionsgemäß ein $B = B(b,a,z) \in \mathcal{B}$, sodass

$$f(a,z) = f(b, B(b,a,z)).$$

Die Familie $\{B(b,a,z)\}_{0<a\le b<\infty}$ heißt die zu $\mathfrak{L} = \{f(t,z)\}_{0<t<\infty}$ assoziierte Halbgruppe.

Bemerkung 3.1.3 *Die Halbgruppe erfüllt die folgenden Eigenschaften:*

- *Es gilt für $0 < a \le b \le c < \infty$:*

  $$B(c,b,B(b,a,z)) = B(c,a,z).$$

  (daher der Name Halbgruppe)

- $$f(a,z) = \lim_{b\to\infty} bB(b,a,z) \quad \textit{lokal glm.} \quad \forall a \in (0,\infty). \tag{3.1}$$

- $$\frac{d}{dz}B(b,a,z)|_{z=0} = \frac{b}{a}. \tag{3.2}$$

Definition 3.1.4 *Die folgenden Definitionen werden benötigt:*

- *Sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analytisch. φ heißt normierte Herglotzfunktion, falls $\varphi(0) = 1$ und $\Re\varphi(z) \ge 0$, für alle $z \in \mathbb{D}$, gilt.*
- *$\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{C}$ heißt Herglotzfamilie, falls die Abbildung $z \mapsto \varphi(t,z)$ eine Herglotzfunktion ist, und die Abbildung $t \mapsto \varphi(t,z)$ messbar ist.*

Bemerkung 3.1.5 *Wie man leicht mit Hilfe der Poissonschen Integralformel sieht, ist eine Funktion φ genau dann eine normierte Herglotzfunktion, wenn ein positives Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf dem Torus existiert, sodass gilt:*

$$\varphi(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta). \tag{3.3}$$

Wenn es eine Funktion $B \in \mathcal{B}$ gibt, sodass $\varphi = \frac{1-B}{1+B}$, so ist φ eine Herglotzfunktion.

Es gilt der folgende fundamentale

Satz 3.1.6 *(Löwnersche Differentialgleichung)*
Sei $\mathfrak{L} = \{f(t,z)\}_{0<t<\infty}$ eine Löwnerfamilie. Dann gibt es genau eine Herglotzfamilie $\varphi(t,z)$[2]*, sodass*

$$t\frac{\partial}{\partial t}f(t,z) = \varphi(t,z)z\frac{\partial}{\partial z}f(t,z) \tag{3.4}$$

für fast alle $t \in (0,\infty)$ gilt. Sei weiters $\{B(b,a,z)\}_{0<a\leq b<\infty}$ die zu $\mathfrak{L}$ assoziierte Halbgruppe. Dann gilt bis auf eine feste Nullmenge N:

1. *Für $b \in (0,\infty)$, $s \in (0,b) \setminus N$:*

$$s\frac{\partial}{\partial s}B(b,s,z) = \varphi(s,z)z\frac{\partial}{\partial z}B(b,s,z). \tag{3.5}$$

2. *Für $a \in (0,\infty)$, $t \in (a,\infty) \setminus N$:*

$$t\frac{\partial}{\partial t}B(t,a,z) = -\varphi(t,B(t,B(t,a,z)))B(t,a,z). \tag{3.6}$$

Bemerkung 3.1.7 *Wie man zeigen kann, sind alle auftretenden Ableitungsoperatoren, die in Satz 10 verwendet wurden, im Sinne der Radon-Nikodym-Ableitung, wohldefiniert.*

Löwnerfamilien und Herglotzfamilien stehen in bijektivem Zusammenhang zueinander. Es gilt

Satz 3.1.8 *Sei $\varphi(t,z)$ eine Herglotzfamilie. Dann gibt es genau eine Löwnerfamilie $\mathfrak{L} = \{f(t,z)\}_{0<t<\infty}$, die (3.4) erfüllt.*

Man zeigt Satz 3.1.8 indem man die Differentialgleichung (3.6) in eindeutiger Weise löst. Daraus erhält man eine Familie $B(b,a,z)$, von der man zeigt, dass sie in eindeutiger Weise eine Löwnerfamilie erzeugt (siehe (3.1)).

3.2 Der Beweis

Da die I_n stetige Funktionale sind, und jede Funktion $f \in \mathcal{R}$ in einer Löwnerfamilie $\mathfrak{L}$ enthalten ist, genügt es nach (3.1) die Milin'sche Vermutung für die Funktionen aus der zu $\mathfrak{L}$ assoziierten Halbgruppe zu zeigen.

Es genügt also die Nichtpositivität der I_n für Funktionen $B(b,a,z)$ zu beweisen.

Ein wichtiges Hilfsmittel ist der folgende Satz, dessen Beweis auf das nächste Kapitel verschoben wird:

[2] Wir identifizieren Herglotzfamilien, die sich nur auf Nullmengen unterscheiden.

Satz 3.2.1 *Sei $a > 0$ und $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$. Dann existieren*

$$\sigma_1(t), \sigma_2(t), \cdots \quad \in AC\,[a, \infty)\,,$$

sodass

- $$\sigma_n(t) \equiv 0 \qquad \forall n > r,$$

  und
  $$\sigma_n(t) + t\frac{1}{n}\sigma_n'(t) = \sigma_{n+1}(t) - t\frac{1}{n+1}\sigma_{n+1}'(t), \quad n \geq 1, \tag{3.7}$$

- $$(\sigma_1(a), \sigma_2(a), \cdots, \sigma_r(a), \sigma_{r+1}(a), \cdots) = (r, r-1, \cdots, 1, 0, \cdots), \tag{3.8}$$

- $$\sigma_{n+1}'(t) \leq 0 \qquad \textit{für fast alle } t \in [a, \infty)\,, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Bemerkung 3.2.2 *Funktionen, die die Eigenschaften (3.7) und (3.8) erfüllen, findet man unmittelbar durch Lösen der Differentialgleichung. Aufwändiger zu beweisen, und Gegenstand des nächsten Kapitels, ist die Eigenschaft (3.9).*

Bemerkung 3.2.3 *Aus (3.7) folgt*

$$\sigma_n(t) = -2\sum_{m=n+1}^{r}\frac{1}{m}t\sigma_m'(t) - \frac{1}{n}t\sigma_n'(t).$$

Mit (3.9) folgt daher

$$\sigma_n(t) \geq 0, \quad n = 1, 2, \cdots, r.$$

Es gilt sogar $\sigma_n(t) > 0$, denn für $n = r$ kann man die Lösung $\sigma_n(t)$ explizit angeben, und zwar gilt dann

$$\sigma_r(t) = a^r t^{-r}.$$

Daraus folgt

$$\sigma_r'(t) < 0.$$

Wenn man das in die obige Summe einsetzt, so erhält man

$$\sigma_n(t) > 0\ , \quad n = 1, 2, \cdots, r.$$

Damit kann man einen Pontryaginraum wie folgt konstruieren:

Definition 3.2.4 *Sei $r > 1$, $a > 0$ und $t \in [a, \infty)$. Definiere*

$$G_t^r := \{g(z) : g \textit{ holomorph auf } \mathbb{D} \setminus [0,1] : g(z) = \alpha \cdot ln(z) + \varphi(z),\ \varphi \textit{ holomorph auf } \mathbb{D}\}$$

mit dem folgenden (indefiniten) Skalarprodukt:

$$[g(z), h(z)]_t^r := \sum_{n=1}^{r}(a_n\overline{b_n})n\sigma_n(t) - 4\alpha\beta\sum_{n=1}^{r}\frac{\sigma_n(t)}{n},$$

wobei

$$g(z) = \alpha \cdot ln(z) + a_0 + a_1 z + \cdots$$

und

$$h(z) = \beta \cdot ln(z) + b_0 + b_1 z + \cdots \ .$$

Definition 3.2.5 *$(G_t^r)^\circ$ bezeichne den Teilraum von G_t^r, der aus den isotropen Vektoren besteht:*

$$(G_t^r)^\circ = \{g \in G_t^r : [g, h]_t^r = 0 \quad \forall h \in G_t^r\}.$$

Bemerkung 3.2.6 *In unserem Fall gilt*

$$(G_t^r)^\circ = \{g \in G_t^r : g(z) = a_0 + a_{r+1}z^{r+1} + a_{r+2}z^{r+2} + \cdots\}.$$

Bemerkung 3.2.7 *Da nach (3.9) und Bemerkung 3.2.3*

$$\sum_{n=1}^{r}\frac{\sigma_n(t)}{n} > 0$$

gilt, ist

$$\left(G_t^r/_{(G_t^r)^\circ}, [\cdot,\cdot]_t^r\right)$$

ein $(r+1)$ - dimensionaler Pontryaginraum mit negativem Index 1 und der Grammatrix

$$J_t^r = diag\left(-4\sum_{k=1}^{r}\frac{\sigma_n(t)}{n}, 1\cdot\sigma_1(t), \cdots, r\cdot\sigma_r(t)\right),$$

wobei wir eine Funktion $g = \alpha ln z + a_0 + a_1 z + \cdots + (G_t^r)^\circ \in G_t^r/_{(G_t^r)^\circ}$ mit dem Vektor

$$(\alpha, a_1, \cdots, a_r)^T$$

identifizieren, sodass

$$[g, h]_t^r = \left\langle J_t^r(\alpha, a_1, \cdots, a_r)^T, (\beta, b_1, \cdots, b_r)^T\right\rangle.$$

Definition 3.2.8 *Sei $0 < a \le t \le b < \infty$. Definiere den Einsetzungsoperator*

$$\tilde{C}_b^t : \begin{cases} G_b^r & \to & G_t^r \\ g(z) & \mapsto & g(B(b,t,z)) \end{cases}$$

Bemerkung 3.2.9 *Da im Allgemeinen nicht $B(b,t,z)(\mathbb{D}\setminus[0,1]) \subseteq \mathbb{D}\setminus[0,1]$ gilt, muss man den Operator $\tilde{C}_b^t$ durch formales Einsetzen definieren. Das heißt für $g(z) = \alpha ln(z) + \varphi(z)$ und $\varphi(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$ definiere*

$$g(B(b,t,z)) = \alpha ln(z) + \alpha ln\left(\frac{B(b,t,z)}{z\frac{t}{b}}\right) + \alpha ln(\frac{t}{b}) + \varphi \circ B(b,t,z) \tag{3.10}$$

Man erhält

$$g(B(b,t,z)) = \alpha ln(z) + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots,$$

für gewisse $b_n \in \mathbb{C}$, wobei die Werte $b_1, \cdots, b_r$ nur von $\alpha, a_1, \cdots, a_r$ abhängen. Also definiert $\tilde{C}_b^t$ einen Operator C_b^t von $G_b^r/_{(G_b^r)^\circ}$ nach $G_t^r/_{(G_t^r)^\circ}$.

Satz 3.2.10 *Ist der Operator C_b^a eine Kontraktion, also $[C_b^a g, C_b^a g]_a^r \leq [g,g]_b^r$, so folgt daraus die Milin'sche Vermutung.*

Beweis:
Sei $B(b,a,z)$ aus einer zu einer Löwnerfamilie assoziierten Halbgruppe. Wegen Bemerkung 3.1.3 gilt

$$ln\left(\frac{B(b,a,z)}{z\frac{a}{b}}\right) = ln\left(\frac{B(b,a,z)}{z\frac{d}{dz}B(b,a,z)|_{z=0}}\right) = 2\gamma_1 z + 2\gamma_2 z^2 + \cdots .$$

Setzt man $g(z) := ln(z)$, so gilt

$$[C_b^a(g(z)), C_b^a(g(z))]_a^r =$$

$$= \left[ln(z) + ln\left(\frac{B(b,a,z)}{z\frac{a}{b}}\right) + ln\left(\frac{a}{b}\right), ln(z) + ln\left(\frac{B(b,a,z)}{z\frac{a}{b}}\right) + ln\left(\frac{a}{b}\right)\right]_a^r =$$

$$= \sum_{n=1}^{r} n\sigma_n(a) 4|\gamma_n|^2 - 4\sum_{n=1}^{r}\frac{\sigma_n(a)}{n} \leq [g(z), g(z)]_b^r = -4\sum_{n=1}^{r}\frac{\sigma_n(b)}{n} \leq 0.$$

Nach Satz 3.2.1 gilt aber

$$\sigma_n(a) = r + 1 - n,$$

und Einsetzen in die obige Ungleichung ergibt daher

$$\sum_{n=1}^{r}(r+1-n)\left(|\gamma_n|^2 n - \frac{1}{n}\right) \leq 0.$$

Das beweist (MV).

□

Eine weitere Vereinfachung ergibt das folgende

Lemma 3.2.11 *Wenn für fast alle $t \in [a,b]$ die Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}\left[C_b^t(g(z)), C_b^t(g(z))\right]_t^r$ existiert, und die Ungleichung*

$$t\frac{\partial}{\partial t}\left[C_b^t(g(z)), C_b^t(g(z))\right]_t^r \geq 0 \tag{3.11}$$

erfüllt ist, so folgt daraus die Milinsche Vermutung.

Beweis:
Wegen dem obigen Satz und weil $t > 0$ ist, genügt es zu zeigen, dass aus

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[C_b^t(g(z)), C_b^t(g(z))\right]_t^r \geq 0 \tag{3.12}$$

folgt, dass die Abbildung C_b^a eine Kontraktion ist.
(3.12) besagt, dass die Abbildung $t \mapsto [C_b^t(g(z)), C_b^t(g(z))]_t^r \quad (a \leq t \leq b)$ monoton steigend ist. Setzt man $t = a$ und $t = b$, so erhält man die Behauptung.

□

Das Ziel ist es also zu zeigen, dass fast überall

$$t\frac{\partial}{\partial t}\left\langle J_t^r C_b^t(g(z)), C_b^t(g(z))\right\rangle \geq 0. \tag{3.13}$$

Mit der Produktregel lässt sich (3.13) schreiben als

$$t\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t}J_t^r\right) C_b^t(g(z)), C_b^t(g(z))\right\rangle + \left\langle J_t^r\left(t\frac{\partial}{\partial t}C_b^t(g(z))\right), C_b^t(g(z))\right\rangle + \\ + \left\langle J_t^r C_b^t(g(z)), \left(t\frac{\partial}{\partial t}C_b^t(g(z))\right)\right\rangle \geq 0. \tag{3.14}$$

Es gilt das folgende

Lemma 3.2.12 *Sei $g \in G_b^r$. Dann gilt fast überall*

$$t\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{C}_b^t g) = \varphi(t,z)z\frac{\partial}{\partial z}(\tilde{C}_b^t g) \tag{3.15}$$

für eine Herglotzfamilie φ (d.h. $\tilde{C}_b^t g$ erfüllt die Löwnersche Differentialgleichung).

Beweis: Sei $z \in \mathbb{D} \setminus [0,1]$. Durch Einsetzen in die Definition und Anwendung der Kettenregel, sowie der Löwner'schen Differentialgleichung für $B(b,t,z)$ erhält man

$$t\frac{\partial}{\partial t}g(B(b,t,z)) = t\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha ln(z) + \alpha ln\left(\frac{B(b,t,z)}{z\frac{t}{b}}\right) + \alpha ln(\frac{t}{b}) + \Phi \circ B(b,t,z)\right) =$$
$$= \varphi(t,z)z\frac{\alpha}{B(b,t,z)}\frac{\partial}{\partial z}B(b,t,z) + \varphi(t,z)z\frac{\partial}{\partial z}(\Phi \circ B(b,t,z)) =$$
$$= \varphi(t,z)z\frac{\partial}{\partial z}g(B(b,t,z))$$

für fast alle $t \in [a,b]$.

□

Sei

$$C_b^t g = (\beta, b_1, \cdots, b_r).$$

Wir ordnen g einen Repraesentanten $\tilde{g} \in G_b^r$ in der Restklasse modulo dem Isotropen Teilraum $(G_b^r)^\circ$ zu. Ist

$$\tilde{C_b^t}\tilde{g} = \beta ln z + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_r z^r + b_{r+1} z^{r+1} \cdots,$$

und schreibt man die Funktion φ aus Lemma 3.2.12 als

$$\varphi(t,z) = 1 + z\varphi_1(t) + z^2\varphi_2(t) + \cdots,$$

so erhält man

$$\varphi(t,z) z \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{C_b^t}\tilde{g}) = \varphi(t,z)\left(\beta + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n z^n\right) =$$

$$= \beta + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left(\beta\varphi_n(t) + n b_n + \sum_{j=1}^{n-1} j b_j \varphi_{n-j}(t)\right) =$$

$$= \delta ln z + d_0 + d_1 z + \cdots + d_r z^r + \cdots.$$

Faktorisiert man wieder modulo dem Isotropen Teilraum, so erhält man

$$\begin{pmatrix} \delta \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \end{pmatrix} = M_t \begin{pmatrix} \beta \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix},$$

mit

$$M_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_1(t) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_2(t) & 1\cdot\varphi_1(t) & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_3(t) & 1\cdot\varphi_2(t) & 2\cdot\varphi_1(t) & 3 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_r(t) & 1\cdot\varphi_{r-1}(t) & 2\cdot\varphi_{r-1}(t) & 3\cdot\varphi_{r-2}(t) & \cdots & r \end{pmatrix}.$$

Setzt man

$$A := t\frac{\partial}{\partial t} J_t^r + J_t^r M_t + M_t^* J_t^r,$$

so ist (3.14) äquivalent zu

$$\left\langle A \begin{pmatrix} \beta \\ b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} \right\rangle \geq 0. \tag{3.16}$$

Es genügt also zu zeigen, dass A positiv semidefinit ist. Da J_t^r selbstadjungiert ist, ist $M_t^* J_t^r = (J_t^r M_t)^*$.

$$J_t^r M_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1\sigma_1\varphi_1 & 1^2\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2\sigma_2\varphi_2 & 2\sigma_2 1\varphi_1 & 2^2\sigma_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3\sigma_3\varphi_3 & 3\sigma_3 1\varphi_2 & 3\sigma_3 2\varphi_1 & 3^2\sigma_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\sigma_r\varphi_r & r\sigma_r 1\varphi_{r-1} & r\sigma_r 2\varphi_{r-2} & r\sigma_r 3\varphi_{r-3} r & r\sigma_r 4\varphi_{r-4} & \cdots & r^2\sigma_r \end{pmatrix}$$

Ausserdem gilt wegen

$$\sigma_n(t) = -2 \sum_{m=n+1}^{r} \frac{1}{m} t\sigma'_m(t) - \frac{1}{n} t\sigma'_n(t),$$

dass

$$-4t \sum_{n=1}^{r} \sigma_n(t) = 2\sigma_1(t) - 2t\sigma'_1(t).$$

Daraus folgt, dass

$$t\frac{\partial}{\partial t} J_t^r = diag\left(2\sigma_1(t) - 2t\sigma'_1(t), 1\sigma'_1(t), \cdots, r\sigma'_r(t)\right).$$

Aus diesen Überlegungen folgt

$$A = \begin{pmatrix} 2\sigma_1 - 2t\sigma'_1 & 1\overline{\varphi_1}\sigma_1 & 2\overline{\varphi_2}\sigma_2 & 3\overline{\varphi_3}\sigma_3 & \cdots & r\overline{\varphi_r}\sigma_r \\ 1\sigma_1\varphi_1 & 2\cdot 1^2\sigma_1 + 1t\sigma'_1 & 2\sigma_2 1\overline{\varphi_1} & 3\sigma_3 1\overline{\varphi_2} & \cdots & r\sigma_r 1\overline{\varphi_{r-1}} \\ 2\sigma_2\varphi_2 & 2\sigma_2 1\varphi_1 & 2\cdot 2^2\sigma_2 + 2t\sigma'_2 & 3\sigma_3 2\overline{\varphi_1} & \cdots & r\sigma_r 2\overline{\varphi_{r-2}} \\ 3\sigma_3\varphi_3 & 3\sigma_3 1\varphi_2 & 3\sigma_3 2\varphi_1 & 2\cdot 3^2\sigma_3 + 3t\sigma'_3 & \cdots & r\sigma_r 3\overline{\varphi_{r-3}} \\ & & & & \ddots & \\ 4\sigma_4\varphi_4 & 4\sigma_4 1\varphi_3 & 4\sigma_4 2\varphi_2 & 4\sigma_4 3\varphi_1 & & r\sigma_r 4\overline{\varphi_{r-4}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r\sigma_r\varphi_r & r\sigma_r 1\varphi_{r-1} & r\sigma_r 2\varphi_{r-2} & r\sigma_r 3\varphi_{r-3} & \cdots & 2r^2\sigma_r + rt\sigma'_r \end{pmatrix}.$$

An dieser Stelle geht nun die Tatsache ein, dass $\varphi(t,z)$ eine Herglotzfamilie ist: Wegen der Integraldarstellung gilt:

$$\varphi(t,z) = 1 + \varphi_1(t)z + \varphi_2(t)z^2 + \cdots = \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu_t(\zeta)$$

für gewisse positive Borelmaße μ_t auf dem Torus. Daraus folgt sofort, dass

$$\varphi_j(t) = 2\int_{\mathbb{T}} \overline{\zeta}^j d\mu_t(\zeta).$$

Setzt man

$$U(\zeta) := diag(1, 1\zeta, \cdots, r\zeta^r),$$

so kann man A darstellen als

$$A = \int_{\mathbb{T}} U^*(\zeta) S(t) U(\zeta) d\mu_t(\zeta),$$

mit

$$S(t) = \begin{pmatrix} 2\sigma_1 - 2t\sigma_1' & 2\sigma_1 & 2\sigma_2 & \cdots & 2\sigma_3 \\ 2\sigma_1 & \frac{t\sigma_1'}{1} + 2\sigma_1 & 2\sigma_2 & \cdots & 2\sigma_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_r & 2\sigma_r & 2\sigma_r & \cdots & \frac{t\sigma_r'}{r} + 2\sigma_r \end{pmatrix}.$$

z.b. wegen der Stetigkeit des Integrals gilt:
Wenn die Matrix $U^*(\zeta)S(t)U(\zeta)$ für jeden Wert $\zeta \in \mathbb{T}$ positiv semidefinit ist, folgt, dass A positiv semidefinit ist.
Eine weitere Vereinfachung bringt das folgende

Lemma 3.2.13 *Wenn $S(t)$ positiv semidefinit ist, so folgt daraus, dass $U^*(\zeta)S(t)U(\zeta)$ positiv semidefinit ist.*

Beweis: Um diese Behauptung zu verifizieren, muss man zeigen, dass falls $S(t)$ positiv semidefinit ist, für jeden Vektor x gilt:

$$\langle U^*(\zeta)S(t)U(\zeta)x, x\rangle \geq 0.$$

Es gilt

$$\langle U^*(\zeta)S(t)U(\zeta)x, x\rangle = \langle (S(t)U(\zeta))x, U(\zeta)x\rangle \geq 0,$$

falls $S(t)$ positiv semidefinit ist.

□

Es muss also nur noch bewiesen werden, dass $S(t) \geq 0$ gilt:

Satz 3.2.14 *Die Matrix $S(t)$ ist positiv semidefinit.*

Beweis: Wir wissen, dass

$$\sigma_n(t) = -2\sum_{m=n+1}^{r} \frac{1}{m} t\sigma_m'(t) - \frac{1}{n} t\sigma_n'(t).$$

Daraus folgt, dass sich S(t) als Summe positiv definiter Matrizen schreiben lässt:

$$S(t) = t\frac{-\sigma_1'(t)}{1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}(2,1,0,0,\cdots,0) + t\frac{-\sigma_2'(t)}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}(2,2,1,0,\cdots,0) + \cdots$$

$$\cdots + t\frac{-\sigma_r'(t)}{r}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}(2,2,2,2,\cdots,1).$$

□

4 Konstruktion der Funktionen $\sigma_n(t)$

Man kann die Positivität der Funktionen $\sigma_n(t)$ ohne Wissen über Harmonische Analyse zeigen. Man führt die Positivität der σ_n's auf die Positivität der Hypergeometrischen Funktionen

$$F_2^3(n-r, r+n+2, n+\frac{1}{2}; 2n+1, n+\frac{3}{2}; s^{-1}),$$

$s \leq 1,\ n, r \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq r$ zurück. Die Positivität dieser Funktionen wird sodann auf die Tatsache zurückgeführt, dass für alle $n, r \in \mathbb{Z}$ eine Gleichung der Form

$$C_{r-n}^{n+1}(x) = \sum_{l=1}^{r} a_l C_{l-n}^{\frac{1}{2}+n}(x) \tag{4.1}$$

mit nichtnegativen Koeffizienten a_l besteht. C_m^λ sei hier ein Gegenbauerpolynom[1]. Die Gleichung (4.1) wird dann durch elementare Überlegungen bestätigt.

Man kann (4.1) aber auch ohne Rechnung erhalten:

Da $C_{r-n}^{n+1}(x)$ eine spärische Funktion auf dem Gelfandpaar $(SO(2n+4), SO(2n+3))$ ist und daher positiv definit ist, kann $C_{r-n}^{n+1}(x)$ als endliche Linearkombination der sphärischen Funktionen auf $(SO(2n+3), SO(2n+2))$ mit positiven Koeffizienten dargestellt werden.

An dieser Idee anknüpfend hat T. H. Koornwinder (siehe [2]) den Beweis der Positivität der Funktionen σ_n entscheidend vereinfacht. Diesen weniger technischen Beweis möchte ich hier auch führen. Dazu brauche ich einige Sachverhalte aus der Harmonischen Analyse, insbesondere aus der Theorie der Gelfandpaare, die ich im folgenden aufliste.

4.1 Gelfandpaare

Die folgenden Sätze und viel, viel mehr finden sich z.B. in [5].

Definition 4.1.1 *Sei G eine topologische Gruppe mit Haarmaß λ. Definiere Operatoren $L_x, R_x : L^2(G,\lambda) \to L^2(G,\lambda)$ durch $L_x f(y) := f(x^{-1}y)$ und $R_x f(y) := f(xy)$. L_x heißt Linkstranslation, R_x heißt Rechtstranslation. Ein Teilraum L von $L^2(G,\lambda)$ heißt rechtsinvariant, falls L invariant unter R_x ist, für alle $x \in G$. L heißt linksinvariant, falls L invariant unter L_x ist, für alle $x \in G$. L heißt translationsinvariant, falls L links- und rechtsinvariant ist. Ein linksinvarianter, rechtsinvarianter oder translationsinvarianter*

[1] Die Definition von Gegenbauerpolynomen folgt im nächsten Abschnitt

Teilraum L von $L^2(G,\lambda)$ heißt minimal, falls es keinen nichttrivialen Teilraum von L gibt, der linksinvariant, rechtsinvariant oder translationsinvariant ist.

Folgender Satz ist von großer Wichtigkeit:

Satz 4.1.2 *(Peter-Weyl)*
Sei G eine kompakte topologische Gruppe mit Haarmaß λ. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung von $L^2(G,\lambda)$ in minimale translationsinvariante Teilräume:

$$L^2(G,\lambda) = \bigoplus_{\sigma\in\Sigma} L_\sigma. \tag{4.2}$$

Die Räume L_σ werden von den sogenannten Koordinatenfunktionen $m^\sigma_{i,j},\ 1 \le i,j \le d_\sigma$ aufgespannt. Die Spalten der Matrix $\left(m^\sigma_{i,j}\right)_{1\le i,j\le d_\sigma}$ spannen minimale linksinvariante, und die Zeilen minimale rechtsinvariante Teilräume auf.
Es gilt

$$m^\sigma_{i,j}(gh) = \sum_{k=1}^{d_\sigma} m^\sigma_{i,k}(g)m^\sigma_{k,j}(h) \tag{4.3}$$

Definition 4.1.3 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und G eine topologische Gruppe. Ein Homomorphismus $\mathcal{U} : \begin{cases} G & \to & L(\mathcal{H}) \\ g & \mapsto & U_g \end{cases}$ von G in die Gruppe der linearen stetigen Abbildungen auf $\mathcal{H}$ mit der Komposition als Gruppenoperation heißt Darstellung von G in $\mathcal{H}$, falls $\mathcal{U}$ stetig in der starken Operatortopologie ist. Sind die Bilder unitäre Operatoren, so heißt die Darstellung unitär. Eine Darstellung $\mathcal{U}$ heißt irreduzibel, falls es keinen nichttrivialen Teilraum von $\mathcal{H}$ gibt, der invariant ist unter U_g für alle $g \in G$. Zwei Darstellungen $\mathcal{U}^1$ und $\mathcal{U}^2$ in $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ heissen äquivalent, falls es eine unitäre Abbildung $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ gibt, sodass für alle $x \in \mathcal{H}_1,\ g \in G$ gilt:*

$$UU^1_g x = U^2_g Ux.$$

Satz 4.1.4 *Sei $\mathcal{U}$ eine unitäre Darstellung von einer kompakten topologischen Gruppe G in $\mathcal{H}$. Dann gibt es eine Zerlegung*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$$

in minimale endlichdimensionale, $\mathcal{U}$ - invariante Teilräume $\mathcal{H}_i$. Die Einschränkung von $\mathcal{U}$ auf $\mathcal{H}_i$ ist zur Rechtstranslation auf einem minimalen rechtstranslationsinvarianten Teilraum des $L^2(G)$ äquivalent.

K bezeichne im folgenden eine abgeschlossene Untergruppe von G. Sei

$$\mathcal{U}_\sigma : G \to L(\mathcal{H}_\sigma)$$

eine irreduzible unitäre Darstellung von G. Schränkt man eine solche Darstellung von G zu einer Darstellung $\tilde{\mathcal{U}}_\sigma$ von K ein, so kann $\mathcal{H}_\sigma$ nichttriviale $\tilde{\mathcal{U}}_\sigma$ - invariante Teilräume besitzen, d.h. die Darstellung $\tilde{\mathcal{U}}_\sigma$ ist i.a. nicht mehr irreduzibel. Man kann daher die Operatoren $\tilde{U}_{\sigma_k}$ in Blockdiagonalmatrixform schreiben, wobei nach geeigneter Wahl der Basis in der linken oberen Ecke eine (evtl. 0 - Dimensionale) Einheitsmatrix steht. Die Zahl n_σ bezeichne die Dimension dieser Einheitsmatrix, die nicht von der gewählten Darstellung abhängt. Ohne viel Mühe erhält man den folgenden

Satz 4.1.5 *Sei*

$$f(x) = \sum_{\sigma \in \Sigma} d_\sigma \sum_{1 \leq i,j \leq d_\sigma} a^\sigma_{i,j} m^\sigma_{i,j}(x)$$

die (Fourier-) Entwicklung einer Funktion $f \in L^2(G)$ wie im Satz von Peter-Weyl. Dann gilt bei geeigneter Wahl der Basis:

1. *f ist rechts K-invariant (d.h. $f(xy) = f(x), \quad x \in G, y \in K$) genau dann, wenn*

$$a^\sigma_{i,j} = 0 \quad (j > n_\sigma).$$

2. *f ist links K-invariant (d.h. $f(yx) = f(x), \quad x \in G, y \in K$) genau dann, wenn*

$$a^\sigma_{i,j} = 0 \quad (i > n_\sigma).$$

3. *f ist bi K-invariant (d.h. rechts - und linksinvariant) genau dann, wenn*

$$a^\sigma_{i,j} = 0 \quad (max(i,j) > n_\sigma).$$

Korollar 4.1.6 *Die bi K-invarianten Funktionen sind genau jene, deren Fourierkoeffizienten außerhalb der linken oberen $n_\sigma \times n_\sigma$ - Teilmatrix verschwinden.*

Definition 4.1.7 *Gilt $n_\sigma \leq 1$ für alle σ, so heißt (G, K) ein Gelfandpaar. Die Funktionen $\Phi_\sigma(x) := \frac{1}{\sqrt{d_\sigma}} m^\sigma_{1,1}(x)$ heißen sphärische Funktionen.*

Definition 4.1.8 *$f \in C(G)$ heißt positiv definit auf G, falls*

$$\int_G \int_G f(g_2^{-1} g_1) d\mu(g_1) \overline{d\mu(g_2)} \geq 0$$

für alle komplexen Borelmaße μ auf G.

Aus (4.3) folgt, dass die sphärischen Funktionen (und daher auch alle endlichen Linearkombinationen mit positiven Koeffizienten) positiv definit sind. Die Umkehrung gilt auch:

Lemma 4.1.9 *Sei f K-finit, d.h.*

$$f(x) = \sum_{finit} c_\sigma \Phi_\sigma(x).$$

Dann gilt:
f ist positiv definit $\Leftrightarrow$ $c_\sigma \geq 0$ für jedes σ.

Beweis: Die Implikation von rechts nach links ist schon gezeigt. Übrig bleibt die Implikation von links nach rechts. Dazu bemerken wir, dass klarerweise $c_\sigma = \int_G f(x)\overline{\Phi_\sigma(x)}dx^2$ gilt. Also haben wir:

$$c_\sigma = \int_G f(x)\overline{\Phi_\sigma(x)}dx = \int_G f(x_2^{-1}x_1)\overline{\Phi_\sigma(x_2^{-1}x_1)}dx_1$$

Integriert man diese Gleichung und verwendet man, dass $\int_G 1dx = 1$, so erhält man

$$c_\sigma = \int_G \int_G f(x_2^{-1}x_1)\overline{\Phi_\sigma(x_2^{-1}x_1)}dx_1dx_2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{d_\sigma} \int_G \int_G f(x_2^{-1}x_1)\overline{m_{1,j}(x_1)}m_{1,j}(x_2)\frac{1}{d_\sigma}dx_1dx_2 \geq 0$$

nach Voraussetzung.

□

Definition 4.1.10 *Die Gegenbauerpolynome C_n^λ sind Orthogonalpolynome auf dem Intervall $[-1,1]$ zu der Gewichtsfunktion $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, mit $C_n^\lambda(1) = \frac{(2\lambda)_n}{n!}$. $(a)_n$ sei dabei das Pochammersymbol definiert durch*

$$(a)_n := a(a+1)\cdots(a+n-1).$$

Das Paar $(SO(n), SO(n-1))$ (siehe [3])

$SO(n-1)$ kann isomorph als abgeschlossene Untergruppe in $SO(n)$ eingebettet werden, indem man $SO(n)$ mit den Matrizen der Form
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$, $S \in SO(n-1)$ identifiziert. Sei $n \geq 3$. Jedes Element s aus $SO(n)$ kann dargestellt werden als Produkt

$$s = s_1 a_\theta s_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} a_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix},$$

wobei $a_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$, $\theta \in [0,\pi]$ und $S_1, S_2 \in SO(n-1)$. Diese Zerlegung heißt Calderonzerlegung. Der Wert θ ist dabei eindeutig. Daraus kann man schließen, dass $(SO(n), SO(n-1))$ für $n \geq 3$ ein Gelfandpaar ist. Die sphärischen Funktionen sind durch

$$\Phi_j(s_1 a_\theta s_2) = \frac{C_j^{\frac{n}{2}-1}(cos(\theta))}{C_j^{\frac{n}{2}-1}(1)} \qquad , j \in \mathbb{N}, \tag{4.4}$$

[2] dx bezeichne die Integration bezüglich des Haarmaßes

gegeben, wobei $C_j^{\frac{n}{2}-1}$ ein Gegenbauerpolynom bezeichnet. Ausserdem gilt für ein bi $SO(n-1)$-invariantes $f \in C(SO(n))$:

$$\int_{SO(n)} f(s)ds = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} f(a_\theta)(sin\theta)^{n-2}d\theta. \tag{4.5}$$

4.2 Eine Integraltransformation

Kehren wir zu unserem Problem, den Beweis von Satz 3.2.1, zurück. Weil mit $\sigma_n(t)$ auch $t \mapsto \sigma_n(st)$ Lösung ist, kann man o.B.d.A. $a = 1$ setzen. Dass die Anfangswertaufgabe lösbar ist, folgt aus der Lösungstheorie für gewöhnliche Differentialgleichungen. D.h. man kann Funktionen finden, die (3.7) und (3.8) erfüllen. Es bleibt noch zu zeigen, dass diese Lösungen auch (3.9) erfüllen.

Definition 4.2.1 *Eine Lösung der Differentialgleichung (3.7) heißt zulässig, falls σ_1 nicht identisch verschwindet, $\sigma_n \equiv 0$ für alle n ab einem Index, und (3.9) gilt.*

Zu zeigen bleibt, dass die Lösung mit Anfangswerten $\sigma_n(1) = max(r+1-n, 0)$ zulässig ist.

Bemerkung 4.2.2 *Mit (3.7) sieht man sofort, dass für diese Lösung gilt:*

$$-\sigma_n'(1) = \begin{cases} n & n = r, r-2, r-4, \cdots \\ 0 & sonst \end{cases} \tag{4.6}$$

Der folgende Satz charakterisiert die gesuchten Funktionen als Fourierkoeffizienten gewisser Funktionen. Er ist der Ausgangspunkt für die folgenden Überlegungen.

Satz 4.2.3 *Sei $P \in C^1[-1,1]$. Definiere $\sigma_n = \sigma_n[P]$ auf $[1,\infty]$, $n \in \mathbb{N}$ durch*

$$\sigma_n(t) := \frac{2}{t\pi} \int_0^{\pi} P(1-t^{-1}+t^{-1}cos(\theta))sin(n\theta)sin(\theta)d\theta. \tag{4.7}$$

Dann lösen diese Funktionen die Differentialgleichung (3.7) mit Anfangswerten

$$\sigma_n(1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} P(cos(\theta))sin(n\theta)sin(\theta)d\theta. \tag{4.8}$$

Beweis: **1. Schritt:** Berechnung von $\sigma_n'(t)$:

$$\sigma_n'(t) = \frac{-2}{t^2\pi} \int_0^{\pi} P(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t}cos\theta)sin(n\theta)sin(\theta)d\theta +$$

$$+\frac{2}{t\pi} \int_0^{\pi} P'(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t}cos\theta)(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2}cos\theta)sin(n\theta)sin\theta d\theta$$

Der zweite Summand lässt sich unter Verwendung der Relation

$$\frac{d}{d\theta}P(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t}cos\theta) = -P'(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t}cos\theta)sin\theta\frac{1}{t}$$

durch partielle Integration vereinfachen:

$$\frac{2}{t\pi}\int_0^\pi P'(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t}cos\theta)(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2}cos\theta)sin(n\theta)sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{2}{t\pi}\int_0^\pi P(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t}cos\theta)\frac{1}{t}[ncos(n\theta)+sin\theta sin(n\theta)-ncos\theta cos(n\theta)]d\theta.$$

Also ist

$$\sigma_n'(t) = \frac{2}{t^2\pi}\int_0^\pi P(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t}cos\theta)n[cos(n\theta)-cos\theta cos(n\theta)]d\theta.$$

2. Schritt: $\sigma_n(t)+\frac{t}{n}\sigma_n(t)-\sigma_{n+1}(t)+\frac{t}{n+1}\sigma_{n+1}'(t)=0$:
Aus obigem wissen wir, dass

$$\frac{t}{n}\sigma_n'(t) = \frac{2}{t\pi}\int_0^\pi P(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t}cos\theta)[cos(n\theta)-cos\theta cos(n\theta)]d\theta.$$

Daraus folgt durch elementare trigonometrische Umformungen, dass

$$\sigma_n(t)+\frac{t}{n}\sigma_n(t)-\sigma_{n+1}(t)+\frac{t}{n+1}\sigma_{n+1}'(t)=0.$$

□

Lemma 4.2.4 *Sei* $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Lösung von (3.7), sodass ein* $n_0\in\mathbb{N}$ *existiert mit* $\sigma_n\equiv 0,\ n>n_0$. *Dann gilt* $\sigma_n=\sigma_n[P]$ *mit*

$$P(cos\theta) = \sum_{n=1}^{n_0}\sigma_n(1)\frac{sin(n\theta)}{sin\theta}. \tag{4.9}$$

Weiters gilt: $-t\sigma_n'(t)=\sigma_n[Q](t)$ *mit*

$$Q(x) = \frac{d}{dx}((x-1)P(x)). \tag{4.10}$$

Außerdem ist

$$Q(cos\theta) = \sum_{n=1}^{n_0}-\sigma_n'(1)\frac{sin(n\theta)}{sin\theta}. \tag{4.11}$$

Beweis:
$P(cos\theta)sin\theta$ ist eine ungerade 2π - periodische Funktion. Ihre Fourierreihe ist gegeben durch

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n(1)sin(n\theta).$$

Da diese Summe abbricht erhält man (4.9). Einsetzten in die Definition von $\sigma_n[P]$ ergibt (4.10) (siehe den ersten Schritt im Beweis von Satz 4.2.3). Nach (4.9) gilt:

$$Q(cos\theta) = \sum_{n=1}^{n_0}(-\sigma_n'(1))\frac{sin(n\theta)}{sin\theta}.$$

□

Das nächste Korollar bringt die Lösungen, die ab einem Index verschwinden in Zusammenhang mit Polynomen:

Korollar 4.2.5 *Sei $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Lösung von (3.7). Dann gilt*
$\sigma_n = \sigma_n[P]$ und $-t\sigma_n'(t) = \sigma_n[Q](t)$, wobei P und Q Polynome sind genau dann, wenn ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $\sigma_n \equiv 0,\ n > n_0$.

Beweis: Da die Funktion
$$U_{n-1}(cos\theta) := \frac{sin(n\theta)}{sin\theta}$$
ein Polynom vom Grad $n-1$ in $cos\theta$ ist (Tschebytscheff-Polynom 2.Art), gilt, dass die Reihen (4.9) bzw. (4.11) abbrechen, genau wenn P bzw. Q ein Polynom ist. Das ist aber nach dem vorigen Lemma äquivalent dazu, dass die Funktionen σ_n ab einem Index verschwinden. Da wegen (4.10) durch

$$P(x) = (1-x)^{-1}\int_x^1 Q(y)dy$$

P aus Q gewonnen werden kann, terminiert (4.9) genau dann, wenn (4.11) terminert.

□

Bemerkung 4.2.6 *Es gilt*

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} U_k(x)U_l(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \delta_k^l. \tag{4.12}$$

Diese Ergebnisse zusammengefasst ergeben den folgenden

Satz 4.2.7 *Es existiert ein bijektiver Zusammenhang zwischen zulässigen Lösungen und Polynomen Q mit $\sigma_n[Q](t) \geq 0$ für alle $t \geq 1, n \in \mathbb{N}$.*

□

Satz 4.2.8 *Für das Polynom $Q_r(x)$, welches zu der Lösung, die die Anfangswerte (3.8) annimmt, äquivalent ist, gilt:*
$$Q_r(x) = C_{r-1}^2(x). \tag{4.13}$$

Um das zu beweisen brauchen wir die folgenden zwei Lemmata:

Lemma 4.2.9 *Q_r ist ein Polynom vom Grad $r-1$ in $cos\theta$ und es gilt*

$$Q_r(-x) = (-1)^{r-1}Q_r(x). \tag{4.14}$$

Beweis: Wegen (4.6) und (4.11) gilt:

$$Q_r(cos\theta) = \sum_{k=0}^{[\frac{r-1}{2}]} (r-2k)\frac{sin(r-2k)\theta}{sin\theta} = \sum_{k=0}^{[\frac{r-1}{2}]} U_{r-2k-1}(1)U_{r-2k-1}(cos\theta). \tag{4.15}$$

Also ist Q_r ein Polynom vom Grad $r-1$. Da (4.14) für die Tschebytscheffpolynome gilt, gilt (4.14) auch für $Q_r(x)$

□

Lemma 4.2.10 *Sei P ein Polynom vom Grad $\leq r-1$. Dann gilt: Ist die Parität von P ungleich der Parität von Q_r, so gilt*

$$\int_{-1}^{1} Q_r(x)P(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = 0. \tag{4.16}$$

Ist die Parität von P gleich der Parität von Q_r, so gilt

$$\int_{-1}^{1} Q_r(x)P(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = P(1). \tag{4.17}$$

Beweis:
1.Fall: P gerade, Q ungerade oder P ungerade, Q gerade

Dann ist die Funktion $P(x)Q(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ ungerade und daraus folgt (4.16).

2.Fall: P ungerade, Q_r ungerade

Wegen (4.14) ist $r-1$ ungerade. Da P ungerade ist gilt:

$$P = a_1U_1 + a_3U_3 + \cdots + a_{r-1}U_{r-1}.$$

Aus (4.12) und (4.15) folgt (4.17).
Analog betrachtet man den **3.Fall:** P gerade, Q_r gerade.

□

Beweis von Satz 4.2.8: Wegen (4.15) gilt

$$Q_r(1) = \sum_{k=0}^{[\frac{r-1}{2}]} U_{r-2k-1}(1)U_{r-2k-1}(1) = \sum_{k=0}^{[\frac{r-1}{2}]} (r-2k)^2 = \frac{1}{6}r(r+1)(r+2).$$

Außerdem ist

$$C^2_{r-1}(1) = \frac{(4)_{r-1}}{(r-1)!} = \frac{1}{6}r(r+1)(r+2).$$

Also stimmen Q_r und C^2_{r-1} an der Stelle 1 überein. Zu zeigen ist noch, dass die Polynome Q_r Orthogonalpolynome zur Gewichtsfunktion $(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$ sind. Dazu reicht es, wenn man zeigt, dass für alle r und für alle Polynome P vom Grad $< r-1$ gilt:

$$\int_{-1}^{1} Q(x)P(x)(1-x^2)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 0. \tag{4.18}$$

Bekannterweise kann man jedes Polynom P darstellen als $P = P_g + P_u$, wobei P_g gerade und P_u ungerade ist. Man muss also noch beweisen, dass (4.18) sowohl für alle geraden, als auch für alle ungeraden Polynome P vom Grad $< r-1$ gilt. Da x^2P die gleicht Parität wie P hat, folgt wegen (4.16) und (4.17)

$$\int_{-1}^{1} Q(x)P(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \int_{-1}^{1} Q(x)P(x)x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx.$$

□

4.3 Der Positivitätsbeweis

Im folgenden sei

$$G := SO(6),\, U := \begin{pmatrix} SO(5) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\, V := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & SO(5) \end{pmatrix},$$

$$K := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & SO(4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\, M := \begin{pmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & SO(3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A := \left\{ a_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & I_4 \end{pmatrix} \right\} \text{ und}$$

$$B := \left\{ b_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta & 0 \\ 0 & sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nach den Tatsachen, die im einführenden Kapitel über Gelfandpaare besprochen wurden, gilt:

(K, M) ist ein Gelfandpaar mit sphärischen Funktionen

$$\psi_n(k_1 b_\theta k_2) = \frac{C^1_{n-1}(cos\theta)}{C^1_{n-1}(1)} = \frac{sin(n\theta)}{sin\theta}, \quad n \in \mathbb{N}, k_1, k_2 \in M.$$

Für jedes μ ist $(a_\mu K a_\mu^{-1}, M)$ ein Gelfandpaar mit den sphärischen Funktionen

$$a_\mu k a_\mu^{-1} \mapsto \psi_n(k), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(G, V) ist ein Gelfandpaar mit sphärischen Funktionen

$$\kappa_r(v_1 a_\theta v_2) = C_{r-1}^2(cos\theta), \quad r \in \mathbb{N},\ v_1, v_2 \in V.$$

Lemma 4.3.1 *Sei P ein Polynom. Dann wird durch*

$$P(cos\theta) =: p(a_\theta)$$

eine bi M-invariante, U-finite, stetige Funktion auf U definiert. Es gilt: Wenn p eingeschränkt auf alle Untergruppen $a_\mu K a_\mu^{-1}$ positiv definit ist, so ist $\sigma_n[P](t) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}, t > 1$.

Beweis: Die erste Aussage ist klar wegen (4.4). Für die zweite Aussage bemerkt man, dass für jedes μ die Funktion

$$k \mapsto p(a_\mu k a_\mu^{-1})$$

bi M-invariant ist. Dies gilt weil A und M kommutieren. Also gilt wegen (4.5)

$$\int_K p(a_\mu k a_\mu^{-1})\psi_n(k)dk = \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi p(a_\mu b_\theta a_\mu^{-1})sin(n\theta)sin\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi P(cos^2\mu + sin^2\mu cos\theta)sin(n\theta)sin\theta d\theta.$$

Daraus folgt wegen (4.7)

$$\sigma_n[P](sin^{-2}\mu) = n sin^2\mu \int_K p(a_\mu k a_\mu^{-1})\psi_n(k)dk.$$

Wenn p eingeschränkt auf alle $a_\mu K a_\mu^{-1}$ positiv definit ist, gilt also $\sigma_n[P](t) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}, t \geq 1$.

□

Zu zeigen bleibt also nur noch, dass die Funktionen q_r definiert durch

$$q_r(k_1 a_\theta k_2) := C_{r-1}^2(cos\theta), \quad k_1, k_2 \in K$$

eingeschränkt auf alle $a_\mu K a_\mu^{-1}$ positiv definit sind:

Satz 4.3.2 *q_r ist auf $a_\mu K a_\mu^{-1}$ positiv definit für alle μ, r.*

Beweis: q_r ist eine sphärische Funktion von (G, V) und als solche positiv definit auf G, also auch auf $a_\mu(V \cap U)a_\mu^{-1} = a_\mu K a_\mu^{-1}$.

□

Literaturverzeichnis

[1] L. de Branges, A Proof of the Bieberbach Conjecture, Acta Math. 154 (1985), pp. 137-152

[2] T. H. Koornwinder, A Group Theoretic Interpretation of the last Part of de Branges' Proof of the Bieberbach Conjecture, Complex Variables Vol.6 (1986), pp. 309-321

[3] C. Müller, Spherical Harmonics, Lecture Notes in Math. No. 17, Springer Verlag (1966)

[4] M. Rosenblum, J. Rovnyak, Topics in Hardy Classes and Univalent Functions, Birkhäuser Verlag (1994)

[5] W. Schempp, B. Dreseler, Harmonische Analyse, Teubner Verlag (1978)

[6] V. I. Vasyunin, N. K. Nikolskii, Quasiorthogonal Decompositions with respect to complementary metrics, and estimates of univalent functions, Leningrad Math. J. Vol. 2 (1991), No. 4

[7] V. I. Vasyunin, N. K. Nikolskii, Operator-valued measures and coefficients of univalent functions, St. Petersburg Math. J. Vol. 3 (1992), No. 6