Die Spektralfunktion eines λ-rationalen Sturm-Liouville Problems

Projektpraktikum aus
Technischer Mathematik

Matthias Langer

25. August 1996

1 Einleitung

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$-y'' - \left(\lambda + \frac{q}{u-\lambda}\right) y = f \tag{1}$$

und die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$-y'' - \left(\lambda + \frac{q}{u-\lambda}\right) y = 0 \tag{2}$$

auf dem Intervall $[0,1]$ mit den Randbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \tag{3}$$

im Raum $L^2(0,1)$. Die Funktionen $u(x)$ und $q(x)$ seien in einer Umgebung U des Intervalls $[0,1]$ holomorph. Es sei $q(x) > 0$ und $u'(x) > 0$ für $x \in [0,1]$. Die komplexe Zahl λ ist der Eigenwertparameter. Wir setzen noch $\alpha := u(0)$ und $\beta := u(1)$. Also gilt $u([0,1]) = [\alpha, \beta]$.

Die Differentialgleichung (1) wurde schon in [Ba] und [LMM] betrachtet. Unter der Voraussetzung, daß $u(x)$ und $q(x)$ holomorph sind und daß $q(x) > 0$ und $u'(x) > 0$ gilt, kann eine Spektralfunktion angeben werden.

Bezeichnen wir die linke Seite der Differentialgleichung mit

$$T(\lambda)y := -y'' - \left(\lambda + \frac{q}{u-\lambda}\right) y, \tag{4}$$

so werden die Gleichungen (1), (2) zu $T(\lambda)y = f$ bzw. $T(\lambda)y = 0$. Sei

$$\mathcal{D} := \{y \in L^2(0,1) : y' \text{ ist absolut stetig}, (y')' \in L^2, y(0) = y(1) = 0\}.$$

Dann ist T ein auf $\mathcal{D}$ definierter Operator. $\lambda \in \mathbf{C}$ heißt Eigenwert von T, wenn ein $y \in \mathcal{D}$, $y \neq 0$, existiert, sodaß $T(\lambda)y = 0$.

2 Linearisierung des Problems

Man kann das in λ nicht lineare Eigenwertproblem (2), (3) in ein λ-lineares Problem transformieren. Setzt man

$$y_1 := y, \quad y_2 := -\frac{\sqrt{q}}{u-\lambda} y,$$

so ist (2) äquivalent zu

$$-y_1'' + \sqrt{q}\, y_2 = \lambda y_1, \quad \sqrt{q}\, y_1 + u y_2 = \lambda y_2.$$

Mit $\mathbf{y} = \binom{y_1}{y_2}$ erhält man:

$$\begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} & \sqrt{q} \\ \sqrt{q} & u \end{pmatrix} \mathbf{y} - \lambda \mathbf{y} = 0.$$

Entsprechend ist die inhomogene Gleichung (1) äquivalent zu:

$$\begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} & \sqrt{q} \\ \sqrt{q} & u \end{pmatrix} \mathbf{y} - \lambda \mathbf{y} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir können den Operator $\mathbf{L}$ auf $L^2 \oplus L^2$, durch folgende Matrix definiert, betrachten:

$$\mathbf{L} := \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} & \sqrt{q} \\ \sqrt{q} & u \end{pmatrix}$$

mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}' := \mathcal{D} \oplus L^2$.
$\mathbf{L}$ ist ein selbstadjungierter Operator.
Nach [LMM] ist $\sigma_p(\mathbf{L}) \backslash [\alpha, \beta] = \sigma_p(T) \backslash [\alpha, \beta]$ und $\sigma_{ess}(\mathbf{L}) = [\alpha, \beta]$. Die Resolvente von $\mathbf{L}$ lautet:

$$R_\lambda(\mathbf{L}) = \begin{pmatrix} W_\lambda & -W_\lambda \sqrt{q}\,(u-\lambda)^{-1} \\ -\sqrt{q}\,(u-\lambda)^{-1} W_\lambda & (u-\lambda)^{-1} + \sqrt{q}\,(u-\lambda)^{-1} W_\lambda (u-\lambda)^{-1} \sqrt{q} \end{pmatrix}$$

mit $W_\lambda = \left(-\frac{d^2}{dx^2} - \lambda - \frac{q}{u-\lambda} \right)^{-1}$. Den Operator W_λ kann man mit Hilfe der Green'schen Funktion schreiben:

$$(W_\lambda f)(x) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi$$

mit

$$G(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \psi(x, \lambda)\chi(\xi, \lambda), & x < \xi \\ \chi(x, \lambda)\psi(\xi, \lambda), & x > \xi \end{cases}$$

wobei ψ (bzw. χ) die Randbedingung bei $x = 0$ (bzw. bei $x = 1$) erfüllen soll. Dazu sei φ und ψ eine Lösungsbasis:

$$\begin{array}{ll} \varphi(0, \lambda) = 1 & \psi(0, \lambda) = 0 \\ \varphi'(0, \lambda) = 0 & \psi'(0, \lambda) = 1 \end{array}$$

Die Funktion χ setzt man als Linearkombination von φ und ψ an, sodaß $\chi(1, \lambda) = 0$.

$$\chi(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + m(\lambda)\psi(x, \lambda)$$

Die Funktion $m(\lambda) = -\frac{\varphi(1,\lambda)}{\psi(1,\lambda)}$ heißt der Titchmarsh-Weyl'sche Koeffizient.

Bezeichnen wir die Spektralfunktion von $\mathbf{L}$ mit E_λ. Sei $\mathbf{f} = \binom{f}{0} \in L^2 \oplus L^2$. Außerdem $N > 0$ mit $[\alpha, \beta] \subseteq (-N, N)$ und weder N noch $-N$ ein Eigenwert von $\mathbf{L}$. Dann gilt mit der Stieltjes'schen Umkehrformel:

$$
\begin{aligned}
&(E_N \mathbf{f}, \mathbf{f}) - (E_{-N}\mathbf{f}, \mathbf{f}) = \qquad (5)\\
&= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-N}^{N} [(R_{\lambda+i\varepsilon}(\mathbf{L})\mathbf{f}, \mathbf{f}) - (R_{\lambda-i\varepsilon}(\mathbf{L})\mathbf{f}, \mathbf{f})] d\lambda = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-N}^{N} [(W_{\lambda+i\varepsilon} f, f) - (W_{\lambda-i\varepsilon} f, f)] d\lambda = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-N}^{\alpha-0} \int_0^1 \int_0^1 [G(x,\xi,\lambda+i\varepsilon) - G(x,\xi,\lambda-i\varepsilon)] f(\xi) d\xi \overline{f(x)} dx d\lambda + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\alpha-0}^{\beta+0} \int_0^1 \int_0^1 [G(x,\xi,\lambda+i\varepsilon) - G(x,\xi,\lambda-i\varepsilon)] f(\xi) d\xi \overline{f(x)} dx d\lambda + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\beta+0}^{N} \int_0^1 \int_0^1 [G(x,\xi,\lambda+i\varepsilon) - G(x,\xi,\lambda-i\varepsilon)] f(\xi) d\xi \overline{f(x)} dx d\lambda
\end{aligned}
$$

Für das erste Integral ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-N}^{\alpha-0} \int_0^1 \Bigg[\int_0^x \Big(\psi(\xi, \lambda+i\varepsilon)\big(\varphi(x,\lambda+i\varepsilon) + m(\lambda+i\varepsilon)\psi(x,\lambda+i\varepsilon)\big) - \\
&- \psi(\xi,\lambda-i\varepsilon)\big(\varphi(x,\lambda-i\varepsilon) + m(\lambda-i\varepsilon)\psi(x,\lambda-i\varepsilon)\big)\Big) f(\xi) d\xi + \\
&+ \int_x^1 \Big(\psi(x,\lambda+i\varepsilon)\big(\varphi(\xi,\lambda+i\varepsilon) + m(\lambda+i\varepsilon)\psi(\xi,\lambda+i\varepsilon)\big) - \\
&- \psi(x,\lambda-i\varepsilon)\big(\varphi(\xi,\lambda-i\varepsilon) + m(\lambda-i\varepsilon)\psi(\xi,\lambda-i\varepsilon)\big)\Big) f(\xi) d\xi \Bigg] \overline{f(x)} dx d\lambda = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-N}^{\alpha-0} \Bigg[m(\lambda+i\varepsilon) \int_0^1 \int_0^1 \psi(x,\lambda+i\varepsilon)\psi(\xi,\lambda+i\varepsilon) f(\xi)\overline{f(x)} d\xi dx - \\
&- m(\lambda-i\varepsilon) \int_0^1 \int_0^1 \psi(x,\lambda-i\varepsilon)\psi(\xi,\lambda-i\varepsilon) f(\xi)\overline{f(x)} d\xi dx \Bigg] d\lambda =
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{-N<\lambda_j<\alpha} \operatorname{Res}(m, \lambda_j) \left| \int_0^1 \psi(x, \lambda_j) f(x) dx \right|^2 \tag{6}$$

Analog erhält man für das dritte Integral:

$$\sum_{\beta<\lambda_j<N} \operatorname{Res}(m, \lambda_j) \left| \int_0^1 \psi(x, \lambda_j) f(x) dx \right|^2 \tag{7}$$

Für $\lambda \in [\alpha, \beta]$ muß man die Lösungen der Gleichung genauer untersuchen. In diesem Fall hat die Funktion $\frac{q}{u-\lambda}$ einen einfachen Pol bei $x = u^{-1}(\lambda)$.

3 Differentialgleichungen mit schwachen Singularitäten

Wir betrachten Gleichungen mit einer schwachen (oder regulären) Singularität[1], d.h. Gleichungen des folgenden Typs:

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{8}$$

Die Funktionen $a(x)$ und $b(x)$ seien in einer Umgebung von x_0, $x_0 \in \mathbf{C}$, mit Ausnahme von x_0 holomorph. Bei x_0 besitze $a(x)$ einen Pol von höchstens 1. Ordnung und $b(x)$ einen Pol von höchstens 2. Ordnung. Es sollen also für $|x - x_0| \leq \rho$ folgende Laurent-Entwicklungen gelten:

$$a(x) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$
$$b(x) = \sum_{n=-2}^{\infty} b_n (x - x_0)^n.$$

Dann kann man folgenden Lösungsansatz machen:

$$g(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n. \tag{9}$$

Dabei muß r notwendigerweise die Indexgleichung erfüllen:

$$r(r-1) + a_{-1} r + b_{-2} = 0. \tag{10}$$

Die beiden Lösungen von (10) seien r_1, r_2. Dann sind 3 Fälle zu unterscheiden:

[1] Siehe hierzu zum Beispiel [H] S. 274-284.

1. $r_1 - r_2 \notin \mathbf{Z}$:
   Durch den Ansatz (9) erhält man mit r_1 und r_2 zwei linear unabhängige Lösungen von (8) für $|x - x_0| \leq \rho$.

2. $r_1 = r_2$:
   Man erhält eine Lösung von (8) für $|x - x_0| \leq \rho$.

3. $r_1 - r_2 \in \mathbf{Z}, r_1 > r_2$:
   Man erhält mit r_1 durch den Ansatz (9) eine Lösung von (8) für $|x - x_0| \leq \rho$. Mit r_2 lassen sich im Potenzreihenansatz die Koeffizienten nicht so bestimmen, daß (9) die Gleichung erfüllt.

In den Fällen 2 und 3 erhält man durch den Ansatz $y(x) = g(x)\tau(x)$ eine zweite, linear unabhängige Lösung der Gleichung (8).

Betrachten wir nun wieder unsere Gleichung (2) und halten vorerst λ fest. Bei $x = x_0 := u^{-1}(\lambda)$ liegt eine schwache Singularität mit $a_{-1} = b_{-2} = 0$ vor, wenn $q(x_0) \neq 0$. Somit lautet die Indexgleichung (10):

$$r(r-1) = 0$$

Die beiden Lösungen unterscheiden sich um eine ganze Zahl, also ist nach dem vorher Gesagten nur $r = 1$ möglich. Für g ergibt sich daher:

$$g(x) = (x - x_0) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \tag{11}$$

Für die zweite Ableitung erhalten wir:

$$g'' = 2c_1 + 6c_2(x - x_0) + \ldots$$

Einsetzen in die Differentialgleichung (2) ergibt:

$$\begin{aligned} &2c_1 + 6c_2(x - x_0) + \ldots + \\ &+ \left(b_{-1}(x - x_0)^{-1} + b_0 + \ldots\right) \left(c_0(x - x_0) + c_1(x - x_0)^2 + \ldots\right) \equiv 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2c_1 + b_{-1}c_0 = 0 \quad \Rightarrow c_1 = -\frac{b_{-1}}{2} c_0$$

O.B.d.A. können wir $c_0 = 1$ setzen, d.h. $g'(x_0) = 1$. Das ergibt $c_1 = -\frac{b_{-1}}{2}$. Dabei ist

$$b_{-1} = \operatorname{Res}\left(b(x);\ x_0\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{q}{u - \lambda};\ x_0\right) = \frac{q(x_0)}{u'(x_0)}$$

Damit hat $g(x)$ folgende Form:

$$g(x) = (x - x_0) - \frac{b_{-1}}{2}(x - x_0)^2 + \dots$$

Die Funktion $g(x)$ ist eine holomorphe Lösung der Differentialgleichung und läßt sich auf ganz U fortsetzen.

Um eine zweite, linear unabhängige Lösung der Gleichung zu erhalten, machen wir den Ansatz $y = g(x)\tau(x)$. Einsetzen in die Differentialgleichung (2) ergibt:

$$g''\tau + 2g'\tau' + g\tau'' + \left(\lambda + \frac{q}{u - \lambda}\right) g\tau = 0$$
$$\Rightarrow 2g'\tau' + g\tau'' = 0$$

Wenn wir $w := \tau'$ setzen, erhalten wir:

$$2g'w + gw' = 0$$
$$\Rightarrow \frac{w'}{w} = -2\frac{g'}{g}$$

$$\begin{aligned} w &= C\frac{1}{g^2} = \frac{C}{\left((x - x_0) - \frac{b_{-1}}{2}(x - x_0)^2 + \dots\right)^2} = \\ &= \frac{C}{(x - x_0)^2 - b_{-1}(x - x_0)^3 + \dots} = \\ &= C\left(\frac{1}{(x - x_0)^2} + b_{-1}\frac{1}{x - x_0} + \dots\right) \end{aligned}$$

Setzen wir o.B.d.A. $C := -\frac{1}{b_{-1}}$, dann ergibt sich

$$w(x) = -\frac{1}{b_{-1}}(x - x_0)^{-2} - (x - x_0)^{-1} + \dots$$

Für τ erhalten wir dann:

$$\tau(x) = \frac{1}{b_{-1}(x - x_0)} - \log(x - x_0) + \dots \tag{12}$$

Die Lösung $g\tau$ der Differentialgleichung hat dann folgende Form:

$$\begin{aligned} &g(x)\tau(x) = \\ &= -\log(x - x_0)\left((x - x_0) - \frac{b_{-1}}{2}(x - x_0)^2 + \dots\right) + \frac{1}{b_{-1}} + C'(x - x_0) + \dots \end{aligned}$$

Die Lösung $g\tau$ läßt sich auch auf $U \setminus \{x_0\}$ holomorph fortsetzen, bei $x = x_0$ besitzt sie einen Verzweigungspunkt. Außerhalb von x_0 besitzt $g\tau$ keine Singularität, weil die Differentialgleichung dort regulär ist. $\tau(x)$ hat allerdings dort, wo $g(x)$ eine Nullstelle hat (die höchstens einfach sein kann), einen einfachen Pol.

Wir betrachten nun die Differentialgleichung in Abhängigkeit von λ. Die Lage der Singularität hängt jetzt von λ ab. Für die Funktionen $g(x)$ und $\tau(x)$ schreiben wir $g(x, \lambda)$ bzw. $\tau(x, \lambda)$. Die Lösungen hängen holomorph von λ ab, bis auf die Singularität bei $\lambda = u(x)$ und etwaigen Polen von τ.

Sei $\lambda \in [\alpha, \beta]$. Die Funktion $\tau(x, \lambda)$ hat bei $x = u^{-1}(\lambda)$ einen Verzweigungspunkt. Wir schlitzen die Ebene entlang der negativen reellen Achse bis zu $u^{-1}(\lambda)$ auf. Dann existiert eine Funktion $\Theta(x, \lambda)$ mit $\Theta(x, \lambda) \in \mathbf{R}$, sodaß wegen (12) gilt:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tau(x, \lambda \pm i\varepsilon) =: \begin{cases} \Theta(x, \lambda), & x > u^{-1}(\lambda) \\ \Theta(x, \lambda) \pm i\pi, & x < u^{-1}(\lambda) \end{cases} \tag{13}$$

Die Funktion $\Theta(x, \lambda)$ hat dann folgende Form:

$$\Theta(x, \lambda) = \frac{1}{b_{-1}(x - u^{-1}(\lambda))} - \ln |x - u^{-1}(\lambda)| + \ldots$$

Es ist $g(x, \lambda)\Theta(x, \lambda)$ eine reelle Lösung der Differentialgleichung auf $[0, 1]$.

Die Wronskische Determinante der Lösungen g und $g\tau$ hängt nur von λ ab, da der Koeffizient der ersten Ableitung in der Differentialgleichung verschwindet. Wir schreiben hierfür $W(\lambda)$:

$$W(\lambda) = W(g, g\tau) = g(g\tau)' - g'g\tau = g^2\tau' \neq 0$$

Und mit den obigen Normierungen erhalten wir:

$$W(g, g\tau) = -\frac{1}{b_{-1}}$$

Wir untersuchen nun die Eigenwerte im Intervall $[\alpha, \beta]$.
Dabei müssen wir 2 Fälle unterscheiden:

1. $g(0, \lambda) = g(1, \lambda) = 0$:
   Die Funktion $y = g(x, \lambda)$ ist Eigenfunktion zum Eigenwert λ.

2. $g(0, \lambda), g(1, \lambda) \neq 0, \tau(0, \lambda) = \tau(1, \lambda)$:
   $y = ((\tau(x, \lambda) - \tau(0, \lambda))g(x, \lambda)$ ist Eigenfunktion.

Im ersten Fall können sich die Eigenwerte nicht häufen, weil $g(0, \lambda)$ und $g(1, \lambda)$ holomorph von λ abhängen. Im 2. Fall können sich die Eigenwerte auch höchstens bei α und β häufen.

4 Der Titchmarsh-Weyl'sche Koeffizient

Wir berechnen nun den Titchmarsh-Weyl'schen Koeffizienten. Dazu nehmen wir folgende Lösungsbasis:

$$\begin{array}{ll} \varphi(0,\lambda) = 1 & \psi(0,\lambda) = 0 \\ \varphi'(0,\lambda) = 0 & \psi'(0,\lambda) = 1 \end{array}$$

Für φ setzt man an:

$$\varphi = A\, g + B\, g\tau$$

Durch die Anfangsbedingungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} A\, g(0,\lambda) + B\, g(0,\lambda)\tau(0,\lambda) &= 1 \\ A\, g'(0,\lambda) + B\, [g'(0,\lambda)\tau(0,\lambda) + g(0,\lambda)\tau'(0,\lambda)] &= 0 \end{aligned}$$

und man erhält:

$$\begin{aligned} A &= \frac{g'(0,\lambda)\tau(0,\lambda) + g(0,\lambda)\tau'(0,\lambda)}{g(0,\lambda)^2\tau'(0,\lambda)} \\ B &= -\frac{g'(0,\lambda)}{g(0,\lambda)^2\tau'(0,\lambda)} \end{aligned}$$

Für ψ setzt man an:

$$\psi = C\, g + D\, g\tau$$

Durch die Anfangsbedingungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} C\, g(0,\lambda) + D\, g(0,\lambda)\tau(0,\lambda) &= 0 \\ C\, g'(0,\lambda) + D\, [g'(0,\lambda)\tau(0,\lambda) + g(0,\lambda)\tau'(0,\lambda)] &= 1 \end{aligned}$$

und man erhält:

$$\begin{aligned} C &= -\frac{g(0,\lambda)\tau(0,\lambda)}{g(0,\lambda)^2\tau'(0,\lambda)} \\ D &= \frac{g(0,\lambda)}{g(0,\lambda)^2\tau'(0,\lambda)} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$\begin{aligned} \varphi(x,\lambda) &= g(x,\lambda)\frac{g(0,\lambda)\tau'(0,\lambda) - g'(0,\lambda)(\tau(x,\lambda) - \tau(0,\lambda))}{g(0,\lambda)^2\tau'(0,\lambda)} \\ \psi(x,\lambda) &= g(x,\lambda)\frac{\tau(x,\lambda) - \tau(0,\lambda)}{g(0,\lambda)\tau'(0,\lambda)} \end{aligned}$$

Es ergibt sich für den Titchmarsh-Weyl'schen Koeffizienten:

$$\begin{aligned} m(\lambda) &= -\frac{\varphi(1,\lambda)}{\psi(1,\lambda)} = \\ &= -\frac{g(0,\lambda)\tau'(0,\lambda) - g'(0,\lambda)(\tau(1,\lambda)-\tau(0,\lambda))}{g(0,\lambda)(\tau(1,\lambda)-\tau(0,\lambda))} = \\ &= \frac{g'(0,\lambda)}{g(0,\lambda)} - \frac{\tau'(0,\lambda)}{\tau(1,\lambda)-\tau(0,\lambda)} \end{aligned}$$

Der Titchmarsh-Weyl'sche Koeffizient $m(\lambda)$ ist nach [LMM] eine Nevanlinna-Funktion, d.h. ist holomorph in $\mathbf{C}^+$ und bildet $\mathbf{C}^+$ in sich ab. Solche Funktionen gestatten eine Integraldarstellung:

$$m(\lambda) = \alpha + \beta\lambda + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-\lambda} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\sigma(t)$$

mit $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \geq 0$ und σ ein Maß auf $\mathbf{R}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{1+t^2} < \infty$. Das Maß σ im Intervall $[\alpha, \beta]$ berechnet man mit der Stieltjes'schen Umkehrformel. Es sei Δ ein Intervall, $\Delta \subseteq [\alpha, \beta]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sigma(\Delta) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Delta} \Big(m(\lambda + i\varepsilon) - m(\lambda - i\varepsilon) \Big) d\lambda = \\ &= -\int\limits_{\Delta} \tau'(0,\lambda) \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{\Theta(1,\lambda) - \Theta(0,\lambda) - i\pi} - \frac{1}{\Theta(1,\lambda) - \Theta(0,\lambda) + i\pi} \right] d\lambda \\ &= \int\limits_{\Delta} \frac{-\tau'(0,\lambda)}{[\Theta(1,\lambda) - \Theta(0,\lambda)]^2 + \pi^2} d\lambda \qquad (14) \end{aligned}$$

5 Berechnung der Greenschen Funktion

Wenn $\lambda \notin \sigma(\mathbf{L})$ ist, können wir die Greensche Funktion berechnen. Die Funktionen

$$y_1(x,\lambda) = (\tau(x,\lambda) - \tau(0,\lambda)) g(x,\lambda) \qquad (15)$$

$$y_2(x,\lambda) = (\tau(x,\lambda) - \tau(1,\lambda)) g(x,\lambda) \qquad (16)$$

erfüllen die Randbedingungen

$$y_1(0,\lambda) = 0 \quad \text{bzw.} \quad y_2(1,\lambda) = 0$$

und genügen der Differentialgleichung.

Die Wronskische Determinante dieser Funktionen lautet:
(Wir schreiben hier kurz τ_0 für $\tau(0,\lambda)$ und τ_1 für $\tau(1,\lambda)$)

$$\begin{aligned}
&W((\tau-\tau_0)g,(\tau-\tau_1)g) = \\
&= (\tau-\tau_0)g((\tau-\tau_1)g)' - (\tau-\tau_1)g((\tau-\tau_0)g)' = \\
&= (\tau-\tau_0)(\tau-\tau_1)gg' + (\tau-\tau_0)\tau' g^2 - \\
&\quad - (\tau-\tau_1)(\tau-\tau_0)gg' - (\tau-\tau_1)\tau' g^2 = \\
&= (\tau_1-\tau_0)\tau' g^2 = (\tau(1,\lambda)-\tau(0,\lambda))\underbrace{W(\lambda)}_{\neq 0}
\end{aligned} \tag{17}$$

Die Funktionen sind also, wenn λ kein Eigenwert ist, wirklich linear unabhängig.

Die Greensche Funktion lautet nun:

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{W(y_1,y_2)} \cdot \begin{cases} y_1(x,\lambda)y_2(\xi,\lambda), & x<\xi \\ y_2(x,\lambda)y_1(\xi,\lambda), & x>\xi \end{cases}$$

$$= \frac{g(x,\lambda)g(\xi,\lambda)}{W(\lambda)(\tau(1,\lambda)-\tau(0,\lambda))} \cdot \begin{cases} (\tau(x,\lambda)-\tau(0,\lambda))(\tau(\xi,\lambda)-\tau(1,\lambda)), & x<\xi \\ (\tau(x,\lambda)-\tau(1,\lambda))(\tau(\xi,\lambda)-\tau(0,\lambda)), & x>\xi \end{cases}$$

Um den Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\pi i}[G(x,\xi,\lambda+i\varepsilon) - G(x,\xi,\lambda-i\varepsilon)] \tag{18}$$

zu berechnen, braucht man nur die Teile mit τ zu betrachten, weil der Rest keine Verzweigung hat. Dabei müssen wir mehrere Fälle unterscheiden, je nachdem, wo x und ξ liegen. Wir verwenden dabei auch folgende Beziehung:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\tau(1,\lambda\pm i\varepsilon)-\tau(0,\lambda\pm i\varepsilon)) = (\Theta(1,\lambda)-\Theta(0,\lambda)) \mp i\pi$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[\frac{(\tau(x,\lambda+i\varepsilon)-\tau(0,\lambda+i\varepsilon))(\tau(\xi,\lambda+i\varepsilon)-\tau(1,\lambda+i\varepsilon))}{\tau(1,\lambda+i\varepsilon)-\tau(0,\lambda+i\varepsilon)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\tau(x,\lambda-i\varepsilon)-\tau(0,\lambda-i\varepsilon))(\tau(\xi,\lambda-i\varepsilon)-\tau(1,\lambda-i\varepsilon))}{\tau(1,\lambda-i\varepsilon)-\tau(0,\lambda-i\varepsilon)}\right] =
\end{aligned} \tag{19}$$

$\underline{0 < x < \xi < u^{-1}(\lambda):}$

$$\begin{aligned}
(19) &= [\Theta(x,\lambda)-\Theta(0,\lambda)] \cdot \\
&\quad \cdot \left[\frac{\Theta(\xi,\lambda)-\Theta(1,\lambda)+i\pi}{\Theta(1,\lambda)-\Theta(0,\lambda)-i\pi} - \frac{\Theta(\xi,\lambda)-\Theta(1,\lambda)-i\pi}{\Theta(1,\lambda)-\Theta(0,\lambda)+i\pi}\right] = \\
&= [\Theta(x,\lambda)-\Theta(0,\lambda)]\frac{2\pi i[\Theta(\xi,\lambda)-\Theta(0,\lambda)]}{[\Theta(1,\lambda)-\Theta(0,\lambda)]^2+\pi^2}
\end{aligned}$$

Für $0 < \xi < x < u^{-1}(\lambda)$ ergibt sich das Gleiche, weil man x und ξ einfach vertauschen kann.

$\underline{0 < x < u^{-1}(\lambda) < \xi < 1:}$

$$\begin{aligned}(19) \quad &= [\Theta(x,\lambda) - \Theta(0,\lambda)][\Theta(\xi,\lambda) - \Theta(1,\lambda)] \cdot \\ &\cdot \left[\frac{1}{\Theta(1,\lambda) - \Theta(0,\lambda) - i\pi} - \frac{1}{\Theta(1,\lambda) - \Theta(0,\lambda) + i\pi}\right] = \\ &= 2\pi i \frac{[\Theta(x,\lambda) - \Theta(0,\lambda)][\Theta(\xi,\lambda) - \Theta(1,\lambda)]}{[\Theta(1,\lambda) - \Theta(0,\lambda)]^2 + \pi^2}\end{aligned}$$

$\underline{0 < \xi < u^{-1}(\lambda) < x < 1:}$

x und ξ müssen im vorigen Ergebnis einfach vertauscht werden.

$\underline{u^{-1}(\lambda) < x < \xi < 1:}$

$$\begin{aligned}(19) \quad &= \left[\frac{\Theta(x,\lambda) - \Theta(0,\lambda) - i\pi}{\Theta(1,\lambda) - \Theta(0,\lambda) - i\pi} - \frac{\Theta(x,\lambda) - \Theta(0,\lambda) + i\pi}{\Theta(1,\lambda) - \Theta(0,\lambda) + i\pi}\right] \cdot \\ &\cdot [\Theta(\xi,\lambda) - \Theta(1,\lambda)] = \\ &= \frac{[\Theta(x,\lambda) - \Theta(1,\lambda)][\Theta(\xi,\lambda) - \Theta(1,\lambda)]}{[\Theta(1,\lambda) - \Theta(0,\lambda)]^2 + \pi^2}\end{aligned}$$

Für $u^{-1}(\lambda) < \xi < x < 1$ ergibt sich das Gleiche, weil man nur x und ξ vertauschen muß.

Zusammenfassend erhalten wir also:

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i}[G(x,\xi,\lambda + i\varepsilon) - G(x,\xi,\lambda - i\varepsilon)] = \\ &= \frac{g(x,\lambda)g(\xi,\lambda)}{W(\lambda)([\Theta(1,\lambda) - \Theta(0,\lambda)]^2 + \pi^2)} \cdot \\ &\cdot \begin{cases} [\Theta(x,\lambda) - \Theta(0,\lambda)][\Theta(\xi,\lambda) - \Theta(0,\lambda)], & 0 < x, \xi < u^{-1}(\lambda) \\ [\Theta(x,\lambda) - \Theta(0,\lambda)][\Theta(\xi,\lambda) - \Theta(1,\lambda)], & 0 < x < u^{-1}(\lambda) < \xi < 1 \\ [\Theta(x,\lambda) - \Theta(1,\lambda)][\Theta(\xi,\lambda) - \Theta(0,\lambda)], & 0 < \xi < u^{-1}(\lambda) < \xi < 1 \\ [\Theta(x,\lambda) - \Theta(1,\lambda)][\Theta(\xi,\lambda) - \Theta(1,\lambda)], & u^{-1}(\lambda) < x, \xi < 1 \end{cases} \qquad (20)\end{aligned}$$

Wir setzen:

$$\widetilde{\psi}(x,\lambda) := \begin{cases} [\Theta(x,\lambda) - \Theta(0,\lambda)]g(x,\lambda), & x < u^{-1}(\lambda) \\ [\Theta(x,\lambda) - \Theta(1,\lambda)]g(x,\lambda), & x > u^{-1}(\lambda) \end{cases} \qquad (21)$$

Damit gilt also:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i}[G(x,\xi,\lambda + i\varepsilon) - G(x,\xi,\lambda - i\varepsilon)] = \qquad (22)$$

$$= \frac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)\widetilde{\psi}(\xi,\lambda)}{W(\lambda)([\Theta(1,\lambda) - \Theta(0,\lambda)]^2 + \pi^2)} \qquad (23)$$

Abschließend erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x)|^2 dx = (\mathbf{f}, \mathbf{f}) = \\
&= \lim_{N\to\infty} ((E_N\mathbf{f}, \mathbf{f}) - (E_{-N}\mathbf{f}, \mathbf{f})) \\
&= \sum_{-\infty<\lambda_j<\alpha} \operatorname{Res}(m, \lambda_j) \left| \int_0^1 \psi(x, \lambda_j) f(x) dx \right|^2 + \\
&\quad + \sum_{\beta<\lambda_j<\infty} \operatorname{Res}(m, \lambda_j) \left| \int_0^1 \psi(x, \lambda_j) f(x) dx \right|^2 + \\
&\quad + \int_\alpha^\beta \frac{1}{W(\lambda)([\Theta(1, \lambda) - \Theta(0, \lambda)]^2 + \pi^2)} \left| \int_0^1 \widetilde{\psi}(x, \lambda) f(x) dx \right|^2 d\lambda
\end{aligned} \tag{24}$$

Wir erhalten also eine Isometrie zwischen L^2 und einem L^2_σ, wobei σ auf $[\alpha, \beta]$ und bei den Eigenwerten außerhalb von $[\alpha, \beta]$ Masse hat, durch eine Fouriertransformation:

$$(\mathcal{F}f)(\lambda) = \begin{cases} \int_0^1 \widetilde{\psi}(x, \lambda) f(x) dx & \text{für } \lambda \in [\alpha, \beta] \\ \int_0^1 \psi(x, \lambda) f(x) dx & \text{für } \lambda \notin [\alpha, \beta] \end{cases} \tag{25}$$

Die gesuchte Spektralfunktion ist also σ.

Literatur

[Ba] Je. P. Bogomolova, Some questions of the spectral analysis of a nonselfadjoint differential operator with a “floating singularity” in the coefficient. Diff. Uravnenija 21, 11 (1985), 1843-1849 [Russisch]

[H] H. Heuser, Gewöhnliche Differentialgleichungen, B.G. Teubner, Stuttgart 1991

[LMM] H. Langer, R. Mennicken und M. Möller, A second order differential operator depending nonlinearly on the eigenvalue parameter. Operator Theory: Advances and Application, Vol. 48, Birkhäuser Verlag, Basel, 1990