# Projektpraktikum
# Schwache Kompaktheit

Thomas Wannerer

1. Juni 2008

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Der vorliegende Text ist im Rahmen eines Projektpraktikums entstanden, dessen Ziel es war sich etwas näher mit dem Thema „Schwache Kompaktheit“ zu beschäftigen.

Unter anderem werden hier folgende Konzepte und Sätze präsentiert und bewiesen: Die beschränkte schwach* Topologie, der Satz von Eberlein-Šmulian und der Satz von James. Im letzten Abschnitt werden dann die vorigen Ergebnisse verwendet um nahezu mühelos einige interessante Sätze über reflexive Räume zu beweisen.

**Quellen.** Abgesehen von der Vorlesung „Funktionalanalysis 1“ von Prof. Woracek aus dem Sommersemester 2007 ([4]), habe ich folgende Bücher verwendet:

[1] R. E. Megginson: *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New York 1998

[2] W. Rudin: *Functional Analysis*, 2. Aufl., Tata MacGraw-Hill Publishing Company Limited, New Dehli 2006

[3] P. Wojtaszczyk: *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge University Press, Cambridge 1991

**Notation.** Die Notation orientiert sich im Wesentlichen an [4] und [1], wobei diese wiederum an [2] angelehnt sind. Insbesondere bedeutet das:

$X^*$ bezeichnet den topologischen Dualraum eines topologischen Vektorraumes,

$B_X$ bezeichnet die abgeschlossene Einheitskugel eines normierten Raumes $X$,

$\iota$ bezeichnet die kanonische Einbettung $\iota : X \to X^{**}$, $\iota(x)x^* = x^*x$.

Wenn wir verschiedene Topologien (z.B. Normtopologie, schwache, schwach* Topologie) auf einem Vektorraum betrachten, beziehen sich Begriffe wie „offen“, „abgeschlossen“, „beschränkt“ etc., immer auf die ursprüngliche Topologie des gegebenen Vektorraumes, im Gegensatz zu „schwach offen“, „schwach* abgeschlossen“, die sich eben auf die schwache, bzw. schwach* Topologie beziehen.

**Vorkenntnisse.** Das nötige Vorwissen erschöpft sich im Wesentlichen im Stoff der Vorlesung „Funktionalanalysis 1“. Der Satz von Goldstine, der im Folgenden hin und wieder auftaucht, ist Proposition 4.4.4 aus [4].

Eine Teilmenge $E$ eines topologischen Vektorraumes heißt *beschränkt*, falls es zu jeder Nullumgebung $V$ eine Zahl $s > 0$ gibt, sodass $E \subset tV$ für alle $t > s$ gilt. Ein topologischer Raum heißt *metrisierbar*, falls es eine Metrik gibt, die seine Topologie induziert. Für all diese Dinge, sowie für die allgemeine Version des Satzes von Banach-Alaoglu, siehe die ersten drei Kapitel von [2].

# 2 Die beschränkte schwach* Topologie

Wir werden nun eine weitere lokalkonvexe Topologie auf dem Dualraum eines normierten Raumes studieren, die nicht nur ein nützliches Werkzeug zur Untersuchung der schwach* Topologie darstellt, sondern auch für sich selbst betrachtet interessante Eigenschaften hat.

**2.1 Definition.** Sei $X$ ein normierter Raum. Für jedes $x^* \in X^*$ und jede Nullfolge $(x_n)$ in $X$ sei

$$B(x^*,(x_n)) = \{y^* \in X^* : |(y^* - x^*)x_n| < 1 \text{ für alle } n\}.$$

$\mathfrak{T}_{bw^*}$ bezeichne die Menge aller Vereinigungen von Mengen der Form $B(x^*,(x_n))$.

**2.2 Satz.** *Sei $X$ ein normierter Raum.*

(a) *$\mathfrak{T}_{bw^*}$ ist eine Topologie auf $X^*$, die wir die* beschränkte schwach* Topologie *oder* b-schwach* Topologie *nennen. Sie macht $X^*$ zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum.*

(b) *Die schwach* Topologie ist gröber als die beschränkte schwach* Topologie und die beschränkte schwach* Topologie ist gröber als die Normtopologie: $\mathfrak{T}_{w^*} \subset \mathfrak{T}_{bw^*} \subset \mathfrak{T}_n$ .*

(c) *Sei $A \subset X^*$ beschränkt. Dann stimmen die Relativtopologien der schwach* und der b-schwach* Topologie auf $A$ überein.*

(d) *Sei $\mathfrak{T}$ eine Topologie auf $X^*$, sodass auf allen beschränkten Mengen die Relativentopologien von $\mathfrak{T}$ und der schwach* Topologie übereinstimmen, so ist $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}_{bw^*}$.*

*Beweis.* Es bezeichne $\mathfrak{B}$ die Familie aller Mengen der Form $B(x^*,(x_n))$. Wir werden zuerst zeigen, dass $\mathfrak{T}_{bw^*}$ tatsächlich eine Topologie ist, wozu es reicht zu beweisen, dass $\mathfrak{B}$ eine Basis ist. Zunächst gilt $X = \bigcup \mathfrak{B}$, da $X^* = B(0,(0,0,\ldots))$. Sei nun

$$x_0^* \in B(x_1^*,(x_{1,n})) \cap B(x_2^*,(x_{2,n}))$$

gegeben. Da $(x_{n,1})$ und $(x_{n,2})$ Nullfolgen sind, gibt ein $\delta > 0$ mit

$$\max\{|(x_0^* - x_j^*)x_{j,n}| : j = 1,2 \text{ und } n \in \mathbb{N}\} < 1 - \delta.$$

Wir definieren die Nullfolge

$$(x_{0,n}) = (\delta^{-1}x_{1,1}, \delta^{-1}x_{2,1}, \delta^{-1}x_{1,2}, \delta^{-1}x_{2,2}, \ldots).$$

Für $x^* \in B(x_0^*,(x_{0,n}))$ gilt daher

$$|(x^* - x_j^*)x_{j,n}| \leq |(x^* - x_0^*)x_{j,n}| + |(x_0^* - x_j^*)x_{j,n}| < \delta + (1-\delta) = 1, \quad j = 1,2$$

und wir schließen

$$x_0^* \in B(x_0^*,(x_{0,n})) \subset B(x_1^*,(x_{1,n})) \cap B(x_2^*,(x_{2,n})).$$

Also ist $\mathfrak{B}$ eine Basis, welche die Topologie $\mathfrak{T}_{bw^*}$ erzeugt.

Für jedes $x^* \in X^*$ und jede Nullfolge $(x_n)$ in $X$ definieren wir

$$p_{(x_n)}(x^*) = \sup\{|x^*x_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

und eine einfache Rechnung zeigt, dass $p_{(x_n)}$ eine Seminorm auf $X^*$ ist. Wir werden nun zeigen, dass $\mathfrak{T}_{bw^*}$, die von der Familie von Seminormen $\{p_{(x_n)} : (x_n) \text{ Nullfolge in } X\}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie ist. Offenbar gilt für alle $\epsilon > 0$

$$x^* + \{y^* \in X^* : p_{(x_n)}(y^*) < \epsilon\} = B(x^*,(\epsilon^{-1}x_n))$$

und wir erkennen, dass jeweils eine (Sub-)Basis der einen Topologie in der anderen Topologie enthalten ist. Wir schließen, dass $\mathfrak{T}_{bw^*}$ mit der von den Seminormen $p_{(x_n)}$ erzeugten lokalkonvexen Topologie übereinstimmt.

Der erste Teil von *(b)* folgt aus

$$B(0,(x,0,0,\ldots)) = \{x^* \in X^* : |x^*x| < 1\}.$$

Dies wiederum impliziert, dass $\mathfrak{T}_{bw^*}$ Hausdorffsch ist und es folgt *(a)*. Um den zweiten Teil von *(b)* einzusehen, sei $(x_n)$ eine Nullfolge in $X$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\|x_n\| \leq 1$ für alle $n > n_0$ und setze $\mu = \max\{\|x_n\| : n = 1,\ldots,n_0\}$. Folglich gilt

$$\{x^* \in X^* : \|x^*\| < \frac{1}{\mu+1}\} \subset B(0,(x_n)).$$

Für *(c)* sei $x^* \in X^*$ und $(x_n)$ eine Nullfolge in $X$. Aus der Beschränktheit von $A$ folgt, dass es eine natürlich Zahl $n_0$ gibt, sodass $|(y^* - x^*)x_n| < 1$ für alle $y^* \in A$ und $n > n_0$ und daher ist

$$A \cap B(x^*,(x_n)) = A \cap \{y^* \in X^* : |(y^* - x^*)x_n| < 1 \text{ für } n = 1,\ldots,n_0\}.$$

Es seien $U \in \mathfrak{T}$ und $x^* \in U$ gegeben. Wenn wir eine Folge $F_0, F_1, F_2, \ldots$ von endlichen Teilmengen von $X$ mit den Eigenschaften

(1) $\{y^* \in X^* : \|y^* - x^*\| \leq n+1$ und $|(y^* - x^*)x| \leq 1$ für $x \in F_0 \cup \ldots \cup F_n\} \subset U$ und

(2) $\|x\| \leq n^{-1}$ für $n \geq 1$ und $x \in F_n$

konstruieren können, so folgt leicht die Behauptung von *(d)*: Nach (2) können wir aus den Elementen von $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ können wir eine Nullfolge $(x_n)$ bilden und nach (1) gilt für diese Nullfolge $\{y^* \in X^* : |(y^* - x^*)x_n| \leq 1 \text{ für } n \in \mathbb{N}\} \subset U$. Also ist $B(x^*,(x_n)) \subset U$.

*Induktive Konstruktion.* Da $(x^* + B_{X^*}) \cap U$ offen ist in $x^* + B_{X^*}$ versehen mit der Spurtopologie von $\mathfrak{T}$ und die Relativtopologien von $\mathfrak{T}$ und der schwach* Topologie auf beschränkten Mengen übereinstimmen, gibt es $x_1,\ldots,x_{n_0} \in X$ sodass

$$(x^* + B_{X^*}) \cap \{y^* \in X^* : |(y^* - x^*)x_j| < 1 \text{ für } j = 1,\ldots,n_0\} \subset U.$$

Setze $F_0 = \{2x_0,\ldots,2x_{n_0}\}$. Angenommen die Konstruktion würde nach $m$ Schritten abbrechen, d.h. wir hätten bereits $F_0,\ldots,F_{m-1}$ gefunden die (1) und (2) erfüllen, aber für alle endlichen Teilmengen $F$ von $m^{-1}B_X$ gelte

$$K(F) = \{y^* \in X^* : \|y^* - x^*\| \leq m+1 \text{ und } |(y^* - x^*)x| \leq 1 \text{ für } x \in F_0 \cup \ldots \cup F_{m-1} \cup F\} \setminus U \neq \emptyset$$

$K(F)$ ist nach Voraussetzung *(d)* $w^*$-kompakt und da $K(F) \subset K(G)$ für $G \subset F$ gilt, erfüllen die $K(F)$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Folglich existiert ein $x_0^* \in \bigcap_F K(F)$. Insbesondere gilt $|(x_0^* - x^*)x| \leq 1$ für alle $x \in m^{-1}B_X$, also ist $\|x_0^* - x^*\| \leq m$. Wir schließen, dass

$$x_0^* \in \{y^* \in X^* : \|y^* - x^*\| \leq m \text{ und } |(y^* - x^*)x| \leq 1 \text{ für } x \in F_0 \cup \ldots \cup F_{m-1}\} \subset U.$$

Ein Widerspruch, da sicher $x_0^* \notin U$.

□

In jedem lokalkonvexen Raum gilt, dass eine Teilmenge genau dann schwach beschränkt ist, wenn sie in der ursprünglichen Topologie beschränkt ist (siehe [2], Theorem 3.18). Im Falle eines Banachraumes gilt, dass eine Teilmenge des Dualraums genau dann schwach* beschränkt ist, wenn sie normbeschränkt ist (siehe [1], Theorem 2.6.7). Ein ähnliches Resultat kann man für die b-schwach* Topologie beweisen.

**2.3 Korollar** ([1], Exercise 2.81). *Sei $X$ ein normierter Raum. Eine Teilmenge $E$ von $X^*$ genau dann beschränkt, wenn sie b-schwach* beschränkt ist.*

*Beweis.* Wenn $E$ beschränkt ist, dann ist $E$ auch b-schwach* beschränkt, da die Normtopologie feiner als die b-schwach* Topologie ist. Wenn $E$ unbeschränkt ist, dann gibt es Funktionale $y_n^* \in X^*$ mit $\|y_n^*\| > n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Wähle nun $x_n \in B_X$ mit $|y_n^* x_n| \geq n^2$. Dann ist $(z_n) = (x_n/n)$ eine Nullfolge und $|y_n^* z_n| \geq n$. Folglich gibt es kein $t > 0$ mit

$$E \subset tB(0,(z_n)) = \{y^* \in X^* : |y^* z_n| < t \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

□

**2.4 Korollar** ([1], Exercises 2.80, 2.82). *Sei $X$ ein normierter Raum.*

*(a) Wenn $X$ unendlichdimensional ist, dann ist jede nichtleere b-schwach* offene Menge unbeschränkt.*

*(b) Die b-schwach* Topologie ist genau dann metrisierbar, wenn $X$ endlichdimensional ist.*

*Beweis.* Für *(a)* bemerke, dass $B_{X^*}$ schwach* kompakt und beschränkt, also auch b-schwach* kompakt ist. Gibt es nun eine nichtleere beschränkte b-schwach* offene Menge, so gibt es auch eine kompakte Nullumgebung, und daher muss $X^*$ endlichdimensional sein.

Daraus folgt sofort *(b)*: Sei $X$ unendlichdimensional und die b-schwach* Topologie durch eine Metrik $d$ induziert. Nach *(a)* sind die $\epsilon$-Kugeln der Metrik $d$ unbeschränkt. Also gibt es eine unbeschränkte $bw^*$-Nullfolge: Wähle $x_n^* \in \{x^* \in X^* : d(0,x^*) < \frac{1}{n}\}$ mit $\|x_n^*\| \geq n$. In der b-schwach* Topologie konvergente Folgen sind aber b-schwach* beschränkt (siehe [2], Seite 23). Mit dem vorigen Korollar erhalten wir einen Widerspruch.

□

Die folgende Charakterisierung b-schwach* offener Mengen wird oft verwendet um die b-schach* Topologie zu definieren.

**2.5 Satz.** *Sei $X$ ein normierter Raum und $A$ eine Teilmenge von $X^*$. Dann sind äquivalent:*

*(a) Die Menge $A$ ist b-schwach* offen.*

*(b) Für alle beschränkten Teilmengen $B$ von $X^*$ ist $A \cap B$ relativ schwach* offen in $B$.*

*(c) Für alle $t > 0$ ist $A \cap tB_{X^*}$ relativ schwach* offen in $tB_{X^*}$.*

*Beweis.* Es bezeichne $\mathfrak{T}$ die Menge aller Teilmengen $U$ von $X^*$, sodass für alle beschränkten Mengen $B$ die Menge $U \cap B$ schwach* offen in $B$ ist. Wie man leicht nachprüft ist $\mathfrak{T}$ eine Topologie. Offensichtlich gilt $\mathfrak{T}_{w^*} \subset \mathfrak{T}$ und nach Satz 2.2(c) ist $\mathfrak{T}_{bw^*} \subset \mathfrak{T}$. Außerdem stimmen per definitionem auf beschränkten Mengen die von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_{w^*}$ induzierten Relativtopologien überein. Satz 2.2(d) liefert daher $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}_{bw^*}$, also $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{bw^*}$. Dies bedeutet genau die Äquivalenz von *(a)* und *(b)*.

Trivialerweise folgt *(c)* aus *(b)*. Für jede beschränkte Menge $B$ gibt es aber ein $t > 0$ mit $B \subset tB_{X^*}$. Aufgrund der Transitivität der Spurtopologiebildung folgt *(b)* aus *(c)*.

□

**2.6 Satz.** *Sei $X$ ein normierter Raum und $A$ eine Teilmenge von $X^*$. Dann sind äquivalent:*

*(a) Die Menge $A$ ist b-schwach* abgeschlossen.*

*(b) Für alle beschränkten Teilmengen $B$ von $X^*$ ist $A \cap B$ relativ schwach* abgeschlossen in $B$.*

*(c) Für alle $t > 0$ ist $A \cap tB_{X^*}$ schwach* abgeschlossen in $X^*$.*

*Beweis.* *(a)* impliziert offensichtlich *(b)* und *(c)*, letzteres weil $tB_{X^*}$ b-schwach* kompakt ist. Wenn $B \setminus (A \cap B) = A^c \cap B$ für alle beschränkten Teilmengen $B$ von $X^*$ in $B$ schwach* offen ist, so muss nach dem vorigen Satz $A^c$ b-schwach* offen sein. Also folgt *(a)* aus *(b)*. Genauso schließt man von *(c)* auf *(a)*. □

Wir wollen daran erinnern, dass ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ in einem topologischem Vektorraum *Cauchynetz* heißt, wenn es für jede Nullumgebung $U$ ein $\alpha_0 \in I$ existiert, sodass

$$x_\alpha - x_\beta \in U \quad \text{für alle } \alpha, \beta \geq \alpha_0 \text{ gilt.}$$

Ein topologischer Vektorraum heißt *vollständig*, wenn jedes Cauchynetz konvergiert.

**2.7 Satz.** *Sei $X$ ein unendlichdimensionaler normierter Raum.*

*(a) $X^*$ versehen mit der schwach* Topologie ist nicht vollständig.*

*(b) $X^*$ versehen mit der b-schwach* Topologie ist vollständig.*

*Beweis.* Da $X$ unendlichdimensional ist, gibt es ein in der Normtopologie unstetiges Funktional $f$ auf $X$. Es bezeichne $I$ die Menge aller nichtleeren endlichen Teilmengen von $X$. Die Relation „$\subset$“ definiert eine Ordnung auf $I$, die $I$ zu einer gerichteten Menge macht. Da für jedes $F \in I$ die Einschränkung $f \restriction \mathrm{span} F$ ein stetiges Funktional auf $\mathrm{span} F$ ist, gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach eine stetige Fortsetzung, die wir mit $x_F^*$ bezeichnen. Das Netz $(x_F^*)_{F \in I}$ ist ein schwach* Cauchynetz, denn aus $x_F^* x = fx$ für $F \supset \{x\}$ folgt, dass

$$x_{F_1}^* - x_{F_2}^* \in \{x^* \in X^* : |x^* x_k| < 1 \text{ für } k = 1, \dots, n\} \quad \text{für alle} \quad F_1, F_2 \supset \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Es gibt aber kein $x^* \in X^*$ mit $x_F^* \to x^*$, weil sonst $f(x) = \lim x_F^* x = x^* x$, für alle $x \in X$ gelten würde.

Sei nun $(x_\alpha^*)_{\alpha \in I}$ ein b-schwach* Cauchynetz. Da die b-schwach* Topologie feiner als die schwach* Topologie ist, folgt dass $(x_\alpha^*)_{\alpha \in I}$ ein schwach* Cauchynetz ist. Das bedeutet aber, dass $(x_\alpha^* x)_{\alpha \in I}$, $x \in X$, ein Cauchynetz in $\mathbb{K}$ ist, und wir können daher $f : X \to \mathbb{K}$ als

$$f(x) = \lim_{\alpha \in I} x_\alpha^* x$$

definieren. Wir zeigen nun $f \in X^*$ und $x_\alpha^* \xrightarrow{bw^*} f$. Dazu sei $(x_n)$ eine fest gewählte Nullfolge in $X$ und $\epsilon > 0$ beliebig vorgeben. Da $(x_\alpha^*)_{\alpha \in I}$ ein b-schwach* Cauchynetz ist, gibt es ein $\alpha_0 \in I$, sodass

$$x_\alpha^* - x_\beta^* \in B(0, (\epsilon^{-1} x_n)) = \{y^* \in X^* : |y^* x_n| < \epsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} \quad \text{für alle } \alpha, \beta \geq \alpha_0$$

gilt. Das bedeutet aber, dass das Netz $((x_\alpha^* x_n))_{\alpha \in I}$ in $c_0$ ein Cauchynetz ist und folglich gegen einen Grenzwert in $c_0$ konvergiert, der aber definitionsgemäß $(fx_n)$ sein muss. Hierbei bezeichnet wie üblich $c_0$ den Banachraum aller Nullfolgen. Wir schließen, dass für jede Nullfolge $(x_n)$ auch $(fx_n)$ eine Nullfolge ist, also $f \in X^*$. Weiters impliziert $\lim_{\alpha \in I}(x_\alpha^* x_n) = (fx_n)$ in $c_0$, dass es ein $\alpha_0 \in I$ gibt, sodass $x_\alpha^* \in B(f, (x_n))$ für $\alpha \geq \alpha_0$. □

In Zusammenhang mit dem obigen Satz ist es erwähnenswert, dass unter denselben Voraussetzungen die schwache Topologie auf $X$ nie vollständig ist (siehe [1], Prop. 2.5.15). Allerdings gilt, dass jede schwach* Cauchyfolge im Dualraum eine Banachraumes konvergiert ([1], Prop. 2.5.15).

**2.8 Bemerkung.** Mit dem obigen Satz lässt sich ein weiterer Beweis dafür angeben, dass, falls $X$ unendlichdimensional ist, die b-schwach* Topologie nie metrisierbar ist: Wäre sie nämlich metrisierbar, so wäre sie sogar vollständig metrisierbar. Anderseits ist $X^* = \bigcup_n nB_{X^*}$, eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen mit leerem Inneren. Dies widerspricht dem Satz von Baire.

Ein wesentlicher Grund warum man die b-schwach* Topologie zur Untersuchung der schwach* Topologie heranziehen kann, ist der folgende Satz. Er erlaubt es nämlich die schwach* Topologie als die schwache Topologie des lokalkonvexen Raumes $(X^*, \mathfrak{T}_{bw^*})$ aufzufassen, siehe Beweis von Satz 2.12.

**2.9 Satz.** *Sei $X$ ein Banachraum. Dann sind die Dualräume von $X^*$ versehen mit der b-schwach* Topologie bzw. schwach* Topologie gleich, d.h. $(X^*, \mathfrak{T}_{bw^*})^* = \iota(X)$.*

*Beweis.* Sei $f$ ein b-schwach* stetiges lineares Funktional. Dann gibt es eine Nullfolge $(x_n)$ in $X$, sodass

$$|fx^*| < 1, \text{ falls } \; |x^*x_n| < 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Wir schließen, dass

$$fx^* = 0, \text{ falls } \; x^*x_n = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Die Abbildung $T : X^* \to c_0$, die jedem $x^*$ die Folge $(x^*x_n)$ zuweist, ist eine beschränkte Abbildung zwischen zwei normierten Räume. Das lineare Funktional $\varphi : \operatorname{ran} T \to \mathbb{K}$, $\varphi(Tx^*) = fx^*$ ist wohldefiniert, da aus $Tx^* = 0$ wegen (2) $fx^* = 0$ folgt. Aus (1) folgt die Beschränktheit von $\varphi$. Nach dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach existiert ein $w^* \in c_0^*$ das $\varphi$ fortsetzt. Wenn wir $(\alpha_n)$ aus $l^1$ wählen, das $w^*$ in der üblichen Weise darstellt, so folgt für alle $x^* \in X^*$

$$fx^* = \varphi(Tx^*) = w^*(x^*x_n) = \sum_n \alpha_n x^* x_n = x^* \left( \sum_n \alpha_n x_n \right),$$

wobei die Konvergenz der letzten Summe aus

$$\sum_n \|\alpha_n x_n\| \leq C \sum_n |\alpha_n| < \infty$$

und der Vollständigkeit von $X$ folgt. Umgekehrt ist trivialerweise jedes schwach* stetige Funktional b-schwach* stetig. $\square$

**2.10 Korollar.** *Sei $X$ ein unendlichdimesionaler Banachraum. Dann ist die b-schwach* Topologie verschieden von der schwachen, schwach* und der Normtopologie.*

*Anmerkung:* Dieser Satz lässt sich auch beweisen, wenn man nur voraussetzt, dass $X$ eine normierter Raum ist ([1], Corollary 2.7.7).

*Beweis.* Zunächst ist die b-schwach* Topologie verschieden von der schwach* Topologie, da die eine vollständig ist und die andere nicht. Sie muss auch verschieden von der Normtopologie sein, da nichtleere b-schwach* offene Mengen stets unbeschränkt sind. Falls die natürliche Einbettung $\iota : X \to X^{**}$ surjektiv ist, stimmen die schwache und die schwach* Topologie überein. Wenn $\iota$ nicht surjektiv ist, sind nach dem vorherigen Satz die Dualräume von $X^*$ versehen mit der schwachen und b-schwach* Topologie verschieden. $\square$

**2.11 Korollar.** *Sei $f$ ein lineares Funktional auf dem Dualraum eines Banachraumes. $f$ ist genau dann schwach* stetig, wenn $f$ eingeschränkt auf $B_{X^*}$ stetig bezüglich schwach* Topologie auf $B_{X^*}$ ist.*

*Beweis.* Sei die Einschränkung von $f$ auf $B_{X^*}$ stetig bezüglich schwach* Relativtopologie auf $B_{X^*}$. Für $t > 0$ ist $\ker f \cap tB_{X^*} = t(\ker f \cap B_{X^*})$ schwach* abgeschlossen in $tB_{X^*}$ und da $tB_{X^*}$ abgeschlossen in $X^*$ ist, sogar schwach* abgeschlossen in $X^*$. Nach Satz 2.6 ist $\ker f$ b-schwach* abgeschlossen und daher ist $f$ b-schwach* stetig (Proposition 1.1.13 in [4]). Wie wir oben (Satz 2.9) gezeigt haben, ist $f$ dann auch schwach* stetig. Die Umkehrung ist trivial. □

**2.12 Satz** (Krein-Šmulian)**.** *Sei $C$ eine konvexe Teilmenge des Dualraumes eines Banachraumes. $C$ ist genau dann schwach* abgeschlossen, wenn $C \cap tB_{X^*}$ für alle $t > 0$ schwach* abgeschlossen ist.*

*Beweis.* Sei $C \cap tB_{X^*}$ für alle $t > 0$ schwach* abgeschlossen. Dann ist $C$ nach Satz 2.6 b-schwach* abgeschlossen. Um zu zeigen, dass $C$ auch schwach* abgeschlossen ist, wenden wir Satz 4.3.8 aus [4] auf den lokalkonvexen Raum $(X^*, \mathfrak{T}_{bw^*})$ und die konvexe Menge $C$ an, denn die schwache Topologie dieses Raumes ist genau die schwach* Topologie auf $X^*$. □

*Bemerkung.*([1], Exercise 2.84) Die Aussage des Satz von Krein-Šmulian ist für die Normtopologie trivial, da konvergente Folgen beschränkt sind. Man erhält für eine konvexe Teilmenge $C$ von $X$:

*$C$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $C \cap tB_X$ für alle $t > 0$ abgeschlossen ist.*

Daraus folgt auch sofort die gleiche Aussage für die schwache Topologie, da eine konvexe Menge genau dann abgeschlossen ist, wenn sie schwach abgeschlossen ist und $C$ sowie $C \cap tB_X$ konvex sind. Also:
*$C$ ist genau dann schwach abgeschlossen, wenn $C \cap tB_X$ ür alle $t > 0$ schwach abgeschlossen ist.*

In topologischen Räumen, die in jedem Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzen, lassen sich Begriffe wie „Abgeschlossenheit“ und „Stetigkeit“ wie in metrischen Räumen durch Folgen beschreiben, in beliebigen topologischen Räumen ist dies jedoch nicht möglich. Daher macht es Sinn zu definieren

> Eine Teilmenge $A$ eines topologischen Raumes heißt *folgenabgeschlossen*, falls für jede Folge $(x_n)$ in $A$ mit $x_n \to x$ gilt, dass $x \in A$.

Analog definiert man

> Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen $X$ und $Y$ heißt *folgenstetig*, wenn für alle Folgen $(x_n)$ mit $x_n \to x$ gilt, dass $f(x_n) \to f(x)$.

„Folgenabgeschlossenheit“ und „Folgenstetigkeit“ sind schwächere Begriffe als „Abgeschlossenheit“ und „Stetigkeit“; in gewissen Spezialfällen sind sie jedoch äquivalent.

**2.13 Korollar.** *Sei $X$ ein separabler Banachraum. Eine konvexen Teilmenge von $X^*$ ist genau dann schwach* abgeschlossen, wenn sie schwach* folgenabgeschlossen ist.*

*Beweis.* Sei $C$ eine schwach* folgenabgeschlossene konvexe Teilmenge von $X^*$. Wegen der Separabilität von $X$, ist die schwach* Topologie auf $tB_{X^*}$, $t > 0$, metrisierbar (siehe [2], Theorem 3.16). Da in metrischen Räumen Folgenabgeschlossenheit und Abgeschlossenheit äquivalent sind, ist $C \cap tB_{X^*}$ in $tB_{X^*}$ schwach* abgeschlossen, und somit auch $X^*$. Der vorige Satz liefert nun die Behauptung. □

**2.14 Korollar.** *Ein lineares Funktional auf dem Dualraum eines separablen Banachraumes ist genau dann schwach* stetig, wenn es schwach* folgenstetig ist.*

*Beweis.* Nach dem vorigem Korollar reicht es zu zeigen, dass $\ker f$ schwach* folgenabgeschlossen ist. Wegen der schwach* Folgenstetigkeit von $f$ ist das aber offensichtlich. $\square$

**2.15 Bemerkung** ([1], Exercise 2.85)**.** Weder in Satz 2.9 noch im Satz von Krein-Šmulian kann auf die Forderung, dass $X$ vollständig ist, verzichtet werden. Um das einzusehen betrachte einen unvollständigen normierten Raum $X$; es bezeichnen $Y$ den Normabschluss des Bildes der kanonischen Einbettung $\iota(X)$. Weiter bezeichnen $\mathfrak{T}_{w^*}$, $\mathfrak{T}_Y$ und $\mathfrak{T}_{bw^*}$ die schwach*, die $\sigma(X^*, Y)$-Topologie und die b-schwach* Topologie auf $X^*$.

Sicherlich ist $\mathfrak{T}_{w^*} \subset \mathfrak{T}_Y$; auf beschränkten Mengen stimmen die beiden Topologien sogar überein: Es sei $B$ eine beschränkte Teilmenge von $X^*$ und $f \in Y$. Weil $B$ beschränkt ist, gibt es ein $t > 0$, sodass $B \subset tB_{X^*}$. Wähle $f_x \in \iota(X)$, sodass $\|f_x - f\| < t^{-1}/2$. Dann gilt

$$|f(x^*)| < |f_x(x^*)| + 1/2 \quad \text{für alle} \quad x^* \in B$$

und folglich

$$\{x^* \in X^* : |f_x(x^*)| < 1/2\} \cap B \subset \{x^* \in X^* : |f(x^*)| < 1\} \cap B.$$

Also stimmen $\mathfrak{T}_{w^*}$ und $\mathfrak{T}_Y$ auf $B$ überein. Daraus folgt dass $\mathfrak{T}_Y \subset \mathfrak{T}_{bw^*}$. Für die Dualräume bezüglich der jeweiligen Topologien gilt

$$(X^*, \mathfrak{T}_{w^*})^* \subsetneq (X^*, \mathfrak{T}_Y)^* \subset (X^*, \mathfrak{T}_{bw^*})^*,$$

wobei die erste Inklusion nach Satz 3.10 in [2] echt ist. Insbesondere sind die Dualräume bezüglich der schwach* und der b-schwach* Topologie verschieden.

Für jedes $f \in Y \setminus \iota(X)$ ist $\ker f$ immer $\mathfrak{T}_Y$-abgeschlossen, aber nicht schwach* abgeschlossen. Für alle $t > 0$ ist $\ker f \cap tB_{X^*}$ $\mathfrak{T}_Y$-abgeschlossen in $tB_{X^*}$ und da $tB_{X^*}$ beschränkt ist auch schwach* abgeschlossen in $tB_{X^*}$, und somit schwach* abgeschlossen in $X^*$. Das zeigt, dass auch im Satz von Krein-Šmulian auf die Forderung, dass $X$ vollständig ist, nicht verzichtet werden kann.

# 3 Der Satz von Eberlein-Šmulian

Wir erinnern daran, dass eine Teilmenge $K$ eines topologischen Raumes *folgenkompakt* heißt, wenn jede Folge in $K$ eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in $K$ liegt. Eine Teilmenge $K$ heißt *relativ folgenkompakt*, wenn jede Folge in $K$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

In allgemeinen topologische Räumen muss Folgenkompkheit nicht Kompaktheit implizieren und auch nicht umgekehrt; in metrischen Räumen sind beide Konzepte äquivalent. Die erstaunliche Aussage des Satzes von Eberlein-Šmulian ist nun, dass eine Teilmenge eines normierten Raumes genau dann (relativ) schwach kompakt ist, wenn sie (relativ) schwach folgenkompakt ist.

Wir beginnen mit der einfachen Beweisrichtung des Satzes von Eberlein-Šmulian, die bereits in metrisierbaren lokalkonvexen Räumen funktioniert. Zur Erinnerung: Ein topologischer Raum heißt separabel, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

**3.1 Satz** ([2], Exercise 3.28)**.** *Sei $X$ ein metrisierbarer lokalkonvexer topologischer Vektorraum.*

*(a) Wenn $X$ separabel ist, dann ist die schwach* Topologie auf $X^*$ separabel und es gibt eine abzählbare Teilmenge von $X^*$ die auf $X$ punktetrennend ist.*

(b) *Sei $K$ eine schwach kompakte Teilmenge von $X$ und $(x_n)$ eine Folge in $K$. Dann hat $(x_n)$ eine schwach konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $K$.*

(c) *Sei $K$ eine relativ schwach kompakte Teilmenge von $X$ und $(x_n)$ eine Folge in $K$. Dann hat $(x_n)$ eine schwach konvergente Teilfolge.*

*Beweis.* Sei $d$ eine Metrik, welche die Topologie von $X$ induziert. Die Mengen

$$E_n = \left\{ x^* \in X^* : |x^*x| \leq 1 \text{ für alle } x \in X \text{ mit } d(0,x) < \frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

sind nach dem Satz von Banach-Alaoglu ([2], Theorem 3.15) $w^*$-kompakt und es gilt

$$X^* = \bigcup_n E_n.$$

Wenn $X$ separabel ist, dann ist die schwach* Topologie auf allen $E_n$ nach Satz 3.16 in [2] metrisierbar. Da jeder kompakte metrische Raum separabel ist, folgt, dass die schwach* Topologie auf $X^*$ separabel ist. Sei also $M$ eine abzählbare Teilmenge mit $\overline{M}^{w^*} = X^*$ und $x \in X$, $x \neq 0$. Weil $X$ lokalkonvex ist, existiert nach dem Satz von Hahn-Banach ein $x^* \in X^*$ mit $x^*x = 1$. Weiters ist

$$M \cap \{y^* \in X^* : |(y^* - x^*)x| < 1/2\} \neq \emptyset.$$

Daher gibt es ein $y^* \in M$ mit $y^*x \neq 0$ und somit ist $M$ auf $X$ punktetrennend.

Um *(b)* zu beweisen, setze $Y = \overline{\operatorname{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $Y$ ein separabler, metrisierbarer lokalkonvexer topologischer Vektorraum und nach *(a)* gibt eine abzählbare Teilmenge von $Y^*$ die auf Y punktetrennend ist, also auch auf der schwach kompakten Menge $Y \cap K$. Nach Abschnitt 3.8 in [2] ist daher die schwache Topologie auf $Y \cap K$ metrisierbar. Die Folge $(x_n)$ ist also eine Folge in dem kompakten metrischen Raum $Y \cap K$ und hat daher eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $K$.

Für *(c)* wendet man *(b)* auf die schwach kompakte Menge $\overline{K}^w$ an. □

**3.2 Lemma.** *Eine Teilenge $A$ eines normierten Raumes ist genau dann relativ schwach kompakt, wenn sie beschränkt und der $\sigma(X^{**}, X^*)$-Abschluss von $\iota(A)$ in $\iota(X)$ enthalten ist.*

*Beweis.* Sei $A$ relativ schwach kompakt. Dann ist die Menge $\iota(\overline{A}^w)$ ist $\sigma(X^{**}, X^*)$-kompakt, da $\iota : X \to \iota(X)$ ein $\sigma(X, X^*)$-$\sigma(X^{**}, X^*)$-Homöomorphismus ist. Folglich ist der $\sigma(X^{**}, X^*)$-Abschluss von $\iota(A)$ in $\iota(X)$ enthalten. Da schwach kompakte Mengen schwach beschränkt sind (siehe [2], Theorem 1.15(b)), und schwache Beschränktheit äquivalent zu Beschränktheit ist ([2], Theorem 3.18), folgt, dass $A$ beschränkt ist.

Wenn $A$ beschränkt ist, dann gibt es ein $t > 0$ mit $\iota(A) \subset tB_{X^{**}}$. Da die Einheitskugel von $X^{**}$ nach dem Satz von Banach-Alaoglu $\sigma(X^{**}, X^*)$-kompakt ist, folgt, dass der $\sigma(X^{**}, X^*)$-Abschluss von $\iota(A)$ auch $\sigma(X^{**}, X^*)$-kompakt ist. Da $\iota$ ein Homöomorphismus ist, folgt

$$\overline{\iota(A)}^{\sigma(X^{**}, X^*)} = \iota(\overline{A}^w)$$

und somit ist $\overline{A}^w$ schwach kompakt. □

**3.3 Satz** (Satz von Eberlein-Šmulian für relativ schwach kompakte Mengen)**.** *Eine Teilenge $A$ eines normierten Raumes ist genau dann relativ schwach kompakt (d.h. $\overline{A}^w$ ist schwach kompakt), wenn jede Folge in $A$ ein schwach konvergente Teilfolge hat (d.h. $A$ ist relativ schwach folgenkompakt).*

*Beweis.* Wir müssen noch zeigen, dass aus relativer schwacher Folgenkompaktheit, relative schwache Kompaktheit folgt. Angenommen es gäbe eine Teilmenge $A$ von $X$, die nicht relativ schwach kompakt ist, aber trotzdem jede Folge in $A$ ein schwach konvergente Teilfolge hat. Da $A$ relativ schwach folgenkompakt ist, folgt, dass $A$ beschränkt ist. (Denn sonst gäbe es eine Folge $(a_n)$ in $A$ mit $\|a_n\| \geq n$, die eine schwach konvergente Teilfolge hätte. In einem normierten Raum sind aber nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit schwach konvergente Folgen stets beschränkt.) Durch Anwendung des vorigen Lemmas erhalten wir ein $F \in X^{**} \setminus \iota(X)$, das im $\sigma(X^{**}, X^*)$-Abschluss von $\iota(A)$ liegt. Setze $\theta = d(F, \iota(X)) > 0$. Wir werden induktiv eine Folge $(a_n, g_n)_{n=1}^{\infty}$ in $X \times X^*$ mit den Eigenschaften

(1) $g_n \in X^*$ und $\|g_n\| \leq 1$,

(2) $a_n \in A$,

(3) $\mathrm{Re}F(g_n) > \frac{3}{4}\theta$ für $n = 1, 2, 3 \ldots$,

(4) $|g_n(a_j)| < \frac{1}{4}\theta$ für $j < n$,

(5) $\mathrm{Re}g_n(a_j) > \frac{3}{4}\theta$ für $j \geq n$,

konstruieren. Hätte $(a_n)$ eine schwach konvergente Teilfolge, $a_{n_k} \xrightarrow{w} a$, dann gäbe es nach Korollar II.A.5 in [3] eine Konvexkombination

$$\sum_{k=N}^{M} \alpha_k a_{n_k}, \quad \text{sodass} \quad \left\| \sum_{k=N}^{M} \alpha_k a_{n_k} - a \right\| < \frac{1}{4}\theta.$$

Aus (4) folgt, dass $|g_n(\sum_{k=N}^{M} \alpha_k a_{n_k})| < \frac{1}{4}\theta$ für $n > n_M$ gilt. Wegen

$$|g_n(a)| - \left| g_n(\sum_{k=N}^{M} \alpha_k a_{n_k}) \right| \leq \left| g_n(a) - g_n(\sum_{k=N}^{M} \alpha_k a_{n_k}) \right| \leq \left\| \sum_{k=N}^{M} \alpha_k a_{n_k} - a \right\| < \frac{1}{4}\theta$$

folgt $|g_n(a)| < \frac{1}{2}\theta$ für $n > n_M$. Andererseits impliziert (5), dass $\mathrm{Re}g_n(a) \geq \frac{3}{4}\theta$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$, ein Widerspruch.

*Induktive Konstruktion.* Wegen $\|F\| > \theta$ gibt es ein $f \in B_{X^*}$ mit $|F(f)| > \frac{3}{4}\theta$. Wähle $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ so, dass $F(\alpha f) = |F(f)| > \frac{3}{4}\theta$ und setze $g_1 = \alpha f$. Dann erfüllt $g_1$ (1) und (3). Da $F$ im $\sigma(X^{**}, X^*)$-Abschluss von $\iota(A)$ liegt kann man $a_1 \in A$ so wählen, dass $|F(g_1) - (\iota a_1) g_1| = |F(g_1) - g_1(a_1)| < \mathrm{Re}F(g_1) - \frac{3}{4}\theta$ gilt. Daher ist

$$\mathrm{Re}F(g_1) - \mathrm{Re}g_1(a_1) \leq |F(g_1) - g_1(a_1)| < \mathrm{Re}F(g_1) - \frac{3}{4}\theta$$

und wir sehen, dass (5) gilt.

Angenommen wir haben bereits $(a_j, g_j)_{j=1}^{n}$ gefunden, sodass (1)-(5) erfüllt sind. Setze $Y = \mathrm{span}\{\iota a_1, \ldots, \iota a_n, F\}$ und wähle ein lineares Funktional $\varphi$ auf $Y$ mit $\varphi(\iota a_j) = 0$ und $\frac{3}{4}\theta < \varphi(F) < \theta$. Dies ist möglich, da $F$ nicht aus den $\iota a_j$ linear kombiniert werden kann. Dann gilt für $y \in \mathrm{span}\{\iota a_1, \ldots, \iota a_n\}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ wegen $\|\lambda F + y\| > |\lambda|\theta$

$$\frac{|\varphi(\lambda F + y)|}{\|\lambda F + y\|} < \frac{\varphi(F)}{\theta} < 1.$$

Folglich kann man nach dem Satz von Hahn-Banach $\varphi$ zu Funktional auf ganz $X^{**}$ mit Norm kleiner 1 fortsetzen. Wir bezeichnen diese Fortsetzung ebenfalls mit $\varphi$. Nach dem Satz von

Goldstine kann $\varphi \in B_X^{***}$ durch $f \in B_{X^*}$ in der $\sigma(X^{***}, X^{**})$-Topologie approximiert werden. Also finden wir ein $f \in B_{X^*}$ mit

$$|f(a_j)| = |\varphi(\iota a_j) - f(a_j)| < \frac{1}{4}\theta \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n$$

und

$$|\varphi(F) - F(f)| < \varphi(F) - \frac{3}{4}\theta.$$

Wähle $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ so, dass $F(\alpha f) = |F(f)|$ gilt. $g_{n+1} = \alpha f$ erfüllt dann (1),(3) und (4). Weil $F$ im $\sigma(X^{**}, X^*)$-Abschluss von $\iota(A)$ liegt und wegen (3) kann man nun $a_{n+1} \in A$ finden, das $F$ so gut auf $g_1, \ldots, g_{n+1}$ approximiert, dass (5) gilt.

$\square$

Um den Satz von Eberlein-Šmulian auf schwach kompakte Mengen ausdehnen zu können, müssen wir noch zeigen, dass schwach folgenkompakte Mengen schwach abgeschlossen sind. Zunächst ein technisches Lemma.

**3.4 Lemma.** *Sei $X$ ein normierter Raum und $Y$ ein endlichdimensionaler Teilraum von $X^*$. Für $M > 1$ existiert eine endliche Teilmenge $F_M$ von $B_X$, sodass*

$$\|y^*\| \leq M \max\{|y^* x| : x \in F_M\}$$

*für alle $y^* \in Y$.*

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $Y \neq \{0\}$. Aus der Kompaktheit von $S_Y = \{y^* \in Y : \|y^*\| = 1\}$ folgt, dass es eine endliche Teilmenge $\{y_1^*, \ldots, y_n^*\}$ von $S_Y$ gibt, sodass die offenen Kugeln mit Mittelpunkten in $y_1^*, \ldots, y_n^*$ und Radius $\frac{M-1}{2M}$ ganz $S_Y$ überdecken. Wegen $\frac{M+1}{2M} < 1$, gibt es $F_M = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset B_X$ mit $|y_j^* x_j| > \frac{M+1}{2M}$, $j = 1, \ldots, n$.

Sei $y_0^* \in S_Y$. Wähle $j$ so, dass $\|y_0^* - y_j^*\| < \frac{M-1}{2M}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|y_0^* x_j| &\geq |y_j^* x_j| - |y_j^* x_j - y_0^* x_j| \\
&\geq \frac{M+1}{2M} - \|y_0^* - y_j^*\| \|x_j\| \\
&\geq \frac{M+1}{2M} - \frac{M-1}{2M} \\
&= \frac{1}{M}
\end{aligned}$$

Also gilt $M \max\{|y_0^* x| : x \in F_M\} \geq 1$. Hieraus folgt, wegen $y^*/\|y^*\| \in S_Y$ für $y^* \neq 0$, $y^* \in Y$, der allgemeine Fall. $\square$

**3.5 Satz** (M. Day)**.** *Sei $X$ ein normierter Raum.*

*(a) Sei $A \subset X$ relativ schwach folgenkompakt und $x_0 \in \overline{A}^w$. Dann gibt es eine Folge in $A$, die schwach gegen $x_0$ konvergiert.*

*(b) Sei $A \subset X^*$ relativ schwach folgenkompakt und $x_0^* \in \overline{A}^{w^*}$. Dann gibt es eine Folge in $A$, die schwach gegen $x_0^*$ konvergiert.*

*Beweis.* Wir zeigen zuerst *(b)* und dürfen gleich annehmen, dass $x_0^* = 0 \notin A$. Wir werden weiter unten eine wachsende Folge $(F_n)$ von nichtleeren endlichen Teilmengen von $B_X$ und eine Folge $(x_n^*)$ in $A$ mit den Eigenschaften

(1) $\|x^*\| \leq 2\max\{|x^*x| : x \in F_n\}$ für $x^* \in \operatorname{span}\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$,

(2) $\max\{|x_{n+1}^*x| : x \in F_n\} < \frac{1}{n+1}$

konstruieren. Da $A$ relativ schwach folgenkompakt ist, gibt es dann eine konvergente Teilfolge von $(x_n^*)$, $x_{n_k}^* \xrightarrow{w} z_0^*$. Aus (2) folgt, dass

$$z_0^*x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}^*x = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in D = \bigcup_n F_n.$$

Wir zeigen nun, dass

$$\|x^*\| \leq 2\sup\{|x^*x| : x \in D\} \tag{3}$$

für $x^* \in Y = \overline{\operatorname{span}}\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$. Aus (1) folgt sofort Gleichung (3) für alle $x^* \in \operatorname{span}\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$. Sei $\epsilon > 0$ und $y^* \in Y$. Wähle $y_1^* \in \operatorname{span}\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$, sodass $\|y^* - y_1^*\| < \epsilon$. Daher gilt $|y_1^*x| \leq |y^*x| + \epsilon$ für alle $x \in D$. Folglich ist

$$\|y_1^*\| \leq 2\sup\{|y^*x| : x \in D\} + 2\epsilon$$

und somit

$$\|y^*\| \leq 2\sup\{|y^*x| : x \in D\} + 3\epsilon$$

für alle $\epsilon > 0$. Da $z_0^* \in Y$, schließen wir, dass $\|z_0^*\| = 0$, und wir erhalten *(b)*.

*Induktive Konstruktion.* Für $n = 1$ wähle $x_1^*$ als ein beliebiges Element von $A$ und $x_1 \in B_X$ so, dass $2|x_1^*x_1| \geq \|x_1^*\|$, und setze $F_n = \{x_1\}$. Sei nun $n \geq 1$ und $F_n$ eine endliche Teilmenge von $B_X$ und $(x_k^*)_{k=1}^n \subset A$ gegeben, sodass (1) erfüllt ist. Da

$$\{x^* \in X^* : |x^*x| < (n+1)^{-1} \text{ für alle } x \in F_n\}$$

eine schwach* Nullumgebung ist, und $x_0^* \in \overline{A}^{w^*}$, gibt es $x_{n+1}^* \in A$, sodass (2) erfüllt ist. Nach dem vorigen Lemma gibt es eine endliche Teilmenge $F_n'$ von $B_X$, sodass

$$\|x^*\| \leq 2\max\{|x^*x| : x \in F_n'\} \quad \text{für alle} \quad x^* \in \operatorname{span}\{x_1^*, \dots, x_{n+1}^*\}$$

gilt. Setze $F_{n+1} = F_n \cup F_n'$. Damit ist die induktive Konstruktion beendet.

Sei $A \subset X$ relativ schwach folgenkompakt. Da $\iota : X \to X^{**}$ sicherlich $\sigma(X, X^*)$-$\sigma(X^{**}, X^{***})$-stetig ist, folgt, dass auch $\iota(A)$ relativ schwach folgenkompakt ist. Aus der $\sigma(X, X^*)$-$\sigma(X^{**}, X^*)$-Stetigkeit von $\iota$ folgt

$$\iota x_0 \in \iota(\overline{A}^w) \subset \overline{\iota(A)}^{\sigma(X^{**},X^*)}$$

und Teil *(b)* liefert uns eine Folge $(\iota x_n)$ in $\iota(A)$ mit $\iota x_n \xrightarrow{w} \iota x_0$. Da $\iota^{-1} : \iota(X) \to X$ als normstetige Abbildung auch $\sigma(\iota(X), \iota(X)^*)$-$\sigma(X, X^*)$ stetig ist, folgt $x_n \xrightarrow{w} x_0$. □

**3.6 Satz** (Satz von Eberlein-Šmulian für schwach kompakte Mengen)**.** *Eine Teilenge $A$ eines normierten Raumes ist genau dann schwach kompakt, wenn jede Folge in $A$ ein schwach konvergente Teilfolge hat, deren Grenzwert in $A$ liegt.*

*Beweis.* Sei also $A$ schwach folgenkompakt. Nach dem Satz von Eberlein-Šmulian für relativ schwach kompakte Mengen wissen wir, dass $\overline{A}^w$ schwach kompakt ist. Nach dem vorigen Satz ist aber $A$ sogar schwach abgeschlossen. Die Umkehrung liefert wie im Satz von Eberlein-Šmulian für relativ schwach kompakte Mengen Satz 3.1. □

Sei $A$ Teilmenge eines normierten Raumes $X$ und $Y$ ein Unterraum von $X$. Wegen Transitivität der Bildung der initialen Topologie (siehe [4], Lemma 4.4.1) ist $A \cap Y$ in $Y$ genau dann $\sigma(Y, Y^*)$-kompakt, wenn $A \cap Y$ in $Y$ versehen mit der $\sigma(X, X^*)|_Y$-Topologie kompakt ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $A \cap Y$ schwach kompakt ist.

Setzt man voraus, dass $Y$ ein abgeschlossener Unterraum ist, so gilt

$$\overline{A \cap Y}^{\sigma(Y,Y^*)} = \overline{A \cap Y}^w \cap Y = \overline{A \cap Y}^w$$

und daher ist $A \cap Y$ in $Y$ genau dann $\sigma(Y, Y^*)$ relativ kompakt, wenn $A \cap Y$ schach relativ kompakt ist.

**3.7 Korollar.** *Sei $A$ Teilmenge eine normierten Raumes $X$. Dann ist $A$ genau dann schwach kompakt, wenn für alle separablen abgeschlossenen Unterräume $Y$ die Menge $A \cap Y$ in $Y$ immer $\sigma(Y, Y^*)$-kompakt ist. Die gleiche Aussage gilt auch wenn man „schwach kompakt“ durch „ relativ schwach kompakt“ bzw. „$\sigma(Y, Y^*)$-kompakt“ durch „relativ $\sigma(Y, Y^*)$ kompakt“ ersetzt.*

*Beweis.* Sei $A$ schwach kompakt. Nach der obigen Bemerkung reicht es zu zeigen, dass $A \cap Y$ für alle separablen abgeschlossenen Unterräume $Y$ schwach kompakt ist. Das ist aber offensichtlich. Wegen $\overline{A \cap Y}^w \subset \overline{A}^w$ erhalten wir die entsprechende Aussage, wenn $A$ relativ schwach kompakt ist.

Sei $(a_n)$ ein Folge in $A$ und setze $Y = \overline{\text{span}}\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Nach Voraussetzung ist $A \cap Y$ (relativ) schwach kompakt. Nach dem Satz von Eberlein-Šmulian hat $(a_n) \subset A \cap Y$ eine schwach konvergente Teilfolge. Also ist $A$ relativ schwach kompakt. Wenn vorausgesetzt wird, dass $A \cap Y$ schwach kompakt ist, dann folgt, dass der Grenzwert der Teilfolge von $(a_n)$ in $A \cap Y \subset A$ liegt. Also ist $A$ schwach kompakt. $\square$

## 4 Der Satz von James

In diesem Abschnitt wollen wir einen tiefliegenden Satz von James über schwach kompakte Mengen beweisen. Zunächst stellen wir den Satz von Helly bereit. Den Beweis, der im Wesentlichen auf linearer Algebra beruht, findet man in [1], Satz 1.9.12.

**4.1 Satz** (Satz von Helly)**.** *Sei $X$ ein normierter Raum, $f_1, \ldots, f_n$ stetige Funktionale auf $X$ und $c_1, \ldots, c_n$ Skalare. Dann sind äquivalent:*

*(a) Es gibt ein $x_0$ in $X$ mit $f_j(x_0) = c_j$ für $j = 1, \ldots, n$.*

*(b) Es gibt ein $M \geq 0$, sodass*

$$|\alpha_1 c_1 + \ldots + \alpha_n c_n| \leq M \|\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n\|$$

*für alle Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.*

*Wenn (b) gilt und $\epsilon > 0$, dann kann $x_0$ in (a) so gewählt werden, dass $\|x_0\| \leq M + \epsilon$.*

Der Beweis des folgenden technischen Lemmas ist lang, aber elementar.

**4.2 Lemma.** *Sei $A$ eine nichtleere Teilmenge der abgeschlossenen Einheitskugel eines normierten Raumes $X$. Es sei $0 < \theta < 1$ und $(x_n^*)$ eine Folge in $B_{X^*}$ mit $\sup\{|x^* x| : x \in A\} \geq \theta$ für alle $x^* \in \text{co}(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$. Dann gibt es für jede Folge $(\beta_n)$ von positiven Zahlen mit Summe 1, ein $\alpha$ mit $\theta \leq \alpha \leq 1$ und eine Folge $(y_n^*)$ in $B_{X^*}$ mit*

*(a) $y_n^* \in \text{co}(\{x_j^* : j \geq n\})$ für $n = 1, 2, \ldots,$*

*(b)* $\sup\{|\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j y_j^* x| : x \in A\} = \alpha$ *und*

*(c)* $\sup\{|\sum_{j=1}^{n}\beta_j y_j^* x| : x \in A\} < \alpha(1-\theta\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j)$ *für* $n = 1, 2, \ldots$.

*Beweis.* Der Beweis besteht im Wesentlichen aus der indukiven Konstruktion der Folge $(y_n^*)$ und erfolgt in mehreren Schritten.

1. Offensichtlich definiert $\mid x^* \mid_A = \sup\{|x^*x| : x \in A\}$, $x^* \in X^*$, eine Seminorm, die wegen $\mid x^* \mid_A \leq \|x^*\|$ stetig ist. Wähle eine Nullfolge $(\epsilon_n)$ von positiven Zahlen derart, dass
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k\epsilon_k}{\sum_{j=k+1}^{\infty}\beta_j\sum_{j=k}^{\infty}\beta_j} < 1-\theta.$$
Wir konstruieren nun induktiv eine Folge $(y_n^*)$ in $Y^*$, sodass
$$y_n^* \in \operatorname{co}(\{x_j^* : j \geq n\}) \subset B_{X^*}$$
und
$$\left|\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j y_j^* + \left(\sum_{j=n}^{\infty}\beta_j\right) y_n^*\right|_A < \alpha_n(1+\epsilon_n), \tag{4}$$
wobei
$$\alpha_n = \inf\left\{\left|\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j y_j^* + \left(\sum_{j=n}^{\infty}\beta_j\right) y^*\right|_A : y^* \in \operatorname{co}(\{x_j^* : j \geq n\})\right\}. \tag{5}$$
Für $n = 1$ setzen wir in den Gleichungen (4) und (5) die leere Summe gleich dem Nullelement von $X^*$.

2. Beachte, dass
$$\alpha_1 = \inf\{\mid y^* \mid_A : y^* \in \operatorname{co}(\{x_j^* : j \geq 1\})\} \geq \theta > 0$$
und folglich gibt es ein $y_1^* \in \operatorname{co}(\{x_j^* : j \geq 1\})\}$ mit
$$\mid y_1^* \mid_A < \alpha_1(1+\epsilon_1),$$
d.h. (4) gilt für $n = 1$.

3. Angenommen wir hätten bereits $y_1^*, \ldots, y_{n-1}^*$, $n \geq 2$, gefunden. Für $y^* \in \operatorname{co}(\{x_j^* : j \geq n\})$ gilt
$$\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j y_j^* + \left(\sum_{j=n}^{\infty}\beta_j\right) y^* = \sum_{j=1}^{n-2}\beta_j y_j^* + \left(\sum_{j=n-1}^{\infty}\beta_j\right)\left(\frac{\beta_{n-1}}{\sum_{j=n-1}^{\infty}\beta_j} y_{n-1}^* + \frac{\sum_{j=n}^{\infty}\beta_j}{\sum_{j=n-1}^{\infty}\beta_j} y^*\right).$$
Der Ausdruck in der letzten Klammer ist eine Konvexkombination von Elementen aus $\operatorname{co}(\{x_j^* : j \geq n-1\})$ und liegt somit in $\operatorname{co}(\{x_j^* : j \geq n-1\})$. Aus der Definition der $\alpha_n$ folgt, dass $\alpha_{n-1} \leq \alpha_n$. Folglich ist $\alpha_n > 0$, und daher gibt es ein $y_n^* \in \operatorname{co}(\{x_j^* : j \geq n\})$, das (4) erfüllt. Damit ist die induktive Konstruktion der $(y_n^*)$ beendet.

4. Da $y^* \in \operatorname{co}(\{x_j^* : j \geq n\}) \subset B_{X^*}$, $\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j = 1$ und $\mid . \mid_A$ eine Seminorm ist, die $\mid x^* \mid_A \leq \|x^*\|$ erfüllt, folgt dass die Menge, über die in (5) das Infimum gebildet wird, nach oben durch 1 beschränkt ist. Wegen
$$\theta \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq 1$$
konvergiert die Folge $(\alpha_n)$ gegen ein $\alpha$ mit $\theta \leq \alpha \leq 1$.

5. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\alpha_n \leq \left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* + \left( \sum_{j=n}^{\infty} \beta_j \right) y_n^* \right|_A < \alpha_n(1+\epsilon_n).$$

Wegen $\sum_{j=1}^{\infty} \|\beta_j y_j^*\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j = 1$, existiert $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j y_j^*$. Aus der Stetigkeit der Seminorm folgt daher für $n \to \infty$, dass $\alpha = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j y_j^* \right|_A$.

6. Es bleibt *(c)* zu zeigen. Es sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Falls $n \geq 2$, gilt

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j^* \right|_A &= \left| \frac{\beta_n}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \left( \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* + \left( \sum_{j=n}^{\infty} \beta_j \right) y_n^* \right) + \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* \right|_A \\
&\leq \frac{\beta_n}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* + \left( \sum_{j=n}^{\infty} \beta_j \right) y_n^* \right|_A + \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* \right|_A \\
&< \frac{\beta_n}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \alpha_n(1+\epsilon_n) + \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* \right|_A \\
&= \left( \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \right) \left( \frac{\beta_n \alpha_n (1+\epsilon_n)}{\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} + \frac{\left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* \right|_A}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \right).
\end{aligned}$$

Mit anderen Worten, $\left| \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j^* \right|_A$ wird durch einen Ausdruck, der von $\left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* \right|_A$ abhängt, abgeschätzt. Für $n \geq 3$ wird $\left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* \right|_A$ durch einen Ausdruck, der von $\left| \sum_{j=1}^{n-2} \beta_j y_j^* \right|_A$ abhängt, abgeschätzt und so fort. Folglich erhält man für $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j^* \right|_A &< \left( \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \right) \left( \frac{\beta_n \alpha_n (1+\epsilon_n)}{\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} + \frac{\beta_{n-1} \alpha_{n-1} (1+\epsilon_{n-1})}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j \sum_{j=n-1}^{\infty} \beta_j} + \frac{\left| \sum_{j=1}^{n-2} \beta_j y_j^* \right|_A}{\sum_{j=n-1}^{\infty} \beta_j} \right) \\
&< \dots \\
&< \left( \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \right) \left( \sum_{k=2}^{n} \left\{ \frac{\beta_k \alpha_k (1+\epsilon_k)}{\sum_{j=k+1}^{\infty} \beta_j \sum_{j=k}^{\infty} \beta_j} \right\} + \frac{\left| \beta_1 y_1^* \right|_A}{\sum_{j=2}^{\infty} \beta_j} \right) \\
&< \left( \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \right) \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{\beta_k \alpha_k (1+\epsilon_k)}{\sum_{j=k+1}^{\infty} \beta_j \sum_{j=k}^{\infty} \beta_j} \right).
\end{aligned}$$

Diese Umgleichung ist auch für $n = 1$ gültig, da sie sich dann auf $\beta_1 \left| y_1^* \right|_A < \beta_1 \alpha_1 (1+\epsilon_1)$ reduziert. Da $\alpha_k \leq \alpha$ ist, folgt

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j^* \right\|_A &< \alpha \left( \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \right) \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{\beta_k (1+\epsilon_k)}{\sum_{j=k+1}^{\infty} \beta_j \sum_{j=k}^{\infty} \beta_j} \right) \\
&< \alpha \left( \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \right) \left( \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sum_{j=k+1}^{\infty} \beta_j} - \frac{1}{\sum_{j=k}^{\infty} \beta_j} \right\} + (1-\theta) \right) \\
&= \alpha \left( 1 - \theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \right),
\end{aligned}
$$

was genau die gewünschte Ungleichung in *(c)* ist.

□

**4.3 Satz.** *Sei $A$ eine nichtleere, separable, schwach abgeschlossene Teilmenge der abgeschlossenen Einheitskugel eines Banachraumes $X$. Dann sind äquivalent:*

*(a)* *Die Menge $A$ ist nicht schwach kompakt.*

*(b)* *Es gibt ein $\theta$ mit $0 < \theta < 1$ und eine Folge $(x_n^*)$ in $B_{X^*}$, sodass $\lim_n x_n^* x = 0$ für alle $x \in A$ und $\sup\{|x^* x| : x \in A\} \geq \theta$ für $x^* \in \operatorname{co}(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$.*

*(c)* *Es gibt ein $\theta$ mit $0 < \theta < 1$, sodass es für jede Folge $(\beta_n)$ von positiven Zahlen mit Summe 1, ein $\alpha$ mit $\theta \leq \alpha \leq 1$ und eine Folge $(y_n^*)$ in $B_{X^*}$ gibt, sodass*

*(1)* $\lim_n y_n^* x = 0$ *für* $x \in A$

*(2)* $\sup\{|\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j y_j^* x| : x \in A\} = \alpha$ *und*

*(3)* $\sup\{|\sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j^* x| : x \in A\} < \alpha(1 - \theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j)$ *für* $n = 1, 2, \ldots$.

*(d)* *Es gibt ein $z^* \in X^*$, sodass $\sup\{|z^* x| : x \in A\}$ nicht angenommen wird.*

*Beweis.* Wir beginnen mit *(a)⇒(b)*, und nehmen an, dass $A$ nicht schwach kompakt ist. Setze $V = \overline{\operatorname{span}} A$ und es bezeichne $W$ den $V^*$ zugrunde liegenden Vektorraum versehen mit der Norm $\|v^*\|_W = \sup\{|v^* x| : x \in A\}$. $\|.\|_W$ ist tatsächlich eine Norm, denn aus $\|v^*\|_W = 0$ folgt, $v^* x = 0$ für alle $x \in \operatorname{span} A$ und daher $v^* x = 0$ für alle $x \in \overline{\operatorname{span}} A = V$. Es bezeichne $f : A \to W^*$, $(f(x))(v^*) = v^* x$ die „natürliche Einbettung" von $A$ in $W^*$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn

$$|(f(x))(v^*)| = |v^* x| \leq \|v^*\|_W.$$

Wir sehen, dass außerdem $f(A) \subset B_{W^*}$. Da $V^*$ die Punkte von $V$ trennt, muss $f$ injektiv sein. Wenn wir $A$ mit der Einschränkung der schachen Topologie von $X$ auf $A$ und $f(A)$ mit der Relativtopologie der schwach* Topologie von von $W^*$ versehen, dann ist $f$ ein Homöomorphismus von $A$ auf $f(A)$: Anstatt $A$ mit der Einschränkung der schachen Topologie von $X$ auf $A$ zu versehen, können wir, was dasselbe ist, $A$ mit der Einschränkung der schachen Topologie von $V$ auf $A$ versehen. Ein Netz $(a_\alpha)$ konvergiert gegen ein $a$ in $A$ genau dann, wenn $v^* a_\alpha \to v^* a$ für alle $v^* \in V^*$. Nach Definition ist das genau dann der Fall, wenn $(f(a_\alpha))(v^*) \to (f(a))(v^*)$ für alle $v^* \in V^*$, was schwach* Konvergenz in $W^*$ bedeutet, also genau dann, wenn $f(a_\alpha) \to f(a)$ in $f(A)$. Da $A$ nicht schwach kompakt ist, kann $f(A)$ als Teilmenge des schach* kompakten

Menge $B_{W^*}$ nicht schwach abgeschlossen sein. Wir wählen ein Element $F \in \overline{f(A)}^{w^*} \setminus f(A)$ und halten dieses fest. Es gibt kein $v \in V$ mit $Fv^* = v^*v$ für alle $v^* \in V^*$, da aus $F \in \overline{f(A)}^{w^*}$

$$v^* a_\alpha = f(a_\alpha)v^* \to Fv^* = v^*v$$

für ein Netz $(a_\alpha)$ aus $A$ folgte, und daher $v \in \overline{A}^w \setminus A$ im Widerspruch zu schwachen Abgeschlossenheit von $A$. Da $A \subset B_V$ ist, gilt

$$\sup\{|Fv^*| : v^* \in B_{V^*}\} \leq \sup\{|Fv^*| : v^* \in W,\ \sup\{|v^*x| : x \in A\} \leq 1\} = \|F\|_{W^*}$$

und wir schließen $F \in V^{**}$ und $\|F\|_{V^{**}} \leq \|F\|_{W^*}$. Es bezeichne $\iota_V$ die natürliche Einbettung von $V$ in $V^{**}$. Da $V$ vollständig ist, folgt, dass $\iota_V(V)$ in $V^{**}$ abgeschlossen ist, und da $F \neq \iota_V(V)$, ist $d(F, \iota_V(V)) > 0$. Sei $\Delta$ so, dass

$$0 < \Delta < d(F, \iota_V(V))$$

und sei $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von $A$. Für $n \in \mathbb{N}$ und beliebige Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ gilt

$$\left|\alpha_1 \Delta + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j+1} 0\right| = |\alpha_1|\Delta \leq \frac{\Delta}{d(F, \iota_V(V))} \left\|\alpha_1 F + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j+1} \iota_V a_j\right\|_{V^{**}},$$

was nach dem Satz von Helly, die Existenz eines $v_n^* \in V^*$ mit den Eigenschaften

(i) $\|v_n^*\|_{V^*} \leq \frac{\Delta}{d(F,\iota_V(V))} + \frac{d(F,\iota_V(V)) - \Delta}{2 \cdot d(F,\iota_V(V))} < 1$,

(ii) $Fv_n^* = \Delta$ und

(iii) $v_n^* a_j = (\iota_V a_j) v_n^* = 0$ für $j \leq n$

impliziert. Sei $x_n^*$ eine Hahn-Banach-Fortsetzung von $v_n^*$ auf $X$. Dann liefert (iii) zusammen mit der Dichtheit von $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ in $A$, dass $\lim_n x_n^* x = 0$ für alle $x \in A$. Sei $x^* \in \operatorname{co}(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$ und bezeichne $v^*$ die Einschränkung von $x^*$ auf $V$. Dann gilt

$$\Delta = Fv^* \leq \|F\|_{W^*} \sup\{|v^*x| : x \in A\} = \|F\|_{W^*} \sup\{|x^*x| : x \in A\}.$$

Setze $\theta = \Delta / \|F\|_{W^*}$. Wegen

$$0 < \Delta = Fv_1^* \leq \|F\|_{V^{**}} \|v_1^*\|_{V^*} < \|F\|_{W^*},$$

gilt $0 < \theta < 1$. Folglich erfüllen $\theta$ und die Folge $(x_n^*)$ *(*b) und der Beweis für *(a)⇒(b)* ist beendet.

Dass *(b)⇒(c)* gilt, haben wir im Wesentlichen schon im vorigen Lemma bewiesen. Es ist nur noch zu bemerken, dass aus $\lim_n x_n^* x = 0$ für alle $x \in A$ und $y_n^* \in \operatorname{co}(\{x_j^* : j \geq n\})$ folgt, dass $\lim_n y_n^* x = 0$, $x \in A$.

Angenommen, *(c)* gilt. Wähle eine Folge $(\beta_n)$ von positiven Zahlen mit Summe 1. Weiter seien $\alpha$ und $(y_n^*)$ wie in *(c)*. Setze $z^* = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j y_j^*$. Wähle ein $x_0 \in A$ und halte dieses fest. Da $\lim_n y_n^* x_0 = 0$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $|y_j^* x_0| < \alpha\theta$ für alle $j > n$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
|z^*x_0| &= \left|\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j y_j^* x_0\right| \\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j^* x_0\right| + \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j |y_j^* x_0| \\
&< \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j^* x_0\right| : x \in A\right\} + \alpha\theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \\
&< \alpha\left(1 - \theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j\right) + \alpha\theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \\
&= \alpha \\
&= \sup\{|z^*x| : x \in A\},
\end{aligned}
$$

also wird $\sup\{|z^*x| : x \in A\}$ nicht angenommen.

Schlussendlich, nimmt jedes für $x^* \in X^*$ die Abbildung $x \mapsto |x^*x|$ ihr Supremum auf einer schwach kompakten Menge an. Folglich *(d)⇒(a)*.

□

Sei $X$ ein *reeler* Banachraum und $(x_n)$ eine beschränkte Folge in $X$. Wir führen folgende Notation ein:

$$L(x_n^*) = \{x^* \in X^* : x^*x \leq \limsup_n x_n^* x \text{ für alle } x \in X\}$$

und

$$V(x_n^*) = \{\text{alle Folgen } (y_n^*) \text{ in } X^* \text{ mit } y_n^* \in \mathrm{co}(\{x_j^* : j \geq n\})\}.$$

Offensichtlich gilt $(x_n^*) \in V(x_n^*)$; außerdem haben wir $V(y_n^*) \subset V(x_n^*)$ und $\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subset \{y^* \in X^* : \|y^*\| \leq \sup_n \|x_n^*\|\}$ für $(y_n^*) \in V(x_n^*)$. Weiters ist $L(y_n^*) \subset L(x_n^*)$ für $(y_n^*) \in V(x_n^*)$, denn für $x^* \in L(y_n^*)$ gilt

$$x^*x \leq \limsup_n y_n^* x = \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geq n} y_k^* x$$

und da $y_n^* \in \mathrm{co}(\{x_j^* : j \geq n\})$, $n \in \mathbb{N}$, ist, folgt

$$y_k^* x \leq \sup_{j \geq n} x_j^* x \quad \text{für} \quad k \geq n$$

und somit insgesamt $x^*x \leq \limsup_n x_n^* x$ für alle $x \in X$. Für alle $x^* \in L(x_n^*)$ gilt $\|x^*\| \leq \sup\{\|x_n^*\| : n \in \mathbb{N}\}$: Aus

$$x^*x \leq \limsup_n x_n^* x \leq \sup_n \|x_n^*\|\|x\|$$

erkennt man durch Ersetzen von $x$ durch $-x$, dass sogar $|x_n^* x| \leq \sup\{\|x_n^*\| : n \in \mathbb{N}\}\|x\|$ für $x \in X$ gilt. Schließlich gilt auch $\liminf_n x_n^* x \leq x^*x$ für $x^* \in L(x_n^*)$ und $x \in X$, da $\liminf_n x_n^* x = -\limsup x_n^*(-x)$.

All diese Eigenschaften von $L(x_n^*)$ und $V(x_n^*)$ werden wir im Folgenden, ohne immer explizit darauf hinzuweisen, verwenden.

**4.4 Lemma.** *Sei $X$ ein reeler normierter Raum und $(x_n^*)$ eine beschränkte Folge in $X^*$. Dann ist $L(x_n^*)$ nichtleer.*

*Beweis.* Man wende den Satz von Hahn-Banach (in Version von Satz 4.2.2 in [4]), auf die Sublinearform $p(x) = \limsup_n x_n^* x$, den Unterraum $M = \{0\}$ und das Nullfunktional an. Es folgt die Existenz eines Funktionals $f$ auf $X$ mit

$$f(x) \leq p(x) \leq \sup_n \|x_n^*\| \|x\|$$

und daher ist $f$ sogar beschränkt, $\|f\| \leq \sup_n \|x_n^*\|$, und $f \in L(x_n^*)$. □

**4.5 Lemma.** *Sei $A$ eine nichtleere kreisförmige Teilmenge der abgeschlossenen Einheitskugel eines reelen normierten Raumes $X$. Sei $(\beta_n)$ eine Folge positiver Zahlen mit Summe 1, $0 < \theta < 1$ und $(x_n^*)$ eine Folge in $B_{X^*}$, sodass $\sup\{|(x^* - w^*)x| : x \in A\} \geq \theta$ für alle $x^* \in \mathrm{co}(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$ und $w^* \in L(x_n^*)$. Dann gibt es eine $\alpha$ mit $\theta \leq \alpha \leq 2$ und eine Folge $(y_n^*)$ in $B_{X^*}$, sodass für alle $w^* \in L(x_n^*)$*

*(a)* $\sup\{|\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j (y_j^* - w^*)x| : x \in A\} = \alpha$ *und*

*(b)* $\sup\{|\sum_{j=1}^{n} \beta_j (y_j^* - w^*)x| : x \in A\} < \alpha(1 - \theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j)$ *für* $n = 1, 2, \ldots$.

*gilt.*

*Beweis.* Wir gehen ähnlich vor wie im Beweis von Lemma 4.2. Es sei $|\!|\!| x^* |\!|\!|_A = \sup\{|x^* x| : x \in A\}$ für $x^* \in X^*$ und $(\epsilon_n)$ eine Nullfolgefolge positiver Zahlen , sodass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k \epsilon_k}{\sum_{j=k+1}^{\infty} \beta_j \sum_{j=k}^{\infty} \beta_j} < 1 - \theta.$$

Wir werden nun induktiv eine Folge von Skalaren $(\alpha_n)$ und Folgen $(y_j^*)$;$({}^0x_j^*), ({}^1x_j^*), ({}^2x_j^*), \ldots$; $({}^1z_j^*), ({}^2z_j^*), ({}^3z_j^*), \ldots$ in $X^*$ konstruieren, sodass $({}^0x_j^*) \subset B_{X^*}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$

(1) $y_n^*$ und die Folgen $({}^nz_j^*)$ und $({}^nx_j^*)$ in $B_{X^*}$ liegen,

(2) $({}^nz_j^*) \in V({}^{n-1}x_j^*)$,

(3) $({}^nx_j^*)$ eine Teilfolge von $({}^nz_j^*)$ ist,

(4) $y_n^* \in \mathrm{co}(\{{}^{n-1}x_j^* : j \geq n\})$,

(5) $\theta \leq \alpha_n \leq 2$ und

(6) $\alpha_{n-1} \leq \alpha_n$ für $n \geq 2$.

Wir beginnen die Induktion, indem wir $({}^0x_j^*) = (x_j^*)$ setzen. Angenommen $m \in \mathbb{N}$ und wir hätten für $m \geq 2$ bereits $\alpha_n, y_n^*, ({}^nz_j^*)$ und $({}^nx_j^*)$ für $n = 1, \ldots, m-1$ gefunden, sodass (1)-(6) erfüllt sind. Im Folgenden wird $\sum_{k=1}^{N}$ für $N \leq 0$ stets gleich 0 gesetzt.

**Schritt 1:** Es gilt $(v_j^*) \subset B_{X^*}$ für jede Folge $(v_j^*) \in V({}^{m-1}x_j^*)$.
Dies folgt sofort aus der Definition von $({}^0x_j^*)$ im Falle $m = 1$ oder aus der Induktionsannahme für $m \geq 2$.

**Schritt 2:** Für $y^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-1}x_j^* : j \geq m\})$ und $(v_j^*) \in V({}^{m-1}x_j^*)$ ist

$$S_m(y^*, (v_j^*)) = \left\{ \left|\!\left|\!\left| \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j y_j^* + \left( \sum_{j=m}^{\infty} \beta_j \right) y^* - w^* \right|\!\right|\!\right|_A : w^* \in L(v_j^*) \right\}$$

eine nichtleere Teilmenge von $[0,2]$ und daher ist

$$\alpha_m = \inf\{\sup S_m(y^*, (v_j^*)) : y^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-1}x_j^* : j \geq m\}), (v_j^*) \in V({}^{m-1}x_j^*)\}$$

ein Element von [0,2].
Zum Beweis beachte lediglich, dass $\emptyset \neq L(v_j^*) \subset B_{X^*}$ und nach Induktionsannahme $y^*, y_1^*, \ldots, y_{m-1}^* \in B_{X^*}$ und folglich

$$0 \leq \left| \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j y_j^* + \left(\sum_{j=m}^{\infty} \beta_j\right) y^* - w^* \right|_A \leq \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j \|y_j^*\| + \left(\sum_{j=m}^{\infty} \beta_j\right) \|y^*\| + \|w^*\| \leq 2$$

**Schritt 3:** Für $m \geq 2$ gilt $V({}^{m-2}x_j^*) \supset V({}^{m-1}x_j^*)$.
Um das einzusehen, beachte, dass $({}^{m-1}x_j^*)$ eine Teilfolge von $({}^{m-1}z_j^*) \in V({}^{m-2}x_j^*)$ ist, und daher ${}^{m-1}x_j^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-2}x_k^* : k \geq j\})$.

**Schritt 4:** Für $m \geq 2$ und $x^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-1}x_j^* : j \geq m\})$ gilt

$$\frac{\beta_{m-1}}{\sum_{j=m-1}^{\infty} \beta_j} y_{m-1}^* + \frac{\sum_{j=m}^{\infty} \beta_j}{\sum_{j=m-1}^{\infty} \beta_j} x^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-2}x_j^* : j \geq m-1\}).$$

Es ist nur zu zeigen, dass $x^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-2}x_j^* : j \geq m-1\})$. Nach Schritt 3 ist $({}^{m-1}x_j^*) \in V({}^{m-2}x_j^*)$ und somit $\mathrm{co}(\{{}^{m-1}x_j^* : j \geq m\}) \subset \mathrm{co}(\{{}^{m-2}x_j^* : j \geq m\})$.

**Schritt 5:** Es gilt $\alpha_{m-1} \leq \alpha_m$ für $m \geq 2$.
Aus den Schritten 3 und 4 und aus der trivialen Tatsache, dass Infimum einer Menge kleiner gleich dem Infimum einer nichtleeren Teilmenge ist folgt die Behauptung, da

$$\left\{\sup S_{m-1}(y^*, (v_j^*)) : y^*, (v_j^*) \in V(x^{m-1}x_j^*)\right\} \tag{6}$$

mit $y^*$ von der Bauart

$$y^* = \frac{\beta_{m-1}}{\sum_{j=m-1}^{\infty} \beta_j} y_{m-1}^* + \frac{\sum_{j=m}^{\infty} \beta_j}{\sum_{j=m-1}^{\infty} \beta_j} x^*, x^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-1}x_j^* : j \geq m\})$$

eine Teilmenge von

$$\{\sup S_{m-1}(y^*, (v_j^*)) : y^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-2}x_j^* : j \geq m-1\}), (v_j^*) \in V(x^{m-2}x_j^*)\} \tag{7}$$

ist und gleichzeitig das Infimum über die Menge in (6) bzw. (7) gleich $\alpha_m$ bzw. $\alpha_{m-1}$ ist.

**Schritt 6:** $\theta \leq \alpha_m \leq 2$.
Nach Schritt 2 und 5 reicht es aus $\alpha_1 \geq \theta$ zu zeigen. Wegen

$$\alpha_1 = \inf\left\{\sup\{\left| y^* - w^* \right|_A : w^* \in L(v_j^*)\} : y^* \in \mathrm{co}(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}), (v_j^*) \in V(x_n^*)\right\}$$

müssen wir nur $\left| y^* - w^* \right|_A \geq \theta$ für $w^* \in L(v_j^*)$ und $y^* \in \mathrm{co}(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$ zeigen; dies folgt aber wegen $L(v_j^*) \subset L(x_n^*)$ für $(v_j^*) \in V(x_n^*)$ aus der Voraussetzung des Lemmas.

Nach der Definition von $\alpha_m$, wähle $y_m^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-1}x_j^* : j \geq m\})$ und $({}^{m}z_j^*) \in V({}^{m-1}x_j^*)$, sodass

$$\alpha_m \leq \sup\left\{ \left| \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j y_j^* + \left(\sum_{j=m}^{\infty} \beta_j\right) y_m^* - w^* \right|_A : w^* \in L({}^{m}z_j^*) \right\} < \alpha_m(1+\epsilon_m). \tag{8}$$

Wähle anschließend $w_m^* \in L({}^m z_j^*)$, sodass

$$\alpha_m(1-\epsilon_m) < \left| \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j y_j^* + \left( \sum_{j=m}^{\infty} \beta_j \right) y_m^* - w_m^* \right|_A .$$

Aus der Kreisförmigkeit von $A$ folgt die Existenz eines $x_m \in A$, sodass

$$\alpha_m(1-\epsilon_m) < \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j y_j^* x_m + \left( \sum_{j=m}^{\infty} \beta_j \right) y_m^* x_m - w_m^* x_m \tag{9}$$

Wähle nun $({}^m x_j^*)$ als eine Teilfolge von $({}^m z_j^*)$, die $\lim_j {}^m x_j^* x_m = \liminf_j {}^m z_j^* x_m$ erfüllt. Damit die die induktive Konstruktion der Folgen $(\alpha_j)$; $(y_j^*)$;$({}^0 x_j^*), ({}^1 x_j^*), ({}^2 x_j^*), \ldots$; $({}^1 z_j^*), ({}^2 z_j^*), ({}^3 z_j^*), \ldots$ beendet.

**Schritt 7:** $L(y_j^*) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} L({}^n x_j^*) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} L({}^n z_j^*)$.
Da für $n \geq 1$ $({}^n x_j^*)$ eine Teilfolge von $({}^n z_j^*)$ ist, folgt $({}^n x_j^*) \in V({}^n z_j^*)$. Daher ist $L({}^n x_j^*) \subset L({}^n z_j^*)$ und es folgt die zweite Inklusion. Es gilt

$$\begin{aligned} y_j^* &\in \operatorname{co}(\{{}^{j-1} x_k^* : k \geq j\}) \subset \operatorname{co}(\{{}^{j-1} z_k^* : k \geq j\}) \\ &\subset \operatorname{co}(\{{}^{j-2} x_k^* : k \geq j\}) \subset \operatorname{co}(\{{}^{j-2} z_k^* : k \geq j\}) \\ &\subset \ldots \\ &\subset \operatorname{co}(\{{}^{0} x_k^* : k \geq j\}). \end{aligned}$$

Mit anderen Worten ist $y_j^* \in \operatorname{co}(\{{}^n x_k^* : k \geq j\})$ für $j > n$ und somit $\limsup_j y_j^* x \leq \limsup_j {}^n x_j^* x$ für alle $x \in X$, also $L(y_j^*) \subset L({}^n x_j^*)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

**Schritt 8:** Sei $w^* \in L(y_j^*)$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt die Gleichung (9) auch wenn man $w_m^*$ durch $w^*$ ersetzt.
Für den Beweis dieser Aussage beachte, dass nach Schritt 7 $w^* \in L({}^m x_j^*) \subset L({}^m z_j^*)$ und nach Wahl von $({}^m x_j^*)$ gilt

$$w^* x_m \leq \lim_j {}^m x_j^* x_m = \liminf_j {}^m z_j^* x_m \leq w_m^* x_m.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Halte ein $w^* \in L(y_j^*)$ fest. Aus Gleichung (8) und Schritten 7 und 8 folgt, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha_n(1-\epsilon_n) < \left| \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j y_j^* + \left( \sum_{j=m}^{\infty} \beta_j \right) y_n^* - w^* \right|_A < \alpha_n(1+\epsilon_n) \tag{10}$$

Aus den Schritten 5 und 6 folgt, dass $\lim_n \alpha_n$ existiert und in $[\theta, 2]$ liegt. Wir nennen diesen Grenzwert $\alpha$. (10) impliziert nun

$$\alpha = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j (y_j^* - w^*) \right|_A .$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \beta_j (y_j^* - w^*) \right|_A < \alpha \left( 1 - \theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \right)$$

für $n \in \mathbb{N}$. Der Beweis hierfür ist identisch mit Schritt 6 von Lemma 4.2, bis auf das Ersetzen von $y_k^*$ durch $y_k^* - w^*$. $\square$

**4.6 Satz.** *Sei $A$ eine nichtleere, kreisförmige, schwach abgeschlossene Teilmenge der abgeschlossenen Einheitskugel eines reelen Banachraumes $X$. Dann sind äquivalent:*

*(a) $A$ ist nicht schwach kompakt.*

*(b) Es gibt ein $\theta$ mit $0 < \theta < 1$, eine Teilmenge $A_0$ von $A$ und eine Folge $(x_n^*)$ in $B_{X^*}$, sodass $\sup\{|(x^* - w^*)x| : x \in A\} \geq \theta$ für alle $x^* \in \mathrm{co}(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$ und $w^* \in A_0^\perp$, und $\lim_n x_n^* x = 0$ für alle $x \in A$.*

*(c) Es gibt eine $\theta$ mit $0 < \theta < 1$, sodass es für jede Folge $(\beta_n)$ von positiven Zahlen mit Summe 1, ein $\alpha$ mit $\theta \leq \alpha \leq 2$ und eine Folge $(y_n^*)$ in $B_{X^*}$ gibt, sodass für alle $w^* \in L(y_n^*)$*

*(1) $\sup\{|\sum_{j=1}^\infty \beta_j (y_j^* - w^*)x| : x \in A\} = \alpha$ und*

*(2) $\sup\{|\sum_{j=1}^n \beta_j (y_j^* - w^*)x| : x \in A\} < \alpha(1 - \theta \sum_{j=n+1}^\infty \beta_j)$ für $n = 1, 2, \ldots$.*

*gilt.*

*(d) Es gibt ein $z^*$ in $X^*$, sodass $\sup\{|z^* x| : x \in A\}$ nicht angenommen wird.*

*Beweis.* Sei $A$ nicht schwach kompakt. Nach Korollar 2.7 gibt es einen abgeschlossenen separablen Unterraum $Y$ von $X$, sodass $A \cap Y$ nicht schwach kompakt ist. Satz 3.3 angewandt auf $A \cap Y$ liefert ein $\theta$ mit $0 < \theta < 1$ und eine Folge $(x_n^*)$ in $B_{X^*}$, sodass $\lim_n x_n^* x = 0$ für alle $x \in A \cap Y$ und $\sup\{|x^* x| : x \in A \cap Y\} \geq \theta$ für alle $x^* \in \mathrm{co}(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$. Setze $A_0 = A \cap Y$. Für $x^* \in \mathrm{co}(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$ und $w^* \in A_0^\perp$ gilt dann

$$\begin{aligned}\sup\{|(x^* - w^*)x| : x \in A\} &\geq \sup\{|(x^* - w^*)x| : x \in A_0\} \\ &= \sup\{|x^* x| : x \in A_0\} \geq \theta.\end{aligned}$$

Dies beweist *(a)⇒(b)*.

Es gelte *(b)*. Da $\liminf_n x_n^* x \leq x^* x \leq \limsup_n x_n^* x$ für alle $x^* \in L(x_n^*)$ und $x \in X$, folgt $x^* x = 0$ für alle $x^* \in L(x_n^*)$ und $x \in A_0$, also $L(x_n^*) \subset A_0^\perp$. Damit sind die Voraussetzungen des vorigen Lemmas erfüllt und es folgt *(c)*.

Angenommen *(c)* gilt. Wähle $\Delta$ so, dass $0 < \Delta < \theta^2/2$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$\beta_n = \frac{2 - \Delta}{\Delta} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^n$$

Dann ist $(\beta_n)$ eine Folge von positiven Zahlen mit Summe 1. Seien $\alpha$ und $(y_n^*)$ so wie in *(c)* gefordert. Setze $z^* = \sum_{j=1}^\infty \beta_j (y_j^* - w^*)$ mit einem $w^* \in L(y_n^*)$. Wir wollen zeigen, dass $\sup\{|z^* x| : x \in A\}$ nicht angenommen wird. Halte dazu ein $x_0 \in A$ fest. Da $\liminf_j y_j^* x_0 \leq w^* x_0$ (siehe Diskussion der Eigenschaften von $L(x_n^*)$ und $V(x_n^*)$ vor Lemma 4.4) und $\theta \leq \alpha$, gibt es ein $n$, sodass

$$(y_{n+1}^* - w^*)x_0 < \theta^2 - 2\Delta \leq \alpha\theta - 2\Delta.$$

Wegen $w^* \in L(y_n^*)$ gilt $\|w^*\| \leq 1$. Folglich

$$
\begin{aligned}
z^*x_0 &= \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j (y_j^* - w^*)x_0 \\
&< \sum_{j=1}^{n} \beta_j (y_j^* - w^*)x_0 + (\alpha\theta - 2\Delta)\beta_{n+1} + \sum_{j=n+2}^{\infty} \beta_j (y_j^* - w^*)x_0 \\
&\le \sup\left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} \beta_j (y_j^* - w^*)x \right| : x \in A \right\} + (\alpha\theta - 2\Delta)\beta_{n+1} + 2 \sum_{j=n+2}^{\infty} \beta_j \\
&< \alpha \left( 1 - \theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \right) + (\alpha\theta - 2\Delta)\beta_{n+1} + 2 \sum_{j=n+2}^{\infty} \beta_j
\end{aligned}
$$

Da $\sum_{j=n+2}^{\infty} \beta_j = \frac{1}{2}\Delta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j < \Delta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j$ nach Definition von $\beta_n$ gilt, folgt

$$
\begin{aligned}
z^*x_0 &< \alpha - (\alpha\theta - 2\Delta) \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j + (\alpha\theta - 2\Delta)\beta_{n+2} \\
&= \alpha - (\alpha\theta - 2\Delta) \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \\
&< \alpha \\
&= \sup\left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} \beta_j (y_j^* - w^*)x \right| : x \in A \right\} \\
&= \sup\{|z^*x| : x \in A\}
\end{aligned}
$$

Weil $A$ kreisförmig ist, enthält $A$ mit $x_0$ auch $-x_0$. Es folgt $|z^*x_0| < \sup\{|z^*x| : x \in A\}$ und somit *(c)*$\Rightarrow$*(d)*. Dass *(d)* schließlich *(a)* impliziert, folgt aus der schwachen Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto |z^*x|$ .

□

**4.7 Satz** (Satz von James)**.** *Sei $A$ eine nichtleere schwach abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes $X$. Dann sind äquivalent:*

*(a)* *$A$ ist schwach kompakt.*

*(b)* *Für jedes beschränkte lineare Funktional $x^*$, wird das Supremum von $|x^*|$ auf $A$ angenommen.*

*(c)* *Für jedes beschränkte $\mathbb{R}$-lineare Funktional $u^*$, wird das Supremum von $|u^*|$ auf $A$ angenommen.*

*(d)* *Für jedes beschränkte $\mathbb{R}$-lineare Funktional $u^*$, wird das Supremum von $u^*$ auf $A$ angenommen.*

*Beweis.* Um zu beweisen, dass *(a)* sowohl *(b)*, *(c)* also auch *(d)* impliziert, ist nur die schwache Stetigkeit der unter *(b)*, *(c)* und *(d)* angegebenen Funktionen zu beweisen. Für *(b)* ist das klar, für *(c)* und *(d)* folgt das daraus, dass jedes $\mathbb{R}$-lineare Funktional der Realteil eines $\mathbb{C}$-lineare Funktional ist (siehe [4], Lemma 4.2.1).

Es bezeichne $X_r$ den Banachraum, der aus $X$ entsteht, wenn man die Skalarmultiplikation auf reele Skalare einschränkt. Für das weitere ist es wichtig, dass die schwachen Topologien von $X_r$ und $X$ übereinstimmen, in Zeichen $\sigma(X, X^*) = \sigma(X_r, X_r^*)$: Da jedes $\mathbb{R}$-lineare Funktional $u^*$ der Realteil eines $\mathbb{C}$-lineare Funktional ist, folgt die $\sigma(X, X^*)$-Stetigkeit von $u^*$, also $\sigma(X_r, X_r^*) \subset \sigma(X, X^*)$. Andererseits kann man jedes $\mathbb{C}$-lineare Funktional $x^*$ als $x^*(x) = u^*(x) - iu^*(ix)$ mit einem $\mathbb{R}$-lineare Funktional $u^*$ schreiben und daher ist jedes $\mathbb{C}$-lineare Funktional $\sigma(X_r, X_r^*)$-stetig.

Wir dürfen für den Rest des Beweises oBdA annehmen, dass $A \subset B_X$: *(b)* impliziert, dass für jedes $x^* \in X^*$ die Menge $x^*(A)$ beschränkt ist, und daher $A$ schwach beschränkt ist, was äquivalent zur Normbeschränktheit von $A$ ist (siehe [2], Theorem 3.18). Da das Supremum nur über lineare Funktionale genommen wird, können wir oBdA gleich $A \subset B_X$ annehmen. Für *(c)* und *(d)* schließt man analog.

Angenommen *(b)* gilt. Es sei

$$B = \bigcap_{x^* \in X^*} \{x \in X : |x^*x| \leq \sup\{|x^*y| : y \in A\}\}.$$

Dann ist $B$ eine kreisformige, schwach abgeschlossene Menge, die $A$ umfasst, und $\sup\{|x^*y| : y \in B\}$ wird auf $B$ für alle $x^* \in X^*$ angenommen. Es gilt auch $B \subset B_X$, da $|x^*x| \leq \sup\{|x^*y| : y \in A\} \leq \|x^*\|$ für alle $x^* \in X^*$ und $x \in B$ gilt. Weil $B$ kreisförmig ist gilt

$$\sup\{|\mathrm{Re}\ x^*x| : x \in B\} = \sup\{|x^*x| : x \in B\}$$

für alle $x^* \in X^*$ und es wird $\sup\{|u^*x| : x \in B\}$ für alle $u^* \in X_r^*$ angenommen. Aus dem vorigen Satz folgt nun, egal ob $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, dass $B$ schwach kompakt ist.

Angenommen *(c)* gilt. Da schon *(b)⇒(a)* bewiesen wurde und *(b)* den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ einschließt, folgt, dass $A$ eine schwach kompakte Teilmenge von $X_r$ ist, also auch von $X$.

Schließlich sei *(c)* vorausgesetzt. Für ein beschränktes $\mathbb{R}$-lineare Funktional $u^*$ gilt

$$\sup\{|u^*x| : x \in A\} = \max\{\sup\{u^*x : x \in A\}, \sup\{-u^*x : x \in A\}\},$$

woraus folgt, dass $\sup\{|u^*x| : x \in A\}$ angenommen wird. Das zeigt *(d)⇒(c)* und beendet den Beweis. □

**4.8 Bemerkung** ([1], Exercise 2.100)**.** Das schwach* Analogon der Aussage des Satzes von James eine triviale Konsequenz des Satzes von Banach-Steinhaus und des Satzes von Banach-Alaoglu:

> *Es sei $A$ eine schwach* abgeschlossenen Teilmenge des Dualraumes eines Banachraumes $X$. $A$ genau dann schwach* kompakt, wenn* $\sup\{|x^*x| : x^* \in A\}$ *für alle $x \in X$ angenommen wird.*

Nach Voraussetzung ist insbesondere $\sup\{|x^*x| : x^* \in A\} < \infty$ für alle $x \in X$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus ist $A$ beschränkt, und somit schwach* kompakt.

Als ein einfaches Korollar aus dem Satz von James ergibt sich nun ein weiterer Satz von M. G. Krein und V. L. Šmulian.

**4.9 Satz** ([1], Exercise 2.106)**.** *Sei $A$ eine schwach kompakte Teilmenge eines Banachraumes $X$. Dann ist auch $\overline{\mathrm{co}}A$ schwach kompakt.*

*Beweis.* Da $\overline{\text{co}}A$ schwach abgeschlossen ist, sind die Voraussetzungen des Satzes von James erfüllt und wir müssen nur nachweisen, dass $\sup\{|x^*x| : x \in \overline{\text{co}}A\}$ für alle $x^* \in X^*$ angenommen wird. Sei $x^* \in X^*$. Da jedes $z \in \text{co}A$ eine endliche Konvexkombination von Elementen aus $A$ ist, folgt

$$|x^*z| \leq \sup\{|x^*x| : x \in A\} \quad \text{für alle} \quad z \in \text{co}A$$

und aus Stetigkeitsgründen somit

$$|x^*z| \leq \sup\{|x^*x| : x \in A\} \quad \text{für alle} \quad z \in \overline{\text{co}}A.$$

Folglich wird $\sup\{|x^*x| : x \in \overline{\text{co}}A\}$ angenommen. □

**4.10 Satz** ([1], Exercise 2.104). *Eine konvexe Teimenge $C$ eines Banachraumes ist genau dann schwach kompakt, wenn $\bigcap_n C_n \neq \emptyset$ für jede Folge $(C_n)$ nichtleerer, konvexer, in $C$ abgeschlossener Teilmengen von $C$ mit $C_n \supset C_{n+1}$ gilt.*

*Beweis.* Sei $C$ schwach kompakt und eine Folge $(C_n)$ nichtleerer, konvexer, in $C$ abgeschlossener Teilmengen von $C$ mit $C_n \supset C_{n+1}$ gegeben. Da $C$ konvex ist, folgt, dass $C$ abgeschlossen ist. Daher sind alle $C_n$ abgschlossen und da sie konvex sind auch schwach abgeschlossen. Da die $C_n$ die endliche Durchschnittseigenschaft haben, folgt, dass $\bigcap_n C_n \neq \emptyset$.

Habe $C$ umgekehrt die Eigenschaft, dass $\bigcap_n C_n \neq \emptyset$ für jede Folge $(C_n)$ nichtleerer, konvexer, in $C$ abgeschlossener Teilmengen von $C$ mit $C_n \supset C_{n+1}$ gilt. Falls ein $x_0 \in \overline{C} \setminus C$ existiert, betrachte die Mengenfolge $C_n = C \cap \{x \in X : \|x_0 - x\| \leq \frac{1}{n}\}$. Für diese gilt $\bigcap_n C_n = \emptyset$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $C$ abgeschlossen. Sei $u^*$ ein beschränktes $\mathbb{R}$-lineares Funktional. Es gilt sicher $\sup\{u^*x : x \in C\} < \infty$, da sonst $\bigcap_n \{x \in C : u^*x \geq n\} \neq \emptyset$, was unmöglich ist. Für

$$C_n = \left\{x \in C : u^*x \geq \sup\{u^*x : x \in C\} - \frac{1}{n}\right\}$$

gilt nach Voraussetzung $\bigcap_n C_n \neq \emptyset$ und daher gibt es ein $x \in C$ mit

$$u^*x \geq \sup\{u^*x : x \in C\} - \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Folglich wird $\sup\{u^*x : x \in C\}$ angenommen und nach dem Satz von James ist $C$ schwach kompakt.

□

**4.11 Satz** ([1], Exercise 2.105). *Sei $C$ eine abgeschlossene, konvexe, beschränkte, nicht schwach kompakte Teilmenge eines Banachraumes $X$. Dann gibt es eine monoton fallende Folge $(C_n)$ nichtleerer, abgeschlossener konvexer Teilmengen von $C$, sodass für jedes $x \in C$ und jedes $0 \leq t < 1$, die Menge $x + t(-x + C)$ nur endliche viele $C_n$ schneidet.*

*Beweis.* Nach dem Satz von James existiert ein beschränktes $\mathbb{R}$-lineares Funktional $u^*$, sodass $\sup\{u^*x : x \in C\}$ nicht angenommen wird. Da $u^*$ beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet, gilt $\sup\{u^*x : x \in C\} < \infty$. Setze

$$C_n = \left\{x \in C : u^*x \geq \sup\{u^*x : x \in C\} - \frac{1}{n}\right\}.$$

Die $C_n$ bilden eine fallenden Folge nichtleerer, abgeschlossener, konvexer Teilmengen von $C$. Sei $x \in C$ und $0 \leq t < 1$. Dann gilt für $z = (1-t)x + tc$, $c \in C$

$$u^*z = (1-t)u^*x + tu^*c \leq (1-t)u^*x + t\sup\{u^*x : x \in C\} < \sup\{u^*x : x \in C\}$$

und daher

$$\sup\{u^*z : z \in x + t(-x + C)\} < \sup\{u^*x : x \in C\}.$$

Folglich kann $x + t(-x + C)$ nur endliche viele $C_n$ schneiden.

□

## 5 Reflexivität

Wir erinnern daran, dass ein normierter Raum $X$ reflexiv heißt, wenn die kanonische Einbettung $\iota : X \to X^{**}$ surjektiv ist. In diesem Abschnitt wollen wir einige interessante Charakterisierungen dieses Begriffs angeben, die nun leicht aus dem weiter oben Besprochenem folgen.

Grundlegend ist folgender

**5.1 Satz.** *Sei $X$ ein Banachraum. Dann sind äquivalent:*

*(a) $X$ ist reflexiv.*

*(b) $X^*$ ist reflexiv.*

*(c) $B_X$ ist schwach kompakt.*

*(d) Jede beschränkte beschränkte Folge in $X$ hat eine schwach konvergente Teilfolge.*

*(e) Jeder abgeschlossenen Unterraum von $X$ ist reflexiv.*

*(f) Jeder separable abgeschlossene Unterraum von $X$ ist reflexiv.*

*(g) Für jeden abgeschlossenen Unterraum $Y$ von $X$ ist Quotientenraum $X/Y$ ist reflexiv.*

*(h) $X$ ist isomorph zu einem reflexiven Raum.*

*Beweis. (a)⇒(c).* Da $\iota$ ein $\sigma(X, X^*)$-$\sigma(X^{**}, X^*)$ Homöomorphismus ist und $B_{X^{**}}$ nach dem Satz von Banach-Alaoglu $\sigma(X^{**}, X^*)$ kompakt ist, folgt dass $B_X$ schwach kompakt ist.

*(c)⇒(a).* Da $\iota : X \to X^{**}$ $\sigma(X, X^*)$-$\sigma(X^{**}, X^*)$ stetig ist, folgt, dass $\iota(B_X)$ $\sigma(X^{**}, X^*)$ kompakt ist. Mit dem Satz von Goldstine erhalten wir $\iota(B_X) = B_{X^{**}}$ und daher ist $\iota$ surjektiv.

*(c)⇔(d).* Dies folgt aus dem Satz von Eberlein-Šmulian.

*(e)⇒(a).* Offensichtlich.

*(a)⇒(e).* Da jeder abgeschlossene Unterraum $Y$ auch schwach abgeschlossen ist, folgt, dass $B_Y$, $\sigma(X, X^*)$ kompakt ist. Die Spurtopologie der $\sigma(X, X^*)$-Topologie auf $Y$ stimmt aber mit der $\sigma(Y, Y^*)$-Topologie überein (siehe Diskussion vor Korollar 3.7). Aus *(c)⇒(a)* folgt, dass $Y$ reflexiv ist.

*(a)⇔(f).* Das ist genau Korollar 3.7 angewandt auf $B_X$.

*(a)⇒(h).* Betrachte die identische Abbildung auf $X$.

*(h)⇒(a).* Sei $Y$ reflexiv und $\Phi : Y \to X$ ein Isomorphismus. Dann ist die Abbildung $\Phi^* : X^* \to Y^*$, $\Phi^*(x^*) = x^* \circ \Phi$ ebenfalls ein Isomorphismus. Genauso $\Phi^{**} : Y^{**} \to X^{**}$, $\Phi^{**}(y^{**}) = y^{**} \circ \Phi^*$. Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$\iota_X = \Phi^{**} \circ \iota_Y \circ \Phi^{-1}$$

gilt und somit ist $\iota_X$ surjektiv.

*(a)⇒(b).*Wenn $X$ reflexiv ist, dann stimmen die schwache und die schwach* Topologie auf $X^*$ überein. Also ist $B_{X^*}$ schwach kompakt und daher $X^*$ reflexiv.

*(b)⇒(a).* Wenn $X^*$ reflexiv ist, dann ist nach *(a)⇒(b)* auch $X^{**}$ reflexiv. Nach *(a)⇒(e)* ist $\iota(X)$ reflexiv. Nach *(h)⇒(a)* ist daher auch $X$ reflexiv.

*(a)⇒(g).* Nach Satz 4.5.7 in [4] ist $(X/Y)^*$ zu einem abgeschlossenem Unterraum von $X^*$ isomorph. Da mit $X$ auch $X^*$ reflexiv ist, folgt die Behauptung.

*(g)⇒(a).* Wähle $Y = \{0\}$.

□

Das Interessante an den nächsten Sätzen ist, dass sie Charakterisierungen von Reflexivität angeben, die sich überhaupt nicht mehr auf den Dual- oder Bidualraum beziehen.

**5.2 Satz.** *Ein Banachraum $X$ ist genau dann reflexiv, wenn für jede Folge $(C_n)$ von nichtleeren, abgeschlossenen, beschränkten, konvexen Teilmengen von $X$ mit $C_n \supset C_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\bigcap_n C_n \neq \emptyset$ gilt.*

*Beweis.* Nach dem vorigen Satz ist $X$ genau dann reflexiv, wenn $B_X$ schwach kompakt ist. Satz 3.10 liefert nun die Behauptung. □

**5.3 Satz** ([1], Exercise 1.152)**.** *Ein Banachraum $X$ ist genau dann reflexiv, wenn für alle nichtleeren, abgeschlossenen, konvexen Teilmengen $A$ und $B$ von $X$, von denen zumindest eine beschränkt ist, aus $d(A, B) = 0$ folgt, dass $A$ und $B$ nichtleeren Schnitt haben.*

*Beweis.* Sei $X$ reflexiv. Weiter seien $A$ und $B$ nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmengen von $X$, oBdA $A$ beschränkt und $d(A, B) = 0$. Wähle Folgen $(a_n) \subset A$ und $(b_n) \subset B$ mit $\lim_n \|a_n - b_n\| = 0$. Da $A$ beschränkt ist, ist $(a_n)$ beschränkt, und wegen Satz 5.1 besitzt $(a_n)$ eine schwach konvergente Teilfolge. OBdA dürfen wir gleich annehmen, dass

$$a_n \xrightarrow{w} a.$$

Da $A$ konvex und abgeschlossen ist, muss $A$ auch schwach abgeschlossen sein, und somit folgt $a \in A$. Sei $\epsilon > 0$. Wähle $M \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\|a_n - b_n\| < \epsilon \quad \text{für } n \geq M$$

und wähle eine Konvexkombination $\sum_{n=M}^{N} \alpha_n a_n$, sodass (vgl. [2], Theorem 3.13)

$$\left\| a - \sum_{n=M}^{N} \alpha_n a_n \right\| < \epsilon.$$

Wir sehen, dass

$$\left\| a - \sum_{n=M}^{N} \alpha_n b_n \right\| \leq \left\| a - \sum_{n=M}^{N} \alpha_n a_n \right\| + \left\| \sum_{n=M}^{N} \alpha_n (a_n - b_n) \right\| \leq 2\epsilon.$$

Aus der Konvexität und Abgeschlossenheit von $B$ folgt, dass $\sum_{n=M}^{N} \alpha_n b_n \in B$ und $a \in B$. Also gilt $A \cap B \neq \emptyset$.

Sei $X$ nicht reflexiv. Nach dem Satz von James gibt es ein Funktional $x^* \in X^*$, sodass $\sup\{|x^* x| : x \in B_X\} = \|x^*\|$ nicht angenommen wird. Dann ist $A = \{x \in X : x^* x \geq \|x^*\|\}$ eine konvexe, abgeschlossene, nichtleere Teilmenge von $X$ mit $A \cap B_X = \emptyset$. Sei $\epsilon > 0$. Da $B_X$ kreisförmig ist, gibt es $x \in B_X$ mit $x^* x > \|x^*\| - \epsilon$. Daraus folgt, dass

$$\frac{\|x^*\|}{\|x^*\| - \epsilon} x \in A \quad \text{und} \quad \left\| x - \frac{\|x^*\|}{\|x^*\| - \epsilon} x \right\| \leq \frac{\epsilon}{\|x^*\| - \epsilon},$$

also $d(A, B) = 0$.

□

**5.4 Satz** ([1], Exercise 1.153)**.** *Sei $X$ ein Banachraum. Dann sind äquivalent:*

*(a) $X$ ist reflexiv.*

*(b) Jede nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge $C$ von $X$ enthält einen Punkt der dem Ursprung am nähesten ist, d.h. es gibt $x \in C$ mit $\|x\| = d(0, C)$.*

*(c) Für jeden separablen, abgeschlossen Unterraum $Y$ von $X$ und jedes $y^* \in Y^*$ enthält die Menge $\{y \in Y : y^*y = \|y^*\|\}$ einen Punkt, der dem Ursprung am nähesten ist.*

*Beweis. (a)⇒(b).* Wähle eine Folge $(x_n)$ in $C$ mit $\|x_n\| \to d(0, C)$. Da $(x_n)$ beschränkt ist, hat, wegen der vorausgesetzten Reflexivität, $(x_n)$ eine konvergente Teilfolge. OBdA dürfen wir gleich annehmen, dass $x_n \xrightarrow{w} x$, $x \in C$. Sei $\epsilon > 0$. Wähle $M \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\|x_n\| \leq d(0, C) + \epsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq M$$

und wähle eine Konvexkombination $\sum_{n=M}^{N} \lambda_n x_n$, sodass

$$\left\| x - \sum_{n=M}^{N} \lambda_n x_n \right\| < \epsilon.$$

Es folgt

$$\|x\| \leq \left\| x - \sum_{n=M}^{N} \lambda_n x_n \right\| + \left\| \sum_{n=M}^{N} \lambda_n x_n \right\| < d(0, C) + 2\epsilon$$

und wir sehen, dass $\|x\| = d(0, C)$.

*(b)⇒(c).* Das ergibt sich daraus, dass $\{y \in Y : y^*y = \|y^*\|\}$ eine konvexe, abgeschlossene und nichleere Teilmenge von $X$ ist.

*(c)⇒(a).* Sei $Y$ ein abgeschlossener, separabler Unterraum von $X$ und $y^* \in Y^*$. Nach Voraussetzung enthält die Menge $\{y \in Y : y^*y = \|y^*\|\}$ einen Punkt $y_0$, der dem Ursprung am nähesten ist. Angenommen $\|y_0\| > r > 1$. Dann folgt

$$|y^*y| < \|y^*\| \quad \text{für alle } y \in Y \quad \text{mit} \quad \|y\| \leq r$$

und somit

$$|y^*y| < \frac{1}{r}\|y^*\| < \|y^*\| \quad \text{für alle} \quad y \in B_Y,$$

ein Widerspruch. Daher wird $\sup\{|y^*y| : y \in B_Y\}$ für jedes $y^* \in Y^*$ angenommen und aus dem Satz von James folgt, dass $B_Y$ $\sigma(Y, Y^*)$ schwach kompakt ist. Folglich ist jeder separable, abgeschlossene Unterraum von $X$ reflexiv und daher auch $X$. □

# Literatur


[1] R. E. Megginson: *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New York 1998

[2] W. Rudin: *Functional Analysis*, 2. Aufl., Tata MacGraw-Hill Publishing Company Limited, New Dehli 2006

[3] P. Wojtaszczyk: *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge University Press, Cambridge 1991

[4] H. Woracek, M. Kaltenbäck: *Funktionalanalysis 1*, Skriptum, TU Wien 2007.