Projektpraktikum über die Konstruktion der p-adischen komplexen Zahlen

Andreas Hula

1. Juni 2005

Seit der Entdeckung der p-adischen Zahlen durch Kurt Hensel haben sich viele Mathematiker mit diesem interessanten Beispiel eines nichtarchimedisch bewerteten Körpers beschäftigt und eine ansehnliche Theorie der p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ und gewisser Erweiterungskörper entwickelt.
Durch eine Bemerkung im Buch von Reinhold Remmert 'Funktionentheorie 1' erfuhr ich von der Funktionentheorie über anderen Körpern als $\mathbb{C}$ und interessierte mich insbesondere dafür, wie weit Analogien zum archimedischen Fall möglich sind bzw auch Funktionalanalysis über einem geeigneten Erweiterungskörper bisher studiert wurde. Zu Zwecken der Funktionalanalysis ist es natürlich besonders wichtig, dass der betrachtete Grundkörper sowohl algebraisch abgeschlossen, als auch analytisch vollständig ist. Diese Bedingungen führen in natürlicher Weise zu den p-adischen komplexen Zahlen $\mathbb{C}_p$, welche auch für die Theorie p-adischer analytischer Funktionen die beherrschende Rolle spielen. Daher habe ich die genaue Konstruktion der p-adischen komplexen Zahlen als Thema meines Projektpraktikums gewählt.
Die Arbeit ist so aufgebaut, dass zuerst von Definition und Eigenschaften ultrametrischer Räume(Kapitel 1) und Gruppen(Kapitel 2) ausgehend über die p-adischen ganzen Zahlen(Kapitel 3) die p-adischen Zahlen konstruiert werden(Kapitel 4). Nach dieser zunehmenden Spezialisierung der betrachteten Objekte werden in Kapitel 5 allgemein bewertete und insbesondere nichtarchimedisch bewertete Körper betrachtet. Der Satz von Ostrowski in diesem Kapitel ist ein kleiner Höhepunkt der Arbeit, da er die Klassifikation aller Bewertungen auf $\mathbb{Q}$ erlaubt. In Kapitel 6 wird dann der algebraische Abschluß der p-adischen Zahlen konstruiert und insbesondere gezeigt, dass dieser nicht vollständig ist. Eine Konstruktion mit Hilfe von Ultrafiltern erlaubt in Kapitel 7 die Konstruktionen eines vollständigen und algebraisch abgeschlossenen Körpers Ω_p, der den algebraischen Abschluß der p-adischen Zahlen umfaßt. Für unsere Zwecke suchen wir allerdings einen möglichst kleinen(weil eventuell separablen) vollständigen und abgeschlossen Erweiterungskörper des algebraischen Abschlußes. Dieser wird im Kapitel 8 konstruiert, in dem der algebraische Abschluß in Ω_p (topologisch) abgeschlossen wird. Der entstehende Körper sind die p-adischen komplexen Zahlen und diese haben die geforderten Vollständigkeitseigenschaften. Weiters wird deren algebraische Isomorphie zu den bekannten komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ gezeigt.
An Vorkenntnissen werden Analysis, Algebra und etwas Topologie gebraucht. In etwa in dem Umfang der üblichen Grundvorlesungen bzw. im Falle der Topologie die Grundkenntnisse der mengentheoretischen Topologie(Satz von Tychonoff, Produkträume, metrische Räume).
Ich möchte mich an dieser Stelle noch bei meinem Projektbetreuer H.Woracek bedanken. Ohne ihn hätte die Arbeit nicht die vorliegende Form erreicht.
Andreas Hula

Inhaltsverzeichnis

1 Ultrametrische Räume

Definition 1 *Sei M eine Menge. Eine Abbildung $M \times M \mapsto \mathbb{R}$ heißt Ultrametrik auf M, wenn gilt:*

(a)

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(b)

$$d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in M$$

(c)

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\} \quad \forall x,y,z \in M$$

Die Gleichung (c) aus der Definition heißt verschärfte Dreiecksungleichung und die Menge M wird mit einer solchen Metrik zu einem sogenannten ultrametrischen Raum. Aus der verschärften Dreiecksungleichung folgen viele, in Vergleich zur z.B euklidischen Metrik auf dem $\mathbb{R}^n$ ungewohnte, Eigenschaften der Topologie.

Lemma 2 *In einem ultrametrischen Raum M gilt:*

(a) Falls $d(x,z) > d(z,y)$, dann gilt $d(x,y) = d(x,z)$. Anschaulich gesprochen ist also jeder Punkt einer abgeschlossenen metrischen Kugel $B_{\leq r}(a) := \{x \in M : d(x,a) \leq r\}$ auch Mittelpunkt der Kugel. Die Aussage gilt analog für offene metrische Kugeln $B_{<r}(a) := \{x \in M : d(x,a) < r\}$.

(b) Falls $c \in B_{<r}(a) \cap B_{\leq r'}(b), quada, b, c \in M$ mit $r \leq r'$ folgt $B_{\leq r}(b)$. Es ist dabei nicht wesentlich, ob man metrisch offene oder abgeschlossene Kugeln nimmt.

(c) Der Durchmesser $\delta(B_{\leq r}(a)) := \max_{y,x \in B_{\leq r}(a)} d(x,y)$ einer Kugel ist kleiner gleich ihrem Radius.

Beweis:

(a) Folgt sofort aus der verschärften Dreiecksungleichung.

(b) Sei c gemeinsamer Punkt von $B_{<r}(a)$ und $B_{\leq r'}(b)$. Aus (a) folgt $B_{<r}(a) = B_{<r}(c)$ und $B_{\leq r'}(b) = B_{\leq r'}(c)$. Damit gilt $B_{<r}(c) \subset B_{\leq r'}(c)$ falls $r \leq r'$, sowie $B_{\leq r'}(c) \subset B_{<r}(c)$ falls $r' < r$.
Alle anderen Fälle gehen analog.

(c) gilt offensichtlich.□

Weiters gilt:

Satz 3 *Sei M ein ultrametrischer Raum. Dann gelten:*

(a) Falls $d(x,z) \neq d(z,y)$, dann gilt $d(x,y) = \max\{d(x,z), d(z,y)\} \quad \forall x,y,z \in M$.

(b) Falls $x \in S_r(a)$, wobei $S_r(a) := \{x \in M : d(x,a) = r\}$ und $r > 0$, dann gilt $B_{<r}(x) \subset S_r(a)$ und $S_r(a) = \cup_{x \in S_r(a)} B_{<r}(x)$.

Beweis:

(a) Folgt sofort aus der verschärften Dreiecksungleichung

(b) Enthält eine Kugel B den Punkt a nicht dann liegt sie auf der Sphäre $S_r(a)$ wobei $r = d(a,B)$, $d(a,B) = \inf_{x \in B} d(a,x)$:

Falls $B = B_{<s}(b)$, dann gilt $r = d(a,b) \geq s$ und $B \subset S_r(a)$
Falls $B = B_{\leq s}(b)$, dann gilt $r = d(a,b) > s$ und $B \subset S_r(a)$
□

Korollar 4 *Für $n \geq 3$ gilt: Die Punkte $x_1, \ldots, x_n$ seien Teil eines Zykluses, $x_{n+1} = x_1$. Dann existieren zumindest zwei Paare aufeinanderfolgender Punkte, deren Abstand maximal ist.*

Beweis:
Induktiv gilt für eine endliche Folge $x_1, \ldots, x_n$:

$$d(x_1, x_n) \leq \max\{d(x_1,x_2), \ldots, d(x_{n-1}, x_n)\}.$$

Für $n \geq 3$ gilt: Die Punkte $x_1, \ldots, x_n$ seien Teil eines Zykluses, $x_{n+1} = x_1$ und o.B.d.A gelte $d(x_1, d_n) = \max\{d(x_1,x_2), \ldots, d(x_n, x_{n+1})\}$. Da gilt $d(x_1, d_n) \leq \max\{d(x_1,x_2), \ldots, d(x_{n-1}, x_n)\}$, existiert also zumindest ein Index i mit $d(x_1, x_n) = d(x_i, x_{i+1})$.□

Satz 5 *(a) Jede Sphäre $S_r(a)$ ist sowohl abgeschlossen, als auch offen.*

(b) Die abgeschlossenen Kugeln mit Radius größer 0 sind auch offen.

(c) Alle offenen Kugeln sind abgeschlossen.

(d) Seien B und B' zwei disjunkte Kugeln.
Dann gilt

$$d(B, B') = d(x, x') \quad \forall x \in B, x' \in B'$$

Beweis:

(a) Folgt aus Punkt (b) des vorigen Satzes.

(b) Falls $r > 0$ dann ist $B_{\leq r}(a) = B_{<r}(a) \cup S_r(a)$ und somit offen.

(c) Mit $r > 0$ ist $S_r(a)$ offen. Daher ist $B_{<r}(a) = B_{\leq r}(a) - S_r(a)$ abgeschlossen. Für $r = 0$ ist die Aussage trivial.

(d) Man wähle vier Punkte aus zwei disjunkten Kugeln $x, y \in B, x', y' \in B'$ und bilde den Zyklus x, x', y', y. Zwei der möglichen Paare dieses vierer Zyklus haben maximalen Abstand und dies müssen x, x' und y, y' sein:

$$d(x, x') = d(y, y')$$

Daher haben alle Paare von Punkten den gleichen Abstand und dieser ist:

$$d(B, B') = \inf_{x \in B, x' \in B'} d(x, x')$$

□

Die Topologie eines Ultrametrischen Raumes wird also von clopen(zugleich offenen und abgeschlossenen) Mengen erzeugt.
Im Bezug auf Cauchy-Folgen im metrischen Sinne gilt eine besonders angenehme Eigenschaft.

Satz 6 *(a) Eine Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ in M ist bereits dann eine Cauchy-Folge, wenn gilt:*

$$d(x_n, x_{n+1}) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

(b) Falls $x_n \longrightarrow x \neq a$ dann gilt $d(x_n, a) = d(x, a)$ falls n hinreichend groß ist.

Beweis:

(a) Aus $d(x_n, x_{n+1}) < \epsilon \quad \forall n \geq N$ folgt:

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq \max_{0 \leq i \leq m} \{x_{n+i}, x_{n+i+1}\} < \epsilon \qquad \forall n \geq N$$

und $m \geq 0$.

(b) Es gilt $d(x_n, a) = d(x, a)$ sobald $d(x_n, x) < d(x, a)$. $\square$

Eine gelegentlich nützliche Aussage über kompakte Teilmengen ultrametrischer Räume:

Satz 7 *Sei $\Omega \subset X$ kompakt:*

$\forall a \in X - \Omega$ gilt: Die Menge der angenommenen Abstände $d(x, a) \quad (x \in \Omega)$ ist endlich.

(b) $\forall a \in \Omega$ gilt: Die Menge der Abstände $d(x, a) \quad (x \in \Omega - a)$ ist diskret in den positiven reellen Zahlen.

Beweis:

(a) $d(x, y) < d(x, a) \Rightarrow d(y, a) = d(x, a)$, da $a \notin \Omega$ ist die Funktion $f : x \to d(x, a)$ lokal konstant auf Ω und stetig. Die Urbilder $f^{-1}(c)$(für $c \in f(\Omega)$) bilden eine offene Überdeckung von Ω. Daher ist das Bild eine endliche Menge.

(b) Die Abbildung $f : x \to d(x, a)$ ist lokal konstant auf Ω und daher hat für $\epsilon > 0$ ihre Einschränkung auf die kompakte Menge $\Omega - B_{<\epsilon}(a)$ eine endliche Bildmenge.
Daher sind alle Mengen der Form $[\epsilon, \infty) \cap \{d(x, a) : x \in \Omega, x \neq a\}$ endlich.
Also ist $f(\Omega - a)$ diskret in $[0, \infty)$. $\square$

Zusammenfassung:
In einem ultrametrischen Raum M gelten:

(a) Jeder Punkt in einer metrischen Kugel ist Mittelpunkt der Kugel.

$$b \in B_{\leq r}(a) \Rightarrow B_{\leq r}(b) = B_{\leq r}(a).$$

Analog für offene Kugeln.

(b) Falls zwei Kugeln einen Punkt gemeinsam haben, ist eine schon in der anderen enthalten.

(c) Sphären sind zugleich offen und abgeschlossen. $S_r(a) = \cup_{x \in S_r(a)} B_{<r}(x)$.

(d) Eine Folge ist eine Cauchy-Folge, genau dann wenn $d(x_n, x_{n+1}) \longrightarrow 0$.

(e) Ist der ultrametrische Raum kompakt, dann ist die Menge der Abstände $\{c \in \mathbb{R} : \exists x, y \in M, x \neq y, c = d(x, y)\}$ für einen festen Punkt x, diskret in den positiven reellen Zahlen.

In ultrametrischen Räumen gibt es neben der metrischen Vollständigkeit eine zusätzliche Vollständigkeitseigenschaft.

Definition 8 *Ein ultrametrischer Raum X heißt sphärisch vollständig, wenn jede abnehmende Folge von abgeschlossenen Kugeln einen nichtleeren Durchschnitt hat:*

$$\forall (r_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}, r_j \leq r_i \forall j < i, B_{\leq r_j}(x_j) \subset B_{\leq r_i}(x_i), \forall j < i \Rightarrow \bigcap_i B_{\leq r_i}(x_i) \neq \emptyset.$$

Anmerkung:
Aus sphärisch vollständig folgt vollständig, da über die Definition einer Cauchy-Folge eine passende Folge von Kugeln gefunden werden kann. Aus der Definition einer Cauchyfolge, weiß man,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : d(x_i, x_j) < \epsilon. \quad \forall i, j > N$$

Damit ist mit $\epsilon = \frac{1}{n}$,$x_j \in B_{\leq \frac{1}{n}}(x_n), \forall n, j > N$. Da für zwei Kugeln die einen Punkt gemeinsam haben wenigstens eine in der anderen enthalten sein muß, bilden diese Kugeln eine abnehmende Folge und aufgrund der sphärischen Vollständigkeit hat die Folge der $B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ nichtleeren Schnitt. Es gibt also mindestens ein Element, das bis auf ein beliebiges ϵ an jedem x_i(i groß genug) liegt. Gegen dieses konvergiert die Folge definitionsgemäß. Die Umkehrung gilt nicht. Die Eigenschaft der sphärischen Vollständigkeit spielt in der nicht-archimedischen Funktionalanalysis eine große Rolle, da sie ein Analogon zum Satz von Hahn-Banach ermöglicht. Für manche Aussagen wiederrum sind die noch zu definierenden sphärisch vollständigen nichtarchimedischen Körper zu groß. Zum Beispiel sind sphärisch vollständige Banachräume nie reflexiv und ein Analogon des Satzes von Riesz wird z.B. durch sphärische Vollständigkeit eines nichtarchimedischen Körpers weniger scharf.

2 Ultrametrische Gruppen

Ist auf einer abelschen Gruppe eine translationsinvariante Ultrametrik gegeben, so läßt sich eine sogenannte ultrametrische Bewertung auf der Gruppe folgendermaßen definieren:

Definition 9 *Sei G eine abelsche Gruppe, auf der eine stetige Abbildung $|.| : G \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben sei, für die gilt*

$$|-x| = |x|$$

und

$$|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}.$$

Eine solche Gruppe nennen wir eine ultrametrische oder ultrametrisch-bewertete Gruppe. Die Abbildung $|.|$ heißt eine ultrametrische Bewertung auf G.

Lemma 10 *Sei G eine abelsche Gruppe. Ist auf G eine ultrametrische Bewertung gegeben, so definiert $d(x,y) = |x-y|$ eine translationsinvariante Ultrametrik auf G.*
Ist umgekehrt eine translationsinvariante Ultrametrik $d(.,.)$ auf G gegeben, so definiert $|x| := d(x,0)$ eine ultrametrische Bewertung auf G.

Beweis: Trivial. □
Für die Konvergenz von Reihen gilt:

Satz 11 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen in einer vollständigen ultrametrischen Gruppe G. Dann gilt*

$$(a_n)_{n\geq 0} \to 0 \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \textit{ist konvergent}$$

Beweis:
Die Notwendigkeit der Bedingung ist trivial. Umgekehrt gilt für die Folge der Partialsummen $(S_n)_{n\geq 0} : S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$. Da also $d(S_{n+1}, S_n) \longrightarrow 0)$ ist die Folge der Partialsummen konvergent.□

Zusammenfassung:

(a) (Der Stärkste gewinnt)
Sei G eine ultrametrische Gruppe. Dann gilt:

$$|x| > |y| \Rightarrow |x+y| = |x|$$

(b) (Dreieckseigenschaft)
In einer ultrametrischen Gruppe sind alle Dreiecke gleichschenkelig:

$$a+b+c = 0, |c| < |b| \Rightarrow |a| = |b| \quad a,b,c \in G$$

(c) (Kompetitivität)
Seien $a_1, \ldots, a_n \in G$.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0 \Longrightarrow \exists i \neq j \qquad |a_i| = |a_j| = \max |a_k|$$

(d) (Cauchyeigenschaft)
Seien $a_n \in G, \forall n$. Dann gilt:

$$(a_n)_{n \geq 0} \quad \text{ist eine Cauchyfolge} \Longleftrightarrow d(a_n, a_{n+1}) \longrightarrow 0.$$

(e) (in vollständigen Gruppen)
Sei G eine vollständige ultrametrische Gruppe und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen in G.

$$\sum_{n \geq 0} a_n \quad \text{ist konvergent} \Longleftrightarrow a_n \longrightarrow 0.$$

(f) (Betragskonvergenz)
Seien $a_n, a \in G, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$a_n \longrightarrow a \neq 0 \Longrightarrow \exists N : \quad |a_n| = |a|, n \geq N$$

3 Die p-adischen ganzen Zahlen $\mathcal{Z}_p$

Definition 12 *Eine p-adische ganze Zahl ist eine Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}, a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Die Menge der p-adischen ganzen Zahlen $\mathcal{Z}_p$ ist dann $\{0, 1, \ldots, p-1\}^{\mathbb{N}}$.*

Anmerkung:
Man kann eine p-adische ganze Zahl a also auch als formale Potenzreihe $a = \sum_{i \geq 0} a_i p^i$ schreiben.

Definition 13 *Zur Definition der Addition: Seien a_0, b_0 die ersten Komponenten zweier p-adischer ganzer Zahlen a, b. Dann ist die erste Komponente ihrer Summe $a + b$ genau $a_0 + b_0$, falls diese Zahl kleiner gleich $p - 1$ ist. Anderenfalls läßt sich $a_0 + b_0$ eindeutig schreiben als $c_0 + mp$ mit einem $m \in \mathbb{N}$. Die erste Kompnente sei dann c_0. Im zweiten Fall addieren wir m zur Summe der nächsten Komponenten a_1, b_1. Dieser Vorgang wird nun induktiv fortgesetzt. Die so definierte Addition bezeichnen wir als Addition mit Übertrag.*
Zur Definition der Multiplikation werden die p-adischen ganzen Zahlen als Potenzreihen in p aufgefaßt(siehe Anmerkung oben):
Die Multiplikation entspricht dem Cauchyprodukt der Potenzreihen in p mit anschließendem Addieren mit Übertrag.

Anmerkung:
Addition und Multiplikation sind abelsch und assoziativ.

Lemma 14 *Jede p-adische ganze Zahl a hat ein additives Inverses.*

Beweis:
Sei $a = \sum_{i \geq 0} a_i p^i$ und sei $b = \sum_{i \geq 0}(p-1-a_i)p^i$. Dann ist $a + b + 1 = 0$ und damit $b + 1 = -a$.$\Box$
Damit bilden die p-adischen ganzen Zahlen eine eine additive abelsche Gruppe.

Korollar 15 (ohne Beweis) *Addition und Multiplikation erfüllen die Distributivgesetze, sodaß $\mathcal{Z}_p$ zu einem Ring wird.*

Satz 16 *Die p-adischen Zahlen sind nullteilerfrei.*

Beweis: Sei $a \neq 0$ $a \in \mathcal{Z}_p$, also $a = \Sigma_{i \geq 0} a_i p^i \neq 0$, und ebenso $b = \Sigma_{i \geq 0} a_i p^i \neq 0$. Seien a_ν und b_μ die ersten Koeffizienten $\neq 0$. Diese beiden Koeffizienten werden nicht durch p geteilt, nach Definition der ganzen p-adischen Zahlen. Daher teilt p auch nicht ihr Produkt, welches nach Definition der Multiplikation (Cauchyprodukt und Summieren mit Übertrag) der erste Koeffizient $\neq 0$ des Produktes ist. $\Box$
Die p-adischen ganzen Zahlen bilden also einen Integritätsbereich.

Satz 17 *In die p-adischen ganzen Zahlen sind die natürlichen Zahlen(und daher auch die ganzen Zahlen) in natürlicher Weise eingebettet.*

Beweis:
Da man jede natürliche Zahl als endliche Summe von p-Potenzen mit Koeffizienten $< p$ schreiben kann, sind die natürlichen Zahlen in natürlicher Weise in die ganzen p-adischen eingebettet. Da die ganzen p-adischen Zahlen bezüglich der Addition eine Gruppe bilden, sind auch die ganzen Zahlen darin eingebettet. $\Box$
Anmerkung:
Die natürlichen Zahlen entsprechen genau den endlichen formalen Summen, die negativen ganzen Zahlen den Folgen welche ab einem Index gleich $p - 1$ sind.

Der Betrag einer ganzen p-adischen Zahl wird folgendermaßen definiert:

Defintion und Satz 18 *Durch $|a| := p^{-\nu}$, mit $\nu = ord(a)$,wobei $a = \sum_{i \geq 0} a_i p^i$ und $ord(a) = \min\{i : a_i \neq 0\}$, werden die ganzen p-adischen Zahlen zu einer ultrametrischen Gruppe. Dies führt zur p-adischen Metrik auf $\mathcal{Z}_p$: $d(x, y) = |x-y|$. Die Topologie auf $\mathcal{Z}_p$ ist genau die Produkttopologie bezüglich der Faktoren $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ mit der diskreten Metrik. $\mathcal{Z}_p$ ist damit kompakt. Die Abbildung $|.| : \mathcal{Z}_p \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ nennt man Betragsfunktion auf $\mathcal{Z}_p$ und $|x|$ heißt der Betrag von $x \in \mathcal{Z}_p$.*

Beweis: Offensichtlich definiert $|x|$ eine Ultrametrik auf $\mathcal{Z}_p$ und die Metrik induziert die diskrete Topolgie auf jedem Produktfaktor. Die Kompaktheit folgt damit aus dem Satz von Tychonow.$\Box$

4 Die p-adischen Zahlen

Definition 19 *Die p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ sind der Quotientenkörper des Integritätsrings $\mathcal{Z}_p$.*

Dieser ähnelt dem Ring der formalen Laurentreihen, wie $\mathcal{Z}_p$ den Potenzreihen.
Anmerkung:
Ein $a \in \mathbb{Q}_p$ ist von der Form $a = \sum_{n \geq i} a_i p^i$ mit i beliebig ganzzahlig. Die Ordnung einer solchen Reihe ist analog wie oben definiert $ord(x) = ord(\sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i p^i) = \min\{i : a_i \neq 0\}$

Satz 20 *Auf $\mathbb{Q}_p$ ist eine Abbildung $|.|$, die die Betragsfunktion auf $\mathcal{Z}_p$ fortsetzt, erklärt durch: $|x| = p^{-ord(x)}$ wobei die Ordnung als Ordnung der formalen Laurentreihe $x = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i p^i$ verstanden wird.*

Beweis:
Trivial. $\square$

Lemma 21 (ohne Beweis) *Da die Charakteristik der p-adischen Zahlen offensichtlich 0 ist, müssen sie die rationalen Zahlen als Teilkörper enthalten.*

Anmerkung:
Die natürlichen und ganzen Zahlen entsprechen den endlichen und den ab einem Index gleich $p-1$ Koeffizientenfolgen. Weiters entsprechen die rationalen Zahlen jenen p-adischen Zahlen, deren Koeffizientenfolge schließlich periodisch wird.

Satz 22 *Die p-adischen Zahlen bilden einen lokal-kompakten (und damit vollständigen) Körper.*

Beweis :
Offensichtlich ist $\mathcal{Z}_p$ eine kompakte Nullumgebung, womit die additive Gruppe und somit der ganze Körper lokalkompakt wird. Dass $\mathbb{Q}_p$ ein Körper ist, ist klar nach Konstruktion.$\square$
Alternativ dazu, kann man auch direkt von $\mathbb{Q}$ aus, die p-adischen Zahlen konstruieren.

Defintion und Satz 23 *Auf $\mathbb{Q}$ ist die p-adische Metrik erklärt durch: $|x| = p^{-\nu}$ wobei $x = p^{\nu}(\frac{m}{n})$ mit teilerfremden m und n, die auch p nicht teilt. Jede rationale Zahl kann eindeutig so dargestellt werden und auf diese Weise wird eine Abbildung $|.|$ definiert, die durch $d(x, y) = |x - y|$ eine Ultrametrik auf $\mathbb{Q}$ definiert. Es ist $\mathbb{Q}_p$ dann die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich dieser Metrik.*

Beweis:
Man rechnet leicht nach, dass $|.|$ wirklich eine (translationsinvariante) Ultrametrik auf $\mathbb{Q}$ definiert. Die Darstellbarkeit einer rationalen Zahl als p-adischer Systembruch liefert unmittelbar die Äquivalenz der beiden Definitionen. $\square$

5 Nichtarchimedische Körper

Die p-adischen Zahlen sind das bekannteste Beispiel eines nicht-archimedischen Körpers. Bevor wir solche Körper definieren können, müssen wir allgemein den Begriff des bewerteten Körpers einführen.

Definition 24 *Eine Abbildung* $|.|$ *von einem Körper* K *nach* $\mathbb{R}_{\geq 0}$ *heißt Bewertung (Absolutbetrag), wenn gilt:*

(a)

$$|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

(b)

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

(c)

$$|xy| = |x||y|$$

Das Paar $(K, |\cdot|)$ *nennt man dann einen bewerteten Körper. Die Menge* $\{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \exists y \in K, |y| = x\}$ *nennt man Wertebereich von* $|.|$ *und falls der Wertebereich in* $\mathbb{R}_{\geq 0}$ *diskret liegt, dann heißt* K *diskret bewertet. Liegt der Wertebereich dicht in* $\mathbb{R}_{\geq 0}$*, so heißt* K *dicht bewertet.*

Analog dem gewöhnlichen Absolutbetrages auf $\mathbb{R}$ induziert eine Bewertung offensichtlich eine Metrik auf K. Damit sind auch die üblichen Definitionen(Vollständigkeit ,etc) von einem metrischen Raum auf den Körper übertragbar. Die Eigenschaft archimedisch zu zu sein, ist eine Eigenschaft der Bewertung:

Definition 25 *Eine Bewertung auf einem Körper* K *heißt archimedisch, wenn die Menge* $\{|n \cdot 1_K| : n \in \mathbb{N}\}$ *unbeschränkt in* $\mathbb{R}$ *ist. Sonst heißt sie nicht-archimedisch und der Körper nicht-archimedisch bewertet bzw. nichtarchimedischer Körper.*

Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

Satz 26 *Sei* K *ein Körper mit einer Bewertung* $|.|$*. Dann sind äquivalent:*

(a) Die Bewertung ist nicht-archimedisch.

(b)

$$|n1_K| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(c)

$$|a + b| \leq \max\{|a|, |b|\} \qquad \forall a, b \in K.$$

(d)

$$|a| < |b| \Rightarrow |b - a| = |b| \qquad \forall a, b \in K.$$

Beweis:
Es sind b)$\Rightarrow$ a) und c)$\Rightarrow$ b) trivial.
a)$\Rightarrow$ c):
Sei $r := \sup\{|n1_K| : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $|nx| \leq r|x|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in K$. Seien $a, b \in K$ und $s := \max\{|a|, |b|\}$. Dann gilt

$$|a+b|^m = |(a+b)^m| \leq \sum_j |\binom{m}{j} a^j b^{n-j}| \leq (m+1)rs^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

und daher

$$|a+b| \leq (\lim_m \sqrt[m]{(m+1)r})s = s = \max\{|a|, |b|\}.$$

c)$\Rightarrow$ d):
$|b| \leq \max\{|a|, |b-a|\}$. Ist dann $|b| > |a|$, dann ist

$$|b| \leq |b-a| \leq \max\{|b|, |-a|\} = |b|.$$

d)$\Rightarrow$ c):
Ist $|a+b| > |a|$, dann ist $|b| = |(a+b)-a| = |a+b|$. Insbesondere ist $|a+b| \leq |b|$. Analog falls $|a+b| > |b|$, dann folgt $|a+b| \leq |a|$. $\square$
Anmerkung:
Aus diesem Satz folgt, dass $A := \{x \in K : \quad |x| < 1\}$ ein Ideal(sogar ein maximales) ist im Ring $R := \{x \in K : \quad |x| \leq 1\}$.
Damit kann man definieren:

Definition 27 *Sei K ein nichtarchimedischer Körper und A, R wie oben. Dann heißt der Köper $k = R/M$ der Restklassenkörper von K.*

Satz 28 (Ostrowski) *Jeder nicht-trivale Absolutbetrag auf Q ist entweder eine geeignete positive Potenz des p-adischen Absolutbetrages $|x| = p^{-\nu}$ oder eine geeignete positive Potenz des geöhnlichen Absolutbetrages.*

Beweis:
Ist die Bewertung nichtarchimedisch, dann bildet $\{n \in \mathbb{Z} : |n| < 1\}$ ein Primideal nach dem vorigen Satz. Es gibt daher eine Primzahl p, sodaß $\{n \in \mathbb{Z} : |n| = 1\} = \{n \in \mathbb{Z} : p \not| n\}$. Wir wählen τ sodaß $|p| = p^{-\tau}$ und somit ist $|.|^{\frac{1}{\tau}}$ einfach die p-adische Bewertung.
Angenommen die Bewertung ist archimedisch.
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $L(n) := \max\{|n|, 1\}$. Wähle $m, n \in \{2, 3, \ldots\}$ und sei s der ganzzahlige Teil von $k(\log m)(\log n)^{-1}$. Da $m^k < n^{s+1}$ gilt, gibt es $a_0, \ldots, a_s \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, sodaß $m^k = a_0 + a_1 n + \ldots + a_s n^s$. Für diese gilt, mit $A := \max\{|0|, |1|, \ldots, |n-1|\}$:

$$|m|^k = |m^k| \leq \sum_i |a_i||n|^i \leq (s+1)AL(n)^s.$$

Es folgt

$$\log L(m) \leq k^{-1}[\log(s+1) + \log A + s \log L(n)]$$

$$\leq k^{-1}\log(k\frac{\log m}{\log n}+1)+k^{-1}\log A+\frac{\log m}{\log n}\log L(n).$$

Für festes m, n gilt diese Ungleichung $\forall k \geq 2$. Daher ist $\log L(m) \leq (\log m)(\log n)^{-1}\log L(n)$. Aus Symmetriegründen gilt:

$$\frac{\log L(m)}{\log m}=\frac{\log L(n)}{\log n}. \qquad (m,n\in\{2,3,\ldots\})$$

Daher gibt es ein $\tau \geq 0$, sodaß $\log L(m)/\log m = \tau \quad \forall m \in \mathbb{N}$, also

$$\max\{|m|,1\}=m^{\tau}. \qquad (m\in\mathbb{N})$$

Induktiv beweist man $|m| \leq m$. Daher ist $\tau \leq 1$. Da die Bewertung archimedisch ist, ist $\tau > 0$ und $|m| = m^{\tau}$ für alle natürlichen m. Damit ist $|x|$ die τ-te($\tau \in (0,1]$) Potenz des gewöhnlichen Absolutbetrages auf $\mathbb{Q}$ und dies war zu zeigen. $\square$

Nichtarchimedische Bewertungen seien im Folgenden durch die verschärfte Dreiecksungleichung charakterisiert. Wie schon gezeigt ist diese Forderung zur ursprünglichen Definition äquivalent.

Weiters haben wir eine wichtige Aussage über die Normäquivalenz auf endlichdimensionalen Vektorräumen über vollständigen nicht diskret bewerteten, nichtarchimedischen Körpern.

Satz 29 *Sei K ein vollständiger nicht-diskret nicht-archimedisch bewerteter Körper und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K. Dann sind alle Normen auf V äquivalent.*

Beweis:

Durch Induktion nach Dimension n des Vektorraumes V. Die Eigenschaft gilt offensichtlich für den Fall $n = 1$, also genügt es den Induktionsschritt von $n-1$ nach n zu zeigen.

Wir wählen eine Basis $(e_i)_{i\in I}$ und betrachten den Vektorraumisomorphismus $\varphi : K^n \mapsto V$, der die kannonische Basis von K^n auf die konkret gewählte Basis von V abbildet.

Nehmen wir an K^n ist mit der sup-Norm versehen, dann müssen wir zeigen, dass φ in beide Richtungen stetig ist, für jede gegebene Norm $\|\cdot\|$ auf V. Für $x = (x_i) \in K^n$, haben wir

$$\|x_1e_1+\ldots+x_ne_n\| \leq \sum |x_i|\|e_i\| \leq \max|x_i|\cdot\sum\|e_i\|,$$

$$\|\varphi(x)\| \leq C\|x\| \qquad (C=\sum\|e_i\|),$$

womit φ stetig ist.

Sei nun umgekehrt F der Unterraum von V der von den hinteren $n-1$ Basisvektoren erzeugt wird. Nach Induktionsvoraussetzung ist die gegebene Norm äquivalent zur sup-Norm der Komponenten. Insbesondere ist F abgeschlossen und vollständig in V. Da $e = e_1 \notin F$, können wir definieren

$$d(e,F)=\inf_{y\in F}\|e-y\|>0$$

und setzen $\gamma = d(e,F)/\|e\| \leq 1$. Weiters gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Konstante c_F mit

$$\|y\| \geq c_F \cdot \max_{2\leq i\leq n} |x_i| \qquad (y = \sum_{2\leq i\leq n} x_i e_i \in F).$$

Für jedes $v = \varphi(x) \in E - F$, also von der Form $v = \xi e + y \quad (\xi \neq 0, y \in F)$ können wir schreiben:

$$v = \xi(e + y/\xi)$$

mit

$$\begin{aligned} \|v\| = \|v - \xi e\| &\leq \max\{\|v\|, \|\xi e\|\} = |\xi| \cdot \|e - y'\| \\ &\geq |\xi| \cdot d(e,F) = |\xi|\gamma\|e\| = \gamma\|\xi e\|, \end{aligned}$$

und daher

$$\|y\| = \|v - \xi e\| \leq \max\{\|v\|, \|\xi e\|\} \leq \max\{\|v\|, \gamma^{-1}\|v\|\} = \|v\|/\gamma.$$

Damit ist $\|v\| \geq \gamma\|y\|$. Wir haben also gezeigt

$$\|v\| \geq \gamma\|\xi e\|, \quad \|v\| \geq \gamma\|y\|,$$

$$\|v\| \geq \gamma \cdot \max\{\|\xi e\|, \|y\|\},$$

und da $\|y\| \geq c_F \max_{i\geq 2} |x_i|$ war, haben wir

$$\begin{aligned} \|\varphi(x)\| = \|v\| &\geq \gamma \max\{|\xi|\|e\|, c_F \max_{i\geq 2} |x_i|\} \\ &\geq c \max_{i\geq 1} |x_i| = c \cdot \|x\|, \end{aligned}$$

mit $x_1 = \xi$ und $c = c_V = \gamma \min(c_F, \|e\|)$. $\square$

6 Der algebraische Abschluß von $\mathbb{Q}_p$

Bevor wir nun eine Aussage über Absolutbeträge auf endlichen Erweiterungen von $\mathbb{Q}_p$ machen können, benötigen wir noch den:

Satz 30 *Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{Q}_p$ sind alle Normen äquivalent.*

Beweis: Sei n die Dimension des Vektorraums V und sei (e_i) eine Basis von V und sei $\mathbb{Q}_p^n$ der Vektorraum der n-Tupel aus $\mathbb{Q}_p$ mit der komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation. Dann ist

$$x = (x_i) \mapsto v = \sum x_i e_i = \varphi(x)$$

ein algebraischer Isomorphismus $\varphi : \mathbb{Q}_p^n \mapsto V$. Auf dem Raum $\mathbb{Q}_p^n$ sei die sup-Norm gewählt und zu zeigen ist noch, dass φ in beide Richtungen stetig ist. Es ist

$$\|\sum x_i e_i\| \leq \max \|x_i e_i\| = \max |x_i|\|e_i\| \leq \max \|e_i\| \cdot \max |x_i| = C\|x\|_\infty,$$

wobei $C = \max \|e_i\|$. Das zeigt, dass $\|\varphi(x)\| \leq C\|x\|_\infty$ und φ stetig ist.
Für die Umkehrung zeigen wir, dass φ eine offene Abbildung ist.
Sei $B = B_{\leq 1} := \{x \in \mathbb{Q}_p^n : \|x\|_\infty \leq 1\}$ die Einheitskugel in $\mathbb{Q}_p^n$. Wir zeigen, dass $\varphi(B)$ eine offene Kugel um 0 enthält.
S_1 sei die Einheitssphäre in $\mathbb{Q}_p^n$. S_1 ist offensichtlich kompakt, als abgeschlossene Teilmenge der Einheitskugel (diese ist kompakt, da $\mathbb{Q}_p$ lokal-kompakt und V endlichdimensional ist). Damit ist $\varphi(S_1)$ ebenfalls kompakt. Diese Bildmenge enthält sicher nicht die 0. Der Abstand von 0 zu $\varphi(S_1)$ ist also positiv und an irgendeinem Punkt $\varphi(x_0)$ wird ein Minimum angenommen:

$$x \in S_1 \Rightarrow \|\varphi(x)\| \geq \|\varphi(x_0)\| = \epsilon > 0.$$

Habe nun $v \in V - \{0\}$ eine Norm kleiner Epsilon. Dann hat für $|\lambda| \leq 1, \lambda \in \mathbb{Q}_p$ der Vektor $\lambda \cdot x$ ebenfalls Norm kleiner Epsilon. Insbesondere

$$\lambda \in K, |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda v \notin \varphi(S_1).$$

Wir können nun schreiben

$$v = \sum_i v_i e_i = \varphi((v_i)).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die letzte Komponente die Größte ist:

$$0 \neq |v_n| = \max |v_i| = \|(v_i)\|_\infty.$$

Mit $\lambda = 1/v_n$, haben wir $\lambda v = \varphi((v_i/v_n)) = \varphi(w) \in \varphi(S_1)$. Dieser Skalar λ erfüllt $|\lambda| > 1$, sodaß

$$\|(v_i)\|_\infty = |v_n| = \frac{1}{|\lambda|} < 1.$$

Das zeigt, dass $v = \varphi((v_i))$ mit $\|(v_i)\|_\infty < 1 : v \in \varphi(B)$, wobei $B = B_{\leq 1}(0, \mathbb{Q}_p^n)$.
Daher ist

$$B_{<\epsilon}(V) \subset \varphi(B).$$

□

Satz 31 *Sei K eine endliche algebraische Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$. Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung des Absolutbetrages von $\mathbb{Q}_p$ auf K.*

Beweis:

Eindeutigkeit:
Seien $|x|$ und $|x|'$ zwei Absolutbeträge auf K, die den Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}_p$ fortsetzen. Dann kann man, wie gewohnt K als Vektorraum über $\mathbb{Q}_p$ auffassen und die beiden Beträge als Normen.
Es existieren also $c > 0$ und $C > 0$ mit

$$c|x| \leq |x|' \leq C|x|.$$

Da die Absolutbeträge multiplikativ sind gilt für $x = y^n$:

$$c(|y|)^n \leq (|y|')^n \leq C(|y|)^n$$

was äquivalent dazu ist, dass:

$$c^{\frac{1}{n}}|y| \leq |y|' \leq C^{\frac{1}{n}}|y|.$$

Und in dieser Ungleichung geht für $n \longrightarrow \infty$ sicherlich

$$c^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1 \quad \text{und} \quad C^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1.$$

Also sind die Beträge gleich!

Existenz:
Durch die Betrachtung Galois'scher Erweiterungen unter der Voraussetzung der Existenz einer Fortsetzung, kommt man zu folgendem Ansatz:

Wenn K eine endliche Erweiterung vom Grad d von $\mathbb{Q}_p$ ist und für jedes $x \in \mathbb{Q}_p$ die lineare Abbildung l_x definiert ist durch $l_x(y) : y \to xy$, dann gilt:

$$f(x) = |\det(l_x)|^{\frac{1}{d}}$$

ist ein Absolutbetrag auf K, der mit dem üblichen Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}_p$ übereinstimmt.
Offensichtlich ist für $a \in \mathbb{Q}_p$ die $\det(l_a) = a^d$ und daher die d-te Wurzel wieder gleich a. Aus der Multiplikativität von det folgt die von f und auf $\mathbb{Q}_p$ stimmen die beiden offensichtlich überein. Einzig die verschärfte Dreiecksungleichung muß noch gezeigt werden. Hier geht die Lokal-Kompaktheit von $\mathbb{Q}_p$ ein. Wir wählen auf K irgendeine Norm, deren Wertebereich auf K mit dem der Bewertung auf $\mathbb{Q}_p$ übereinstimmt. Zum Beispiel kann man die kannonische Basis aus d Vektoren von K über $\mathbb{Q}_p$ annehmen, mit der sup-norm auf den Komponenten. Da die stetige Funktion f nicht auf der kompakten Menge $\|x\| = 1$ verschwindet, ist sie dort nach oben und nach unten beschränkt:

$$0 < \epsilon \leq f(x) \leq A < \infty \qquad (\|x\| = 1).$$

Für $x \neq 0, x \in K$ wähle $\lambda \in Q_p$ mit $\|x\| = |\lambda|$.
Der Vektor $\frac{x}{\lambda}$ hat Norm 1,

$$\epsilon \leq f(\frac{x}{\lambda}) \leq A \qquad x \neq 0,$$

und da $f(\frac{x}{\lambda}) = \frac{f(x)}{\lambda}$,

$$\epsilon|\lambda| \leq f(x) \leq A|x| \qquad (x \neq 0)$$

$$\epsilon\|x\| \leq f(x) \leq A\|x\| \qquad (x \neq 0)$$

Daher gilt mit $a = \epsilon^{-1}$ sowohl $\|x\| \leq af(x)$ als auch $f(x) \leq A\|x\|$. Angenommen $f(x) \leq 1$ und somit $\|x\| \leq a$.
Wir folgern:

$$\begin{aligned} f(1+x) \leq A\|1+x\| & \leq A \quad \max\{\|x\|, 1\} \\ & \leq A \quad \max\{\|1\|, a\} = C = C\max\{f(1), f(x)\} \end{aligned}$$

Wir können also im Allgemeinen, falls $f(y) \geq f(x)$, durch y dividieren und die obige Ungleichung auf $\frac{x}{y}$ anwenden, da $f(\frac{x}{y}) = \frac{f(x)}{f(y)} \leq 1$. Multiplizieren wir nun beide Seiten mit $f(y)$, dann erhalten wir:

$$f(x+y) \leq C\max\{f(x), f(y)\}.$$

Dieser Absolutbetrag stimmt auf $\mathbb{Q}_p$ mit dem p-adischen überein, und ist beschränkt auf den natürlichen Zahlen, also ist er sicher ein nichtarchimedischer Absolutbetrag.$\square$
Also läßt sich auf jeder endlichen Erweiterung ein passender Absolutbetrag finden. Der algebraische Abschluß von $\mathbb{Q}_p$ läßt sich jedoch nicht in endlich vielen Schritten erreichen. Es stellt sich also die Frage, ob der algebraische Abschluß ebenfalls ein nicht-archimedisch bewerteter Körper bzw. noch lokal-kompakt(und damit vollständig) ist. Zur letzten Frage liefert der folgende Satz schon ein Indiz:

Satz 32 *Ein lokal-kompakter Vektorraum V über $\mathbb{Q}_p$ ist endlich-dimensional.*

Beweis:
Man wähle eine kompakte Umgebung Ω der 0 in V, sowie einen Skalar $a \in Q_p quad(0 < |a| < 1)$. Die Inneren der Translate $x + a\Omega \quad (x \in V)$ bilden ein offene Überdeckung von V. Es existieren also endlich viele Vektoren a_i mit:

$$\Omega \subset \bigcup_i (a_i + a\Omega)$$

Sei L nun die lineare Hülle dieser endlich vielen(o.B.d.A seien es d) a_i. Dieser d-dimensionale Unterraum ist isomorph zu zu $\mathbb{Q}_p^d$ und damit abgeschlossen bzw vollständig. In dem hausdorffschen Quotientenraum V/L ist das Bild A von Ω eine kompakte 0 Umgebung mit $A \subset aA$ woraus folgt $a^{-n}A \subset A$ nach Induktion. Da $|a^{-n}| \longrightarrow 0$, muß gelten:

$$A \subset V/L \subset \cup_{n \geq 1} a^{-n} A \subset A.$$

Insbesondere ist V/L kompakt; $V/L = 0 \Rightarrow V = L$ ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum.$\square$

Also wird der (unendliche) algebraische Abschluß zumindest nicht lokal-kompakt sein. Dass er auch nicht vollständig ist, wird sich später zeigen. Dass $\mathbb{Q}_p$ nicht schon algebraisch abgeschlossen ist, sieht man übrigens z.B. anhand von Eisenstein Polynomen in $\mathcal{Z}_p$(analog zu Eisensteinpolynomen in den ganzen Zahlen über den rationalen). In der Tat ist der algebraische Abschluß damit bestimmt unendlich-dimensional.

Definition 33 *Bezeichne im Folgenden $\mathbb{Q}_p^a$ einen festen algebraischen Abschluß von $\mathbb{Q}_p$.*

Der algebraische Abschluß ist bewertet, da jedes Element in einer endlichen Erweiterung liegt und dort einen eindeutigen Betrag hat. Daher ist $\mathbb{Q}_p^a$ ein nicht-archimedisch bewerteter Körper. Es erhebt sich die Frage nach der Vollständigkeit. Dazu definieren wir:

Definition 34 *Ein topologischer Raum heißt Baire-Raum, wenn der Bairesche Kategoriensatz in ihm gilt.*

Bekanntermaßen sind vollständige metrische Räume Baire-Räume. In unserem Fall gilt aber:

Satz 35 *$\mathbb{Q}_p^a$ ist kein Baire-Raum.*

Beweis:
Wir definieren eine Folge von Teilmengen:

$$X_n = \{x \in \mathbb{Q}_p^a : deg(x) := [\mathbb{Q}_p(x) : \mathbb{Q}_p] = n\} \subset \mathbb{Q}_p^a$$

womit sicher $\mathbb{Q}_p^a = \cup_{n \geq 1} X_n$ gilt. Ausserdem ist $\lambda X_n \subset X_n$ für alle $\lambda \in Q_p$ sowie $X_n + X_m \subset X_{nm}$, insbesondere:

$$X_n + X_n \subset X_{n^2}$$

Die Teilmengen sind abgeschlossen. Ist x im Abschluß von X_n ($x = \lim x_i, x_i \in X_n$), dann sei für alle i, $f_i(X) \in \mathbb{Q}_p[X]$ ein Polynom von möglichst geringem Grad mit Wurzel x_i und den Koeffizienten in $\mathcal{Z}_p$(nötigenfalls durch skalieren). Wenigstens ein Koeffizient muß ungleich 0 sein. Falls nötig kann zu einer Teilfoge übergegangen werden, die (Koeffizientenweise in der Norm) konvergiert. Also $f_i \longrightarrow f$ und $f \in \mathcal{Z}_p[X]$. f hat Grad $\leq n$ und wenigstens einen Koeffizienten ungleich 0. Aufgrund der verschärften Dreiecksungleichung ist die Konvergenz gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $\mathbb{Q}_p^a$. Da die Folge (x_i) beschränkt ist, gilt:

$$f(x) - f_i(x_i) = f(x) - f(x_i) + f(x_i) - f_i(x_i) \longrightarrow 0,$$

da die beiden Folgen rechts gegen 0 gehen. Damit folgt $f(x) = \lim f_i(x_i) = 0$ und $x \in X_n$
Die Teilmengen X_n haben keinen inneren Punkt. Für jede abgeschlossene Kugel $B \subset \mathbb{Q}_p^a$ von positivem Radius haben wir $\mathbb{Q}_p^a = \mathbb{Q}_p B$. Daher kann eine solche Kugel nicht in einem X_n enthalten sein und auch kein Translat davon. $\square$
Daraus ersieht man unmittelbar, dass $\mathbb{Q}_p^a$ kein Baire-Raum ist. Aber jeder vollständige metrische Raum ist ein Baire-Raum, also kann $\mathbb{Q}_p^a$ nicht vollständig sein(Ausserdem ist damit völlig ausgeschlossen, dass $\mathbb{Q}_p^a$ lokal-kompakt ist).
Für weitere Betrachtungen (insbesondere um die Separabilität von $\mathbb{Q}_p^a$ zu zeigen) benötigt man Krasner's Lemma, aus dem sich die stetige Abhängigkeit der Wurzeln eines Polynoms in $\mathbb{Q}_p$ von den Koeffizienten herleiten läßt.

Satz 36 (Krasners Lemma) *Sei $K \subset \mathbb{Q}_p^a$ eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ und sei $a \in \mathbb{Q}_p^a$, sodass a algebraisch über $\mathbb{Q}_p$ ist. Bezeichne a^σ die Konjugierten von a über K und $r = \min_{a^\sigma \neq a} |a^\sigma - a|$. Dann erzeugt jedes Element $b \in B_{<r}(a; \mathbb{Q}_p^a)$ (gemeint ist: Kugel in $\mathbb{Q}_p^a$) über K eine Erweiterung, die $K(a)$ enthält.*

Beweis:
Sei $b \in K$, sodass $a \notin K(b)$. Die Charakteristik aller vorkommenden Körper ist 0, also existiert ein Konjugiertes Element $a^\sigma \neq a$ von a über $K(b)$(σ ein Automorphismus der $K(b)$ elementweise festläßt). Wir schätzen nun den Abstand von a zu b ab:

$$|b - a^\sigma| = |(b-a)^\sigma| = |b-a|,$$

$$|a - a^\sigma| \leq \max\{|a-b|, |b - a^\sigma)\} = |b-a|.$$

Daraus erkennt man:

$$|b - a| \geq |a - a^\sigma| \geq r.$$

Wenn also $b \in B_{<r}(a)$ also $|b-a| < r$, dann muß schon gelten:

$$a \in K(b) \Longrightarrow K(a) \subset K(b).\square$$

Aus Krasner's Lemma kann man nun die stetige Abhängikeit der Wurzeln von den Koeffizienten eines Polynoms folgern.

Satz 37 (Stetigkeit der Wurzeln einer Gleichung) *Sei K eine endliche Erweiterung über den p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ und a ein festes algebraisches Element $a \in \mathbb{Q}_p^a$ vom Grad n über K mit einem dazu passenden irreduziblen normierten Polynom $f \in K[X]$ vom Grad n. Dann gibt es ein positives ϵ, sodass jedes normierte Polynom $g \in K[X]$ vom Grad n mit $\|g - f\| < \epsilon$ eine Wurzel $b \in K(a)$ hat die die gleiche Erweiterung erzeugt:*

$$K(b) = K(a).$$

Beweis:
g kann in $\mathbb{Q}_p^a$ als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden.
$g = \prod(X - b_i)$
Nun Werten wir bei a aus,(wobei a die Wurzel von f ist):

$$\prod(a - b_i) = g(a) = g(a) - f(a)$$

Sei $M := \max_{0 \leq i \leq n}\{|a|^i\} = \max\{1, |a|^n\}$. Dann kann man abschätzen:

$$\prod |a - b| = |g(a) - f(a)| \leq |\|g - f\|M$$

also gibt es wenigstens einen Index i, für den gilt:

$$|a - b_i| \leq \|g - f\|^{\frac{1}{n}} M^{\frac{1}{n}}.$$

Wählt man ϵ also klein genug, sodass gilt $\|g - f\| < \epsilon$, so ist nach Krasner's Lemma $K(a) \subset K(b_i)$ für ein i. Aber der Grad von b_i ist kleiner gleich n, was der Grad von g ist. Daher gilt $K(b_i) = K(a)$. $\square$.

Daraus muß noch ein Korollar gebildet werden, welches die Konvergenz der Wurzeln mit den Koeffizienten zeigt:

Korollar 38 *Sei f ein normiertes irreduzibles Polynom, $a \in \mathbb{Q}_p^a$ eine Wurzel von f und $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von normierten Polynomen mit Koeffizienten in K und alle vom selben Grad wie f. Falls $g_i \to f$ koeffizientenweise, dann gibt es eine Folge von Wurzeln (x_i) der (g_i), sodass $x_i \in K(a)$ für genügend große i und $x_i \to a$.*

Beweis:
Sobald $\|g_i - f\| < \epsilon$ klein genug ist, können wir den obigen Satz verwenden, und folgern, dass $|a - x_i|$ klein ist, für zumindest ein i. Genauer:

$$|a - x_i| \leq \|g_i - f\|^{\frac{1}{n}} \dot{M}^{\frac{1}{n}}.$$

Daraus sieht man, dass $|a - x_i| \to 0$, und die Konvergenz $x_i \to a$ folgt(in $K(a)$).
$\square$

Nun folgt leicht, dass gewünschte Ergebnis:

Korollar 39 *Der algebraische Abschluß $\mathbb{Q}_p^a$ von $\mathbb{Q}_p$ ist ein separabler metrischer Raum.*

Beweis:
Sei $a \in \mathbb{Q}_p^a$ und f sein Minimalpolynom über $\mathbb{Q}_p$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{Q}_p$ liegt können wir Polynome mit rationalen Koeffizienten beliebig nahe bei f finden. Wir wählen also eine Folge $(g_i) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $g_i \to f$. Nach dem vorigen Korollar gibt es also eine Folge von Wurzeln (x_i) die gegen a konvergiert. Das zeigt, dass der algebraische Abschluß von $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{Q}_p^a$ liegt. Dieser algebraische Abschluß ist sicher abzählbar, da die Menge der Polynome zu einem fixen Grad, mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$, abzählbar ist. $\square$

Was nun insbesondere noch fehlt, ist die Vollständigkeit. Aber es wäre ja denkbar, dass eine Vervollständigung von $\mathbb{Q}_p^a$ wieder die algebraische Abgeschlossenheit verliert. Zum Glück ist dies nicht so, doch muß voerst überhaupt eine Vervollständigung konstruiert werden. Es ist hier üblich gleich einen Erweiterungskörper mit einer stärkeren Vollständigkeitseigenschaft zu konstruieren und dann den Abschluß von $\mathbb{Q}_p^a$ in dem größeren Körper zu bilden.

7 Der universelle Körper Ω_p

Sei R der normierte Ring der beschränkten Folgen in $\mathbb{Q}_p^a$ mit der Supremumsnorm(Also $\ell^\infty(Q_p^a)$). Auf $\mathbb{N}$ sei ein Ultrafilter Υ der die Mengen $[n, \infty) \quad (n \in \mathbb{N})$

enthält fest gewählt. Damit liegt also für alle $A \subset \mathbb{N}$ entweder A oder A^c in Υ. Nun hat jede beschränkte Folge reeller Zahlen einen Limes auf Υ. Wir definieren nun ϕ:

$$\phi(\alpha) = \lim |\alpha_i| \geq 0. \qquad \alpha \in \ell^\infty \qquad \text{(limes auf } \Upsilon!)$$

Zur Bedeutung des Limes auf Υ:

Definition 40 *Sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen. Dann ist*

$$\lim_{\Upsilon} x_n = x \Leftrightarrow (x_i)_{i \in U} \to x \qquad \forall U \subset \mathbb{N}, U \in \Upsilon.$$

Durch Faktorisieren nach einem maximalen Ideal erhalten wir nun einen Körper:

Satz 41 *Die Teilmenge $\Lambda = ker\phi$ ist ein maximales Ideal im Ring R und damit $\Omega_p = R/\Lambda$ ein Körper der $\mathbb{Q}_p^a$ umfaßt.*

Beweis:
Wir zeigen, dass jedes Element $\alpha \notin \Lambda$ invertierbar ist modΛ. Ist α nicht im Ideal, dann bedeuted das ja gerade, dass der lim $r = \phi(\alpha)$ nicht verschwindet. Es existiert also eine Teilmenge $A \in \Upsilon$ mit $\frac{r}{2} < |\alpha_i| < 2r \quad (i \in A)$. Wir definieren jetzt eine Folge $\beta = (\beta_i)$ durch

$$\beta_i = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} & \text{für } i \in A \\ = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $|\beta_i| \leq \frac{2}{r}$ ist die Folge beschränkt und nach Konstruktion verschwindet $1 - \alpha\beta$ auf ganz A, weswegen $1 - \alpha\beta \in \Lambda$. Das zeigt, dass α/Λ invertierbar ist im Quotienten Ω_p. Daher ist der Quotient ein Körper und Λ ein maximales Ideal in R. Die konstanten Folgen sind eine natürliche Einbettung von $\mathbb{Q}_p^a$ in Ω_p.

ϕ ist eine Bewertung auf Ω_p. Für $a \in \Omega_p$ gilt:

$$|a| = |a|_\Omega := \phi(a) = \lim_{\Upsilon} |a|.$$

Diese Bewertung(bzw. Absolutbetrag) setzt die Bewertung von $\mathbb{Q}_p^a$ fort. Weiters ist sie verträglich mit der Quotientennorm:

Satz 42 *Der Absolutbetrag $|.|_\Omega$ stimmt mit der Quotientennorm von R/Λ überein. Genauer:*

$$|a|_\Omega = \|\alpha/\Lambda\|_{R/\lambda} := \inf_{\beta \in \Lambda} \|\alpha - \beta\|.$$

Beweis:
Es gilt $\lim_\Upsilon |\gamma_i| \leq \sup |\gamma_i| \;\; \gamma \in R$ und daher:

$$\lim_{\Upsilon} |\alpha_i| = \lim_{\Upsilon} |\alpha_i - \beta_i| \leq \sup |\alpha_i - \beta_i| \quad (\beta \in J),$$

$$|a|_\Omega \leq \|\alpha - \beta\|.$$

Damit folgt:

$$|a|_\Omega \leq \|a\|_{R/\Lambda}.$$

Umgekehrt, falls $a = \alpha \bmod \Lambda$, dann kann man für jede Teilmenge $A \in \Upsilon$ eine Folge β definieren mit $\beta_i = 0 (i \in A)$und $\beta_i = \alpha_i$ sonst. Womit $\beta \in \Lambda$ und $\|\alpha - \beta\| = \sup_{i \in A} |\alpha_i|$ und

$$\|a\|_{R/\Lambda} \leq \inf_{A \in \Upsilon} \sup_{i \in A} |\alpha_i| = \lim\sup |\alpha_i| =$$

$$\lim_{\Upsilon} |\alpha_i| = |a|_\Omega. \quad \square$$

Womit wir einen wohldefinierten Absolutbetrag auf Ω_p haben, dessen Wertebereich übrigens(ohne Beweis) alle nicht-negativen reellen Zahlen sind.
Ω_p hat nun bereits eine sehr erfreuliche Eigenschaft:

Satz 43 *Ω_p ist algebraisch abgeschlossen.*

Beweis:
Sei f ein normiertes irreduzibles Polynom $f \in \Omega_p$ vom Grad $n \geq 1$. Wir zeigen, dass f eine Wurzel in Ω_p hat. Zuerst wählen wir Repräsentanten für die Koeffizienten:

$$a_k = (\alpha_{ki})_i \bmod \Lambda.$$

Damit können wir eine Familie von Polynomen bilden:

$$f_i(X) = X^n + \sum_{k<n} \alpha_{ki} X^i \in \mathbb{Q}_p^a[X].$$

Da $\mathbb{Q}_p^a$ algebraisch abgeschlossen ist, hat jedes dieser Polynome Wurzeln in $\mathbb{Q}_p^a$. Das Produkt dieser Wurzeln ist(bis auf ein Vorzeichen) genau α_{0i}. Es gibt also mindestens eine Wurzel ξ_i mit $\xi_i \leq |\alpha_{0i}|^{\frac{1}{n}}$. Die Folge $\xi = (\xi_i)$ ist also beschränkt($\|\xi\| \leq \|a_0\|^{\frac{1}{n}}$), also $\xi \in R$ und die Klasse x von ξ ist eine Wurzel von f in Ω_p. $\square$

Wie schon angekündigt, hat Ω_p eine strärkere Vollständigkeitseigenschaft als bloß bezüglich Cauchyfolgen. Und zwar:

Definition 44 *Ein bewerteter Körper heißt spährisch vollständig, wenn er bezüglich der durch deine Bewertung induzierten Metrik als metrischer Raum sphärisch vollständig ist.*

Satz 45 *Ω_p ist sphärisch vollständig.*

Beweis:
Betrachten wir also eine abnehmende Folge von Kugeln $(B_n)_{n \geq 0}$ mit $B_n = B_{\leq r}(a_n)$ in Ω_p. Die verschärfte Dreiecksungleichung sagt aus, dass:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r_n \quad \text{und} \quad (r_n) \text{ fallend ist.}$$

Wir gehen nun von den Mittelpunkten $a_n \in R/\Lambda$ zu Repräsentanten $\alpha \in R$ über. Da:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r_n < r_{n-1}$$

und da der Absolutbetrag die Quotientennorm ist, wählen wir induktiv α_{n+1}, sodass noch immer gilt, dass $\|\alpha_{n+1} - \alpha_n\| < r_{n-1}$. Dann gilt $\|\alpha_k - \alpha_n\| < r_{n-1}$ für alle $k \geq n$. Die i-te Komponente erfüllt $|\alpha_{ki} - \alpha_{ni}\| < r_{n-1} \quad (k \geq n)$. Wir gehen nun zur Diagonalfolge $\xi = (\xi_i)$ in R über, mit $\xi_i = \alpha_{ii}$. Es muß gelten:

$$\|\xi - \alpha_n\| \leq \sup_{i \geq n} |\xi_i - \alpha_{ni}| \leq r_{n-1}$$

da das Intervall $[n, \infty)$ zum Ultrafilter Υ gehört. Also gilt für $x = \xi \bmod \Lambda$:

$$|x - a_n| \leq \|\xi - \alpha_n\| \leq r_{n-1},$$

$$|x - a_{n-1}| \leq \max\{|x - a_n|, |a_n - a_{n-1}|\} \leq r_{n-1}.$$

also $x \in B_{n-1}$. Da das für alle $n > 0$ gemacht werden kann, folgern wir $x \in \bigcap B_n$ und der Schnitt ist nichtleer. Damit ist Ω_p sphärisch vollständig und somit vollständig.$\square$

Ein Wort noch zu der Bezeichnung 'universell', die Ω_p im Titel des Kapitels trägt:

Definition 46 *Ein nichtarchimedischer Körper K heißt maximal, wenn es keinen bewerteten Köper gibt, der K echt enthält und denselben Wertebereich der Bewertung und denselben Restkalssenkörper hat.*

Es gilt

Satz 47 (ohne Beweis) *Ein nichtarchimedischer Körper ist maximal dann und nur dann ,wenn er sphärisch vollständig ist.*

Der Beweis würde leider weit über diese Arbeit hinausführen.

8 Die p-adischen komplexen Zahlen $\mathbb{C}_p$

Definition 48 *$\mathbb{C}_p$ ist der Abschluß von $\mathbb{Q}_p^a$ in Ω_p.*

Anmerkung:
Damit ist $\mathbb{C}_p$ sicher vollständig und ein separabler (,denn das separable $\mathbb{Q}_p^a$ liegt dicht) metrischer Raum.
$\mathbb{C}_p$ ist nicht lokal-kompakt(da die Bewertung eine stetige Abbildung ist, und für lokalkompakte Körper folglich ihr Wertebereich in $\mathbb{R}$ nicht dicht liegen dürfte. Das tut er aber.).
Um die algebraische Abgeschlossenheit von $\mathbb{C}_p$ zu beweisen, ist noch ein weiterer Satz notwendig.
Aus der Normäquivalenz über vollständigen nichtdiskreten nichtarchimedischen Körpern folgt wieder die Eindeutigkeit des Absolutbetrages auf endlichen Erweiterungen vollständiger nicht-archimedischer Körper. K-Automorphismen in einer Erweiterung L sind isometrisch.
Es folgt eine Verallgemeinerung von Krasner's lemma:

Satz 49 *Sei Ω eine beliebige algebraisch abgeschlossene Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ und $K \subset \Omega$ ein vollständiger Teilkörper. Sei $a \in \Omega$ algebraisch über K und bezeichne a^σ seine Konjugierten in Ω über K. r bezeichene wieder $min_{a^\sigma \neq a}|a^\sigma - a|$. Dann erzeugt jedes Element b, algebraisch über K, mit $b \in B_{<r}(a)$ eine Körpererweiterung $K(b)$ die $K(a)$ enthält.*

Beweis:
Wir beweisen wieder die Negation.
Für ein algebraisches Element b mit $a \notin K(b)$ hat a ein Konjugiertes $a^\sigma \neq a$ über $K(b)$ und:

$$|b - a^\sigma| = |(b - a)^\sigma| = |b - a|,$$

$$|a - a^\sigma| \leq |\max\{|a - b|, |b - a^\sigma|\} = |b - a|.$$

Daher:

$$|b - a| \geq |a - a^\sigma| \geq r.$$

$\Box$.

Satz 50 *$\mathbb{C}_p$ ist algebraisch abgeschlossen.*

Beweis:
Sei L eine endliche(insbesondere algebraische) Erweiterung von $\mathbb{C}_p$. Wir können Krasner's Lemma anwenden, da $\mathbb{C}_p$ vollständig ist, Ω_p algebraisch abgeschlossen und der Absolutbetrag auf Ω_p den p-adischen fortsetzt. Angenommen $L = C_p(a)$ seine eine Erweiterung vom Grad ≥ 1 und sei $f \in C_p[X]$ das normierte irreduzible Polynom von a. Da $\mathbb{Q}_p^a$ dicht liegt in $\mathbb{C}_p$, können wir ein Polynom $g \in Q_p^a[X]$ nahe genug bei f wählen, damit eine Wurzel von g L über $\mathbb{C}_p$ erzeugt. Da aber $\mathbb{Q}_p^a$ algebraisch abgeschlossen ist, liegt diese Wurzel schon in $\mathbb{Q}_p^a$ und f muß vom Grad 1 sein $\Rightarrow L = C_p$. $\Box$

Satz 51 *$\mathbb{C}_p$ ist nicht sphärisch vollständig.*

Beweis:
Gegeben eine strikt fallende Folge von Radien r_n(mit Zahlen die im Wertebereich des Absolutbetrages auf $\mathbb{C}_p$ liegen). Wir beginnen mit der Kugel $B = B_{\leq r_0}(0)$ und wählen zwei abgeschlossene disjunkte Kugeln B_0 und B_1 mit gleichem Radius $r_1 < r_0$. In jeder der beiden Kugeln können wir zwei abgeschlossene disjunkte Kugeln mit Radius $r_2 < r_1$ wählen. Wir bezeichnen diese dann mit B_{i0} und B_{i1}. Sie sind abgeschlossene und disjunkte Kugeln in B_i. Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man abnehmende Folgen abgeschlossener Kugeln:

$$B_i \supset B_{ij} \supset \ldots \supset B_{ij\ldots k} \supset B_{ij\ldots kl} \supset \ldots .$$

Die Indizes sind hier entweder 0 oder 1. Zwei Kugeln, die unterschiedliche Multiindizes gleicher Länge haben, sind disjunkt. Zu einer gegebenen binären Folge $(i) = (i_1, i_2, \ldots)$ können wir definieren:

$$B_{(i)} = \bigcap_{n \geq 1} B_{i_1, \ldots, i_n}.$$

Dieser Durchschnitt ist entweder leer oder eine abgeschlossene Kugel vom Radius $r = \lim r_n$. Alle $B_{(i)}$ sind nun sicher offen in $\mathbb{C}_p$, weil $r > 0$. Ist irgendwo in zwei binären Folgen zumindest ein Index verschieden, so sind die zugehörigen Kugeln ab diesem Index und ihre Schnittmengen sicher disjunkt. Da $\mathbb{C}_p$ aber separabel ist, besteht diese überabzählbare Familie von disjunkten offenen Mengen, nur aus höchstens abzählbar vielen verschiedenen disjunkten Mengen. Also müssen die meisten $B_{(i)}$ leer sein. □

Interessanterweise sind $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}_p$ in algebraische Hinsicht fast ident. Um das zu zeigen, benötigen wir das

Lemma 52 *Der Körper $\mathbb{C}_p$ hat die Mächtigkeit des Kontinuums.*

Beweis:
Die Einheitskugel von $\mathbb{Q}_p$ ist $\mathcal{Z}_p$ und dieses hat die Machtigkeit des Kontinuums (offensichtlich kann man Surjektiv nach [0,1] Abbilden, wobei man höchstens abzählbar oft ein Element mehrfach trifft). Der Körper $\mathbb{Q}_p$ ist die abzählbare Vereinigung von Kugeln $p^m \mathcal{Z}_p$ und hat somit auch die Mächtigkeit des Kontinuums. Ebenso haben alle endlichen Körpererweiterungen die selbe Mächtigkeit. Der algebraische Abschluß hat die gleiche Mächtigkeit wie der Polynomring über $\mathbb{Q}_p$ und der ist wieder von der Mächtigkeit des Kontinuums. Schließlich hat das abzählbares Produkt $(\mathbb{Q}_p^a)^{\mathbb{N}}$ keine größere Mächtigkeit und dieses Produkt enthält sicher alle Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}_p^a$. Die Machtigeit von $\mathbb{C}_p$ ist offensichtlich kleiner gleich der Mächtigkeit dieses Produkts. □
Jetzt benötigen wir den Begriff der Transzendenzbasis.

Definition 53 *Eine Transzendenzbasis einer Körpererweiterung K/k ist eine Familie von Elementen $(X_i)_{i \in I}$, sodaß der Unterkörper $k(X_i)_{i \in I} \subset K$ rein transzendent ist, über k und $K/k(X_i)_{i \in I}$ ist eine algebraische Erweiterung.*

Anmerkung:
Je zwei algebraische Abschlüsse eines Körpers k sind k-isomorph.
Jede Körpererweiterung K/k hat eine Transzendenzbasis.
Je zwei Transzendenzbasen von K/k haben selbe Mächtigkeit.

Jetzt können wir den Beweis zu Ende führen:

Satz 54 *Die Körper $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}_p$ sind algebraisch isomorph.*

Beweis:
Jede Erweiterung der rationalen Zahlen von der Mächtigkeit des Kontinuums hat eine Transzendenzbasis dieser Mächtigkeit. Wir können also in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}_p$ Basen $(X_i)_{i \in I}$ und $(Y_i)_{i \in I}$ wählen(mit gleicher Indexmenge). $\mathbb{C}$ ist der algebraische Abschluß von $\mathbb{Q}(X_i)_{i \in I}$ und $\mathbb{C}_p$ ist der algebraische Abschluß von $\mathbb{Q}(Y_i)_{i \in I}$. Damit sind diese beiden algebraischen Abschlüsse isomorph. □
Leider benötigt der Beweis das Auswahlaxiom(bei der Existenz der Transzendenzbasen), weswegen ein algebraischer Isomorphismus nicht kanonisch gegeben ist.